

А. И. НАДЕЕВ, А. С. ЧУМАКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Томск — 1982

А.И.Надеев, А.С.Чумаков

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Издательство Томского университета

Томск - 1982

519.21 (076.2)
УДК 519.21

Надаев А.И., Чумаков А.С. Сборник задач по теории вероятностей. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982, 7,6 л. — 80 к. 500 экз. 240100000.

Сборник содержит задачи по 10 основным разделам теории вероятностей. В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения и формулы, затем даны примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Предназначается для студентов радиотехнических специальностей вузов.

Рецензент — Н.А. Долинин

Редактор — Ю.П. Акулиничев

Н $\frac{2401000000}{177 (012)-82}$ 105 - 82



Издательство Томского университета, 1982 г.

РАЗДЕЛ I

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СОБЫТИЕМ называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

ВЕРОЯТНОСТЬЮ СОБЫТИЯ называется численная мера степени возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

ПОЛНОЙ ГРУППОЙ СОБЫТИЙ называется совокупность таких событий, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий в данном опыте называются **НЕСОВМЕСТНЫМИ**, если появление одного из них исключает возможность появления других. Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если вероятности их появления равны между собой.

Если все события — исходы опыта образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число исходов в опыте;

m — число исходов, благоприятствующих событию A .

Трудности при использовании этой формулы заключаются в правильном определении числа n всех равновозможных исходов в опыте и m , благоприятствующих событию A исходов в опыте. Во многих случаях для подсчета чисел n и m приходится пользоваться формулами теории соединений.

Сочетаниями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются только самими элементами. Например, сочетаниями из трех элементов a , b и c по два будут ab , ac и bc . Число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Размещениями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются друг от друга как самими элементами, так и порядком элементов. Например, размещениями из 3 элементов a, b и c по два будут ab, ac, ba, bc, ca, cb . Число размещений определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot m!$$

Перестановками из n элементов называются такие их соединения, которые различаются только порядком входящих в них элементов. Например, перестановками из трех элементов a, b и c будут $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Число перестановок определяется по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

ПРИМЕР I

На складе имеется 15 кинескопов, причём 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 5 кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

Решение. Обозначим событие A - из 5 взятых наугад кинескопов 3 кинескопа Львовского завода. Возможные элементарные исходы в данном опыте заключаются в получении со склада 5 кинескопов независимо от того, на каком заводе они изготовлены. Общее число исходов равно числу различных комбинаций по 5 кинескопов в каждой, которые можно образовать из имеющихся на складе 15 кинескопов. Оно равно числу способов, которыми можно взять 5 кинескопов из общего числа 15, т.е. равно числу сочетаний из 15 элементов по 5 - C_{15}^5 . Следовательно, $n = C_{15}^5$.

Из общего числа возможных исходов опыта необходимо выделить благоприятствующие событию A . Исход будет благоприятствовать событию A , когда среди 5 взятых кинескопов 3 изготовлены на Львовском заводе. Появление 3 кинескопов производства Львовского завода среди 5 полученных со склада можно гарантировать, если они взяты из общего числа кинескопов, изготовленных на Львовском заводе, т.е. из 10. Три кинескопа из 10, изготовленных на Львовском заводе, можно взять числом способов, равным числу сочетаний из 10 элементов по 3 - C_{10}^3 . Остальные 2

кинескопов должны выбираться из оставшихся 5 кинескопов, не принадлежащих производству Львовского завода; число различных комбинаций по 2 кинескопа в каждой, которые можно образовать из 5 кинескопов, равно числу сочетаний из 5 элементов по 2 - C_5^2 .

Поскольку каждая комбинация из трех кинескопов производства Львовского завода может появиться в сочетании с любой комбинацией из двух кинескопов, не принадлежащих производству Львовского завода, то общее число исходов опыта, благоприятствующих событию А, будет равно произведению $C_{10}^3 C_5^2$. Следовательно, вероятность интересующего нас события равна

$$P(A) = \frac{C_{10}^3 C_5^2}{C_{15}^5} \approx 0,4.$$

ПРИМЕР 2

Из букв разрезной азбуки составлено слово "треугольник". Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем выбравшие четыре буквы собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него появится слово "руль".

Решение. Обозначим событие А - из букв, составляющих слово "треугольник", набрано слово "руль". Элементарные возможные исходы в данном опыте составляют комбинации из четырех букв. Однако в отличие от предыдущего примера в данном случае важен порядок следования букв в комбинации. Поэтому к числу различных будут относиться комбинации, отличающиеся друг от друга не только набором букв, но и порядком их следования.

Общее число исходов Π подсчитывается следующим образом. Вначале из 11 букв образуем комбинации по 4 буквы независимо от порядка их следования. Количество таких комбинаций равно числу сочетаний из 11 по 4 - C_{11}^4 . Каждой комбинации из 4 букв соответствуют исходы опыта, отличающиеся порядком следования букв в комбинации. Количество их равно числу перестановок из 4 элементов - P_4 . Следовательно, общее число исходов в опыте равно произведению числа комбинаций из 4 букв на число исходов, соответствующих одной комбинации, т.е. числу размещений из 11 элементов по 4 - $n = C_{11}^4 P_4$.

Из всех исходов в опыте лишь один благоприятствует событию А, т.е. $m = 1$. Следовательно, вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{1}{n} = \frac{1}{7920}.$$

ПРИМЕР 3

Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, \dots, N$, k раз вынимается шар и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность.

Решение. Обозначим событие A — номера k вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Элементарные возможные исходы в данном опыте представляют различные наборы номеров k вынутых шаров независимо от порядка их появления. Поскольку после каждого извлечения шар возвращается в урну, то не исключаются исходы, когда один и тот же номер встречается в наборе из k номеров несколько раз.

Номер первого извлеченного шара может быть любым от 1 до N . Номер второго извлеченного шара также может быть любым из интервала $1 + N$. Каждый номер первого извлеченного шара может появиться в сочетании с любым номером второго извлеченного шара. Следовательно, общее число исходов при извлечении двух шаров равно N^2 . Аналогично рассуждая по индукции, находим, что при извлечении k шаров общее число исходов будет $n = N^k$.

К числу благоприятствующих событию A исходов необходимо отнести те, в которых номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Возрастающую последовательность из номеров можно образовать из общего числа N номеров несколькими способами, количество которых равно числу сочетаний C_N^k .

Действительно, по определению, сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые различаются друг от друга только самими элементами, причем в каждой комбинации элементы могут быть расположены в любом желаемом порядке, в том числе образовывать возрастающую последовательность, если элементы пронумерованы. Следовательно, число благоприятствующих событию A исходов равно $m = C_N^k$ и вероятность

$$P(A) = \frac{C_N^k}{N^k}$$

ПРИМЕР 4

Решить предыдущую задачу при условии, что вынутые шары в урну не возвращаются.

Решение. В случае, когда вынутые шары в урну не возвращаются, общее число возможных исходов в опыте должно подсчиты-

ваться иначе. Действительно, номер первого извлеченного шара может быть любым от 1 до N . Номер второго извлеченного шара может быть любым, за исключением того, который появился при первом извлечении. Каждый номер первого извлеченного шара может появиться в сочетании с любым номером второго извлеченного шара. Следовательно, общее число исходов при извлечении двух шаров равно $N(N-1)$. Далее, номер i -го извлеченного шара может быть любым, за исключением тех номеров, которые появились в предыдущих $(i-1)$ извлечениях. Значит, общее число исходов в опыте при извлечении k шаров равно $n = N(N-1) \dots (N-k+1)$.

Благоприятствовать событию A , как и в предыдущей задаче, будут исходы, в которых номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Их число равно $m = C_N^k$. Вероятность события A найдётся

$$P(A) = \frac{C_N^k}{N(N-1) \dots (N-k+1)} = \frac{1}{k!}.$$

По мере развития теории вероятностей была замечена недостаточность "классического" определения вероятности, основанного на рассмотрении конечной группы равновероятных событий. Некоторые задачи требуют видоизменения "классического" определения вероятности для случаев, когда мыслимо бесконечное множество исходов опыта. Ниже приводится пример такого типа задач.

ПРИМЕР 5

Два человека договорились встретиться в условленном месте, причём каждый из них приходит туда независимо от другого в случайный момент времени между 12 и 13 часами, ждёт 1/3 часа и, если второй за это время не появился, уходит. Найти вероятность того, что встреча произойдёт.

Решение. Обозначим событие A — встреча состоялась. Обозначим время прихода первого и второго человека соответственно через X и Y . Тогда событие A эквивалентно тому, что разность между временами прихода первого и второго человека по абсолютной величине не превышает 1/3 часа, т.е. $A = [|X - Y| \leq \frac{1}{3}]$.

Все возможные исходы опыта изображаются точками квадрата, представленного на рис. 1.

Событию A благоприятствуют точки на плоскости, координаты

которых удовлетворяют неравенству $|x - y| \leq \frac{1}{3}$. Область, где выполняется указанное неравенство, на рис. 1 заштрихована. Искомая вероятность будет равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата

$$P(A) = \frac{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1^2} = \frac{5}{9}.$$

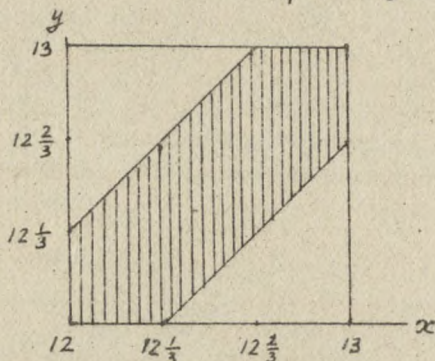


Рис. 1

ЗАДАЧИ

1.2. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

A — появление четного числа очков;

B — появление не менее 5 очков;

C — появление не более 5 очков.

1.2. Из общего числа резисторов, находящихся в данной корзине, 20% имеют номинал 1 кОм, 30% — 2 кОм, 50% — 3 кОм. Какова вероятность, что первый взятый наугад резистор будет иметь номинал 2 кОм?

1.3. Имеются две урны: в первой a белых и b черных шаров, во второй c белых и d черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

1.4. В собираемый радиоблок входят две одинаковые радиолампы. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 ламп, из которых 3 с пониженной крутизной. Определить вероятность нарушения техниче-

оних условий при случайном выборе двух электронных ламп.

I.5. В урне a белых и b черных шаров ($a \geq 2$, $b \geq 3$). Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность того, что 2 из них будут белыми, а 3 черными.

I.6. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии выбирается для контроля n изделий. Найти вероятность того, что из них ровно 5 изделий будут дефектными.

I.7. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются в 2 группы по 10 человек. Найти вероятность того, что: а) двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах; б) четверо наиболее сильных попадут по два в разные группы.

I.8. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Из урны вынимают три шара. Найти вероятность того, что среди них не будет шаров одинакового цвета.

I.9. В мастерской находится $a+b$ блоков от двух различных радиоприёмников, из которых два повреждены. Какова вероятность того, что повреждены блоки разных приёмников.

I.10. В блоке электронной счетной машины, содержащем 24 лампы, отказала одна лампа. Неисправность отскакивается путём поочередной замены ламп исправной. Найти вероятность того, что неисправность окажется устранённой не более чем при первых трех попытках.

I.11. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что оставшийся в урне шар будет белым.

I.12. На вход радиоприёмного устройства поступают кодовые комбинации, состоящие из двух знаков: 1 (посылка) и 0 (пауза). Какова вероятность того, что в кодовой комбинации будет хотя бы один нуль, если появление нуля и единицы равновозможно?

I.13. В лотерее n билетов, из которых m выигрышные. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов?

I.14. Показать, что более вероятно при одновременном бросании четырех костей получить хотя бы одну единицу, чем при 24 бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две единицы.

I.15. Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

I.16. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ... n .

I.17. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово "книга". Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово "книга".

I.18. По линии связи в случайном порядке передаются все 30 знаков алфавита. Определить вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, образующих слово "радио".

I.19. Для беспрепятственного полета над территорией самолёт, приближаясь к ней, посылает по радио парольную кодовую группу, состоящую из нескольких точек и тире. Найти вероятность того, что радист, не знавший парольной группы, угадает её, передав какую-нибудь группу наугад, если известно, что число кодовых элементов в группе (точек и тире) $a = 5$; $b = 7$.

I.20. Две одностипные радиостанции, разнесённые в пространстве относительно друг друга, предварительно настроены на 10 фиксированных частот, одинаковых у обеих станций. Какова вероятность того, что при независимом произвольном выборе рабочих частот обе включенные радиостанции окажутся настроенными на одну и ту же частоту?

I.21. "Секретный" замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными написаниями на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определенное четырех-

значное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

I.22. В урне имеется κ шаров, помеченных номерами $1, 2, \dots, \kappa$. Из урны ℓ раз вынимаются по одному шару ($\ell \leq \kappa$), номер шара записывается и шар кладётся обратно в урну. Найти вероятность того, что все записанные номера будут различны.

I.23. Батарея, состоящая из κ орудий, ведёт огонь по группе, состоящей из ℓ самолётов ($\kappa \leq \ell$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все κ орудий будут стрелять по одной и той же цели.

I.24. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность, что в нём:
а) все цифры различные; б) все цифры нечетные.

I.25. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

I.26. В урне α белых, β чёрных и γ красных шаров. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары и записывают их цвета. Найти вероятность того, что в этом списке белый цвет появится раньше чёрного.

I.27. Батарея из M орудий ведёт огонь по группе, состоящей из N целей ($M \leq N$). Орудия выбирают себе цели последовательно, случайным образом, при условии, что никакие два орудия стрелять по одной цели не могут. Найти вероятность того, что будут обстреляны цели с номерами $1, 2, \dots, M$.

I.28. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырём лункам, каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, а в другой — один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

I.29. В лифт семизэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: А - все пассажиры выйдут на четвертом этаже;

В - все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

С - все пассажиры выйдут на разных этажах.

I.30. Из ящика, содержащего m белых и n чёрных шаров ($m > n$), вынимают наудачу один шар за другим. Чему равна вероятность того, что наступит момент, когда число вынутых черных шаров будет равно числу вынутых белых.

I.31. Каждая из 2 палок разламывается на две части - длинную и короткую. Затем $2 \cdot 2$ полученных обломков объединяются в 2 пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что :

а) все обломки объединены в первоначальном порядке;

б) все длинные части соединены с короткими.

I.32. Два источника синусоидального напряжения одинаковой частоты включаются независимо. Найти вероятность того, что разность фаз колебаний окажется не больше $\pm 30^\circ$.

I.33. Разведка производится пеленгатором с равномерно вращающейся антенной, угол раствора диаграммы направленности которой $\theta = 18^\circ$. Цель, которая с равной вероятностью может появиться на любом направлении, излучает кратковременный (по сравнению со скоростью вращения антенны пеленгатора) сигнал. Найти вероятность того, что цель будет запеленгована.

I.34. В любые моменты времени промежутка T равновозможны поступления в приёмник двух независимых сигналов. Приёмник будет перегружен, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше T . Определить вероятность того, что приёмник будет перегружен.

I.35. Радиопульсы сигнала $s(t)$ и гармонической помехи $n(t)$ одинаковой частоты заполнения ω совпали по времени. Определить вероятность того, что результирующая амплитуда суммы сигнала и помехи окажется меньше произвольно заданного уровня U_0 .

($0 \leq \psi_0 \leq \psi_s$), если сдвиг фаз между высокочастотными колебаниями импульсов является случайным и может с одинаковой вероятностью быть равным любому значению из интервала $0 + 2\pi$.

1.36. Разведывательный радиоприёмник принимает сигналы на данной частоте циклически через каждые 2 мин. в течение 16 с. Определить вероятность обнаружения им сигнала продолжительностью 10 с, если для фиксации сигнала необходимо, чтобы приём длился 1 с.

РАЗДЕЛ II

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СУММОЙ ДВУХ СОБЫТИЙ A и B называется такое событие C , которое происходит тогда и только тогда, когда происходит или событие A , или событие B , или оба вместе.

СУММОЙ НЕСКОЛЬКИХ СОБЫТИЙ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ СОБЫТИЙ A и B называется событие C , состоящее в совместном осуществлении и события A , и события B .

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ СОБЫТИЙ называется событие, состоящее в совместном осуществлении всех этих событий.

Т е о р е м ы о л о ж е н и я вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

где AB — произведение событий A и B .

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Событие $\bar{A}$ называется ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ событию A , если оно происходит тогда, когда событие A не происходит. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Условной вероятностью события A относительно B называется вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B имело место. Эта вероятность обозначается $P(A/B)$. События A и B называется НЕЗАВИСИМЫМ, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или не произошло другое. Для независимых событий

$$P(A/B) = P(A) ; P(B/A) = P(B).$$

Т е о р е м а у м н о ж е н и я вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое имело место

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

или

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Для независимых событий A и B

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность произведения нескольких независимых событий определяется формулой

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1, A_2) \dots P(A_n/A_1, A_2, \dots, A_{n-1}).$$

Для независимых событий написанная формула упрощается и принимает вид $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$.

ПРИМЕР № I

Подсчитано, что в русском тексте буква "а" встречается с вероятностью 0,075, буква "б" — с вероятностью 0,017, буква "в" — с вероятностью 0,046. Какова вероятность того, что наугад взятая из текста буква окажется "б" или "в" ?

Р е ш е н и е : Обозначим через B событие, состоящее в том, что взята наугад буква "б" по условию $P(B) = 0,017$. Событие V — из текста взята буква "в"; вероятность этого события по условию равна $P(V) = 0,046$. Событие H , вероятность которого требуется найти, является суммой введенных выше событий, т.е.

$$H = B + \bar{B},$$

Поскольку из текста выбирается одна буква, то появление одного из событий B или $\bar{B}$ исключает возможность появления другого. В силу несовместности событий B и $\bar{B}$ искомая вероятность определяется по теореме сложения несовместных событий

$$P(H) = P(B) + P(\bar{B}) = 0,063.$$

ПРИМЕР № 2

Велогонщик теряет всякую надежду на успех в гонке, если сделает прокол в шине. Вероятность прокола шины на трассе гонки равна 0,01. Найти вероятность того, что гонщик сойдет с трассы.

Решение. Рассмотрим два события: A_1 — прокол в шине первого колеса, A_2 — прокол в шине второго колеса. Как и в первом примере, интересующее нас событие A может быть представлено в виде суммы $A = A_1 + A_2$. В отличие от предыдущего примера события A_1 и A_2 здесь совместны, поэтому для определения вероятности $P(A)$ требуется применить теорему сложения для совместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1, A_2).$$

Будем считать, что события A_1 и A_2 независимы. Тогда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,0199.$$

ПРИМЕР № 3

Изделие последовательно проходит две стадии испытаний и отбраковывается при обнаружении неисправности на любой из стадий. Какова вероятность того, что изделие выдержит все испытания, если вероятность выдержать испытание на первой стадии равна 0,9, на второй (если пройдена первая) — 0,7.

Решение. Обозначим события: A — изделие прошло первое испытание; B — изделие прошло второе испытание. Используя понятие произведения событий, представим событие C — изделие выдержит оба испытания в виде

$$C = AB.$$

Так как вероятность выдержать второе испытание зависит от того, выдержало ли изделие первое испытание, то событие В является зависимым от события А. По условию задачи заданы следующие вероятности: $P(A) = 0,9$, $P(B/A) = 0,7$. Требуемую вероятность найдём, пользуясь теоремой для вероятности произведения зависимых событий

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,63.$$

ПРИМЕР 4

Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены 3 независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

Решение. Обозначим событие А – в одном из трех независимых измерений ошибка измерений превысит заданную точность. Введём в рассмотрение события A_i , состоящие в том, что ошибка превысила заданную точность в i -м измерении. Событие А произойдёт, если ошибка превысит заданную точность или в первом, или во втором, или в третьем измерении, а в остальных двух измерениях она не превысит заданной точности. Следовательно, событие А можно представить в виде суммы произведений следующих событий:

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

Слагаемые в правой части этого равенства представляют собой несовместные события. На основании теоремы сложения для несовместных событий имеем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Поскольку по условию задачи измерения являются независимыми, то события, входящие в произведения, являются также независимыми. Таким образом

$$P(A) = P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3).$$

Имея в виду, что $P(A_i) = 0,4$ и $P(\bar{A}_i) = 0,6$ ($i=1,2,3$), получим

$$P(A) = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432.$$



ПРИМЕР № 5

Агрегат состоит из двух параллельных цепей (основной и резервной), каждая из которых включает в себя три элемента, включенных последовательно. Надёжность каждого элемента (вероятность безотказной работы) равна 0,98. Найти надёжность всего агрегата.

Решение. Обозначим событие A - безотказная работа агрегата. Это событие имеет место, если работоспособна или основная, или резервная цепь, т.е. событие A можно представить в виде суммы двух более простых событий

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 - безотказная работа основной цепи;

A_2 - безотказная работа резервной цепи.

Событие A_1 не исключает возможность появления события A_2 , следовательно, эти события совместные. Тогда вероятность события A можно найти, используя теорему сложения для совместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Работоспособность каждой цепи не зависит от того, в каком состоянии (работоспособном или неработоспособном) находится другая цепь. В силу независимости событий A_1 и A_2 имеем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Событие A_1 происходит тогда, когда три последовательно соединённых элемента, образующие основную цепь, работают исправно, т.е. событие A_1 можно представить в виде произведения трех элементарных событий

$$A_1 = B_1 B_2 B_3,$$

где B_i ($i = 1, 2, 3$) - безотказная работа i -го элемента основной цепи. События B_1 , B_2 , B_3 являются независимыми, так как отказы отдельных элементов происходят независимо. Поэтому

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3).$$

Поскольку надежность всех элементов основной и резервной цепей одинакова $P(B_i) = 0,98$, то

$$P(A_1) = 0,98^3 = 0,94.$$

Из условия задачи следует, что резервная цепь ничем не отличается от основной, поэтому

$$P(A_2) = 0,94.$$

Следовательно, надёжность всего агрегата равна

$$P(A) = 2 \cdot 0,94 - 0,98^6 \approx 0,996.$$

Приведём другой вариант решения этой задачи, более предпочтительный, когда количество параллельных цепей больше двух. В связи с этим сформулируем события A иначе, а именно безотказная работа хотя бы одной цепи-основной или резервной. Противоположным к нему является событие $\bar{A}$ — отказ всего агрегата, которое происходит тогда, когда откажет и основная, и резервная цепь. Следовательно, событие A можно представить в виде произведения двух более простых событий

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2,$$

где $\bar{A}_1$ — отказ основной цепи;

$\bar{A}_2$ — отказ резервной цепи.

Поскольку отказ одной из цепей не изменяет вероятность отказа другой цепи, то события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ независимы и

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2).$$

В свою очередь событие $\bar{A}_1$ произойдёт, если откажет хотя бы один элемент цепи. Противоположным к событию "хотя бы один элемент цепи откажет" является событие — "ни один из элементов цепи не откажет". Таким образом

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(B_1 B_2 B_3),$$

где B_i ($i = 1, 2, 3$) — безотказная работа i -го элемента. Имея в виду независимость событий B_1, B_2, B_3 , получим

$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0,98^3.$$

Поскольку основная и резервная цепи ничем не отличаются, то

$$P(\bar{A}_2) = 1 - 0,98^3.$$

Значит

$$P(\bar{A}) = (1 - 0,98^3)^2.$$

Тогда вероятность события A определится

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - 0,98^3)^2.$$

ЗАДАЧИ

2.1. В партии из 1000 резисторов в среднем 160 отклоняются от номинала от 0 до 0,5 %, 220 — от 0,5 до 1%, остальные — от 1 до 5%. Найти вероятность того, что выбранный наугад резистор будет отклоняться от номинала не более чем на 1%.

2.2. Два пеленгатора A и B независимо пеленгуют объект, каждый с вероятностью успеха, равной $P=0,3$. Какова вероятность того, что или первый, или второй пеленгатор достигнет успеха?

2.3. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,8, а для второго — 0,9. Какова вероятность попадания в цель?

2.4. Приём радиосигналов производится на два разнесённых приёмника. Вероятность правильного приёма на первый приёмник равна p_1 , на второй — p_2 . События, состоящие в приёме сигналов каждым приёмником, считаются независимыми. Определить вероятность правильного приёма радиосигналов.

2.5. Цех в среднем выпускает 5% бракованных изделий. Из каждой сотни годных изделий в среднем 60 оказываются первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, изготовленное в цехе, окажется первого сорта.

2.6. Радиотехническое устройство содержит n_1 ламп, n_2 транзисторов и n_3 предохранителей. Выход любой детали из строя приводит к неисправности устройства. Вероятность выхода из строя за время T одной из ламп q_1 , транзистора q_2 , предохранителя q_3 . Какова вероятность того, что за время T устройство выйдет из строя?

2.7. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен хотя бы один раз.

2.8. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и от других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Найти вероятности следующих событий: А - объект будет обнаружен хотя бы одной из станций; В - объект будет обнаружен каждой из станций.

2.9. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1 . При повышенном напряжении вероятность аварии прибора потребителя электрического тока равна p_2 . Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

2.10. Два пеленгатора P_1 и P_2 с целью определения места расположения радиостанции осуществляют с различных направлений одновременную разведку сигналов этой станции. Определить вероятность удачного исхода разведки (определение пеленга) одновременно с двух направлений, если вероятность определения пеленга с одного направления равна 0,6.

2.11. При совпадении помехи с импульсным сигналом во времени вероятность подавления его помехой в результате интерференции равна 0,02. Определить вероятность подавления сигнала, если вероятность совпадения его с помехой во времени равна 0,04.

2.12. Команда телеуправления в виде импульсного кода с целью повышения её проходимости в условиях действия помех дублируется таким образом, что вместо одного кода всегда передаются три. Команда считается искаженной, если все три послышки кодов оказываются искаженными помехами. Какова вероятность искажения команды, если вероятность искажения одного кода $\rho = 0,2$ и отдельные послышки кодов искажаются помехами независимо?

2.13. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приёмника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приёмника - 0,2. Определить вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приёмника.

2.14. Устройство, предназначенное для обнаружения сигнала, состоит из вращающейся антенной системы и приёмника с периодически меняющейся настройкой. Сигнал обнаруживается и проходит на выход устройства, когда антенна оказывается направленной на источник сигнала, а приёмник настроен на его частоту. Какова вероятность обнаружения сигнала таким устройством, если вероятность попадания сигнала в антенну равна 0,6, а вероятность принятия сигнала приёмника (совпадение по частоте) при условии, что сигнал прошел антенну, равна 0,4.

2.15. По каналу связи передаются два сигнала: ноль и единица. Из-за наличия помех могут возникнуть искажения: посланный сигнал подвергается искажению с вероятностью 1/100 и принимается правильно с вероятностью 99/100 (независимо от того, были ли переданы предшествующие сигналы с искажением или без искажения). Зная, что послана комбинация 10110, найти вероятность того, что: а) она получена без искажений; б) получена комбинация 11110; в) в полученной комбинации имеется одно искажение.

2.16. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью p . После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго — признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при k -м испытании.

2.17. В мастерской находится $a + b$ блоков от двух различных радиоприёмников, из которых два повреждены. Какова вероятность того, что повреждены блоки разных приёмников?

2.18. Из урны, содержащей n шаров с номерами от 1 до n , последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером 2 будет извлечен при втором извлечении.

2.19. Три самолета последовательно производят торпедометание по кораблю авиационными торпедами, управляемыми по радио. Определить:

а) вероятность поражения корабля хотя бы одним из трех самолетов, если вероятность поражения цели одним отдельно взятым самолетом $p_i = 0,4$;

б) вероятность поражения цели первым, вторым и третьим самолетом при условии, что метание торпеды каждым последующим самолетом осуществляется только при отрицательном результате у предыдущего.

2.20. Каждая буква слова "математика" написана на отдельной карточке, которые тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки. Какова вероятность получить слово "тема"?

2.21. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа N . Отыскание этой лампы производится путём поочередной замены каждой лампы новой. Определить вероятность того, что придется проверять n ламп, если вероятность выхода из строя каждой лампы равна p .

2.22. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

2.23. Уходя из квартиры, N гостей, имеющих одинаковые номера обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятности следующих событий:

A - каждый гость наденет свои калоши;

B - каждый гость наденет калоши, относящиеся к одной паре (может быть, и не свои).

2.24. В урне имеются 12 шаров с номерами от I до 12 . Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при K первых извлечений номера шаров совпадут с номерами извлечений?

2.25. В урне a белых, b чёрных и c красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что, по крайней мере, два из них будут одноцветными.

2.26. Шкала радиоприёмного устройства освещается четырьмя параллельно включенными лампочками. Вероятность того, что каждая из лампочек будет гореть в течение 1500 часов, равна $0,9$. Какова вероятность, что шкала будет освещена в течение этих 1500 часов, если лампочки, которые выйдут из строя за указанный промежуток времени, не будут заменены доброкачественными?

2.27. Радиоблок состоит из трех параллельных цепей, каждая из которых включает в себя четыре последовательно соединённых элемента. Две цепи являются резервными. Надёжность элементов в основной цепи $0,97$, в резервных цепях $0,92$. Определить надёжность радиоблока.

2.28. Система противовоздушной обороны объекта обнаруживает самолёт, вышедший в зону её действия с вероятностью p_1 . После обнаружения самолета посылаются два перехватчика, каждый из которых выводится системой наведения в положение, возможное для атаки с вероятностью p_2 . Если перехватчик выведен в положение атаки, он поражает самолёт противника с вероятностью p_3 . Найти вероятность поражения самолета противника.

2.29. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

2.30. Завод изготавливает определенного типа изделия, каждое изделие имеет дефект с вероятностью p . Изделие осматривается одним контролёром: он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1 , а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролёр может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α . Найти вероятности следующих события :

- A - изделие будет забраковано;
- B - изделие будет забраковано, но ошибочно;
- C - изделие будет пропущено в готовую продукцию с дефектом.

2.31. Два стрелка независимо один от другого делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка p_1 , для второго - p_2 . Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишень которого будет больше пробоин. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.

2.32. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго равна 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

2.33. Студентам, едущим на практику, предоставлено 15 мест в Ленинград, 10 - в Киев, 5 - в Баку. Какова вероятность того, что три определенных студента А, Б, В попадут на практику в один и тот же город.

2.34. Из урни, содержащей n шаров, m раз наугад вынимается по одному шару с возвращением каждый раз шара обратно. Найти вероятность, что в руке перебивают все шары.

2.35. Батареи А и Б поочередно обстреливают друг друга, причем каждая может произвести два выстрела. Первой открывает огонь батарея А, которая поражает противника с вероятностью 0,3. Ответный выстрел батареи Б поражает батарею А с вероятностью 0,4. Определить вероятность поражения каждой батареи.

РАЗДЕЛ III

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Формула полной вероятности применяется в тех случаях, когда по условию задачи существует неопределенность в отношении причин, вызывающих появления события A . Для ликвидации этой неопределенности выдвигаются n исключających друг друга предположений (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$ относительно всех возможных причин, приводящих к следствию (событию) A . Гипотезы H_i формулируются таким образом, чтобы вычисление вероятностей гипотез $P(H_i)$ и условных вероятностей события A при каждой гипотезе $P(A/H_i)$ представляло собой простую задачу.

В таком случае вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

где $P(H_i)$ — вероятность гипотезы H_i ;

$P(A/H_i)$ — условная вероятность события A при этой гипотезе.

ПРИМЕР № I

Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

Р е ш е н и е . Обозначим через A событие, состоящее в том, что радиолампа проработает заданное число часов. Непосредственно вычислить вероятность события A мы не можем, поскольку по условию задачи имеется неопределенность относительно принадлежности радиолампы к одной из трех партий.

Для снятия этой неопределенности выдвигаем три гипотезы :

H_1 — радиолампа принадлежит первой партии;

H_2 — второй партии; H_3 — третьей партии.

Вероятности этих гипотез заданы : $P(H_1) = 0,25$;
 $P(H_2) = 0,5$; $P(H_3) = 0,25$. Условные вероятности события A при каждой гипотезе также известны по условию задачи и равны

$$P(A/H_1) = 0,1; \quad P(A/H_2) = 0,2; \quad P(A/H_3) = 0,4.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,225.$$

ПРИМЕР 2

Имеется три урны. В первой урне 3 белых и 2 черных шара; во второй — 2 белых и 3 черных и в третьей — 4 белых и 2 черных. Из второй урны перекладывают 2 шара, а из третьей урны — 3 шара в первую урну. Шары первой урны перемешивают и берут 2 шара. Найти вероятность того, что шары белые.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что 2 шара, извлеченные из первой урны после перекладывания, оказались белого цвета. Очевидно, вероятность события A будет зависеть от того, какие шары по цвету были переложены в первую урну из второй и третьей урны соответственно. Непосредственному вычислению вероятности события A препятствует незнание состава шаров по цвету, которые переложены в первую урну.

Для ликвидации этой неопределенности выдвигаем следующие 5 гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

H_1 — переложено 5 белых шаров;

H_2 — переложено 4 белых и 1 черный шар;

H_3 — переложено 3 белых и 2 черных шара;

H_4 — переложено 2 белых и 3 черных шара;

H_5 — переложено 1 белый и 4 черных шара.

Условные вероятности события A при этих гипотезах вычисляются по формуле классического определения вероятности.

Пусть верна первая гипотеза H_1 . Тогда в первой урне оказалось 8 белых и 2 черных шара. Общее число исходов в опыте по извлечению двух шаров равно числу способов, сколькими можно взять 2 элемента из 10, т.е. C_{10}^2 , из них благоприятствуют событию

A те, когда два шара берутся из общего количества белых шаров, находившихся в урне; число таких исходов равно C_8^2 .

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A/H_1) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2}.$$

Аналогично находят условные вероятности события A при других гипотезах.

Обратимся теперь к вычислению вероятностей гипотез. Гипотеза H_1 реализуется единственным способом, а именно когда из второй и третьей урны извлекаются два и три белых шара соответственно. Событие H_1 можно представить в виде произведения двух независимых событий

$$H_1 = H_1' \cdot H_1'',$$

где H_1' — извлечение двух белых шаров из второй урны;

H_1'' — извлечение трех белых шаров из третьей урны

$$P(H_1) = P(H_1') \cdot P(H_1'').$$

Вероятности, стоящие в правой части последнего равенства, находятся по формуле классического определения вероятности.

$$P(H_1') = \frac{1}{C_5^2}; \quad P(H_1'') = \frac{C_4^3}{C_6^3},$$

$$P(H_1) = \frac{C_4^3}{C_5^2 \cdot C_6^3}.$$

Гипотеза H_2 реализуется двумя способами, а именно когда из второй урны извлекаются 2 белых шара, а из третьей урны 2 белых и один черный шар или же когда из второй урны извлекаются 1 белый и 1 черный шар, а из третьей урны 3 белых шара. Эти два варианта осуществления события H_2 являются несовместными, поэтому по теореме сложения вероятностей можно записать

$$P(H_2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_5^2 C_6^3} + \frac{C_2^1 C_3^1 C_4^3}{C_5^2 C_6^3}.$$

Гипотеза H_3 имеет три варианта осуществления, а именно когда из второй урны извлекаются 2 белых шара, а из третьей урны — 1 белый и 2 черных шара, или же из второй урны извлекаются 1 белый и 1 черный шар, а из третьей урны — 2 белых и 1 черный шар, или же из второй урны извлекаются 2 черных шара, а из третьей урны — три белых шара. Пользуясь теоремой сложения для несовместных событий и теоремой умножения для независимых событий, вычислим

$$P(H_3) = \frac{1}{C_5^2 C_6^3} [C_4^1 + (C_2^1)^2 C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^3].$$

Аналогично вычислим вероятности остальных гипотез

$$P(H_4) = \frac{1}{c_5^2 c_6^3} [c_2' c_3' c_4' + c_3^2 c_4^2 c_2'] ;$$

$$P(H_5) = \frac{c_3^2 c_4'}{c_5^2 c_6^3} .$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{c_5^2 c_6^3 c_7^2} [c_4^3 c_8^2 + (c_4^2 c_2' + c_2' c_3' c_4^3) c_7^2 + \\ + (c_4' + (c_2')^2 c_3' c_4^2 + c_3^2 c_4^3) c_6^2 + (c_2' c_3' c_4' + c_3^2 c_4^2 c_2') c_5^2 \\ + c_3^2 c_4' c_4^2] = 0,318 .$$

ПРИМЕР 3

По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при одном - 0,4, при втором - 0,5, при третьем - 0,7. Для вывода самолета из строя нужны три попадания. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, при двух - 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет обит.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что самолет обит в результате трех выстрелов. Как следует из условия задачи, вероятность сбить самолет зависит от того, сколько будет попаданий при трех выстрелах.

Чтобы устранить имеющуюся неопределенность относительно количества попаданий в самолет, мы выдвигаем следующие 4 гипотезы:

- H_1 - зарегистрировано три попадания;
- H_2 - зарегистрировано два попадания;
- H_3 - зарегистрировано одно попадание;
- H_4 - не зарегистрировано ни одного попадания.

Если свершилась гипотеза H_1 , то согласно условию задачи

$P(A/H_1) = 1$. Для следующих трех гипотез условная вероятность выполнения события A равна соответственно

$$P(A/H_2) = 0,6 ; P(A/H_3) = 0,2 ; P(A/H_4) = 0 .$$

Вычислим теперь вероятности гипотез. Гипотеза H_1 свершается, если во всех трех выстрелах зарегистрировано попадание. Согласно теореме умножения для независимых событий вероятность гипотезы H_1 равна

$$P(H_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

Гипотеза H_2 имеет место в том случае, когда среди трех выстрелов два попадания будут зарегистрированы или в первом и втором выстрелах, или в первом и третьем выстрелах, или во втором и третьем выстрелах. Согласно теореме сложения для несовместных событий и теореме умножения для независимых событий будем иметь

$$P(H_2) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41,$$

Аналогично рассуждая, находим вероятность третьей гипотезы

$$P(H_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36.$$

Вычисление вероятности четвертой гипотезы $P(H_4)$ не является обязательным, поскольку при этой гипотезе условная вероятность события A равна нулю.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = 1 \cdot 0,14 + 0,6 \cdot 0,41 + 0,2 \cdot 0,36 = 0,458.$$

ЗАДАЧИ

3.1. Управление беспилотным самолетом при посадке осуществляется по радиоперехвату посредством двух команд "вверх" и "вниз". Определить полную вероятность искажения команды помехами, если вероятность передачи команды "вверх" равна 0,2 и вероятность искажения этой команды помехами - 0,4, а вероятность передачи команды "вниз" равна 0,8 и вероятность её искажений - 0,1.

3.2. Связная самолетная радиостанция может работать в трех режимах по мощности: полной, половинной и составляющей 25% полной мощности. Вероятности работы радиостанции в этих режимах соответственно равны 0,7; 0,1; 0,2. Вероятности отказа радиостанции при работе в этих режимах за время T составляют соот-

ветственно величины 0,3; 0,2; 0,05. Определить вероятность того, что за время T часов работы радиостанция не выйдет из строя.

3.3. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины возникнет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

3.4. Схема содержит 3 блока типа A , 2 блока типа B и 5 блоков типа C . Схема выходит из строя при порче любого блока. Блоки типа A выходят из строя с вероятностью 0,2, блоки типа B - с вероятностью 0,3, блоки типа C - с вероятностью 0,5. Найти вероятность выхода схемы из строя.

3.5. Имеется четыре крупные цели, пять средних и одиннадцать мелких. Вероятности попадания в цель соответственно равны $P_1 = 0,7$; $P_2 = 0,5$; $P_3 = 0,2$. Стрельба ведется по одной из наугад выбранной цели. Определить вероятность попадания в цель.

3.6. Вероятность того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приемника или передатчика) выйдут за время полета из допусков равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. В случае, если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, двух блоков - 0,4, трех - 0,5. Найти вероятность того, что связь не будет установлена.

3.7. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

3.8. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью P_0 , если применяет - с вероятностью $P_1 < P_0$.

Вероятность того, что во время цикла будут применены помехи, равна ρ и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

3.9. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью ρ имеет дефект. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается только одним контролером, с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i -го контролера равна ρ_i

($i = 1, 2, 3$). Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадает в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью ρ_0 . Определить вероятности следующих событий:

- A - изделие будет забраковано;
- B - изделие будет забраковано в цехе;
- C - изделие будет забраковано в ОТК завода.

3.10. Команда состоит из двух отличных, двух хороших и четырех посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего - 0,7 и для посредственного - 0,5. Наугад вызываются два стрелка, причем каждый из них стреляет один раз. Какова вероятность, что оба стрелка попадут в цель.

3.11. Агрегат питания РЛС может работать в двух режимах: с нормальной нагрузкой и с перегрузкой. Вероятность выхода из строя агрегата в первом режиме равна 0,05, во втором - 0,7. Найти допустимый процент времени перегрузки, чтобы полная вероятность выхода из строя агрегата не превышала 0,1.

3.12. Через сектор обзора РЛС проходит группа из N самолетов, каждый из которых имеет постановщик помех. Если на самолете включен постановщик помех, вероятность его обнаружения равна ρ_1 , если постановщик помех не включен - ρ_2 . Постановщик помех включается с вероятностью ρ . Найти вероятность того, что не все самолеты будут обнаружены.

3.13. Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью один шар и т.д. Затем из последней

урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

3.14. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

3.15. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p , кроме того, в автобусе с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир, с вероятностью $(1-p_0)$ — один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

3.16. При передаче сообщения сигналами "точка" и "тире" эти сигналы встречаются в отношении 5/3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и 1/3 сообщений "тире". Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

3.17. По каналу связи передаются два сигнала: ноль и единица. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: единица переходит в единицу с вероятностью p и в ноль с вероятностью $(1-p)$; ноль переходит в ноль с вероятностью q и в единицу с вероятностью $(1-q)$. Наугад отправлен сигнал. Вычислить вероятность того, что: а) на приемном конце будет получен сигнал 1; б) на приемном конце будет получен сигнал 0.

3.18. Для повышения надежности и улучшения качества радиосвязи в условиях замираний приём сообщений корреспондента осуществляется на два приёмника, пространственно разнесённых друг относительно друга (пространственно разнесённый приём). Вероятность приёма сигнала первым радиоприёмником равна 0,8, вторым — 0,7, а при одновременной работе обоих приёмников — 0,94. Определить вероятность приёма радиосигнала корреспондента, если вероятность безотказной работы за время сеанса связи первого приёмника составляет 0,9, второго — 0,85, а радиостанция корреспондента — 0,8.

3.19. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приёмника, передаются два сигнала: единица и ноль. За счет воздействия помех сигналы могут искажаться. На участке передатчик - ретранслятор единица переходит в единицу с вероятностью p_1 и в ноль с вероятностью $(1-p_1)$; ноль переходит в ноль с вероятностью q_1 и в единицу с вероятностью $(1-q_1)$. На участке ретранслятор-приёмник указанные вероятности соответственно равны p_2 ; $1-p_2$; q_2 и $1-q_2$. Найти вероятность того, что комбинация 10, посланная передатчиком, будет принята приёмником без искажений.

3.20. Имеется n экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменуемый знает ответ не на все $2n$ вопросов, а только на $k < 2n$. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.

РАЗДЕЛ IV

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Формула Байеса является отображением причинно-следственной связи, существующей между случайными событиями. Пусть в результате проведения опыта мы наблюдаем некоторое событие (следствие) A , которое может быть вызвано одним из n исключających друг друга событий (причин). Вследствие некоторого случайного механизма, связанного с изучаемым явлением, каждая причина вызывает следствие A со своей вполне определенной вероятностью. Спрашивается, как вычислить вероятность того, что наблюдаемое в опыте событие A было вызвано каждой из возможных причин.

Относительно возможных причин, вызывающих появление события (следствия) A , выдвигаются n гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$. Предполагается, что до опыта известны или могут быть вычислены их вероятности $P(H_1), \dots, P(H_n)$, которые называются априорными вероятностями гипотез. Если зафиксирована некоторая гипотеза H_i , то это снимает неопределенность относительно причины, вызвавшей появление события A , и вычисление условной вероятности $P(A/H_i)$ обычно не представляет большого труда. Вероятность того, что верна гипотеза H_i после проведения опыта, в котором зарегистрировано появление события A , вычисляется по формуле Байеса

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i)}$$

где $P(H_i/A)$ — называются апостериорными вероятностями.

Как видно из формулы, апостериорная вероятность гипотезы H_i зависит не только от априорной вероятности этой гипотезы, но и от условной вероятности события A при данной гипотезе.

ПРИМЕР I

Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго — 0,7, для третьего — 0,9. После

стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что эта пробоина принадлежит третьему стрелку.

Р е ш е н и е . В результате проведения опыта наблюдалось следствие (событие) A — в мишени обнаружена одна пробоина. Выдвигаем относительно причин, вызвавших следствие A , следующие гипотезы :

H_1 — в мишень попал первый стрелок, а второй и третий стрелок не попали;

H_2 — в мишень попал второй стрелок, а первый и третий стрелок не попали;

H_3 — в мишень попал третий стрелок, а первый и второй стрелок не попали.

Вероятности этих гипотез находятся по теореме умножения независимых событий:

$$P(H_1) = 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,015;$$

$$P(H_2) = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,1 = 0,035;$$

$$P(H_3) = 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,139.$$

Любая из перечисленных гипотез (причин) с неизбежностью приводит к появлению события A , т.е. условные вероятности появления события A при любой гипотезе равны единице

$$P(A/H_1) = P(A/H_2) = P(A/H_3) = 1.$$

По формуле Байеса находим вероятность того, что пробоина принадлежит третьему стрелку, т.е. что верна третья гипотеза

$$P(H_3/A) = \frac{0,139}{0,015 + 0,035 + 0,139} \approx 0,7.$$

ПРИМЕР 2

Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии станков отличается от нормального, используется индикатор, принадлежащий с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу, вероятнее всего, принадлежал индикатор.

Р е ш е н и е . Событие A , которое наблюдалось, заключается в том, что индикатор сработал и был получен сигнал о нарушении нормальной работы линии. Незвестным является, к какому из трех типов принадлежит индикатор.

Выдвигаем гипотезы:

- H_1 — индикатор принадлежит к первому типу;
- H_2 — индикатор принадлежит к второму типу,
- H_3 — индикатор принадлежит к третьему типу.

Априорные вероятности этих гипотез известны и равны $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,3$; $P(H_3) = 0,5$. Кроме того, известны условные вероятности срабатывания индикатора для каждого из перечисленных типов: $P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = 0,75$, $P(A/H_3) = 0,4$.

Вероятности того, что верны первая, вторая или третья гипотеза, находятся по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{0,2}{0,2 + 0,3 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,4} = 0,32;$$

$$P(H_2/A) = \frac{0,3 \cdot 0,75}{0,2 + 0,3 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,4} = 0,36;$$

$$P(H_3/A) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,2 + 0,3 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,4} = 0,32.$$

Следовательно, вероятнее всего, что индикатор принадлежал к второму типу.

ПРИМЕР 3

Из урны, в которой было $m \geq 3$ белых шаров и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из неё наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.

Р е ш е н и е . Результатом опыта явился факт, что два вынутые из урны шара оказались белыми. Это есть содержание события A . Вероятность этого события зависит от того, какого цвета шар был потерян. Выдвигаем гипотезы:

H_1 — потерян шар белого цвета;

H_2 — потерян шар черного цвета.

Поскольку потеря любого шара из урны равновероятна, то априорные вероятности потерять шар белого или черного цвета будут равны соответственно

$$P(H_1) = \frac{m}{n+m} ; \quad P(H_2) = \frac{n}{n+m} ;$$

Если зафиксирована гипотеза, то вычисление вероятности события A не представляет большого труда. Например, если свершилась гипотеза H_1 , то в урне осталось шаров $n+m-1$, из них белого цвета ($m-1$). Вероятность извлечь при этом два шара белого цвета будет равна

$$P(A/H_1) = \frac{C_{m-1}^2}{C_{n+m-1}^2} , \text{ т.е.}$$

отношению числа различных комбинаций по два шара, взятых из белых шаров, к числу различных комбинаций по два шара, взятых из общего числа шаров в урне. Аналогично находится вероятность события A при второй гипотезе

$$P(A/H_2) = \frac{C_n^2}{C_{n+m-1}^2} .$$

По формуле Байеса находим апостериорную вероятность первой гипотезы

$$\begin{aligned} P(H_1/A) &= \frac{\frac{C_{m-1}^2}{C_{n+m-1}^2} \cdot \frac{m}{n+m}}{\frac{C_{m-1}^2}{C_{n+m-1}^2} \cdot \frac{m}{n+m} + \frac{C_n^2}{C_{n+m-1}^2} \cdot \frac{n}{n+m}} = \\ &= \frac{m C_{m-1}^2}{m C_{m-1}^2 + n C_n^2} . \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

4.1. Имеются три урны: в первой из них a белых шаров и b черных; во второй c белых шаров и d черных, в третьей — k белых шаров (черных нет). Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из неё шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.

4.2. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

4.3. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,3$.

4.4. Прибор состоит из двух узлов; работа каждого узла, безусловно, необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1 , второго — p_2 . Прибор испытывался в течение времени t , в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

4.5. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 — с вероятностью 0,7; 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

4.6. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества; вообще 40% приборов собирается из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, то его надежность (вероятность бе-

зотказной работы за время t) равна 0,95 , если из деталей обычного качества -его надежность равна 0,7 . Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

4.7. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1 , второй - с вероятностью p_2 . Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0 . Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: 1) первым контролером; 2) вторым контролером; 3) ОТК завода.

4.8. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $4/5$, $3/4$, $2/3$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

4.9. По двоичному каналу связи с шумами передаются токовая (1) и бестоковая (0) посылки с априорными вероятностями $p(1)=0,6$ и $p(0)=0,4$. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: вероятность перехода единицы в единицу (вероятность принять единицу при передаче единицы) $p(1/1)=0,9$; вероятность перехода единицы в нуль $p(0/1)=0,1$; вероятность перехода нуля в нуль $p(0/0)=0,8$ и вероятность перехода нуля в единицу $p(1/0)=0,2$. На выходе радиоприёмного устройства зарегистрирована единица. Какова вероятность того, что :
а) в действительности была передана 1; б) на самом деле был передан 0.

4.10. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1-p)$ - только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует превышение некоторого порогового значения с вероятностью p_1 ; если только помеха - с вероятностью p_2 . Известно, что устройство зарегистрировало превышение некоторого порогового значения. Найти вероятность того,

что в его составе имеется полезный сигнал.

4.11. Две радиостанции I и II независимо друг от друга передают по одному разу одно и то же сообщение радиостанции III. Вероятность приёма сообщения станцией III от станции I равна 0,8, а от станции II - 0,4. Станцией III было принято одно сообщение. Найти вероятность того, что это сообщение было передано станцией I.

4.12. Имеется три радиолокационных станции (РЛС), каждая из которых контролирует свой сектор обзора. Самолет, пролетая над территорией противника, может оказаться в каждом из этих секторов в зависимости от местоположения соответствующей радиолокационной станции с вероятностями P_1, P_2 и P_3 . Вероятность того, что в это время РЛС не работает, равна для первой РЛС $\bar{P}_1$, для второй - $\bar{P}_2$, для третьей - $\bar{P}_3$. Если самолет оказался в секторе обзора и РЛС работает, вероятности его обнаружения равны P_1^* , P_2^* и P_3^* соответственно для первой, второй и третьей РЛС. Известно, что самолет обнаружен. Найти вероятность того, что он обнаружен первой РЛС.

4.13. Имеется две урны: в первой - a белых шаров и b черных, во второй - c белых и d черных. Выбирается наугад одна из урн и вынимается из неё один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что следующий шар, который мы вынем из той же урны, будет тоже белым.

4.14. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равно-возможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

4.15. В техникуме n студентов, из которых n_k ($k=1,2,3$) человек учатся k -й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

4.16. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC, причем априорные вероятности каждой из последовательностей есть соответственно 0,3; 0,4; 0,3. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приёма каждой из передан-

ных букв до 0,6, а вероятность приёма переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность АААА, если на приёмном устройстве получена АВСА.

РАЗДЕЛ V

ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

Рассматривается последовательность независимых опытов, в каждом из которых возможны два исхода — появление или непоявление некоторого события A . Предполагая вероятность появления события A в каждом опыте известной, необходимо найти вероятность того, что оно появится ровно m раз среди n независимых опытов.

Решение поставленной задачи зависит от того, остается ли вероятность появления события A неизменной во всех опытах или она изменяется от опыта к опыту. В первом случае решение задачи дает частная теорема о повторении опытов, во втором — общая теорема о повторении опытов.

Ч а с т н а я т е о р е м а о п о в т о р е н и и
о п ы т о в

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с одной и той же вероятностью p , то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \dots, n),$$

где $q = 1 - p$.

В сформулированной задаче интересуются общим числом появлений события A в последовательности опытов независимо от того, в каких по счету опытах это событие появляется. Поэтому в последовательности из n независимых опытов возможны несколько элементарных исходов, приводящих к одному и тому же числу m появлений события A . Количество таких элементарных исходов равно C_n^m . В силу независимости опытов вероятность каждого элементарного исхода одна и та же и равна p^m . Поскольку все элементарные исходы в последовательности опытов представляют собой несовместные события, то искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных элементарных исходов.

Отсюда следует структура выше-написанной формулы для $P_{m,n}$.

Общая теорема о повторении опытов

Если производится n независимых опытов в различных условиях, так что вероятность события A в i -м опыте равна p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится в этих опытах ровно m раз, равна коэффициенту при z^m в разложении по степеням z производящей функции

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^n P_{m,n} z^m, \quad \text{где } q_i = 1 - p_i.$$

Вероятность $R_{k,n}$ того, что среди n опытов событие A появится не менее k раз, выражается формулой

$$R_{k,n} = \sum_{m=k}^n P_{m,n}.$$

Если $k < \frac{n+1}{2}$, то удобнее перейти к противоположному событию и вероятность $R_{k,n}$ вычислить по формуле

$$R_{k,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,n}.$$

Пологая в последней формуле $k = 1$, получим выражение для вероятности хотя бы одного появления события A при n независимых опытах

$$R_{1,n} = 1 - P_{0,n}.$$

ПРИМЕР I

Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,8. Какова вероятность 3 попаданий при 5 выстрелах?

Решение. В данной задаче опыт заключается в выстреле по мишени и он повторяется 5 раз. Исходами каждого опыта являются попадание в непопадание в мишень; вероятности этих исходов равны $p = 0,8$ и $q = 0,2$.

Нам интересуют такие исходы в серии из 5 выстрелов, когда будет три попадания, независимо то того, в каких по счету выстрелах они будут зарегистрированы. Количество таких исходов равно C_5^3 . В силу независимости опытов вероятность каждого

исхода одна и та же и равна $0,8^3 0,2^2$. Поскольку все исходы в серии опытов представляют собой несовместные события, то полная вероятность равна сумме вероятностей всех исходов, когда среди 5 выстрелов будет 3 попадания, т.е.

$$P_{3,5} = C_5^3 0,8^3 0,2^2 = 0,4.$$

ПРИМЕР 2

Самолет сбрасывает 6 бомб на объект с вероятностью попадания каждой 0,3. Какова вероятность разрушения объекта, если для этого достаточно двух попаданий?

Решение. Опыт заключается в сбрасывании одной бомбы и он повторяется 6 раз. Исходами каждого опыта является попадание и не попадание бомбы; вероятности этих исходов равны $p = 0,3$; $q = 0,7$ по условию задачи. Опыт повторяется 6 раз.

Объект будет разрушен, если будут иметь место такие исходы в последовательности из 6 опытов, в которых зарегистрировано не менее чем два попадания. Иными словами, разрушение объекта происходит при попадании любого количества бомб за исключением одного попадания и не попадания всех бомб.

В данной задаче удобнее перейти к противоположному событию — попаданию менее двух бомб — и воспользоваться формулой

$$R_{k,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,n}.$$

В нашем случае $n = 6$; $k = 2$;

$$P_{0,6} = 0,7^6; \quad P_{1,6} = C_6^1 0,3 \cdot 0,7^5;$$

$$R_{2,6} = 1 - 0,7^6 - 6 \cdot 0,3 \cdot 0,7^5 = 0,58.$$

ПРИМЕР 3

Производится четыре независимых выстрела по некоторой цели. Вероятности попадания при разных выстрелах различны и равны $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,4$. Найти вероятности ни одного, одного, двух, трех, четырех попаданий; вероятность хотя бы одного попадания; вероятность не менее двух попаданий.

Р е ш е н и е . Опыт заключается в выстреле по мишени и он повторяется 4 раза. Исходами в каждом опыте являются попадания и непопадания в мишень, причем вероятности исходов изменяются от опыта к опыту. Следовательно, для подсчета искомых вероятностей необходимо воспользоваться общей теоремой о повторении опытов. Для этого составим производящую функцию

$$\prod_{i=1}^n (q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^n P_{m,n} \cdot z^m.$$

В нашем случае

$$(0,9 + 0,1 z) (0,8 + 0,2 z) (0,7 + 0,3 z) (0,6 + 0,4 z) = \\ = P_{0,4} z^0 + P_{1,4} z^1 + P_{2,4} z^2 + P_{3,4} z^3 + P_{4,4} z^4.$$

Перемножая биномы в левой части последнего равенства, получим многочлен относительно независимой переменной z

$$0,302 + 0,460 z + 0,205 z^2 + 0,031 z^3 + 0,002 z^4.$$

Следовательно, искомые вероятности равны:

$$P_{0,4} = 0,302; \quad P_{1,4} = 0,460; \quad P_{2,4} = 0,205; \quad P_{3,4} = 0,031; \\ P_{4,4} = 0,002; \quad R_{1,4} = 0,693; \quad R_{2,4} = 0,238.$$

ПРИМЕР 4

Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше, чем второго. Вероятность изготовления годной детали первым автоматом равна 0,9, а вторым — 0,7. С конвейера взяты любые 5 деталей. Найти вероятность того, что 4 из них годные.

Р е ш е н и е . Обозначим через A событие, состоящее в том, что 4 детали из 5 взятых с конвейера годные. В условиях задачи есть неопределенность, заключающаяся в том, что неизвестно, на каком автомате изготовлена каждая деталь, взятая с конвейера.

Чтобы снять эту неопределенность, выдвигаем гипотезы:

H_1 — деталь изготовлена на I-м автомате;

H_2 — деталь изготовлена на 2-м автомате.

Поскольку производительность первого автомата втрое больше,

чем второго, то вероятность первой гипотезы в три раза больше вероятности второй, а в сумме эти вероятности дадут единицу. Следовательно $P(H_1) = \frac{3}{4}$, $P(H_2) = \frac{1}{4}$.

Введём событие B — случайно взятая деталь с конвейера годная. Из условия задачи следует $P(B/H_1) = 0,9$, $P(B/H_2) = 0,7$. По формуле полной вероятности находим

$$P(B) = \frac{3}{4} \cdot 0,9 + \frac{1}{4} \cdot 0,7 = 0,85;$$

$$P(\bar{B}) = 0,15.$$

Опыт заключается в том, что с конвейера берется деталь, и этот опыт повторяется 5 раз. Исходы каждого опыта состоят в том, что взятая с конвейера деталь годная или негодная. Вероятности этих исходов равны соответственно 0,85 и 0,15. нас интересуют исходы в серии из 5 опытов, в которых событие B появится 4 раза независимо от того, в каких по счету опытах оно появляется. Таких исходов C_5^4 , а каждый исход в силу независимости опытов имеет вероятность $0,85^4 \cdot 0,15$. Следовательно, по частной теореме о повторении опытов имеем

$$P(A) = C_5^4 \cdot 0,85^4 \cdot 0,15 \approx 0,39.$$

ЗАДАЧИ

5.1. Транзисторный радиоприёмник смонтирован на 9 полупроводниках, для которых вероятность брака равна 0,05. Найти вероятность того, что приёмник будет не работоспособным, если он отказывает при наличии в нем не менее двух бракованных полупроводников.

5.2. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

5.3. Радиэлектронный комплекс самолета-бомбардировщика включает в себя 10 объектов. Вероятность безотказной работы каждого объекта в течение времени T равна 0,9. Объекты выходят из строя независимо один от другого. Вычислить вероятности того, что за время T : а) откажет хотя бы один обь-

ект; б) отразит ровно два объекта; в) отразит не менее двух объектов.

5.4. Алфавит источника сигнала состоит из 10 равновероятных кодовых комбинаций, причем каждый раз в линию связи посылается одна из них. Какова вероятность того, что в результате пятикратной передачи одна и та же кодовая комбинация появится не менее трех раз?

5.5. Коды некоторой радиотелеграфной системы с целью большей защищенности от помех, которые могут преобразовать одни коды в другие, составляются только из четного числа импульсов. Коды с нечетным числом импульсов регистрируются приёмным устройством как ошибочные и не принимаются. Благодаря этому, искажения получаются только в случаях подавления помехами не менее чем двух импульсов (или 4 и т.д.) одновременно в одном коде или при появлении четного числа ложных импульсов на незанятых позициях кода. Определить вероятность искажения кода, состоящего из двух импульсов и четырех свободных позиций за счет появления ложных импульсов от помех, если вероятность появления ложного импульса (на одной позиции) $p = 0,4$ и ложные импульсы на различных позициях появляются независимо один от другого.

5.6. Найти вероятность искажения кода (см. задачу 5.5) при условии, что проверка на четность импульсов на приемном конце линии передачи не производится и для искажения кода достаточно появления хотя бы одного ложного импульса на какой-либо свободной позиции кода.

5.7. Импульсно-кодовая комбинация образуется с помощью шести двоичных сигналов 0 или 1, которые случайным образом появляются на позициях кодовой комбинации независимо друг от друга. Появление сигналов 0 или 1 на каждой позиции равновероятно. Вычислить вероятность того, что в кодовой комбинации появится число нулей меньше двух.

5.8. При вращении антенны радиолокатора за время облучения точечной цели (например, самолета) успевают отразиться 8 импульсов. Найти вероятность обнаружения цели за один сборот

антенны радиолокатора, если для этого необходимо прохождение через приёмник не менее 5 импульсов, а вероятность подавления импульса помехой в приёмнике равна 0,1 и подавление различных импульсов помехами суть независимые события.

5.9. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

5.10. Для того чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. При каком числе рыб в озере будет наибольшей вероятность встретить среди вновь пойманных 150 рыб 10 меченных?

5.11. На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде независимых видеосигналов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом равна 0,25. Вычислить: а) вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 видеосигналов превысят порог; б) наименьшее число видеосигналов, превысивших порог.

5.12. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью τ (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью ρ . Для контроля из продукции завода выбирается n изделий. Найти вероятность следующих событий:

A — ни в одном из изделий не будет обнаружено дефекта;

B — среди n изделий ровно в двух будет обнаружен дефект;

C — среди n изделий не менее чем в двух будет обнаружен дефект.

5.13. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует к себе внимания рабочего в течение промежутка времени τ , равна $1/3$. Найти вероятность того, что а) за время τ 4 станка потребуют к себе внимания рабочего; б) число требований к рабочему со стороны станков за время τ будет между 3 и 6 (включая границы).

5.14. Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом равна 0,004. Какова вероятность уничтожения самолета при залпе из 250 винтовок?

5.15. Для увеличения надежности радиосвязи используется метод накопления, при котором каждый символ (0 или 1) передается три раза подряд. На приемном конце регистрируется тот символ, который в принятой последовательности из трех символов содержится не менее двух раз. Определить вероятность правильного приема по методу накопления, если вероятность правильного приема каждого символа равна 0,9.

5.16. Система противовоздушной обороны обороняет территорию от воздушного налета, в котором принимает участие N самолетов. Для поражения каждого из самолетов выделяется два истребителя-перехватчика; каждый истребитель поражает цель независимо от другого с вероятностью p . Найти вероятность того, что в составе воздушного налета будет поражено: A - ровно три самолета; B - не менее двух самолетов.

5.17. Прибор, состоящий из K узлов, работал в течение времени t . Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за время t равна p . По истечении времени прибор останавливается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время τ . Найти вероятность того, что через время 2τ после останова прибор будет готов для нормальной работы.

5.18. Имеется N лунок, по которым случайным образом разбрасываются M шариков. Найти вероятность того, что в данную (вполне определенную, например, первую) лунку попадет ровно K шариков.

5.19. Пункт A нужно связать с 10 абонентами пункта B . Каждый абонент занимает линию 12 минут в час. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?

5.20. Телефонная станция обслуживает N абонентов, которые пользуются телефоном одинаково часто и в течение часа

производит n разговоров со средней продолжительностью $1/40$ часа. Найти вероятность одновременного разговора ровно m абонентов.

5.21. АТС обслуживает N абонентов, каждому из которых может предоставить для разговора любую из ℓ линий ($\ell < N$), если она свободна. Все абоненты одинаково часто говорят по телефону и в течение часа производят n разговоров средней продолжительностью $1/40$ часа каждый. Один из абонентов вызвал АТС. Какова вероятность того, что все линии окажутся занятыми?

5.22. Сорт "Смесь" содержит поровну конфеты четырех наименований, назовем "а", "б", "в", "г".

Большое количество конфет "Смесь" расфасовывается в кульки по 8 конфет в каждый для подарков на детский праздник. Какова вероятность того, что из 25 подарков в 9 окажется по одной конфете сорта "а"?

5.23. Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

5.24. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске разны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

5.25. Радиолокационная станция, работающая в режиме кругового обзора, обнаруживает цель за один цикл обзора с вероятностью $p = 0,7$. Найти вероятность того, что за 10 циклов обзора: а) сигнал от цели будет зарегистрирован ровно 3 раза; б) не менее 3 раз.

5.26. В условиях задачи 5.25 цель за каждый цикл обзора облучается серией из n импульсов. Решение о наличии сигнала от цели принимается, если не менее k импульсов в серии при-

высали некоторый порог. Вероятность превышения порога одним импульсом равна p_1 и одинакова для всех импульсов серии. Найти вероятность того, что за N циклов обзора сигнал от цели будет зарегистрирован не менее m раз.

5.27. На самолете имеется постановщик помех, который включается автоматически от специального приёмного устройства, реагирующего на облучение самолета сигналом РЛС. Включение производится, если зарегистрировано не менее 4 импульсов. Вероятность обнаружения каждого импульса равна p . Найти вероятность включения постановщика помех при облучении самолета серией из 20 импульсов.

5.28. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5 и 0,8.

5.29. По линии связи передано четыре радиосигнала, имеющих различные амплитуды. Вероятности приёма каждого из сигналов не зависят от приёма остальных и соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Определить вероятность того, что: а) будет принято K сигналов ($K = 0, 1, 2, 3, 4$); б) будет установлена двухсторонняя радиосвязь, если вероятность этого события при приёме одного сигнала равна 0,2, при приёме двух сигналов - 0,6, а при приёме трех и четырех сигналов - 1.

5.30. Агрегат состоит из основной и нескольких резервных цепей. Каждая цепь включает в себя пять последовательно соединённых элементов. Надежность каждого элемента 0,98. Сколько нужно иметь резервных цепей, чтобы надежность агрегата была бы не меньше надежности элемента?

5.31. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не менее трех отказов?

РАЗДЕЛ VI

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Дискретной называется случайная величина, возможные значения которой можно перечислить и она отличается на конечную величину.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она их принимает. Закон распределения может иметь разные формы.

1. РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены возможные значения этой случайной величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ и указаны вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения $p_1, p_2, \dots, p_n$:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$p_i = P[X = x_i];$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Графическое изображение ряда распределения называется **многоугольником распределения**.

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая зависимость

вероятности неравенства $X < x$ от текущего значения x :

$$F(x) = P[X < x].$$

Функция $F(x)$ есть неубывающая функция: $F(-\infty) = 0$

$$F(+\infty) = 1.$$

Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция; она испытывает скачки в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины X , причем величина скачка равна вероятности соответствующего возможного значения.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется её среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где x_i — возможные значения случайной величины X , $p_i = P[X=x_i]$;

$M[\cdot]$ означает оператор усреднения. Если нас интересует результат, полученный после выполнения операции усреднения, то мы его будем обозначать одной буквой $M[X] = m_x$.

Центрированной случайной величиной называется отклонение случайной величины X от её математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины

$$D[X] = M[\tilde{X}^2].$$

Дисперсия вычисляется по формуле

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i.$$

Дисперсия $D[X]$ кратко обозначается D_x или σ_x^2 .

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой случайной величины

$$m_k[X] = M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины $m_k[X]$ вычисляется по формуле

$$m_k[X] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i.$$

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени центрированной случайной величины X

$$\mu_k[X] = M[\tilde{X}^k].$$

Он вычисляется по формуле

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i.$$

Дискретная случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону, если она имеет целочисленные возможные значения $0, 1, \dots, n$, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой

$$P[X = m] = P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где

$$0 < p < 1; \quad q = 1 - p.$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равно $m_x = np$, а дисперсия $D_x = npq$. Дискретная случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона,

если её возможные значения составляют бесконечный ряд целых чисел $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятность того, что $X=m$, выражается формулой

$$P[X=m] = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a > 0$ — параметр закона Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной по закону Пуассона, равны параметру закона a :

$$m_x = a, \quad D_x = a.$$

ПРИМЕР I

На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомобилю дальнейшее движение. Составить закон распределения случайной величины X — числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

Решение. Чтобы составить закон распределения дискретной случайной величины X , необходимо перечислить её возможные значения и вычислить вероятности, с которыми она их принимает. В данной задаче случайная величина X имеет возможные значения $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 4$.

Случайная величина X принимает свое первое значение $X_1=0$ в том случае, если первый же встретившийся светофор запрещает автомобилю дальнейшее движение. Следовательно, событие $X=0$ эквивалентно событию — светофор запрещает автомобилю дальнейшее движение. Отсюда $P[X=0] = 0,5$. Событие, состоящее в том, что случайная величина принимает своё второе возможное значение $X=1$, эквивалентно событию — первый светофор разрешает, а второй — запрещает дальнейшее движение автомобилю. Предполагая, что разрешение и запрещение движения автомобилю двумя соседними светофорами представляют независимые события, получим

$$P[X=1] = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

Аналогично вычисляются вероятности того, что случайная величина X принимает свои последующие значения:

$$P[X=2] = 0,5^3 = 0,125; \quad P[X=3] = 0,5^4 = 0,0625.$$

Вероятность того, что случайная величина примет пятое возможное значение $X=4$, равна вероятности того, что все четыре светофора разрешат дальнейшее движение автомобиля. Следовательно, $P[X=4] = 0,5^4 = 0,0625$. Следует обратить внимание, что вероятности двух последних возможных значений случайной величины равны между собой, хотя смысл последних сомножителей в формулах для вычисления этих вероятностей разный. По вычисленным значениям построим ряд распределения

X	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

ПРИМЕР 2

Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. При шестикратной передаче найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для числа принятых сигналов.

Решение. Опыт заключается в передаче радиосигнала и он повторяется 6 раз. С каждым опытом связано два возможных исхода: положительный — сигнал принят; отрицательный — сигнал не принят. Введём случайную величину X — число положительных исходов в серии из 6 опытов с возможными значениями $X_0 = 0, X = 1, \dots, X_6 = 6$. Вероятность того, что случайная величина X примет какое-то конкретное возможное значение, определяется частной теоремой о повторении опытов, а следовательно, сама случайная величина распределена по биномиальному закону. Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются по формулам:

$$m_x = np; \quad \sigma_x^2 = npq; \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

Отсюда $m_x = 6 \cdot 0,7 = 4,2; \quad \sigma_x^2 = 6 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 1,26;$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1,26} = 1,12.$$

ПРИМЕР 3

Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1 , для второго — p_2 .

Рассматриваются две случайные величины:

X_1 — число попаданий первого стрелка;

X_2 — число попаданий второго стрелка и их разность

$$Z = X_1 - X_2.$$

Построить ряд распределения случайной величины Z и найти её характеристики m_z и σ_z .

Р е ш е н и е. Случайная величина Z , представляющая собой разность числа попаданий первого и второго стрелка, имеет три возможных значения: $Z_1 = -1$; $Z_2 = 0$, $Z_3 = +1$. Событие, состоящее в том, что случайная величина Z принимает первое возможное значение $Z_1 = -1$, эквивалентно одновременному осуществлению двух событий, состоящих в том, что число попаданий X_1 первого стрелка равно нулю ($X_1 = 0$), а число попаданий X_2 второго стрелка равно единице ($X_2 = 1$). Поскольку стрелки стреляют независимо, то события $X_1 = 0$ и $X_2 = 1$ также являются независимыми. Пользуясь теоремой умножения для независимых событий, получим

$$P(Z = -1) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) = q_1 p_2.$$

Событие $Z = 0$ реализуется в том случае, если в результате выстрела будет зарегистрировано или попадание, или непопадание в мишень у обоих стрелков. Попадание и непопадание в мишень обоих стрелков представляют несовместные события. Пользуясь теоремой сложения для несовместных событий, получим

$$P(Z = 0) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = q_1 q_2 + p_1 p_2.$$

Аналогично находится вероятность того, что случайная величина Z примет своё третье значение

$$P(Z = +1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) = p_1 q_2.$$

В этих формулах предполагается $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$.

Ряд распределения величины Z имеет вид

Z_i	-1	0	$+1$
P_i	$q_1 p_2$	$q_1 q_2 + p_1 p_2$	$p_1 q_2$

Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$m_z = \sum_{i=1}^n z_i P[Z = z_i] = (-1) q_1 p_2 + 0 \cdot (q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1 \cdot p_1 q_2 = -q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 - p_2.$$

Дисперсию находим через второй начальный момент

$$D_z = m_z[Z] - m_z^2,$$

$$m_z[Z] = \sum_{i=1}^n z_i^2 P[Z = z_i].$$

В конкретном случае

$$m_z[Z] = (-1)^2 q_1 p_2 + 0^2 (q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1^2 p_1 q_2 =$$

$$= q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2,$$

$$D[Z] = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2 - (p_1 - p_2)^2 = p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

ПРИМЕР 4

Четыре одинаковые электрические лампочки временно выворачивают из патронов и кладут в ящик. Затем их случайным образом вынимают из него и вворачивают в патроны. Каково математическое ожидание числа лампочек, попавших в тот патрон, из которого они были вынуты?

Решение. Опыт заключается в том, что вворачивается 4 электрических лампочки в 4 патрона. Исходом данного опыта является какое-либо размещение электрических лампочек по патронам. Подсчитаем число возможных исходов, т.е. число способов

размещения электрических лампочек по патронам.

В первый патрон можно ввернуть любую из 4 электрических лампочек. После того как первый патрон занят, во второй патрон можно ввернуть любую из 3 оставшихся лампочек. Подобным же образом в третий патрон можно ввернуть любую из 2 оставшихся лампочек и, наконец, в четвертый патрон вворачивается одна оставшаяся лампочка. Рассуждая таким образом, приходим к выводу о том, что число возможных исходов в опыте равно числу перестановок из 4 элементов, т.е. $P_4 = 4! = 24$.

С рассматриваемым опытом свяжем случайную величину X — число лампочек, попавших в тот патрон, из которого она была вынута. Введенная случайная величина имеет возможные значения $X_0 = 0, X_1 = 1, \dots, X_4 = 4$.

Вычислим вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения. Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X=4$, эквивалентно тому, что все электрические лампочки попадут в патрон, из которого они вынуты. Из 24 возможных исходов в данном опыте лишь один благоприятствует указанному событию. Следовательно, $P[X=4] = \frac{1}{24}$.

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X=3$, эквивалентно тому, что три лампочки попадут в патрон, из которого они вынуты. Это событие следует рассматривать как невозможное, так как если 3 лампочки попали в патроны, из которых они вынуты, то из этого неизбежно вытекает, что и четвертая лампочка попадет в патрон, из которого она вынута. Следовательно, $P[X=3] = 0$.

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X=2$, эквивалентно тому, что 2 лампочки из 4 попадут в патроны, из которых они вынуты. С тем, чтобы выполнялось событие $X=2$, две оставшиеся лампочки могут быть размещены по патронам единственным способом. Поэтому количество исходов опыта, благоприятствующих событию $X=2$, равно числу способов, сколькими можно взять 2 лампочки из 4, т.е. $C_4^2 = 6$. Отсюда $P[X=2] = \frac{6}{24}$.

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X=1$, эквивалентно тому, что одна лампочка из 4 попадет в патрон, из которого она вынута. Этой лампочкой может быть любая из четырех. С тем, чтобы выполнялось событие $X=1$, три

оставшиеся лампочки могут быть размещены по патронам двумя способами. Поэтому количество исходов опыта, благоприятствующих событию $X=1$, равно произведению $4 \times 2 = 8$. Отсюда $P[X=1] = \frac{8}{24}$.

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X=0$, эквивалентно тому, что ни одна лампочка из 4 не попадет в патрон, из которого она вынута. Это событие дополняет предыдущие события до полной группы, поэтому его вероятность равна

$$P[X=0] = 1 - \frac{1}{24} - \frac{6}{24} - \frac{8}{24} = \frac{9}{24}.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i).$$

В конкретном случае

$$M[X] = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{24} = 1.$$

ЗАДАЧИ

6.1. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие A ; вероятность события A равна p . Рассматривается случайная величина X , равная единице, если событие A произошло, и нулю, если не произошло (число появлений события A в данном опыте). Построить ряд распределения случайной величины X и её функцию распределения, найти её математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент.

6.2. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

6.3. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p происходит событие A . Написать ряд распределения случайной величины X — числа появлений противоположного A события $\bar{A}$ в n опытах — и найти её математическое ожидание и дисперсию.

6.4. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго — 0,6.

6.5. Вероятность получения отметки от пистолета на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна p . Цель считается обнаруженной, если от неё получено n отметок. Найти закон распределения случайной величины X — числа оборотов антенны радиолокатора.

6.6. Вероятность получения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа X появлений герба к числу Y появлений решетки.

6.7. В нашем распоряжении имеется n лампочек; каждая из них с вероятностью p имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Рассматривается случайная величина X — число лампочек, которое будет испытано. Построить её ряд распределения и найти математическое ожидание M_X .

6.8. Прибор, состоящий из блоков A , B_1 и B_2 , даёт отказ в случае осуществления события $C = A + B_1 B_2$, где A — отказ блока A ; B_1 и B_2 — отказы блоков B_1 и B_2 соответственно. Отказы происходят при попадании в блок хотя бы одной космической частицы. Построить ряд распределения числа случайных частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если вероятность попадания в блоки частицы, попавшей в прибор, равна $P(A) = 0,5$, $P(B_1) = P(B_2) = 0,25$.

6.9. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0,9. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

6.10. Монета бросается n раз. Найти функцию распределения числа выпадений решетки.

6.11. На вход ограничителя воздействует видеосигнал со случайной амплитудой. Вероятность превышения импульсом уровня ограничения равна P . Рассматривая событие превышения уровня ограничения импульсом как случайную величину X , принимающую значение 1 (превышение) и 0 (непревышение), определить среднее значение и дисперсию величины X . Найти среднее значение и дисперсию числа Y импульсов, превысивших порог, при подаче на вход ограничителя n импульсов.

6.12. Закон распределения дискретной случайной величины задан рядом распределения

x_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X .

6.13. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равна P_1 , P_2 и P_3 . Доказать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равно $P_1 + P_2 + P_3$.

6.14. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 1, 2, 5, 10, среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании разре-

шаемая гиря ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

6.15. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2.

6.16. Вероятность приёма позывного сигнала одной радиостанцией другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 с до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 с. Найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двухсторонней связи.

6.17. По каналу связи передаются сообщения с помощью кода, состоящего из двух знаков. Вероятность появления первого знака равна 0,9. Всего было передано 6 знаков. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для числа появлений первого знака.

6.18. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M[X] = 0,9$.

6.19. Найти математическое ожидание суммы очков, выпавших при одновременном бросании двух игральных костей.

6.20. Блокировочная схема, состоящая из реле A , включенного последовательно с двумя реле B и C , соединёнными параллельно, должна обеспечить замкание цепи между входной и выходной клеммами. Вследствие неисправности реле A может не сработать с вероятностью 0,18, а реле B и C — с одинаковыми вероятностями, равными 0,22. Определить среднее число включений схемы до первого отказа блокировочной схемы.

6.21. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных в ряд с равными промежутками a . Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, кото-

рий раньше других потребовал обслуживания. Предполагая, что неполадка в любом из 12 станков равновероятна, вычислить среднее значение длины перехода рабочего.

6.22. Из урны, содержащей 177 белых и 12 черных шаров, извлекается по одному шару без возвращения до первого появления белого цвета. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров.

6.23. Из сосуда, содержащего 177 белых и 12 черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

6.24. Некий человек хочет открыть свою дверь и имеет 12 ключей. По неизвестным нам причинам он испытывает эти ключи независимо и случайно. Найти математическое ожидание и дисперсию числа испытаний: а) если уже испробованный ключ не устранивается из дальнейшего выбора; б) если устранивается. (Предполагается, что только один ключ подходит к двери.)

6.25. Среднее число импульсов в секунду хаотической импульсной помехи, подчиняющейся закону распределения Пуассона, равно $\lambda = 10^4$ I/c. Найти вероятность попадания хотя бы одного импульса в интервал $\tau = 100$ мкс.

6.26. Радиостанция связи в среднем отказывает через каждые 150 часов работы. Определить вероятность исправной работы и отказа станции за время сеанса связи продолжительностью 1,5 часа. Известно, что распределение вероятностей возникновения неисправностей в радиоаппаратуре подчиняется закону Пуассона (после того как аппаратура проходит небольшой период "приработка"). Определить также время, в течение которого можно гарантировать исправную работу станции с вероятностью 0,9.

РАЗДЕЛ VII

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Непрерывная случайная величина X считается заданной, если задана её функция распределения $F(x)$ или плотность распределения. Определение функции распределения дано в предыдущем разделе.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется производная от функции распределения

$$W(x) = F'(x).$$

Плотность распределения случайной величины неотрицательна,

$$W(x) \geq 0 \quad \text{и обладает свойством}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x) dx = 1.$$

Графическое изображение плотности распределения называется КРИВОЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Элементом вероятности для случайной величины X называется $W(x)dx$, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки X в элементарный отрезок dx , примыкающий к точке X .

Вероятность попадания на участок от α до β для непрерывной случайной величины выражается формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} W(x) dx.$$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X вычисляются по формулам:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x) dx;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 W(x) dx.$$

Начальный и центральный моменты k -го порядка случайной величины X выражаются формулами:

$$m_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k W(x) dx;$$

$$\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k W(x) dx.$$

Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной в интервале (α, β) , если её плотность распределения в этом интервале постоянна:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } \alpha < X < \beta; \\ 0 & \text{при } X < \alpha, X > \beta. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно на участке (α, β) , равны

$$m_x = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad D_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

ПРИМЕР I

При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Время T работы прибора от его включения до возникновения неисправности распределено по показательному закону с параметром γ

$$W(t) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma t} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается и прибор поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0 , после чего прибор снова включается в работу. Найти плотность распределения $W^*(t)$ и функцию распределения $F^*(t)$ промежутка времени T^* между двумя соседними неисправностями. Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что время T^* будет больше $2t_0$.

Решение. Промежуток времени T^* между двумя соседними непоправностями складывается из продолжительности ремонта t_0 и времени T работы прибора от его включения до возникновения непоправности, т.е.

$$T^* = t_0 + T.$$

Иными словами, новая случайная величина T^* получается из старой случайной величины T путём добавления неслучайной величины t_0 . При этом кривая распределения смещается вправо на t_0 , не меняя своей формы, т.е. плотность распределения случайной величины T^* можно записать в виде

$$W^*(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu(t-t_0)} & \text{при } t > t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases}$$

Функция распределения $F^*(t)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F^*(t) = \int_{-\infty}^t W^*(t) dt.$$

При подстановке $W^*(t)$ и интегрировании получим

$$F^*(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu(t-t_0)} & \text{при } t > t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины T^* найдётся по формуле

$$M[T^*] = M[T] + t_0 = \int_0^{\infty} t \nu e^{-\nu t} dt + t_0 = \frac{1}{\nu} + t_0.$$

Согласно выше-приведенной формуле выражение для дисперсии имеет вид

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - M[T^*])^2 W(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} (t - \frac{1}{\nu} - t_0)^2 \nu e^{-\nu(t-t_0)} dt = \frac{1}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Вероятность того, что время T^* будет больше $2t_0$, равна

$$P[T^* > 2t_0] = P[2t_0 < T < \infty] = F(\infty) - F(2t_0) = \\ = 1 - 1 - e^{-\nu(2t_0 - t_0)} = e^{-\nu t_0}.$$

ПРИМЕР 2.

Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ равна $W(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x$, вне этого интервала $W(x) = 0$. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет ровно два раза значения, заключенное в интервале $(0, \frac{\pi}{4})$.

Решение. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) , являющийся частью общего интервала (a, b) , на котором задано распределение случайной величины X , определяется соотношением

$$P[\alpha < X < \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} W(x) dx.$$

В конкретном случае $\pi/4$

$$P[0 < X < \frac{\pi}{4}] = \int_0^{\pi/4} \frac{2}{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi+2}{4\pi}.$$

По условию задачи производится три независимых испытания, в каждом из которых случайная величина попадает в интервал $(0, \frac{\pi}{4})$ с вероятностью $\frac{\pi+2}{4\pi}$. Вероятность того, что в трех испытаниях X примет ровно два раза значение из интервала $(0, \frac{\pi}{4})$, равна по частной теореме о повторении опытов

$$P_{2,3} = C_3^2 \left(\frac{\pi+2}{4\pi} \right)^2 \cdot \frac{3\pi-2}{4\pi}.$$

ПРИМЕР 3

Случайная величина X распределена по закону Лапласа, т.е. её плотность равна $W(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$, где a — любое вещественное число, $\alpha > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Математическое ожидание случайной величины X определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 m_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2a} e^{-\frac{|x-a|}{a}} dx = \frac{1}{2a} \left\{ \int_{-\infty}^a x e^{-\frac{x-a}{a}} dx + \right. \\
 &+ \left. \int_a^{+\infty} x e^{-\frac{x-a}{a}} dx \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^0 (ay+a) e^{-y} dy + \right. \\
 &+ \left. \int_0^{+\infty} (ay+a) e^{-y} dy \right\} = a.
 \end{aligned}$$

Дисперсия случайной величины X определяется по формуле.

$$D[X] = m_x[X] - m_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2a} e^{-\frac{|x-a|}{a}} dx - a^2 = 2a^2.$$

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЗАДАЧИ

7.1. Дан график плотности распределения $W(x)$ случайной величины X . Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 1; б) вычесть из случайной величины 2; в) умножить случайную величину на 2; г) изменить знак величины на обратный.

7.2. К случайной величине X прибавим постоянную неслучайную величину a . Как от этого изменятся её характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент.

7.3. Случайную величину X умножили на a . Как от этого изменятся её характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия, 3) среднее квадратическое отклонение, 4) второй начальный момент.

7.4. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0).$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T ; б) плотность распределения $W(x)$.

7.5. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ :

$$W(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

а) Построить кривую распределения; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

7.6. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$W(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

а) Найти коэффициент a ; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания величины X на участок $(-1, +1)$; г) существуют ли для случайной величины X числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия ?

7.7. Мишень состоит из трех concentрических кругов радиусом $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1 и $\sqrt{3}$. Попадание в центральный круг стоит 4 очка, в среднее кольцо - 3 очка, в крайнее кольцо - 2 очка и вне кругов - 0 очков. Вероятность попадания на расстоянии r от центра мишени равна $\frac{1}{\pi(r^2)}$. Найти математическое ожидание числа очков, выбитых при пяти выстрелах.

7.8. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R . Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения расстояния точки до центра круга.

7.9. Случайная величина X подчинена закону Лапласа

$$W(x) = a e^{-\lambda|x|} \quad (\lambda > 0).$$

а) Найти коэффициент α ; б) построить графики плотности распределения и функции распределения; в) найти m_x и σ_x .

7.10. Азимутальный ламб имеет цену делений 1° . Какова вероятность при считывании азимутального угла сделать ошибку в пределах $\pm 10'$, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов?

7.11. На электронное реле воздействует случайное напряжение X с релеевской плотностью вероятности

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x > 0).$$

Определить вероятность P срабатывания схемы, если электронное реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 2 В.

7.12. Интегральная функция релеевского распределения описывается выражением

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

выяснить, начиная с какого значения x .

$$F(x_0) \geq 0,997.$$

7.13. При определенных условиях замирания радиосигнала из-за явления многолучевости можно моделировать распределением Релея

$$W(A) = \frac{2A}{A_0^2} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \quad (A > 0),$$

где A — подверженные замираниям мгновенные значения амплитуды огибающей принимаемого сигнала; A_0^2 — квадрат усредненной за достаточно большое время амплитуды огибающей.

Пусть федингуший сигнал принимается на N антенн, расположенных друг относительно друга на такие расстояния, при которых складываемые сигналы можно рассматривать статистически независимыми. Вычислить вероятность P того, что сигнал на всех антеннах одновременно упадет ниже уровня H .

- 7.14. Случайная величина X распределена равномерно $M[X]=4$, $D[X]=3$. Найти плотность распределения величины X .

7.15. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/4 & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность распределения $W(x)$; б) найти математическое ожидание и дисперсию X ; в) найти вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале $(\frac{1}{2}, 1)$; г) построить графики функций $F(x)$ и $W(x)$.

7.16. Бомбардировщик может быть атакован истребителем под различными курсовыми углами; случайная величина X — курсовой угол — распределена по закону, плотность распределения $W(x)$ которого имеет вид

$$W(x) = \begin{cases} A_0 \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A и функцию распределения $F(x)$ курсового угла; б) вероятность того, что атакующий истребитель может быть обстрелян, если на бомбардировщике имеется стрелковая установка, позволяющая обстреливать атакующий истребитель, только когда курсовой угол находится в пределах от $-\pi/3$ до $+\pi/3$.

7.17. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(-1, 1)$.

7.18. Случайная величина X задана плотностью распределения $W(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x$ в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, вне этого интервала $W(x) = 0$. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет ровно 2 раза значение, заключенное в интервале $(0, \frac{\pi}{4})$.

7.19. Случайная величина X задана плотностью распределения $W(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$ в интервале $(-a, a)$, вне этого интервала $W(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X .

7.20. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

7.21. Время безотказной работы самолетного радиоэлектронного оборудования в полете является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полета, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 часов.

7.22. Найти дисперсию случайной величины X , заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

7.23. Линия длиной l обслуживается ремонтной бригадой, база которой находится у середины линии. Найти среднее значение и дисперсию расстояния (вдоль линии) от базы до места очередного ремонта, если известно, что последнее с одинаковой вероятностью находится в любой точке линии.

7.24. Мгновенные значения амплитуды X принимаемого сигнала при замираниях описываются распределением Релея

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad x > 0.$$

Определять среднее значение и дисперсию случайной величины X .

7.25. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы укажут время, которое отличается от настоящего времени не более чем на 20 с.

7.26. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ плотность распределения $\frac{2}{\pi} \cos^2 x$.

РАЗДЕЛ УШ

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если её плотность распределения равна

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равно $m_x = m$, а дисперсия $\sigma_x = \sigma^2$. Вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону, в интервал (α, β) выражается формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — табулированная функция, обладающая свойством $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$.

Вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания m_x на величину, не превосходящую ℓ , выражается формулой

$$P[|X - m_x| < \ell] = 2\Phi^*\left[\frac{\ell}{\sigma}\right] - 1.$$

ПРИМЕР I

Средняя квадратическая ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м. Определить вероятность получения ошибки измерения дальности по абсолютной величине, не превосходящей 20 м.

Решение. В данном примере случайная величина X означает ошибку измерения дальности, которая распределена по нормальному закону. Из условий задачи следует, что систематическая ошибка измерения дальности отсутствует, следовательно

$$M[X] = 0, \text{ а } \sigma[X] = 25 \text{ м.}$$

Событие, состоящее в том, что ошибка измерения дальности по абсолютной величине не превосходит 20 м, равносильно тому, что случайная величина X заключена в интервале $-20 < X < 20$.

Вероятность этого события равна

$$P[-20 < X < 20] = \Phi^*\left(\frac{20}{25}\right) - \Phi^*\left(-\frac{20}{25}\right) = 0,576.$$

ПРИМЕР 2

Измерительный прибор имеет среднюю квадратическую ошибку 50 м, систематические ошибки отсутствуют. Сколько необходимо провести измерений, чтобы с вероятностью не менее 0,9 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 7,0 м?

Решение. Ошибка измерения дальности представляет случайную величину X , распределенную по нормальному закону с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 50$ м. Найдём вероятность того, что при одном измерении ошибка измерения дальности не превзойдёт по абсолютной величине 7,0 м, по формуле

$$P[|X - m_x| < c] = 2\Phi^*\left[\frac{c}{\sigma_x}\right] - 1.$$

В конкретном случае

$$P[|X| < 7] = 2\Phi^*\left[\frac{7}{50}\right] - 1 = 0,1114.$$

В каждом опыте имеется два исхода: ошибка измерения дальности может превзойти 7,0 м или не превзойти. Вероятность того, что ошибка измерения дальности среди некоторого числа опытов не превзойдёт по абсолютной величине 7,0 м, выражается формулой

$$R_{1,n} = 1 - q^n,$$

где $q = 1 - P[|X| < 7] = 1 - 0,1114 = 0,8886$.

Вероятность $R_{1,n} = 0,9$ по условию задачи. Следовательно

$$0,9 = 1 - 0,8886^n \quad \text{или}$$

$$n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,8886}, \quad n = 20.$$

ПРИМЕР 3

Ошибка радиодальномера подчинена нормальному закону. Систематической ошибки радиодальномер не дает. Каково должно быть среднее квадратическое отклонение этой ошибки, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать отклонения измеренного значения дальности от истинного не более чем на 30 м?

Р е ш е н и е . Вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания на величину, не превосходящую значения ℓ , выражается формулой

$$P[|X - m_x| < \ell] = 2\Phi^*\left[\frac{\ell}{\sigma_x}\right] - 1.$$

Поскольку радиодальномер систематической ошибки не дает, то $m_x = 0$. По условию задачи задано $P[|X| < 30] = 0,9$. Значит

$$0,9 = 2\Phi^*\left[\frac{30}{\sigma_x}\right] - 1.$$

Отсюда

$$\Phi^*\left[\frac{30}{\sigma_x}\right] = \frac{1,9}{2} = 0,95.$$

По таблицам функции $\Phi^*(x)$ находим

$$\frac{30}{\sigma_x} = 1,65; \quad \sigma_x = 18,1 \text{ м.}$$

ЗАДАЧИ

8.1. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $a = 3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Написать плотность распределения X .

8.2. Написать плотность распределения нормально распределенной случайной величины X , зная, что $M[X] = 3$; $D[X] = 16$.

8.3. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соот-

ветственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

8.4. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x = 3$, $\sigma_x = 2$. Как изменится плотность распределения $W(x)$, если параметры примут значения $m_x = -3$, $\sigma_x = 4$?

8.5. Отклонение величины сопротивления резистора от номинального значения подчиняется нормальному закону распределения со средним значением 10 Ом, равным номинальному. Среднее квадратическое отклонение равно 200 Ом. Определить вероятность того, что наугад взятое сопротивление резистора будет отличаться от номинала более чем на 5%.

8.6. Конденсаторы с номинальным значением емкости 1000 пФ при рассортировке на производстве разделяются на три категории:

А — с отклонением от номинала не более чем на 1%;

В — с отклонением от номинала от 1 до 5%;

С — с отклонением от номинала более чем на 5%.

Определять, сколько процентов всех конденсаторов в массовом производстве попадет в категории А, В и С, если известно, что отклонение емкости от номинала подчиняется нормальному закону распределения со средним значением, равным номинальному. Среднее квадратическое отклонение равно 50 пФ.

8.7. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированных импульсов с заданным шагом квантования

Δ (Δ — наименьшая разность между двумя импульсами). На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону с плотностью распределения

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Если мгновенное значение шумов превышает половину шага квантования Δ , то при передаче сообщения возникает ошибка. Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования вероятность ошибки из-за шумов не превысит 0,1.

8.8. При массовом изготовлении некоторой детали установлено, что её длина X распределена нормально с параметрами $m_x = 25$ см и $\sigma_x = 0,2$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95 ?

8.9. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$. Задан интервал (α, β) , не включающий начало координат. При каком значении среднего квадратического отклонения σ вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) достигает максимума?

8.10. Нормальное распределение с плотностью
$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$
 усечено значением $x = \beta$, а значения, меньшие β , отброшены. Найти математическое ожидание и дисперсию этого усеченного распределения.

8.11. Скорость летательного аппарата измеряется при помощи некоторого прибора, ошибка которого подчинена нормальному закону. Каково должно быть среднее квадратическое отклонение σ_x этой ошибки, чтобы в 95% всех измерений ошибка в скорости не превосходила 5 м/с ?

8.12. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $\alpha = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10; 20)$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0; 10)$?

8.13. Возможный результат измерения длительности τ видеосигнала подчиняется нормальному закону распределения. Среднее квадратическое отклонение σ_τ метода измерения равно 0,001 с. Как следует выбрать число ε , чтобы с вероятностью 0,997 имело место неравенство $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$, где τ_0 — истинное значение длительности видеосигнала ?

8.14. Имеется случайная величина X , подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x . Требуется приблизительно заменить нормальный закон законом постоянной плотности в интервале (α, β) границы α, β подобрать так, чтобы сохранить неизменными

основные характеристики случайной величины X , математическое ожидание и дисперсию.

8.15. Мера точности определения дальности радиолокатором равна 0,02. Систематическая ошибка радиолокатора равна 2,5. Вероятность того, что ошибка попадет в некоторый интервал, симметричный относительно центра распределения, равна 0,697. Найти границы этого интервала, считая, что случайные ошибки подчинены нормальному закону.

8.16. Случайная величина X — ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мВ^2 . Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найти вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка X : а) превзойдет по модулю 6 мВ не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале 0,5 — 3,5 мВ.

8.17. Производится стрельба тремя независимыми выстрелами по цели, имеющей вид полосы (мост, автострада, взлетно-посадочная полоса). Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы; систематическая ошибка отсутствует; среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле, а также вероятности следующих событий при трех выстрелах:

А — хотя бы одно попадание в полосу;

В — не менее двух попаданий в полосу;

С — один снаряд попадет в полосу, один ляжет с недолетом и один с перелетом.

8.18. Регулятор обеспечивает постоянство напряжения в цепи. Напряжение подчиняется нормальному закону, причем его номинальное значение 26 В, а среднее квадратическое отклонение 3 В. При отклонении напряжения от номинала более чем на 0,4 В регулятор срабатывает. Определить вероятность срабатывания регулятора.

8.19. Каково должно быть среднее квадратическое отклонение, для того, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,6, что при обстреливании двух сомб на полосу шириной 40 м, середина которой совпадает с центром рассеяния, будет не менее одного попадания?

8.20. Самолет, предназначенный для подавления наземных РЛС с помощью бортового радиопеленгатора определяет направление на излучающий объект и выпускает в этом направлении две ракеты. Пеленгатор определяет направление на цель с ошибкой, распределенной по нормальному закону с нулевым средним и средним квадратичным $\sigma = 20'$. Ракета выводится на цель с помощью своей системы самонаведения, если ошибка пеленга не превышает $50'$. Если ракета выведена на цель, она поражает её с вероятностью $p = 0,9$. Найти вероятность поражения цели.

РАЗДЕЛ IX

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Совокупность двух случайных величин (X, Y) , рассматриваемых совместно, называется системой двух случайных величин. Система двух случайных величин (X, Y) геометрически интерпретируется как случайная точка с координатами (X, Y) на плоскости (рис.9.1) или как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X, Y) , составляющие которого представляют собой случайные величины X и Y (рис.9.2)

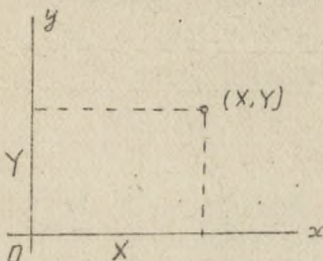


Рис.9.1

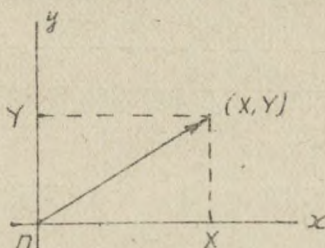


Рис.9.2

Система случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ изображается случайной точкой или случайным вектором в пространстве n измерений.

Функцией распределения $F(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x, Y < y$

$$F(x, y) = P[(X < x), (Y < y)].$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованный квадрант с вершиной (x, y) (рис.9.3).

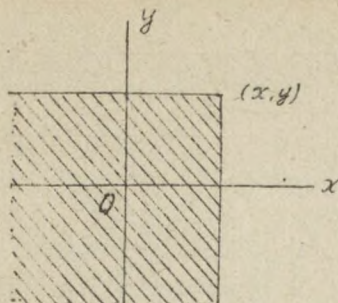


Рис. 9.3

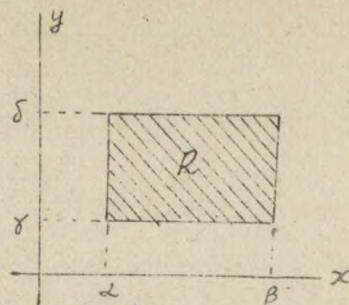


Рис. 9.4

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R со сторонами, параллельными осям координат, включающий свою нижнюю и левую границы, но не включающий верхнюю и правую (рис. 9.4), выражаются через функцию распределения формулой

$$P[(X, Y) \in R] = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

Плотностью распределения $W(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется предел отношения вероятности попадания случайной точки в элементарный участок плоскости, примыкающий к точке (X, Y) , к площади этого участка, когда его размеры стремятся к нулю. Плотность распределения выражается через функцию распределения формулой

$$W(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Элементом вероятности для системы двух случайных величин называется величина $W(x, y) dx dy$, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx , dy , примыкающий к точке (X, Y) .

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольную область $\mathcal{Q}$ выражается формулой

$$P[(X, Y) \in \mathcal{Q}] = \iint_{(\mathcal{Q})} W(x, y) dx dy.$$

Функция распределения системы выражается через плотность распределения формулой

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y W(x, y) dx dy.$$

Плотности распределения отдельных величин, входящих в систему, выражаются через плотность распределения системы формулами:

$$W_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) dy; \quad W_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) dx.$$

Теорема умножения плотностей распределения

$$W(x, y) = W_1(x) \cdot W_2(y/x)$$

или

$$W(x, y) = W_2(y) \cdot W_1(x/y)$$

Выражения для условных плотностей распределения через безусловные

$$W_2(y/x) = \frac{W(x, y)}{W_1(x)} \quad \text{при} \quad W_1(x) \neq 0,$$

$$W_1(x/y) = \frac{W(x, y)}{W_2(y)} \quad \text{при} \quad W_2(y) \neq 0.$$

Случайные величины (X, Y) называются независимыми, если условная плотность распределения одной из них не зависит от того, какое значение примет другая

$$W_1(x/y) = W_1(x) \quad \text{или} \quad W_2(y/x) = W_2(y).$$

Начальным моментом порядка $k+s$ системы (X, Y) называется величина

$$m_{k,s}[X, Y] = M[X^k Y^s], \quad \text{которая}$$

вычисляется по формулам:

а) для дискретных случайных величин

$$m_{k,s}[X,Y] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij},$$

где $p_{ij} = P[(X=x_i), (Y=y_j)]$;

б) для непрерывных случайных величин

$$m_{k,s}[X,Y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s w(x,y) dx dy.$$

Центральным моментом порядка $k+s$ системы (X, Y) называется величина

$$\mu_{k,s}[X,Y] = M[\tilde{X}^k \tilde{Y}^s], \quad \text{которая}$$

вычисляется по формулам:

а) для дискретных случайных величин

$$\mu_{k,s}[X,Y] = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij};$$

б) для непрерывных случайных величин

$$\mu_{k,s}[X,Y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s w(x,y) dx dy.$$

Математическое ожидание и дисперсия отдельных случайных величин, входящих в систему, определяются с помощью соотношений

$$m_x = m_{1,0}[X,Y] ; \quad m_y = m_{0,1}[X,Y] ;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mu_{2,0}[X,Y]} ; \quad \sigma_y = \sqrt{\mu_{0,2}[X,Y]} .$$

Корреляционным моментом K_{xy} двух случайных величин (X,Y) называется второй смешанный центральный момент

$$K_{xy} = \mu_{1,1}[X,Y] = M[\tilde{X}\tilde{Y}] ,$$

равный математическому ожиданию произведения центрированных случайных величин. Корреляционный момент вычисляется по формулам:

а) для дискретных случайных величин

$$K_{x,y} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij};$$

б) для непрерывных случайных величин

$$K_{xy} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) W(x, y) dx dy.$$

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Коэффициентом корреляции r_{xy} двух случайных величин (X, Y) называется безразмерная величина

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами. Случайные величины (X, Y) называются некоррелированными, если их корреляционный момент (или коэффициент корреляции) равен нулю. Для любых случайных величин

$$-1 < r_{xy} < +1.$$

Нормальный закон распределения для двух случайных величин (X, Y) имеет плотность распределения вида

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]},$$

где m_x, m_y — математические ожидания случайных величин X, Y ; σ_x, σ_y — их средние квадратические отклонения; r — их коэффициент корреляции.

Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, некоррелированность равносильна независимости. Если случайные величины (X, Y) некоррелированы (независимы), то

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}.$$

В этом случае оси Ox, Oy называются главными осями рассеивания, а σ_x, σ_y — главными средними квадратическими отклонениями.

Если при этом $m_x = m_y = 0$, то нормальный закон принимает канонический вид

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в прямоугольник R (рис. 9.4) с осями, параллельными главным осям рассеивания, выражается формулой

$$P[(X, Y) \in R] = \left[\Phi^*\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right) \right] \cdot \left[\Phi^*\left(\frac{\delta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi^*\left(\frac{\gamma - m_y}{\sigma_y}\right) \right].$$

Эллипсом рассеивания называется эллипс, во всех точках которого плотность распределения $W(x, y)$ нормального закона постоянна: $W(x, y) = \text{const}$. Полуоси эллипса пропорциональны главным средним квадратическим отношениям

$$a = k\sigma_x, \quad b = k\sigma_y.$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в область E_k , ограниченную эллипсом рассеивания, равна

$$P[(X, Y) \in E_k] = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}},$$

где k — размеры полуосей эллипса в средних квадратических отклонениях.

ПРИМЕР I

Дана плотность распределений системы случайных величин X и Y :

$$W(x, y) = 0,5 \sin(x+y), \quad (0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}), \quad (0 \leq Y \leq \frac{\pi}{2}).$$

Определить: а) функцию распределения $F(x, y)$; б) математические ожидания X и Y .

Решение. Функция распределения выражается через плотность распределения с помощью соотношения

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{xy} W(x, y) dx dy.$$

В конкретном случае:

1) $F(x, y) = 0$, если $x < 0$ или $y < 0$.

Это следует из определения функции распределения

$$F(x, y) = P[X < x, Y < y].$$

Случайные величины X и Y не могут принимать отрицательных значений, поэтому при $x < 0$ или $y < 0$ правая часть последнего равенства представляет собой вероятность невозможного события.

2) Если $0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq Y < \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^y \int_0^x 0,5 \sin(x+y) dx dy \\ &= -0,5 \int_0^y [\cos(x+y) - \cos x] dx = 0,5 [\sin x + \sin y - \sin(x+y)]. \end{aligned}$$

3) Если $x > \frac{\pi}{2}$, а $0 < y < \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^y \int_{\pi/2}^x 0,5 \sin(x+y) dx dy = \\ &= 0,5 \int_0^y \{-\cos(x+y)\} \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} dy = 0,5 (1 + \sin y - \cos y). \end{aligned}$$

4) Если $y > \frac{\pi}{2}$, а $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^{\pi/2} 0,5 \sin(x+y) dx dy = \\ = 0,5 \int_0^x \{-\cos(x+y)\}_0^{\pi/2} dy = 0,5(1 + \sin x - \cos x).$$

5) Если $y > \frac{\pi}{2}$ и $x > \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x, y) = \iint_{\pi/2}^{\pi/2} 0,5 \sin(x+y) dx dy = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины X выражается формулой

$$M[X] = m_{\cdot 0}[X, Y].$$

В конкретном случае

$$M[X] = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \cdot 0,5 \sin(x+y) dx dy = \\ = 0,5 \int_0^{\pi/2} x \{-\cos(x+y)\}_0^{\pi/2} dy = \pi/4.$$

Аналогично

$$M[Y] = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} y \cdot 0,5 \sin(x+y) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

ПРИМЕР 2

Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $m_x = 26$, $m_y = -12$ и их корреляционная матрица

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{vmatrix}.$$

Определить плотность распределения системы (X, Y) .

Решение. Плотность распределения двух нормальных случайных величин (X, Y) имеет вид

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\tau^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\tau^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\tau(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

По известной корреляционной матрице можно определить σ_x , σ_y и τ . Действительно, на главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии случайных величин. Следовательно, $\sigma_x = \sqrt{196} = 14$, $\sigma_y = \sqrt{169} = 13$. Элементы матрицы $K_{12} = K_{21}$ представляют собой корреляционный момент случайных величин (X, Y) . Отсюда следует, что

$$\tau_{xy} = \frac{K_{12}}{\sigma_x\sigma_y} = -\frac{91}{13 \cdot 14} = -\frac{1}{2}.$$

Окончательно плотность распределения системы (X, Y) запишем в виде

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot 91 \cdot \sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196} + \frac{(x-26)(y+12)}{182} + \frac{(y+12)^2}{169}\right]}.$$

ПРИМЕР 3

Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости с параметрами

$$m_x = 1; \quad m_y = -1; \quad \sigma_x = 1; \quad \sigma_y = 2; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Найти вероятность того, что случайная точка попадет внутрь области D , ограниченной эллипсом

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Решение. Уравнение эллипса рассеивания, когда центр рассеивания имеет координаты $(\bar{x}, \bar{y})$, записывается в виде

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{(\kappa\sigma_x)^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{(\kappa\sigma_y)^2} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением эллипса, ограничивающего область D , замечаем, что она ограничивается единичным эллипсом рас-

сеивания E , с полуосями, равными средним квадратическим значениям $a = \sigma_x = 1$, $b = \sigma_y = 2$, т.е. $k=1$. Вероятность попадания в эту область находится по формуле

$$P[(X, Y) \in E_k] = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

В конкретном случае

$$P[(X, Y) \in E_1] = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,393.$$

ЗАДАЧИ

9.1. По цели производится четыре независимых выстрела, вероятность попадания при одном выстреле равна p . Определить таблицу распределения системы (X, Y) и её числовые характеристики, если X — число попаданий в цель, а Y — число промахов.

9.2. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X — число попаданий первого стрелка; Y — второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1 , для второго стрелка — p_2 . Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

9.3. Плотность распределения $w(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$w(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & \text{внутри эллипса} \\ 0 & \text{вне этого эллипса.} \end{cases} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

Доказать, что X и Y — независимые величины.

9.4. Имеются две независимые случайные величины (X, Y) , подчинённые каждая показательному закону

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad w(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ \mu e^{-\mu y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Написать выражения: а) плотности распределения системы; б) функции распределения системы (X, Y) .

9.5. В продукции завода брак вследствие дефекта А составляет 3%, а вследствие дефекта В — 4,5%. Годная продукция составляет 95%. Найти коэффициент корреляции дефектов А и В.

9.6. Случайные величины X и Y связаны соотношением $mX + nY = c$, где m , n и c — неслучайные величины ($m \neq 0$, $n \neq 0$). Найти: а) коэффициент корреляции r_{xy} ; б) отношение среднеквадратических отклонений σ_x/σ_y .

9.7. Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону: $M[X] = a$, $M[Y] = b$, $D[X] = D[Y] = \sigma^2$. Найти радиус круга с центром в точке (a, b) , вероятность попадания в который случайной точки (X, Y) равна 0,997.

9.8. Плотность распределения системы случайных величин X и Y имеет вид

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1)}.$$

Определить, зависимы или независимы случайные величины X и Y .

9.9. Дана корреляционная матрица системы случайных величин (X_1, X_2, X_3)

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{vmatrix}.$$

Составить нормированную корреляционную матрицу $\|z_{ij}\|$.

9.10. Имеются независимые случайные величины X, Y . Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = \sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале $(0, 1)$. Написать выражения для плотности распределения $w(x, y)$ и функции распределения $F(x, y)$ системы (X, Y) .

9.11. Система двух случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_x = 4$; $m_y = 6$; $\sigma_x = 5$; $\sigma_y = 2$; $\rho_{xy} = 0,8$. Написать выражение для плотности распределения системы.

9.12. Прибор состоит из двух блоков. Время исправной работы каждого блока есть случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром λ_1 для первого блока и λ_2 для второго. Оба блока, безусловно, необходимы для работы прибора. Найти вероятность того, что за время T прибор не выйдет из строя, если блоки отказывают независимо.

9.13. Независимые случайные величины X, Y распределены по нормальным законам с параметрами

$$m_x = 2; m_y = -3; \sigma_x = 1; \sigma_y = 2.$$

Вычислить вероятности следующих событий:

- а) $(X < m_x)(Y < m_y)$; б) $X < 3$; в) $Y < X - 5$;
 г) $|X| < 1$; д) $(|X| < 1)(|Y| < 2)$.

9.14. Система случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону с числовыми характеристиками $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 10$, $\rho_{xy} = 0$. Определять вероятность того, что: а) $X < Y$; б) $X > 0, Y < 0$.

9.15. Случайный вектор (X, Y) с неотрицательными компонентами имеет функцию распределения

$$F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}, \quad x > 0, y > 0.$$

Найти математическое ожидание и корреляционную матрицу этого вектора. Зависимы или независимы его компоненты?

9.16. Мишень состоит из четырех концентрических окружностей радиусом 10, 20, 30 и 40 см. Попадание в "яблочко" оценивается в 5 баллов, в каждое из трех колец — соответственно в 4, 3 и 2 балла. Задание считается выполненным, если после трех выстрелов получено

не менее 7 баллов, и оценивается на отлично, если получено более 12 баллов. Какова вероятность выполнить задание при круговом рассеянии с вероятным отклонением 20 см? Какова вероятность получить при этом отличную оценку? Центр рассеивания совпадает с центром мишени.

9.17. Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}.$$

Найти вероятность попадания точки (X, Y) в квадрат R , сторона которого равна двум и направлена под углом 45° к осям координат.

9.18. Плотность распределения системы двух независимых величин (X, Y) имеет вид

$$W(x, y) = K e^{-\left[\frac{(x-4)^2}{50} + (y+6)^2\right]}.$$

Найти коэффициент K , числовые характеристики системы. Определить вероятность совместного выполнения двух неравенств

$$-10 < X < 10, \quad -10 < Y < 6.$$

9.19. Производится стрельба по точечной (малоразмерной) цели снарядом, зона разрушительного действия которого представляет собой круг радиуса Z . Рассеивание точки попадания снаряда круговое, с параметрами $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 2Z$ (центр рассеивания совпадает с целью). Сколько выстрелов нужно произвести для того, чтобы разрушить цель с вероятностью $P = 0,9$.

9.20. Положение случайной точки (X, Y) равновероятно в любом месте круга радиуса R , центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность распределения и функцию распределения каждой из прямоугольных координат. Являются ли случайные величины X и Y зависимыми?

9.21. В радиолокационной системе с разнесенным приёмом (рис. 9.5) приёмники находятся на таких расстояниях друг от друга, что сигналы X , Y и Z статистически независимы. Законы распределения вероятностей для сигналов X , Y и Z нормальные

с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = 3$, $\sigma_y^2 = 1,2$.
Найти коэффициент корреляции для напряжений U и V .

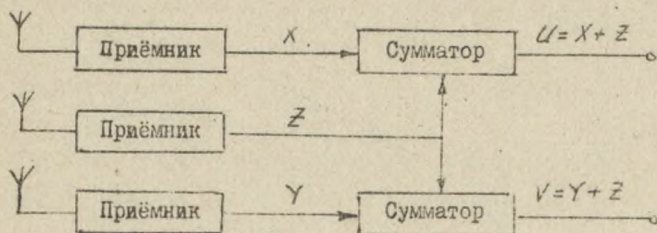


Рис. 9.5

9.22. Плотность распределения системы двух случайных величин (X, Y) задана в виде

$$W(x, y) = A e^{-ax^2 + bxy - cy^2} \quad (a > 0, c > 0).$$

Определить закон распределения $W_1(x)$ и $W_2(y)$. При каких условиях X и Y являются независимыми случайными величинами.

9.23. Сообщение на входе линии связи может с одинаковой вероятностью принимать одно из двух возможных значений: $x_1 = -1B$ или $x_2 = +1B$. На выходе линии установлен вольтметр, ошибка измерения которого распределена нормально с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением $0,5B$. Показание вольтметра равно $0,75B$. Найти условные вероятности сообщений x_1 и x_2 .

9.24. Сообщение X на входе линии связи есть случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 10B$. Сигнал на выходе линии $Y = X + Z$, где помеха Z — случайная величина, независимая от X и имеющая нормальное распределение с параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1B$. Указать наиболее вероятное значение переданного сообщения $\hat{x}$, если сигнал на выходе линии равен $7B$?

РАЗДЕЛ X

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть X — непрерывная случайная величина, задана её плотность распределения $W(x)$. Известно, что другая случайная величина Y связана с ней функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X),$$

где φ — дифференцируемая функция, монотонная на всем участке возможных значений аргумента X . Тогда плотность распределения случайной величины Y выражается формулой

$$g(y) = W[x = \psi(y)] \cdot |\psi'(y)|,$$

где $\psi(\cdot)$ — функция, обратная по отношению к $\varphi(\cdot)$.

Если φ — функция немонотонная, то обратная функция неоднозначна и плотность распределения случайной величины определяется в виде суммы столькох слагаемых, сколько значений (при данном y) имеет обратная функция

$$g(y) = \sum_{i=1}^k W[x = \psi_i(y)] \cdot |\psi_i'(y)|,$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y), \dots, \psi_k(y)$ — значения обратной функции для данного y .

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — система непрерывных случайных величин, задана их плотность совместного распределения $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Известно, что система новых случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ связана с системой старых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ системой уравнений:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$\vdots$$

$$y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Разрешая эту систему уравнений относительно старой системы случайных величин, получим

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\&\vdots \\x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Будем предполагать, что система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, а также система обратных функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ являются однозначными.

Тогда плотность распределения системы новых случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ выражается формулой

$$W_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = W_1[x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, \dots, x_n = \varphi_n] \cdot |J|,$$

где J — якобиан преобразования, представляющий собой функциональный определитель, элементами которого являются производные от старых величин по новым:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Пусть количество старых случайных величин равно n : $X_1, X_2, \dots, X_n$, а количество новых случайных величин равно m : $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$. В этом случае для решения поставленной задачи выравнивают количество новых и старых случайных величин путём введения $(n - m)$ фиктивных новых случайных величин $Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots, Y_n$, заданных в виде произвольных функций от старых случайных величин. Тогда задача сводится к уже решенной и плотность распределения системы новых случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ выражается формулой

$$W_{\Sigma}(y_1, \dots, y_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1 = \psi_1, \dots, x_n = \psi_n) \cdot |J| \, dy_{m+1} \, dy_{m+2} \dots dy_n.$$

В частности, плотность распределения суммы двух случайных величин

$$Z = X + Y$$

выражается любой из формул

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, z-x) \, dx;$$

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(z-y, y) \, dy,$$

где $W(x, y)$ — плотность распределения системы (X, Y) .
Плотность распределения произведения $Z = XY$ находится по формуле

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, \frac{z}{x}) \frac{1}{|x|} \, dx.$$

Если X — дискретная случайная величина, ряд распределения которой задан, а величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i,$$

а дисперсия выражается формулой

$$D_y = D[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_y^2.$$

Для непрерывных случайных величин аналогичные формулы имеют вид

$$m_y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) W(x) \, dx;$$

$$D_y = D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x)]^2 W(x) \, dx - m_y^2.$$

Если (X, Y) — система дискретных случайных величин, распределение которой характеризуется вероятностями $p_{ij} = P[X=x_i, Y=y_j]$,

а случайная величина Z функционально связана с системой (X, Y) $Z = \varphi(X, Y)$, то математическое ожидание величины Z равно

$$m_z = M[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$$

и дисперсия выражается формулой

$$D_z = D[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j)]^2 p_{ij} - m_z^2.$$

Для непрерывных случайных величин аналогичные формулы имеют вид

$$m_z = M[\varphi(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) w(x, y) dx dy;$$

$$D_z = D[\varphi(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x, y)]^2 w(x, y) dx dy - m_z^2.$$

Если c — неслучайная величина, то

$$M[c] = c; \quad D[c] = 0.$$

Если c — неслучайная величина, а X — случайная, то

$$M[cX] = c M[X], \quad D[cX] = c^2 D[X].$$

Т е о р е м а с л о ж е н и я м а т е м а т и - ч е с к и х о ж и д а н и й

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y]$$

и вообще

$$M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i].$$

Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b,$$

где a_i и b — неслучайные коэффициенты, равно той же линейной функции от их математических ожиданий

$$m_y = M \left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b \right] = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b,$$

где $m_{x_i} = M[X_i]$ ($i = 1, \dots, n$).

Математическое ожидание произведения двух случайных величин X, Y выражается формулой

$$M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy},$$

где K_{xy} — корреляционный момент величин X и Y .

Т е о р е м а у м н о ж е н и я м а т е м а т и - ч е с к и х о ж и д а н и й

Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин X, Y равно произведению их математических ожиданий

$$M[XY] = M[X]M[Y].$$

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий

$$M\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n M[X_i].$$

Дисперсия суммы двух случайных величин выражается формулой

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

Дисперсия суммы нескольких случайных величин выражается формулой

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} K_{x_i x_j},$$

где k_{x_i, x_j} — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j .

Т е о р е м а с л о ж е н и я д и с п е р с и й

Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин X, Y равна сумме их дисперсий

$$\mathcal{D}[X+Y] = \mathcal{D}[X] + \mathcal{D}[Y]$$

и вообще, для некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\mathcal{D}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}[X_i].$$

Дисперсия линейной функции нескольких случайных величин

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b,$$

где a_i, b — не-случайные величины, выражается формулой

$$\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathcal{D}[X_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j k_{x_i, x_j}.$$

П Р И М Е Р I

Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X_i	- 2	- 1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

Р е ш е н и е . Задать закон распределения случайной величины — значит, задать её возможные значения и вероятности, с которыми их принимает случайная величина. Возможные значения функции мы получим, если подставим возможные значения аргумента. В данном примере аргумент X имеет четыре возможных значения, причем две пары значений отличаются лишь знаком. Отличающиеся лишь знаком возмож-

ные значения X дают одно и то же значение случайной величины Y , причем вероятность того, что Y примет это возможное значение, равна сумме вероятностей того, что случайная величина X примет соответствующие возможные значения, отличающиеся знаком

$$y_1 = (\pm 2)^2 = 4, \quad y_2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

Отсюда ряд распределения случайной величины Y имеет вид

y_j	I	4
p_j	0,5	0,5

ПРИМЕР 2

Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью

$$W(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти плотность распределения обратной величины $Y = \frac{1}{X}$.

Решение. Плотности распределения функции Y и аргумента X связаны между собой соотношением

$$W_2(y) = W[x = \varphi(y)] \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|.$$

В нашем случае $x = \frac{1}{y}$ и $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = \left| -\frac{1}{y^2} \right|$.

Следовательно

$$W_2(y) = \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

случайная величина Y также распределена по закону Коши.

ПРИМЕР 3

Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0,2)$, случайная величина Y равномерно распределена в интервале $(-1,1)$; X и Y независимы. Найти плотность распределения величины $Z = X + Y$.

Решение. Плотность распределения суммы двух случайных величин X и Y выражается формулой

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, z-x) dx.$$

Поскольку X и Y независимы, то последнюю формулу запишем в виде

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x) W_2(z-x) dx.$$

Известно, что

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2, \\ 0 & x < 0, x > 2, \end{cases}$$

$$W_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < +1, \\ 0 & x < -1, x > +1. \end{cases}$$

Подынтегральное выражение в плотности $W(z)$ будет отличным от нуля при одновременном выполнении неравенств

$$\begin{aligned} 0 &< x < 2, \\ -1 &< z-x < +1, \end{aligned}$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 0 &< x < 2, \\ z-1 &< x < z+1. \end{aligned}$$

Если $z < -1$, то эта система неравенств является несовместной и, следовательно, $W(z) = 0$. Если $-1 < z < +1$, то указанная система неравенств совместно выполняется при $0 < x < z+1$. Отсюда

$$W(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{z+1}{4}.$$

Если $+1 < z < 3$, то написанная выше система неравенств сов-

местно выполняется при

$$z-1 < x < 2.$$

Отсюда

$$W(z) = \int_{z-1}^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{3-z}{4}.$$

Наконец, если $z > 3$, то исходная система неравенств является несовместной и $W(z) = 0$.

Таким образом

$$W(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -1, \\ \frac{z+1}{4} & \text{при } -1 < z < +1, \\ \frac{3-z}{4} & \text{при } +1 < z < 3, \\ 0 & \text{при } z > 3. \end{cases}$$

ПРИМЕР 3

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$W(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda = 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{-X}$.

Решение. Математическое ожидание функции от случайного аргумента выражается формулой

$$m_y = \int_0^{\infty} e^{-x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(1+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Дисперсия функции от случайного аргумента выражается формулой

$$\begin{aligned} D_y &= \int_0^{\infty} e^{-2x} \lambda e^{-\lambda x} dx - m_y^2 = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(2+\lambda)x} dx - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \\ &= \frac{\lambda}{(2+\lambda)} - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \frac{\lambda}{(2+\lambda)(1+\lambda)^2}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4.

Для системы двух случайных величин (X, Y) известны математические ожидания $m_x = 1$, $m_y = 2$ и корреляционная матрица

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить математическое ожидание случайной величины

$$Z = X^2 + 3Y^2 + 2XY + 1.$$

Решение. Пользуясь теоремой сложения математических ожиданий, получим $M[Z] = M[X^2] + 3M[Y^2] + 2M[XY] + 1$,

$$M[X^2] = \sigma_x^2 + m_x^2, \quad M[Y^2] = \sigma_y^2 + m_y^2,$$

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}.$$

По главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии случайных величин, т.е. $\sigma_x^2 = 3$, $\sigma_y^2 = 4$. Элемент K_{12} корреляционной матрицы есть корреляционный момент случайных величин X и Y , т.е. $K_{xy} = -1$. Следовательно

$$M[X^2] = 3 + 1 = 4; \quad M[Y^2] = 4 + 4 = 8;$$

$$M[XY] = 1 \cdot 2 - 1 = 1;$$

$$M[Z] = 4 + 3 \cdot 8 + 2 + 1 = 31.$$

ЗАДАЧИ

10.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X_i	3	6	10
P_i	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X + 1$.

10.2. Определить закон распределения резонансной частоты колебательного контура, если его емкость изменяется по нормальному закону распределения

$$W(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(c-c_0)^2}{2\sigma^2}},$$

где c_0 — номинальное значение емкости. Индуктивность контура полагаем постоянной.

10.3. Случайная величина X распределена по закону Релея с плотностью

$$W(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти закон распределения величины $Y = e^{-X^2}$.

10.4. Найти плотность распределения случайной величины $Z = aX^2$, если X — нормальная случайная величина, $M[X] = 0$,

$$D[X] = \sigma^2, \quad a > 0.$$

10.5. Определить плотность распределения случайной величины $Y = |X|$, если X — нормальная случайная величина, у которой $m_x = 0$ а среднее квадратическое значение равно σ .

10.6. Найти плотность распределения модуля радиуса-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если:

- а) случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным σ .
б) X и Y — независимые нормальные случайные величины, плотность распределения которых

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + y^2}{2\sigma^2}}.$$

10.7. Дан случайный вектор (X, Y) с плотностью $w(x, y)$.
Найти плотность вектора (u, v) , где

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

10.8. На плоскости даны два независимых случайных вектора: орт с фазой, равномерно распределенной в промежутке $(0, 2\pi)$, и произвольный случайный вектор. Как распределена фаза суммы этих векторов?

10.9. Дана последовательность $\{z_i\}$ независимых случайных величин, принимающих значение 0 и 1 с вероятностями 1/2. Найти распределение случайной величины
$$X = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{2^i}.$$

10.10. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью распределения $w(x)$. Найти закон распределения случайной величины

$$Y = \operatorname{sign} X = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

и её числовые характеристики.

10.11. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X , распределенную равномерно в интервале $(0, 1)$, чтобы получить случайную величину Y , распределенную по показательному закону

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (\text{при } y > 0)?$$

10.12. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2^X$.

10.13. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Y = 1 - X^2.$$

10.14. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны соответственно m_x и σ_x^2 . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = -X$.

10.15. Система случайных величин X, Y подчинена закону нормального распределения

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}.$$

Определить математическое ожидание случайной величины

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

10.16. Случайная величина X распределена с постоянной плотностью в интервале $(1; 2)$

$$W(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{при } x \notin (1, 2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Y = 1/X.$$

10.17. Имеются две случайные величины X и Y , связанные соотношением $Y = 2 - 3X$. Числовые характеристики величины X заданы: $m_x = -1$, $\sigma_x^2 = 4$. Определить: а) математическое ожидание и дисперсию величины Y ; б) корреляционный момент и коэффициент корреляции величины X и Y .

10.18. Показать, что для одностороннего нормального распределения

$$W_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Среднее значение и дисперсия соответственно равны

$$m_x = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad \sigma_x^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2.$$

10.19. Случайная величина X задана плотностью распределения $W(x) = \cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$, вне этого интервала $W(x) = 0$. Найти математическое ожидание функции $Y = X^2$.

10.20. Имеется две независимые случайные величины X и Y . Величина X распределена по нормальному закону

$$W(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}.$$

Величина Y распределена равномерно в интервале $(0, 2)$. Определить: а) $M[X+Y]$; б) $M[XY]$; в) $M[X^2]$;

г) $M[X-Y^2]$; д) $D[X+Y]$; е) $D[X-Y]$.

10.21. Какому условию должны удовлетворять независимые случайные величины X и Y , чтобы $D[XY] = D[X] \cdot D[Y]$?

10.22. Светящаяся точка, изображающая наблюдаемый объект на круглом экране радиолокатора, может случайным образом занимать любое положение на экране (плотность распределения постоянна). Диаметр экрана равен $2R$. Найти математическое ожидание расстояния R от светящейся точки до центра экрана.

10.23. На оси абсцисс имеются два соседних отрезка длиной по единице; в пределы одного из них случайным образом попадает точка X , в пределы другого — точка Y , причем координаты точек X и Y независимы. Плотность распределения каждой из случайных величин X, Y в пределах соответствующего отрезка постоянна.

Найти математическое ожидание, дисперсию и второй начальный момент расстояния R между ними.

10.24. Случайные величины X и Y имеют числовые характеристики $m_x=1$, $m_y=2$, $\sigma_x=0,01$, $\sigma_y=0,04$, $\gamma_{xy}=0,5$. Определить математическое ожидание случайной величины

$$Z = 2XY + 1.$$

10.25. Имеется случайная величина X с плотностью распределения $W(x)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

10.26. Найти математическое ожидание m_{xy} и дисперсию σ_{xy}^2 произведения двух независимых случайных величин X и Y , равномерно распределенных соответственно в промежутках (a, b) и (c, d) .

10.27. Число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый промежуток времени, подчинено закону Пуассона с параметром α . Длительность ремонта машины зависит от числа m вышедших из строя элементов и определяется формулой $t_m = \tau(1 - e^{-\alpha m})$. Определить математическое ожидание длительности ремонта и ущерба, причиненного простоем машины, если ущерб пропорционален квадрату длительности ремонта. $S_m = k t_m^2$.

10.28. Стрельба по некоторой цели L начинается в момент её обнаружения и продолжается вплоть до некоторого момента t^* , в который цель покидает зону обстрела и становится уже недоступной. Момент T , в который обнаруживается цель, представляет собой случайную величину, распределенную с постоянной плотностью в промежутке от 0 до t^* . Число выстрелов, которое может быть осуществлено по цели за время её обстрела $t^* - T$, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $\alpha = \lambda(t^* - T)$. При каждом выстреле цель поражается с вероятностью P . Найти полную вероятность поражения цели с учетом случайности момента обнаружения.

10.29. Угол упреждения Y при воздушной стрельбе определяется формулой

$$Y = \frac{U}{v} \sin X,$$

где U — скорость цели; v — скорость полета снаряда; X — курсовой угол цели. Найти математическое ожидание m_y и среднее квадратичное отклонение σ_y угла упреждения, если X — случайная величина, равномерно распределенная в интервале от 0 до $\pi/2$;

U — случайная величина, равномерно распределенная в интервале 600–700 км/час, а $v \approx 1$ км/см и постоянна (U и X независимы).

10.30. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

10.31. Система случайных величины (X, Y) имеет следующие характеристики: $m_x = 0$, $m_y = 2$, $\sigma_x^2 = 2$, $\sigma_y^2 = 1$ и коэффициент корреляции $r_{xy} = -1/\sqrt{2}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Z = 2X - 3Y.$$

10.32. Случайная величина X имеет математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 ; величина Y связана с X соотношением

$$Y = 3X - 2,$$

величина Z , в свою очередь, связана с X соотношением

$$Z = 3 - 4X.$$

Определять: а) корреляционный момент величин X и Z ; б) коэффициент корреляции Y и Z .

ОТВЕТЫ

РАЗДЕЛ I. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$\text{I.1. } P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{3}; P(C) = \frac{5}{6}; \quad \text{I.2. } P = 0,3;$$

$$\text{I.3. } P = \frac{ac}{(a+b)(c+d)}; \quad \text{I.4. } P = \frac{1}{15}; \quad \text{I.5. } P = \frac{C_a^2 C_b^3}{C_{a+b}^5};$$

$$\text{I.6. } P = \frac{C_b^5 \cdot C_{k-b}^{7-5}}{C_k^7}; \quad \text{I.7. а) } P_I = \frac{10}{19}; P_2 = \frac{135}{323};$$

$$\text{I.8. } P = \frac{a \cdot b \cdot c}{C_{a+b+c}^3}; \quad \text{I.9. } P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$\text{I.10. } P = \frac{1}{8}; \quad \text{I.11. } P = \frac{a}{a+b}; \quad \text{I.12. } P = \frac{3}{4};$$

$$\text{I.13. } P = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}; \quad \text{I.14. } P_I = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4; P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24};$$

$$\text{I.15. } P = \frac{1}{15}; \quad \text{I.16. } P = \frac{1}{n!}; \quad \text{I.17. } P = \frac{1}{120};$$

$$\text{I.18. } P(A) = \frac{1}{A_{30}^5}, \text{ где } A_{30}^5 - \text{число размещений из 30 по 5 букв};$$

$$\text{I.19. а) } P = \frac{1}{32}; б) P = \frac{1}{128}; \quad \text{I.20. } P = 0,1; \quad \text{I.21. } P = \frac{1}{54};$$

$$\text{I.22. } P = \frac{k!}{k^e (k-e)!}; \quad \text{I.23. } P = \frac{1}{e^{k-1}}; \quad \text{I.24. а) } P = 0,3024;$$

$$б) \frac{1}{32}; \quad \text{I.25. } P = \frac{1}{720}; \quad \text{I.26. } P = \frac{a}{a+b}; \quad \text{I.27. } P = \frac{1}{C_N^M};$$

$$\text{I.28. } P = \frac{3}{16}; \quad \text{I.29. } P(A) = \frac{1}{216}; P(B) = \frac{1}{36}; P(C) = \frac{5}{54};$$

$$\text{I.30. } P = \sum_{i=1}^n \frac{C_m^i C_n^i}{C_{m+n}^{2i}}; \quad \text{I.31. а) } P = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}; б) P = \frac{2^n}{C_{2n}^n};$$

$$\text{I.32. } P = \frac{1}{6}; \quad \text{I.33. } P = \frac{1}{10}; \quad \text{I.34. } \rho = \frac{\tau}{T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right);$$

$$\text{I.35. } P(A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0^2 - (U_5 U_n)^2}{U_5 \cdot U_n}} & \text{при } |U_5 - U_n| < U_0, \\ 0 & \text{при } |U_5 - U_n| \geq 0, \end{cases}$$

где U_5 - амплитуда сигнала; U_n - амплитуда помехи;

$$\text{I.36. } P = 0,2.$$

РАЗДЕЛ II. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- 2.1. $P = 0,38$; 2.2. $P = 0,51$; 2.3. $P = 0,98$; 2.4. $P = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)$;
 2.5. $P = 0,57$; 2.6. $P = 1 - (1 - q_1)^n (1 - q_2)^{n_2} (1 - q_3)^{n_3}$;
 2.7. $P = 1 - (1 - P)^{n_2}$; 2.8. $P(A) = 1 - (1 - P)^{m_2}$; $P(B) = [1 - (1 - P)^n]^m$;
 2.9. $P_1 P_2$; 2.10. $P = 0,36$; 2.11. $P = 0,0008$; 2.12. $P = 0,008$;
 2.13. $P = 0,72$; 2.14. $P = 0,24$; 2.15. а) $P = 0,99^5$; б) $P = 0,01 \times$
 $\times 0,99^4$; в) $P = 0,05 \cdot 0,99^4$; 2.16. $\rho = (\kappa - 1) \rho^2 (1 - \rho)^{\kappa - 2}$;
 2.17. $\rho = \frac{a\beta}{a^2 + 2a\beta + \beta^2 a - \beta}$; 2.18. $\rho = \frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$; 2.19. $P = 1 - (0,6)^3$;
 $0,4$; $0,6 \cdot 0,4$; $(0,6)^2 0,4$; 2.20. $P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7}$;
 2.21. $P(1 - P)^{n-1}$; 2.22. $P = \frac{3}{10}$; 2.23. $P(A) = \frac{1}{(N!)^2}$; $P(B) = \frac{1}{N!}$;
 2.24. $P = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-k+1}$;
 2.25. $\rho = \left(\frac{C_a^2 C_{a+e}}{C_{a+e+c}^3} + \frac{C_a^3}{C_{a+e+c}^3} \right) + \left(\frac{C_e^2 C_{a+e}}{C_{a+e+c}^3} + \frac{C_e^3}{C_{a+e+c}^3} \right) + \left(\frac{C_c^2 C_{a+e}}{C_{a+e+c}^3} + \frac{C_c^3}{C_{a+e+c}^3} \right)$;
 2.26. $P = 0,9999$; 2.27. $P = 0,991$; 2.28. $P_1 = 1 - (1 - P_2 P_3)^2$;
 2.29. $P = 0,14$; 2.30. $P(A) = P P_1 + (1 - P) \alpha$; $P(B) = (1 - P) \alpha$;
 $P(C) = P(1 - P_1)$; 2.31. $P = 2(1 - P_1) P_1 (1 - P_2)^2 + 2 P_1^2 (1 - P_2) P_2 +$
 $+ P_1^2 (1 - P_2)^2$; 2.32. $P = 0,54$; 2.33. $P = \frac{117}{812}$; 2.34. $P = \frac{n!}{n^n}$;
 2.35. $P_1 = 0,398$; $P_2 = 0,426$.

РАЗДЕЛ III. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

- 3.1. $P = 0,16$; 3.2. $P = 0,76$; 3.3. $P = 0,87$; 3.4. $P = 0,37$;
 3.5. $P = 0,375$; 3.6. $P = 0,139$; 3.7. $P = \frac{7}{8}$; 3.8. $P = 1 - [1 - (1 - p) \times$
 $\times P_0 - P P_1]^n$; 3.9. $P(B) = P \frac{P_1 + P_2 + 16 P_3}{3}$;
 $P(C) = P \left(1 - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \right) P_0$; 3.10. $P = 0,44$; 3.11. $P = 0,08$;

$$3.12. P = I - (PP_1 + (I-P)P_2)^N; \quad 3.13. P = \frac{a}{a+b}; \quad 3.14. P = 0,069;$$

$$3.15. P(A) = P_0 (I-P)^n + (I-P_0)np (I-p)^{n-1}; \quad 3.16. P = 5/8;$$

$$3.17. P(A) = \frac{I}{2} (I + p - q); \quad P(B) = \frac{I}{2} (I - p + q);$$

$$3.18. P = P, 708; \quad 3.19. P(A) = [P_1 P_2 + (1-P_1)(1-P_2)][q_1 q_2 + (1-q_1)(1-P_2)];$$

$$3.20. \rho = \frac{K(K-1)}{2n(2n-1)} + \frac{2K(2n-K)(K-1)}{2n(2n-1)(2n-2)}.$$

РАЗДЕЛ IV. ФОРМУЛА БАЙЕСА

$$4.1. P(H_1/A) = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}; \quad P(H_2/A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1};$$

$$P(H_3/A) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1};$$

$$4.2. P = 0,998; \quad 4.3. P = 0,3; \quad 4.4. P(H_1/A) = \frac{(1-P_1) \cdot P_2}{1 - P_1 P_2};$$

$$4.5. \text{Из второй группы}; \quad 4.6. P(H/A) = 0,475;$$

$$4.7. P(H_1/A) = \frac{P_1}{2P_0 + (P_1 + P_2)(1-P_0)};$$

$$P(H_2/A) = \frac{P_2}{2P_0 + (P_1 + P_2)(1-P_0)}; \quad P(H_3/A) = \frac{P_0[2 - (P_1 + P_2)]}{2P_0 + (P_1 + P_2)(1-P_0)};$$

$$4.8. P = \frac{6}{13}; \quad 4.9. \text{а) } P_I = 0,87; \quad \text{б) } P_2 = 0,13;$$

$$4.10. \frac{P P_1}{P P_1 + (1-P)P_2}; \quad 4.11. P = \frac{6}{7};$$

$$4.12. P(H_1/A) = \frac{(1-\tilde{P}_1)P_1^* \cdot P_1}{(1-\tilde{P}_1)P_1^* P_1 + (1-\tilde{P}_2)P_2^* P_2 + (1-\tilde{P}_3)P_3^* P_3};$$

$$4.13. \rho = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}} \left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)} \right];$$

$$4.14. \text{Пять бракованных изделий}; \quad 4.15.$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}};$$

$$4.16. P = 0,56.$$

РАЗДЕЛ V. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

5.1. $P = 0,073$; 5.2. $P_I = 0,375$; $P_2 = 0,312$; 5.3. а) $0,652$;
б) $0,194$; в) $0,264$; 5.4. $P = 0,00856$; 5.5. $P = 0,06$; 5.6. $P = 0,87$;

5.7. $P = \frac{7}{64}$; 5.8. $P = 0,999976$; 5.9. $P = \frac{63}{256}$; 5.10. 15000 ;

5.11. а) $P = 0,00422$; б) 2 ; 5.12. $P(A) = (1 - \rho\tau)^2$;

$P(B) = C_n^2 (\rho\tau)^2 (1 - \rho\tau)^{n-2}$; $P(C) = 1 - (1 - \rho\tau)^{n-1} [1 - (1 - \rho\tau) + \rho\tau]$;

5.13. $P_I = 0,238$; $P_2 = 0,751$; 5.14. $P = 1 - (0,996)^{250}$;

5.15. $P = 0,972$; 5.16. $P(A) = C_N^3 [1 - (1 - \rho)^2]^3 (1 - \rho)^{2(N-3)}$;

$P(B) = 1 - (1 - \rho)^{2N} - N(1 - \rho)^{2(N-1)} [1 - (1 - \rho)^2]$;

5.17. $\rho = \rho^k + K(1 - \rho)\rho^{k-1} + \frac{K(K-1)}{2}(1 - \rho)^2 \rho^{k-2}$;

5.18. $\rho = C_M^k \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(\frac{N-1}{N}\right)^{M-k}$; 5.19. $n = 5$;

5.20. $\rho_{m,N} = C_N^m \left(\frac{nt}{N}\right)^m \left(1 - \frac{nt}{N}\right)^{N-m}$;

5.21. (См. предыдущую задачу). Вероятность того, что из остальных ($N-1$) абонентов ровно m занимают некоторые (различные) линии, равна $\rho = C_{N-1}^m \left(\frac{nt}{N}\right)^m \left(1 - \frac{nt}{N}\right)^{N-m-1}$;

5.22. $P = C_{90}^{25} (0,27)^{25} (0,73)^{65}$; 5.23. $P = 0,2$;

5.24. а) $P_I = 0,311$; б) $P_2 = 0,243$; 5.25. а) $P_{3,10} = C_{10}^3 \cdot 0,7^3$.

$0,3^7$; б) $R_{3,10} = 1 - \sum_{i=0}^2 C_{10}^i \cdot 0,7^i \cdot 0,3^{10-i}$.

5.26. Вероятность того, что в одном цикле обзора будет зарегистрирован сигнал от цели, равна $R_{k,n} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p_i^i (1 - p_i)^{n-i}$.

Вероятность того, что за N циклов сигнал будет зарегистрирован не менее m раз, равна

$$R_{m,N} = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} C_N^j \left[1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p_i^i (1 - p_i)^{n-i} \right]^j \cdot \left[\sum_{i=0}^k C_n^i p_i^i (1 - p_i)^{n-i} \right]^{N-m};$$

5.27. $p = \sum_{i=0}^{20} C_{20}^i p^i (1-p)^{20-i}$; 5.28. $P = 0,28$; 5.29. $P_{0,4} = 0,168$; $P_{1,4} = 0,394$; $P_{2,4} = 0,32$; $P_{3,4} = 0,106$; $P_{4,4} = 0,012$; $P = 0,3888$; 5.30. $n = 2$; 5.31. Число приборов n должно удовлетворять неравенству

$$(0,8)^n + n \cdot 0,2 (0,8)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{n-2} \leq 0,1.$$

РАЗДЕЛ УІ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1.

X_i	0	1
p_i	q	p

 $m_x = p$;
 $m_2[x] = p$; $D[x] = pq$;

6.2.

X_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

6.3.

X_m	0	1	...	m	...	n
p_m	p^n	$C_n^1 q p^{n-1}$	...	$C_n^m q^m p^{n-m}$	...	q^n

6.4. X_1 - случайное число бросков для баскетболиста, начавшего броски; X_2 - то же для второго баскетболиста;

$$\left. \begin{aligned} P(X_1 = m) &= 0,6^{m-1} \cdot 0,4 \\ P(X_2 = m) &= 0,6^{m-1} \cdot 0,4 \end{aligned} \right\} \text{ для всех } m \geq 1;$$

6.5. $p(k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$, $k = n, n+1, n+2, \dots$,

6.6.

Z_i	0	1/4	2/3	3/2	4	∞
p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

6.7.

X_i	1	2	3	...	i	...	n
p_i	q	pq	p^2q	...	$p^{i-1}q$	...	p^{n-1}

6.8. $P[X=m] = C_n^m p^m q^{n-m}$ для всех $0 \leq m \leq n$;

6.9.

X_i	1	2	3	...	k	...
P_i	0,1	0,09	0,081	...	$0,9^{k-1} \cdot 0,1$	...

6.10.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{6^n} \sum_{m=0}^{x-1} C_n^m 5^{n-m}, & \text{если } 0 < x \leq n \text{ и } x \text{ - целое} \\ \frac{1}{6^n} \sum_{m=0}^{[x]} C_n^m 5^{n-m}, & \text{если } 0 < x \leq n \text{ и } x \text{ - нецелое} \\ 1 & \text{при } x > n; \end{cases}$$

6.11. $m_x = p$; $\sigma_x^2 = p(1-p)$; $m_y = np$, $\sigma_y^2 = np(1-p)$;

6.12. $m_x = 2$; $D[X] = 4,8$;

6.14. а) $M[X_1] = 1,8$; б) $M[X_2] = 1,7$; в) $M[X_3] = 2,0$;
наименьшее среднее число взвешиваний будет при системе б);

6.15. $D[X] = 0,8$;

6.16. $M[X] = 8$;

6.17. $m_x = 5,4$; $\sigma_x = 0,73$;

6.18. $D_x = 0,495$;

$$6.19. m_x = 5; \quad 6.20. M(X) = 4,55; \quad 6.21. M[X] = \frac{n^2-1}{3n} \cdot a;$$

$$6.22. M[X] = 1 \cdot \frac{n \cdot m}{(n+m)(n+m-1)} + 2 \cdot \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{m}{n+m-2} + \\ \dots + n \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{(n+m)(n+m-1) \dots (m+1)} \cdot \frac{m}{n};$$

$$6.23. m_x = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{n}{n+n} \right)^i \frac{m}{n+n}; \quad D_x = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \left(\frac{n}{n+n} \right)^i \frac{m}{n+n} - m_x^2;$$

$$6.24. m_x = \sum_{i=1}^n i \left(\frac{n-1}{n} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{n}; \quad m_x = \sum_{i=1}^n i \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(n-j)}{n} \cdot \frac{1}{n-i};$$

$$6.25. \rho = 1 - e^{-10^4 \cdot 10^{-4}} = 1 - e^{-1};$$

$$6.26. \text{Вероятность отказа } \rho = 1 - e^{-\frac{15}{150}} = 1 - e^{-0,1}; \text{ Вероятность исправной работы } \rho = e^{-0,1}; \text{ Время исправной работы с вероятностью } 0,9 \quad 0,9 = e^{-\frac{t}{150}}; \quad t = -150 \ln 0,9.$$

РАЗДЕЛ УП. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

$$7.4. \text{ а) } P = \frac{1}{e}; \quad \text{ б) } w(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}};$$

$$7.5. \text{ б) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{ в) } m_x = \frac{1}{\mu}; \quad P(X < \frac{1}{\mu}) = 0,632;$$

$$7.6. \text{ а) } a = \frac{1}{\pi}; \quad \text{ б) } F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2};$$

$$\text{ в) } P[-1 < X < +1] = 1/2; \quad \text{ г) характеристики } m_x \text{ и } D_x \text{ не существуют, так как выражающие их интегралы расходятся};$$

$$7.7. M[X] = \frac{80}{3};$$

$$7.8. \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ 1 - \frac{1}{2^x - 1} & \text{при } x = 2, 3, \dots; \\ 1 - \frac{1}{2^{[x]}}, \text{ если } & x > 1 \quad \text{и } x \text{ не является} \\ & \text{целым числом. } [X] - \text{целая часть } x; \end{cases}$$

$$7.9. a) a = \frac{\lambda}{2}; \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & \text{при } x < 0; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$b) m_x = 0; \quad \sigma_x^2 = \frac{2}{\lambda^2};$$

$$7.10. P = \frac{2}{3}; \quad 7.11. P = e^{-\frac{2}{\sigma^2}}; \quad 7.12. x_0 \approx 3,46;$$

$$7.13. P = (1 - e^{-\frac{H^2}{4\sigma^2}})^2; \quad 7.14. W(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{при } 1 < x \leq 7; \\ 0 & \text{вне этого интервала;} \end{cases}$$

$$7.15. a) \quad W(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1/4 & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$$б) M[X] = 2; \quad \sigma_x^2 = 4/3; \quad в) P = 1/8; \quad 7.16. a) A_0 = 1/2;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad б) P = 0,866;$$

$$7.17. P[-1 < X < 1] = 1/3;$$

$$7.18. \rho_{2,3} = C_3^2 \left(\frac{\pi+2}{4\pi} \right)^2 \frac{3\pi-2}{4\pi}; \quad 7.19. M[X] = 0;$$

$$7.20. P = 0,6; \quad 7.21. P = 0,951; \quad 7.22. \sigma[X] = \frac{4}{3};$$

$$7.23. m_x = \frac{\rho}{4}; \quad \sigma_x^2 = \frac{\rho^2}{48}; \quad 7.24. m_x = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \sigma_x^2 = 6^2(2 - \frac{\pi}{2});$$

$$7.25. P = 2/3; \quad 7.26. m_x = 0; \quad \sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{12}.$$

РАЗДЕЛ УШ. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$8.3. P[15 < X < 25] = 0,68; \quad 8.5. P = 0,0124;$$

$$8.6. A - 15,85\%; \quad B - 52,42\%; \quad C - 31,73; \quad 8.7. \Delta = 3,46;$$

8.8. С вероятностью 0,95 можно гарантировать, что отклонение длины детали от среднего значения не превысит $\Delta l = 0,392 \text{ мм}$;

$$8.9. \quad \sigma = \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\ln \beta - \ln \alpha}};$$

$$8.10. \quad P\{X < x / X > \varepsilon\} = F(x/\varepsilon) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^x e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

где

$$M = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx;$$

$$W(x/\varepsilon) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}; \quad M[x/\varepsilon] = \alpha + \frac{\sigma}{M \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{2\sigma^2}};$$

$$D_x = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{M \sqrt{2\pi}} \left(\frac{\varepsilon - \alpha}{\sigma} \right) e^{-\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{2\sigma^2}} - \frac{\sigma^2}{M^2 2\pi} e^{-\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{\sigma^2}};$$

$$8.11. \quad \sigma = 2,5 \text{ м/с}; \quad 8.12. \quad P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3;$$

$$8.13. \quad \varepsilon = 0,0030 \text{ с}; \quad 8.14. \quad \alpha = m_x - \sigma_x \sqrt{3}; \quad \beta = m_x + \sigma_x \sqrt{3};$$

$$8.15. \quad \Delta = (-34; 39); \quad 8.16. \quad \text{а) } P = 0,999; \quad \text{б) } P = 0,776;$$

$$8.17. \quad P(A) = 0,849; \quad P(B) = 0,452; \quad P(C) = 0,199; \quad 8.18. \quad P = 0,103;$$

$$8.19. \quad \sigma_x = 42,1; \quad 8.20. \quad P \approx 0,988.$$

РАЗДЕЛ IX. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

9.1.

$y_i \backslash x_i$	0	1	2	3	4	$P(x_i)$
0	0	0	0	0	p^4	p^4
1	0	0	0	$4p^3q$	0	$4p^3q$
2	0	0	$6p^2q^2$	0	0	$6p^2q^2$
3	0	$4pq^3$	0	0	0	$4pq^3$
4	q^4	0	0	0	0	q^4
$P(y_i)$	q^4	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	p^4	$\sum_{i=1}^5 P_i = 1$

$$m_x = 4p; \quad m_y = 4q; \quad D_x = D_y = 4pq;$$

• $K_{xy} = -4pq$; $Z_{xy} = -1$; случайные величины X и Y линейно-зависимы;

9.2. Значения функции $F(x, y)$ даны в таблице

$Y \backslash X$	$X \leq 0$	$0 < X \leq 1$	$1 < X$
$Y \leq 0$	0	0	0
$0 < Y \leq 1$	0	0,92	0,92
0	0	0,91	1

9.4.

$$W(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} & \text{при } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0; \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0; \end{cases}$$

9.5. Пусть X — случайная величина, принимающая значения 1, если данное изделие, взятое наперед, обладает дефектом А и $X = 0$ — в противном случае. Аналогично $Y = 1; 0$ в зависимости от того, обладает или нет это изделие дефектом В. Совместное распределение (X, Y) задается таблицей.

Y	X	
	1	0
1	0,025	0,020
0	0,005	0,95

$$r_{xy} = 0,669;$$

9.6. а) $r_{xy} = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{n}{m} < 0; \\ -1 & \text{при } \frac{n}{m} > 0; \end{cases}$ б) $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \left| \frac{n}{m} \right|;$

9.7. $R \approx 3,45$; 9.8. Независимы;

$$9.9. \quad \|z_y\| = \begin{vmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$9.10. \quad W(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x^2} & \text{при } y \in (0, 1); \\ 0 & \text{при } y \notin (0, 1); \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0; \\ y \cdot \Phi^*(x\sqrt{2}) & \text{при } 0 < y < 1; \\ \Phi^*(x\sqrt{2}) & \text{при } y > 1; \end{cases}$$

$$9.13. \quad \text{а) } P[(X < m_x), (Y < m_y)] = \frac{1}{4};$$

$$\text{б) } P[X < 3] = 0,8413; \quad \text{в) } P[Y < X - 5] = 1/2;$$

$$\text{г) } P(|X| < 1) = 0,1573;$$

$$\text{д) } P(|X| < 1, |Y| < 2) = 0,0476;$$

$$9.14. \quad P(X < Y) = 1/2; \quad P(X < 0, Y > 0) = 1/4;$$

$$9.15. \quad X \text{ и } Y \text{ независимы};$$

$$M[X] = \frac{1}{\alpha}; \quad M[Y] = \frac{1}{\beta}; \quad D_x = \frac{1}{\alpha^2}; \quad D_y = \frac{1}{\beta^2};$$

$$9.16. \quad P_{\text{вып}} = 0,379; \quad P_{\text{отл}} = 0,007; \quad P_2 = 0,196; \quad P_3 = 0,198;$$

$$9.17. \quad P = 0,467; \quad 9.18. \quad K = \frac{1}{20\pi}; \quad \left\| \begin{matrix} 25 & 0 \\ 4 & \end{matrix} \right\|;$$

$$P[-10 < X < 10; -10 < Y < 6] = 0,862; \quad 9.19. \quad 12 = 19;$$

$$9.20. \quad \text{При } |x| \leq R, \quad |y| \leq R, \quad W(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2};$$

$$W(y) = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2}; \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right] + \frac{1}{2};$$

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \frac{y}{R} + \frac{y}{R} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} \right] + \frac{1}{2}; \quad X \text{ и } Y \text{ зависимы},$$

$$\text{так как } W(x, y) \neq W_1(x) W_2(y);$$

$$9.21. \quad \gamma_{u,v} = 0,8;$$

$$9.22. \quad W(x) = A \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-(a - \frac{b^2}{4c})x^2};$$

$$W(y) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(c - \frac{b^2}{4a})y^2}.$$

Для независимости X и Y необходимо, чтобы было

$$\frac{\sqrt{ac}}{\pi A} e^{-\frac{b^2}{4}(\frac{x^2}{c} - \frac{4xy}{b} + \frac{y^2}{a})} = 1.$$

Это условие выполняется при $b = 0$.

$$9.23. \quad P(x_1/y=0,75) = 0,00247; \quad P(x_2/y=0,75) = 0,99753;$$

$$9.24. \quad \hat{X} = 6,93 B.$$

РАЗДЕЛ X. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

10.1.

y_i	7	13	21
P_i	0,2	0,1	0,7

10.2.

$$W(\omega_p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma \omega_p^3} e^{-\frac{(\frac{1}{\omega_p^2} - c_0)}{2\sigma^2}};$$

10.3.

$$g(y) = \frac{1}{2\sigma^2} y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } 0 < y < 1;$$

10.4.

$$W(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{z^2}{2a\sigma^2}} & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z \leq 0; \end{cases}$$

10.5.

$$W(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad y \geq 0;$$

10.6.

$$W(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad R > 0;$$

$$W(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{R^2 + h^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{Rh}{\sigma^2}\right);$$

10.7.

$$g(u, v) = W\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right);$$

10.8.

Равномерно на стрезке $[0, 2\pi]$;

10.9.

x_i	0	$\frac{1}{2^n}$	...	$i \cdot \frac{1}{2^n}$	...	$\frac{1}{2}$
p_i	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...	$\frac{1}{2^n}$

$$0 \leq i \leq 2^{n-1};$$

$$10.10. \quad P[Y=-1] = P[X < 0] = \int_{-\infty}^0 w(x) dx = F(0);$$

$$P[Y=+1] = 1 - F(0), \quad P(Y=0) = 0;$$

$$m_y = 1 - 2F(0); \quad m_2[Y] = 1;$$

$$D[Y] = 4F(0)[1 - F(0)];$$

$$10.11. \quad Y = -\frac{1}{\lambda} \ln[1 - X], \quad 0 < X \leq 1;$$

$$10.12. \quad m_y = 2,4; \quad D[Y] = 1,99;$$

$$10.13. \quad m_y = -2,4; \quad D[Y] = 9,63;$$

$$10.14. \quad m_y = -m_x; \quad \sigma_y^2 = 5x^2;$$

$$10.15. \quad M[R] = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$10.16. \quad m_y = \ln 2; \quad D[Y] = \frac{1}{2} - (\ln 2)^2;$$

$$10.17. \quad a) m_y = 5; \quad D[Y] = 36; \quad K_{xy} = -12; \quad r_{xy} = -1;$$

$$10.19. \quad M[Y] = \frac{\pi^2 - 8}{4};$$

$$10.20. \quad a) M[X+Y] = 2; \quad b) M[XY] = 1; \quad c) M[X^2] = 5;$$

$$d) M[X^2 - Y^2] = -\frac{1}{3}; \quad g) D[X+Y] = 4\frac{1}{3}; \quad e) D[X-Y] = 4\frac{1}{3};$$

$$10.21. \quad m_x = m_y = 0 ;$$

$$10.22. \quad m_z = \frac{2}{3} ;$$

$$10.23. \quad m_z = 1 ; \quad D_z = \frac{1}{6} ; \quad M[R^2] = \frac{7}{6} ;$$

$$10.24. \quad m_z = 5,02 ;$$

$$10.25. \quad m_y = \int_0^{\infty} x [W(x) - W(-x)] dx ,$$

$$D[Y] = D[X] + m_x^2 - m_y^2 ;$$

$$10.26. \quad m_{xy} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} ;$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2)}{9} - \frac{(a+b)^2(c+d)^2}{16} ;$$

$$10.27. \quad M[t] = T[1 - e^{-a(1-e^{-a})}] ;$$

$$M[s] = kT^2[1 - 2e^{-a(1-e^{-a})} + e^{-a(1-e^{-2a})}]^2 ;$$

$$10.28. \quad M[p(\tau)] = 1 - \frac{1}{\rho\lambda t^*} [1 - e^{-\rho\lambda t^*}] ;$$

$$10.29. \quad m_y = 0,115 \text{ рад} ; \quad \sigma_y \approx 0,056 \text{ рад} ;$$

$$10.30. \quad m_y = \sigma_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} ; \quad D[Y] = \sigma_x^2 \frac{\pi-2}{\pi} ;$$

$$10.31. \quad m_z = -6 , \quad \sigma_z^2 = 29 ,$$

$$10.32. \quad a) K_{yz} = 12 \sigma_x^2 ; \quad \delta) r_{xy} = -1 ;$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица I

Значения нормальной функции распределения

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
-0,00	0,5000	-0,28	3697	-0,55	2912
-0,01	4960	-0,29	3659	-0,56	2877
-0,02	4920	-0,30	0,3621	-0,57	2843
-0,03	4880	-0,31	3783	-0,58	2810
-0,04	4840	-0,32	3745	-0,59	2776
-0,05	4801	-0,33	3707	-0,60	0,2743
-0,06	4761	-0,34	3669	-0,61	2709
-0,07	4721	-0,35	3632	0,62	2676
-0,08	4681	-0,36	3594	-0,63	2643
-0,09	4641	-0,37	3557	-0,64	2611
-0,10	0,4602	-0,38	3520	-0,65	2578
-0,11	4562	-0,39	3483	-0,66	2546
-0,12	4522	-0,40	0,3446	-0,67	2514
-0,13	4483	-0,41	3409	0,68	2483
-0,14	4443	-0,42	3372	-0,69	2451
-0,15	4404	-0,43	3336	-0,70	0,2420
-0,16	4364	-0,44	3300	-0,71	2389
-0,17	4325	-0,45	3264	-0,72	2358
-0,18	4286	-0,46	3228	-0,73	2327
-0,19	4247	-0,47	3192	-0,74	2297
-0,20	0,4207	-0,48	3156	-0,75	2266
-0,21	4168	-0,49	3121	-0,76	2236
-0,22	4129	-0,50	0,3085	-0,77	2206
-0,23	4090	-0,51	3050	-0,78	2177
-0,24	4052	-0,52	3015	-0,79	2148
-0,25	4013	-0,53	2981	-0,80	0,2119
-0,26	3974	-0,54	2946	-0,81	2090
-0,27	3936			-0,82	2061

x	$\varphi^*(x)$	x	$\varphi^*(x)$	x	$\varphi^*(x)$
-0,83	2033	-1,16	1230	-1,50	0,0668
-0,84	2005	-1,17	1210	-1,51	0655
-0,85	1977	-1,18	1190	-1,52	0643
-0,86	1949	-1,19	1170	-1,53	0630
-0,87	1922			-1,54	0618
-0,88	1894	-1,20	0,1151	-1,55	0606
-0,89	1867	-1,21	1131	-1,56	0594
		-1,22	1112	-1,57	0582
-0,90	0,1841	-1,23	1093	-1,58	0571
-0,91	1814	-1,24	1075	-1,59	0559
-0,92	1788	-1,25	1056		
-0,93	1762	-1,26	1038	-1,60	0,0548
-0,94	1736	-1,27	1020	-1,61	0537
-0,95	1711	-1,28	1003	-1,62	0526
-0,96	1685	-1,29	0985	-1,63	0516
-0,97	1660	-1,30	0,0968	-1,64	0505
-0,98	1635	-1,31	0951	-1,65	0495
-0,99	1611	-1,32	0934	-1,66	0485
		-1,33	0918	-1,67	0475
-1,00	0,1587	-1,34	0901	-1,68	0465
-1,01	1563	-1,35	0885	-1,69	0455
-1,02	1539	-1,36	0869		
-1,03	1515	-1,37	0853	-1,70	0,0446
-1,04	1492	-1,38	0838	-1,71	0436
-1,05	1469	-1,39	0823	-1,72	0427
-1,06	1446			-1,73	0418
-1,07	1423	-1,40	0,0808	-1,74	0409
-1,08	1401	-1,41	0793	-1,75	0401
-1,09	1379	-1,42	0778	-1,76	0392
-1,10	0,1357	-1,43	0764	-1,77	0384
-1,11	1335	-1,44	0749	-1,78	0375
-1,12	1314	-1,45	0735	-1,79	0367
-1,13	1292	-1,46	0721		
-1,14	1271	-1,47	0708		
-1,15	1251	-1,48	0694		
		-1,49	0681		

x	$\varphi^*(x)$	x	$\varphi^*(x)$	x	$\varphi^*(x)$
-1,80	0,0359	-3,00	0,0014	0,20	0,5793
-1,81	0351	-3,10	0010	0,21	5832
-1,82	0344	-3,20	0007	0,22	5871
-1,83	0336	-3,30	0005	0,23	5910
-1,84	0329	-3,40	0003	0,24	5948
-1,85	0322	-3,50	0002	0,25	5987
-1,86	0314	-3,60	0002	0,26	6026
-1,87	0307	-3,70	0001	0,27	6064
-1,88	0301	-3,80	0001	0,28	6103
-1,89	0294	-3,90	0000	0,29	6141
-1,90	0,0288	0,00	0,5000	0,30	0,6179
-1,91	0281	0,01	5040	0,31	6217
-1,92	0274	0,02	5080	0,32	6255
-1,93	0268	0,03	5120	0,33	6293
-1,94	0262	0,04	5160	0,34	6331
-1,95	0256	0,05	5199	0,35	6368
-1,96	0250	0,06	5239	0,36	6406
-1,97	0244	0,07	5279	0,37	6443
-1,98	0239	0,08	5319	0,38	6480
-1,99	0233	0,09	5359	0,39	6517
-2,00	0,0228	0,10	0,5398	0,40	0,6554
-2,10	0179	0,11	5438	0,41	6591
-2,20	0139	0,12	5478	0,42	6628
-2,30	0107	0,13	5517	0,43	6664
-2,40	0082	0,14	5557	0,44	6700
-2,50	0062	0,15	5596	0,45	6736
-2,60	0047	0,16	5636	0,46	6772
-2,70	0035	0,17	5675	0,47	6808
-2,80	0026	0,18	5714	0,48	6844
-2,90	0019	0,19	5753	0,49	6879

x	$\phi^*(x)$	x	$\phi^*(x)$	x	$\phi^*(x)$
0,50	0,6915	0,80	0,7881	1,10	0,8643
0,51	6950	0,81	7910	1,11	8665
0,52	6985	0,82	7939	1,12	8686
0,53	7019	0,83	7967	1,13	8708
0,54	7054	0,84	7995	1,14	8729
0,55	7088	0,85	8023	1,15	8749
0,56	7123	0,86	8051	1,16	8770
0,57	7157	0,87	8078	1,17	8790
0,58	7190	0,88	8106	1,18	8810
0,59	7224	0,89	8133	1,19	8830
0,60	0,7257	0,90	0,8159	1,20	0,8849
0,61	7291	0,91	8186	1,21	8869
0,62	7324	0,92	8212	1,22	8888
0,63	7357	0,93	8238	1,23	8907
0,64	7389	0,94	8264	1,24	8925
0,65	7422	0,95	8289	1,25	8944
0,66	7454	0,96	8315	1,26	8962
0,67	7486	0,97	8340	1,27	8980
0,68	7517	0,98	8365	1,28	8997
0,69	7549	0,99	8389	1,29	9015
0,70	0,7580	1,00	0,8413	1,30	0,9032
0,71	7611	1,01	8437	1,31	9049
0,72	7642	1,02	8461	1,32	9066
0,73	7673	1,03	8485	1,33	9082
0,74	7703	1,04	8508	1,34	9099
0,75	7734	1,05	8531	1,35	9115
0,76	7754	1,06	8554	1,36	9131
0,77	7794	1,07	8577	1,37	9147
0,78	7823	1,08	8599	1,38	9162
0,79	7852	1,09	8621	1,39	9177

x	$\phi^*(x)$	x	$\phi^*(x)$	x	$\phi^*(x)$
I,40	0,9192	I,70	0,9534	2,00	0,9772
I,41	9207	I,71	9564	2,10	9821
I,42	9222	I,72	9573	2,20	9861
I,43	9236	I,73	9582	2,30	9893
I,44	9251	I,74	9591	2,40	9918
I,45	9265	I,75	9599	2,50	9938
I,46	9279	I,76	9608	2,60	9953
I,47	9292	I,77	9616	2,70	9965
I,48	9306	I,78	9625	2,80	9974
I,49	9319	I,79	9633	2,90	9981
I,50	0,9332	I,80	0,9641	3,00	0,9986
I,51	9345	I,81	9649	3,10	9990
I,52	9357	I,82	9656	3,20	9993
I,53	9370	I,83	9664	3,30	9995
I,54	9382	I,84	9671	3,40	9997
I,55	9394	I,85	9678	3,50	9998
I,56	9406	I,86	9683	3,60	9998
I,57	9418	I,87	9688	3,70	9999
I,58	9429	I,88	9699	3,80	9999
I,59	9441	I,89	9706	3,90	1,0000
I,60	0,9452	I,90	0,9713		
I,61	9433	I,91	9719		
I,62	9434	I,92	9726		
I,63	9434	I,93	9732		
I,64	9435	I,94	9738		
I,65	9505	I,95	9744		
I,66	9518	I,96	9750		
I,67	9525	I,97	9756		
I,68	9535	I,98	9761		
I,69	9545	I,99	9767		

Литература

- Вентцель Е.С. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1964. - 576 с.
- Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей : Учебное пособие для вузов. -М.: Наука, 1973. - 368 с.
- Володяя Б.Г., Гавия М.П., Динер И.Я., Коваров Л.Б., Свешников А.А., Старобин К.Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. - М.: Наука, 1965. - 632 с.
- Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшая школа, 1975. - 240 с.
- Горяинов В.Т., Журавлёв А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. -М.: Сов.радио, 1980. - 542 с.
- Дедня И.С. и др. Сборник задач по теории вероятностей. - Л.: Изд-во Ленинградской военно-инженерной Краснознаменной акад. им. А.Ф. Можайского, 1963. - 260 с.
- Емельянов Г.В., В.П. Скитович. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. - Л.: ЛГУ им. А.А. Жданова, 1967. - 332 с.
- Заманский С.А., Радуноскай Б.А., Смирнова Г.Н. Задачник по теории вероятностей и элементам математической статистики. -М.: ВЗЭИС, 1967. - 112 с.
- Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Изд-во МГУ, 1963. - 160 с.
- Штеренгас С.С., Соков К.Д. Задачник по теории вероятностей. - Воронеж : Изд-во Воронежского ун-та, 1972. - 124 с.

Оглавление

РАЗДЕЛ I. Непосредственный подсчет вероятностей	3
РАЗДЕЛ II. Теоремы сложения и умножения вероятностей	14
РАЗДЕЛ III. Формула полной вероятности	26
РАЗДЕЛ IV. Формула Байеса	35
РАЗДЕЛ V. Повторение независимых опытов	43
РАЗДЕЛ VI. Законы распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин . .	53
РАЗДЕЛ VII. Законы распределения и числовые характеристики непрерывных случайных величин . .	66
РАЗДЕЛ VIII. Нормальный закон распределения	76
РАЗДЕЛ IX. Системы случайных величин	83
РАЗДЕЛ X. Законы распределения и числовые характеристики функций от случайных величин . .	97
О т в е т ы	113
Приложение. Значения нормальной функции распределения	128
Литература	133

Александр Иванович Надеев

Александр Сергеевич Чумаков

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор Е.С. Козлов

ИБ 924. Подписано к печати 1.04.82КЗ 06061.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 3.
П.л. 9; уч.-изд.л. 7,6 л; усл.п.л. 8,3.
Тираж 500 экз. Заказ 535 Цена 80 к.

Издательство ТГУ, 634010, Томск, пр.Ленина,36.
Ротапринт ТИАСУРа, 634050, Томск,Ленина, 40.

1-484367

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00868456