АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Томск — 1982

А б е л е в ы г р у п п ы и

м о д у л и

Томск - 1981

Абелевы группы и модули:
Сборник статей под ред. Л.А.Скорнякова.-Томск:
Изд-во Томск. ун-та, 1981. - 13,5 л. - 2р. 500 экз.
20203.

В сборнике публикуются работы, относящиеся к различным вопросам теорий абелевых групп, модулей и их приложений.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов, студентов, интересующихся проблемами современной алгебры.

ЭПИМОРФИЗМЫ ОБОБЩЕННЫХ ОДНОРЯДНЫХ КОЛЕЦ И ВТОРЫЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МОДУЛЕЙ НАД ОГРАНИЧЕННЫМИ НАСЛЕДСТВЕННЫМИ НЁТЕРОВЫМИ ПЕРВИЧНЫМИ КОЛЬЦАМИ

К.В.Агапитов

ВВЕДЕНИЕ

Первая половина настоящей статьи посвящена изучению эпиморфизмов в категории колец с единицей. Доказано, что если R - обобщенное однорядное кольцо, то гомоморфизм $f: R \to R'$ является эпиморфизмом в категории колец с единицей тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(1) $R' = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$;

(2) $f = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i$, $f_i : R \to R_i$;

(3) $f_i(R) \subseteq R_i \subseteq Q_{max}(f_i(R))$;

(4) $R_i \otimes_R R_j = 0$, если $i \neq j$.

Вторая половина статьи посвящается изучению вторых централизаторов. Доказано, что если R - ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, P - максимальный обратимый идеал кольца R , n - число неизоморфных простых правых P-примарных модулей, X_R - точный P-примарный модуль, то $Biend\, X_R$ - подпрямое произведение колец $B_1, \ldots, B_k$, где $k \leq n$, B_1 - ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, $B_1, \ldots, B_k$ - обобщенные однорядные кольца, а модули $_{\hat{R}_P}(Biend\, X_R)$ и $(Biend\, X_R)_{\hat{R}_P}$ - нётеровы.

§ I. Вспомогательные результаты

В работе используются следующие обозначения: если J - подмножество правого R-модуля, то $ann_R^r(J)=\{r\in R \mid Jr=0\}$; если M_R- правый R-модуль, то $Biend\, M_R = End_{End\, M_R} M$.

Все рассматриваемые далее кольца содержат единицу.

ЛЕММА I.I ([I3], утверждение XI.I.2). Следующие свойства гомоморфизма колец $f: R \to R'$ эквивалентны:

(I) f - эпиморфизм в категории колец с единицей;

(2) канонический гомоморфизм $\Phi: R'\otimes_R R' \to R'$, для которого $\Phi(r'\otimes r'')=r'r''$, биективен;

(3) для любых правых R'-модулей $M_{R'}$ и $N_{R'}$ абелевы группы $Hom_{R'}(M,N)$ и $Hom_R(M,N)$ канонически изоморфны.

СЛЕДСТВИЕ I.2. Пусть $f: R\to R'$ - эпиморфизм в категории колец, а M - R'-модуль. Если подмодуль N_R выделяется в M_R прямым слагаемым, то N является R'-модулем и $N_{R'}$ выделяется в $M_{R'}$ прямым слагаемым.

ЛЕММА I.3. Пусть J - идеал кольца R, подмодули ${}_RJ$ и J_R выделяются в R прямыми слагаемыми. Тогда кольцо R изоморфно прямой сумме колец $R\cong J\oplus R/J$.

Доказательство. По условию $J=eR$, где e - идемпотент. Отсюда $J\cap ann_R^r(J)=0$. Пусть ${}_RR={}_RJ\oplus {}_RI$, тогда $JI=0$. Следовательно, $I=ann_R^r(J)$ - идеал кольца R и $R\cong J\oplus I\cong J\oplus R/J$.

ЛЕММА I.4. (см.[5], с. 659). Пусть X_R и Y_R- произвольные R-модули. Тогда:

(1) если $i\in Biend(X\oplus Y)$, то $i|_X \in Biend\, X$;

(2) отображение $Res: Biend(X\oplus Y)\to Biend\, X$, заданное формулой $Res(i)=i|_X$, является гомоморфизмом колец;

(3) если модуль Y_R порождается или копорождается модулем X_R , то гомоморфизм Res инъективен.

§ 2. Эпиморфные образы обобщенных однорядных колец

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Модуль называется однорядным, если у него существует единственный конечный композиционный ряд. Кольцо R называется обобщенным однорядным, если модули ${}_RR$ и R_R являются прямыми суммами однорядных модулей.

ЛЕММА 2.2. ([3], теорема I.2). Любой модуль над обобщенным однорядным кольцом является прямой суммой однорядных модулей.

ЛЕММА 2.3. Пусть R – обобщенное однорядное кольцо, L_R – неразложимый R-модуль, I_R – проективный R-модуль, $I \neq 0$; $I \subseteq L$. Тогда L – проективный R-модуль.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & & I \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & P \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Так как L – однорядный модуль, то проективный модуль P_R можно выбрать неразложимым, то есть однорядным. Поскольку $\varphi(I)$ – существенный подмодуль модуля P, а $i(M)\cap\varphi(I)=0$, то $i(M)=0$. Следовательно, $L\cong P$ – проективный модуль.

Пусть K и N – множества, $T\subseteq K\times N$, $S\subseteq K$. Введем следующее обозначение: $T(S)=\{j\in N \mid \exists i\in S, (i,j)\in T\}$.

ЛЕММА 2.4. ([2], теорема 5.I.I.). Если $|K|=|N|<\infty$, $|T(S)|\geqslant|S|$ для любого множества $S\subseteq K$, то существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi: K\to N$, что $(i,\varphi(i))\in T$ при любом $i\in K$.

ЛЕММА 2.5. Пусть R – обобщенное однорядное кольцо, M_R – существенный конечно порожденный подмодуль модуля M'_R, $M=\bigoplus_{i\in K} I_i$ и $M'=\bigoplus_{j\in N} J_j$ – разложения в сумму однорядных модулей. Тогда M' – конечно порожденный модуль, $|K|=|N|<\infty$ и существует взаимно однозначное отображение $\varphi:K\to N$ и модули $I'_j\ (j\in N)$ такие, что $I_i\cong I'_{\varphi(i)}$, $I'_{\varphi(i)}\leq J_{\varphi(i)}$.

Доказательство. Так как модуль M_R – конечно порожден, то $|K|<\infty$. Модули I_i и J_j – однорядные, следовательно, $soc\, I_i$ и $soc\, J_j$ – простые модули. Так как M – существенный подмодуль, то $\bigoplus_{i\in K} soc\, I_i = soc\, M = soc\, M' = \bigoplus_{j\in N} soc\, J_i$.

Следовательно, $|K|=|N|<\infty$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $\psi_{ij}: I_i\to M\to M'\to J_j$. Пусть $T=\{(i,j)\in K\times N \mid Ker\,\psi_{ij}=0\}$. Если $S\subseteq K$, то $\bigoplus_{i\in S} soc\, I_i\leq \bigoplus_{j\in T(S)} soc\, J_j$, поэтому $|S|\leq|T(S)|$.

По лемме 2.3 существует такое взаимно однозначное отображение φ, что $\psi_{i\varphi(i)}: I_i\to J_{\varphi(i)}$ и $Ker\,\psi_{i\varphi(i)}=0$

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть R - обобщенное однорядное кольцо, M_R - существенный проективный конечно порожденный подмодуль модуля M'_R. Тогда M'_R - проективный модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Точный модуль U_R называется минимальным точным модулем, если из того, что модуль M_R точный, следует, что $M_R \cong U_R \oplus M'_R$. Кольцо R называется $QF-3$ кольцом, если существуют минимальные точные модули U_R и ${}_RU'$.

ЛЕММА 2.8. ([8], теорема 6). Каждое обобщенное однорядное кольцо является $QF-3$ кольцом.

ЛЕММА 2.9. ([I4], с. 46-47). Пусть R - $QF-3$ кольцо, $Q_r(R)$ (соответственно $Q_\ell(R)$) - максимальное правое (соответственно левое) кольцо частных кольца R, а U_R - минимальный точный R-модуль. Тогда $Q_r(R)=Q_\ell(R)=Biend\, U_R$.

Начиная с этого места и до конца второго параграфа, R будет обозначать обобщенное однорядное кольцо.

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть $R \subseteq B \subseteq Q(R)$, тогда B_R и ${}_RB$ - проективные конечно порожденные модули, а кольцо B является эпиморфным образом кольца R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.5 и следствию 2.6 B_R и ${}_RB$ - проективные конечно порожденные модули. Следовательно, $R^n_R \cong B_R \oplus P_R$. Поэтому $B\otimes_R B \subseteq R^n \otimes_R B \cong B^n_R \subseteq \subseteq E(R_R)$. Значит, $(B\otimes B)_R$ - модуль без кручения. Если $b\in B$, то $R:b=\{r\in R \mid br\in R\}$ - плотный правый идеал. Рассмотрим такой элемент $u=\sum_{i=1}^{k} b'_i \otimes b''_i \in B\otimes_R B$, что $\sum_{i=1}^{k} b'_i b''_i = 0$. Пусть $T=\bigcap_{i=1}^{k}(R:b''_i)$. Если $t\in T$, то $\left(\sum_{i=1}^{k} b'_i \otimes b''_i\right)t = \left(\sum_{i=1}^{k} b'_i b''_i t\right)\otimes 1 = 0$. Так как T - плотный правый идеал, а модуль $(B\otimes_R B)_R$ не имеет кручения, то $u=0$. Следовательно, по лемме I.I B - эпиморфный образ кольца R.

В дальнейшем, если не оговорено противное, $f: R\to R'$ - эпиморфизм в категории колец с единицей.

ЛЕММА 2.II. Пусть U_R - минимальный точный R-модуль, $Ker f=0$, $J=ann^r_{R'}(f(U))$. Тогда $R'\cong R'/J \oplus J$, $R\subseteq R'/J \subseteq Q(R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как U_R - инъективный правый идеал в кольце R и $Ker f=0$, то в силу следствия I.2 $f(U)$ правый идеал кольца R'. Следовательно,

$R'/\mathcal{J} \subseteq \mathrm{Biend}(f(U)_{R'}) \cong \mathrm{Biend}\, U_R = Q(R)$. Поэтому $R \subseteq R'/\mathcal{J} \subseteq Q(R)$. Из теоремы 2.10 и следствия I.2 вытекает, что модули ${}_{R'}\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_{R'}$ - прямые слагаемые в R'. По лемме I.3 $R' \cong R'/\mathcal{J} \oplus \mathcal{J}$.

ЛЕММА 2.I2. Кольцо R' является обобщенным однорядным.

Доказательство. По лемме 2.2 и следствию I.2 модули ${}_{R'}R'$ и $R'_{R'}$ являются прямыми суммами однорядных R'-модулей. Следовательно, R' - обобщенное однорядное кольцо.

ТЕОРЕМА 2.I3. Пусть R - обобщенное однорядное кольцо. Гомоморфизм $f: R \to R'$ является эпиморфизмом в категории колец с единицей тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(I) $R' = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$;

(2) $f = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i$, $f_i : R \to R_i$;

(3) $f_i(R) \subseteq R_i \subseteq Q_{max}(f_i(R))$;

(4) если $i \neq j$, то $R_i \otimes_R R_j = 0$.

Доказательство. Необходимость. По лемме 2.I2 кольцо R' является обобщенным однорядным и, следовательно, артиновым. Значит, $R' = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$ - сумма неразложимых колец. Гомоморфизм $f_i : R \to R_i$ является эпиморфизмом, кольцо $f_i(R)$ - обобщенное однорядное. Из леммы 2.II и неразложимости кольца R_i вытекает, что $f_i(R) \subseteq R_i \subseteq Q(f_i(R))$. Из леммы I.I следует, что $R_i \otimes_R R_j = 0$, если $i \neq j$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Из теоремы 2.I0 и леммы I.I следует, что f - эпиморфизм.

Пример. Пусть $R = T_3(K)$ - кольцо верхнетреугольных матриц 3-го порядка над телом K , $f_1 : R \to M_3(K)$ - естественное вложение, $f_2 : R \to K$, где $\sum_{i,j} a_{ij} e_{ij} \mapsto a_{22}$, $R' = M_3(K) \oplus K$, $f = f_1 \oplus f_2$. Очевидно, что R - неразложимое однорядное кольцо. Применяя лемму I.I, можно получить, что f - эпиморфизм в категории колец с единицей.

§ 3. Наследственные нётеровы первичные кольца

Кольцо называется ограниченным, если каждый существенный односторонний идеал содержит ненулевой идеал.

Далее R будет обозначать ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, а Q - классическое кольцо частных кольца R. Правый R-подмодуль I модуля Q_R называется дробным правым R-идеалом, если I содержит регулярный элемент кольца Q и существует такой регулярный элемент $c \in Q$, что $cI \subseteq R$.

Пусть I - правый (левый) дробный R-идеал. Введем следующие обозначения:

$$I^{\ell} = \{q \in Q \mid qI \subseteq R\} \quad (I^{r} = \{q \in Q \mid Iq \subseteq R\});$$

$$O_{\ell}(I) = \{q \in Q \mid qI \subseteq I\} \ (O_{r}(I) = \{q \in Q \mid Iq \subseteq I\}).$$

Будем называть идеал I кольца R обратимым, если

$$I^{\ell} I = R = I I^{r}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что различные идемпотентные максимальные идеалы $M_1, \ldots, M_n$ кольца R образуют цикл, если $O_r(M_1) = O_{\ell}(M_2), \ldots, O_r(M_n) = O_{\ell}(M_1)$. Если M - обратимый максимальный идеал, то тоже будем считать, что M образует цикл.

ЛЕММА 3.2. ([4], теорема 2.6.). Идеал P кольца R является максимальным обратимым идеалом кольца R в том и только в том случае, когда существует цикл $M_1, \ldots, M_n$ такой, что $P = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Будем называть модуль X_R периодическим, если для любого элемента $x \in X$ существует такой регулярный элемент $c \in R$, что $xc = 0$. Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R. Будем говорить, что модуль X_R - P-примарен, если для любого элемента $x \in X$ существует такое число $k \in N$, что $xP^k = 0$. Будем говорить, что модуль X_R не имеет P-кручения, если из равенства $xP^k = 0$, где $x \in X$, следует, что $x = 0$.

ЛЕММА 3.4. ([9], лемма 9). Каждый периодический R-модуль изоморфен прямой сумме примарных модулей.

ЛЕММА 3.5. ([9], лемма I). Каждый периодический, конечно порожденный R-модуль изоморфен прямой сумме однорядных модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть X_R - периодический R-модуль. Будем говорить, что $x \in X$ - однородный элемент, если xR - однорядный модуль. Будем говорить, что экспонента $e(X)$ модуля X_R больше или равна числу k, если существует такой однородный элемент $x \in X$, что длина $l(xR)$ модуля xR больше или равна числу k. Будем говорить, что высота $h(x)$ однородного элемента $x \in X_R$ больше или равна k, если существует такой однородный элемент $y \in X$, что $yR \supseteq xR$ и $e(yR/xR) \geqslant k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Пусть X_R - периодический R-модуль. Тогда через $H_k(X)$ обозначим подмодуль, порожденный элементами, имеющими высоту $\geqslant k$; через $soc^k X$ обозначим подмодуль $\sum_\alpha x_\alpha R$, где элементы $x_\alpha \in X$ удовлетворяют условию $e(x_\alpha R) \leq k$.

ЛЕММА 3.8. ([9], лемма 4). Пусть x - однородный элемент модуля $H_k(X)$. Тогда высота $h(x) \geqslant k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Подмодуль Y_R периодического R-модуля X_R называется H-чистым, если для любого числа $k \in N$ выполнено равенство $H_k(Y) = H_k(X) \cap Y$.

ЛЕММА 3.10. ([9], теорема 8). Пусть X_R - периодический R-модуль, Y_R - H-чистый подмодуль модуля X, $e(Y) < \infty$. Тогда Y_R является прямым слагаемым модуля X_R.

ЛЕММА 3.11. ([11], теорема 1.4). Пусть X_R - периодический R-модуль, $Y_R \leq X_R$, $Y_R \cap H_k(X) = 0$. Тогда существует такой подмодуль Y'_R, что $Y \subseteq Y'$, $e(Y') \leq k$ и $X = Y' \oplus X'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Подмодуль B_R периодического модуля X называется базисным, если выполнены следующие условия:

(1) $B = \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α - однорядные R-модули;

(2) B - H-чистый подмодуль модуля X_R;

(3) модуль X/B - инъективен.

ЛЕММА 3.13. ([11], теорема 2.7). У каждого периодического модуля существует базисный подмодуль, базисные подмодули периодического модуля изоморфны между собой.

ЛЕММА 3.14. Пусть X_R - P-примарный редуцированный R-модуль и $e(X) = \infty$. Тогда существует такой простой модуль V_R, что для любого числа $k \in N$ существует однорядное прямое слагаемое U_R модуля X, удовлетворяющее условиям $e(U)\geqslant k$ и $soc\,U\cong V$.

Доказательство. Пусть $B=\bigoplus_{\alpha\in J} U_\alpha$ - базисный подмодуль модуля X_R. Так как $e(X)=\infty$, то и $e(B)=\infty$. Так как существует лишь конечное число простых P-примарных модулей, то существует такой простой модуль V_R, что для любого $k\in N$ найдется элемент $\alpha\in J$, удовлетворяющий условиям $e(U_\alpha)\geqslant k$ и $soc\,U_\alpha\cong V$. Из леммы 3.10 следует, что модуль U_α является прямым слагаемым модуля X_R.

ЛЕММА 3.15. ([9], лемма 2). Пусть U_R и V_R - правые однорядные R-модули, $W_R\subseteq U_R$, $f: W_R\to V_R$, $e(U/W)\leqslant e(V/f(W))$. Тогда существует такой гомоморфизм $g: U_R\to V_R$, что $g|_W=f$.

ЛЕММА 3.16. ([10], теоремы 2.2 и 2.7). Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R, а $M_1,\dots,M_n$ - цикл, соответствующий идеалу P. Пусть U_R - P-примарный неразложимый инъективный модуль. Тогда модули $U_0=0$, $U_1=soc^1 U,\dots$, $U_k=soc^k U,\dots$ являются единственными собственными подмодулями модуля U_R; модули U_i/U_{i-1} и U_j/U_{j-1} изоморфны тогда и только тогда, когда $i\equiv j\,(mod\,n)$; если V_R - простой P-примарный модуль, то существует такое $i\in N$, что $V\cong U_i/U_{i-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.17. Пусть $M_1,\dots,M_n$ - цикл, $P=\bigcap_{i=1}^{n} M_i$, U_1 и U_2 - однорядные P-примарные модули, $e(U_1)\geqslant e(U_2)$. Тогда существуют такие гомоморфизмы $f_1: U_1\to U_2$ и $f_2: U_2\to U_1$, что $e(U_2/f_1(U_1))\leqslant n-1$, $e(Ker\,f_2)\leqslant n-1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.18. Пусть I_R - инъективный P-примарный модуль, X_R - P-примарный модуль, $e(X)=\infty$. Тогда модуль I_R порождается модулем X_R.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.19. Будем говорить, что периодический модуль X_R удовлетворяет условию $*$, если в любом разложении $X=X_1\oplus X_2$, либо $e(X_2)=\infty$, либо модуль X_2 копорождается модулем X_1.

ЛЕММА 3.20. Периодический модуль X_R удовлетворяет условию $*$ тогда и только тогда, когда для любого простого подмодуля V_R модуля X_R и любого числа $k\in N$ существует такой однорядный подмодуль U_R модуля X_R, что $e(U_R)\geqslant k$ и $soc\,U_R\cong V$.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 2 работы [9] и из леммы 3.15. Необходимость будем доказывать от противного. Пусть V_R - простой подмодуль модуля X_R. Предположим, что существует такое число $k\in N$, что для любого однорядного подмодуля U_R модуля X_R, удовлетворяющего условию $soc\, U_R \cong V_R$, выполнено неравенство $e(U)\le k$. Рассмотрим подмодуль $M=\sum_{V_\alpha\cong V} V_\alpha$ модуля X_R. Из леммы 3.8 следует, что $M\cap H_k(X)=0$. По лемме 3.11 существует такой подмодуль M', что $e(M')\le k$, $X=X'\oplus M'$. Так как модуль X' не содержит подмодулей изоморфных модулю V, то модуль M' не копорождается модулем X'. Приходим к противоречию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.21. Будем говорить, что периодический R-модуль X_R имеет однородный цоколь, если любые простые подмодули модуля X изоморфны между собой. Пусть V_R - простой R-модуль. Будем говорить, что периодический модуль X_R имеет V - однородный цоколь, если любой простой подмодуль модуля X_R изоморфен модулю V_R.

ЛЕММА 3.22. Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R, а $M_1,\dots,M_n$ - цикл, соответствующий идеалу P. Если X_R- P-примарный R-модуль и $e(X)=\infty$, то существует такое разложение $X=X_1\oplus\dots\oplus X_k$, что модуль X_1 удовлетворяет условию $*$, модули $X_2,\dots,X_k$ имеют однородный цоколь, $e(X_2\oplus\dots\oplus X_k)<\infty$, а $k\le n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $S=\{V_1,\dots,V_n\}$ представителей классов изоморфных простых P-примарных правых R-модулей и подмножество S' множества S, состоящее из таких модулей $V_i\in S$, что для любого числа $k\in N$ существует однорядный подмодуль U_k модуля X_R, удовлетворяющий условиям $e(U)\ge k$ и $soc\, U_R\cong V_i$. Из леммы 3.14 вытекает, что $S'\ne\emptyset$. Можно считать, что $S\setminus S'=\{V_2,\dots,V_k\}$. Так как $|S\setminus S'|<\infty$, то существует число $t\in N$, удовлетворяющее следующему условию: если U_R - однорядный подмодуль модуля X_R и $soc\, U_R\cong V_i\in S\setminus S'$, то $e(U)\le t$. Рассмотрим подмодуль $M=\sum V_\alpha'$, где V_α' - подмодули модуля X, изоморфные модулям $V_2,\dots,V_k$. Из леммы 3.8 следует, что $H_t(X)\cap M=0$. По лемме 3.11 существует такой модуль $M'\supseteq M$, что $X=X'\oplus M'$, $e(M')\le t$. Из следствия 2 работы [9] вытекает, что $M'=X_1'\oplus\dots\oplus X_n'$, где модуль X_i' $(i=1,\dots,n)$ имеет V_i - однородный цоколь. Пусть $X_1=$

$= Y \oplus X_1 \oplus X'_{k+1} \oplus \ldots \oplus X'_n$, $X_2 = X'_2 , \ldots , X_k = X'_k$.

Из леммы 3.20 вытекает, что модуль X_1 удовлетворяет условию $*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.23. Топологический модуль X называется линейно компактным, если любая конечно разрешимая система конгруэнций $x \equiv x_\alpha (mod\, X_\alpha)$, где X_α - замкнутые подмодули модуля X , разрешима.

ЛЕММА 3.24. Пусть P - ненулевой идеал кольца R , R/P^k - дискретное кольцо для любого $k \in N$. Тогда $\varprojlim R/P^k$ - линейно компактное кольцо.

Доказательство. Утверждение леммы следует из утверждений 4 и 5 работы [16].

ЛЕММА 3.25. Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R , $\widehat{R}_P = \varprojlim R/P^k$. Тогда $\widehat{R}_P$ является ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом и $J(\widehat{R}_P) = P\widehat{R}_P = \widehat{R}_P P$.

Доказательство. Утверждение следует из [10] (лемма 3.8) и [15] (лемма 3.11 и теорема 3.10).

ЛЕММА 3.26. Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R , X_R - P-примарный модуль. Тогда на X можно естественным образом задать структуру периодического $\widehat{R}_P$ - модуля, причем $End\, X_R = End\, X_{\widehat{R}_P}$.

Доказательство. Нужно повторить рассуждения леммы 3.14 статьи [7].

§ 4. Вторые централизаторы периодических модулей

Непосредственная проверка показывает, что верна следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Пусть $X = \bigoplus_{P\in S} X_P$ - примарное разложение периодического модуля X_R . Тогда $Biend\, X = \prod_{P\in S} Biend\, X_P$.

Начиная с этого места, P будет обозначать максимальный обратимый идеал кольца R ; $M_1, \ldots , M_n$ - цикл, соответствующий идеалу P ; $\widehat{R}_P = \varprojlim R/P^k$; Q_P - классическое кольцо частных кольца $\widehat{R}_P$, а X_R - P-примарный R-модуль.

Из леммы 3.26 вытекает существование следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \widehat{R}_P \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ \operatorname{Biend} X_R \arrow[r, equal] & \operatorname{Biend} X_{\widehat{R}_P} \end{tikzcd}$$

ЛЕММА 4.2. Пусть X_R - неточный модуль с однородным цоколем. Тогда $\operatorname{Biend} X_R$ - обобщенное однорядное кольцо,

$$f(R) \subseteq \operatorname{Biend} X_R \subseteq Q(f(R)),\quad P^{n-1}\operatorname{Biend} X_R \subseteq f(R).$$

Доказательство. Пусть $J = \operatorname{ann}_R^r X$. Будем рассматривать X как модуль над обобщенным однорядным кольцом $\bar{R} = R/J$. По лемме 2.8 $X = U \oplus X_1$, где U - минимальный точный $\bar{R}$-модуль. Так как модуль $U_{\bar{R}}$ - инъективный, а модуль X имеет однородный цоколь, то модуль $U_{\bar{R}}$ копорождает модуль X_1. Следовательно, по лемме I.4 существует мономорфизм $Res: \operatorname{Biend} X \to \operatorname{Biend} U$. По лемме 2.9 $\operatorname{Biend} U = Q_{max}(\bar{R})$. Так как $\bar{R} \subseteq \operatorname{Biend} X_R \subseteq Q_{max}(R)$, то из теоремы 2.10 и леммы 2.12 следует, что $\operatorname{Biend} X_R$ - обобщенное однорядное кольцо. Из леммы IX.1.5 работы [13] следует, что

$$\operatorname{Hom}_{\bar{R}}({}_{\bar{R}}(Q_{max}(\bar{R})/\bar{R}), E({}_{\bar{R}}\bar{R})) = 0.$$

Поэтому среди композиционных факторов модуля ${}_R(\operatorname{Biend} X_R / f(R))$ нет подмодулей модуля $soc({}_R\bar{R})$. Из леммы 3.16 вытекает, что $e({}_R(\operatorname{Biend} X_R / f(R))) \leq n-1$. Значит, $P^{n-1}\operatorname{Biend} X_R \subseteq f(R)$.

ЛЕММА 4.3. Пусть X_R - P-примарный инъективный R-модуль. Тогда левый R-модуль $\operatorname{Biend} X_R$ не имеет P-кручения и $P^{n-1}\operatorname{Biend} X_R \subseteq \widehat{f}(\widehat{R}_P)$.

Доказательство. Легко видеть, что $X = X_1 \oplus I$, где I_R - неразложимый инъективный R-модуль. По следствию 3.18 модуль X_1 порождается модулем I. По лемме I.4 существует мономорфизм $Res: \operatorname{Biend} X \to \operatorname{Biend} I$. Из леммы 3.16 следует, что существуют гомоморфизмы $\varphi_k: I_R \to I_R$ такие, что $\operatorname{Ker}\varphi_k = soc^{kn} I$. Пусть $i \in \operatorname{Biend} I_R$, $x \in soc^{kn} I$. Тогда $\varphi_k(xi) = (\varphi_k(x))i = 0$. Следовательно, $(soc^{kn} I)i \subseteq soc^{kn} I$. Так как модуль I_R инъективен, то $i|_{soc^{kn} I} \in \operatorname{Biend}(soc^{kn} I)$.

Выберем элемент $s \in P^{n-1}$. По лемме 4.2 существуют такие элементы $r_k \in \hat{R}_P$, что $x(si) = x r_k$ для любого элемента $x \in soc^{kn} I$. Ясно, что элемент r_k определён с точностью до элементов из $ann^{r}_{\hat{R}_P}(soc^{kn} I)$. Так как $ann^{r}_{\hat{R}_P}(soc^{kn} I) \supseteq P^{kn} \hat{R}_P$, то идеалы $ann^{r}_{\hat{R}_P}(soc^{kn} I)$ открыты и, следовательно, замкнуты. Система сравнений

$$r \equiv r_k (mod\ ann^{r}_{\hat{R}_P}(soc^{kn} I)) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

конечно разрешима. Так как кольцо $\hat{R}_P$ линейно компактно, то существует решение $r \in \hat{R}_P$. Из равенства $I = \bigcup_k soc^k I$ следует, что $si = \hat{f}(r)$. Пусть существует такое число $k \in N$, что $P^k i = 0$. Тогда $Ii = (IP^k)i = I(P^k i) = 0$. Следовательно, $i = 0$.

ЛЕММА 4.4. Пусть X_R – ненулевой редуцированный R-модуль, удовлетворяющий условию $*$. Тогда $P^{2(n-1)} Biend X_R \subseteq \hat{f}(\hat{R}_P)$ и левый R-модуль $Biend X_R$ не имеет P-кручения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3.14 существует такой простой модуль V_R, что для любого $k \in N$ найдется однорядное прямое слагаемое U_R модуля X_R, удовлетворяющее условиям $e(U_R) \geq k$ и $soc\, U_R \cong V$. Пусть $i \in Biend X_R$ и $s \in P^{n-1}$. Если U – однорядное прямое слагаемое модуля X, то по лемме 4.2 существует такой элемент $r_U \in \hat{R}_P$, что $si|_U = \hat{f}(r_U)|_U$. Пусть $X = U_1 \oplus X_1, \ldots, X = U_t \oplus X_t$, где $U_1, \ldots, U_t$ – однорядные R-модули, $soc\, U_1 \cong \ldots \cong soc\, U_t \cong V_R$. Можно считать, что $e(U_1) \geq e(U_2) \geq \ldots \geq e(U_t)$. Из леммы 3.18 следует, что существуют мономорфизмы $\varphi_k : U_k \to U_1$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $\hat{\varphi}_k : X_R \xrightarrow{\pi_k} U_k \xrightarrow{\varphi_k} U_1 \to X$. Пусть $x \in U_k$. Так как $\hat{\varphi}_k(x) r_{U_k} = \hat{\varphi}_k(x r_{U_k}) = \hat{\varphi}_k(x(si)) = (\hat{\varphi}_k(x))(si) = \hat{\varphi}_k(x) r_{U_1}$, $r_{U_1} - r_{U_k} \in ann^{r}_{\hat{R}_P}(\hat{\varphi}_k(U_k)) = ann^{r}_{\hat{R}_P}(U_k)$. Следовательно, система сравнений $r \equiv r_{U_\alpha}(mod\, ann^{r}_{\hat{R}_P}(U_\alpha))$, где U_α – однорядные прямые слагаемые модуля X_R, удовлетворяющие условию $soc\, U_\alpha \cong V$, конечно разрешима. Кольцо $\widehat{R}_P$ линейно компактно, а идеалы $ann^{\tau}_{\widehat{R}_P}(U_\alpha)$ замкнуты. Следовательно, существует такой элемент $\tau \in \widehat{R}_P$, что для любого однорядного прямого слагаемого U модуля X_R, удовлетворяющего условию $soc\, U \cong V$, выполнено равенство $(si)|_U = \widehat{f}(\tau)|_U$. Пусть $s' \in P^{n-1}$, $x \in X_R$. Учитывая лемму 3.5, можно считать, что x - однородный элемент. Существует такое однорядное прямое слагаемое U_R модуля X_R, что $soc\, U \cong V$, а $e(U) \geq e(xR)$. Из следствия 3.17 вытекает, что существует гомоморфизм $\lambda : U \to xR$ такой, что $e(^{xR}/_{\lambda(U)}) \leq$ $\leq n-1$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $\widehat{\lambda} : X \xrightarrow{\pi_U} U \xrightarrow{\lambda}$ $\xrightarrow{\lambda} xR \to X$. Так как $e(^{xR}/_{\lambda(U)}) \leq n-1$, то $xs' = \widehat{\lambda}(y)$, где $y \in U$. Отсюда $x(s'si) = (xs')(si) = (\widehat{\lambda}(y))(si) =$ $= \widehat{\lambda}(y(si)) = \widehat{\lambda}(y\tau) = \widehat{\lambda}(y)\tau = x(s'\tau)$. Следовательно, $P^{2(n-1)} Biend\, X_R \subseteq \widehat{f}(\widehat{R}_P)$. Пусть существует такое число $k \in N$, что $P^k i = 0$. Рассмотрим базисный подмодуль $B = \oplus_{j \in J} U_j$ модуля X_R. По лемме 3.20 для любого $j \in J$ существует такой однорядный подмодуль V_j модуля X, что $e(V_j) \geq e(U_j) + k$, $soc\, V_j \cong soc\, U_j$. Из леммы 3.15 следует, что существует мономорфизм $\gamma : U_j \to V_j$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $\widehat{\gamma} : X \xrightarrow{\pi_{U_j}} U_j \xrightarrow{\gamma} V_j \to X$. Очевидно, что $\gamma(U_j i) = \widehat{\gamma}(U_j i) =$ $= (\widehat{\gamma}(U_j))i \subseteq (V_j P^k)i = 0$. Следовательно, для любого $j \in J$ выполнено равенство $U_j i = 0$. Так как $X = B + XP^k$, то $Xi =$ $= Bi + X(P^k i) = 0$. Значит, модуль $_R(Biend\, X_R)$ не имеет P-кручения.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть X_R - ненулевой P-примарный R-модуль, удовлетворяющий условию $\varkappa$. Тогда кольцо $Biend\, X_R$ изоморфно кольцу B, где $\widehat{R}_P \leq B < \widetilde{Q}_P$. Кольцо B является ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом. Модули $_{\widehat{R}_P}B$ и $B_{\widehat{R}_P}$ нётеровы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X = I \oplus X'$, где модуль I_R инъективен, а модуль X' редуцирован. Из леммы 3.22 вытекает, что $X' = X_1 \oplus X''$, где $e(X'') < \infty$, а модуль X_1 удовлетворяет условию $\varkappa$. Так как модуль X_R удовлетворяет условию $\varkappa$, то модуль X'' копорождается модулем $I \oplus X_1$. Следовательно, существует мономорфизм

$$Res_1 : Biend\, X \longrightarrow Biend\,(I \oplus X_1)\ .$$

Из леммы 4.3 вытекает, что если $X_1 = 0$, то $P^{2(n-1)} Biend\, X_R \subseteq \hat{f}(\hat{R}_P)$, а модуль $_R(Biend\, X_R)$ не имеет P-кручения. Пусть $X_1 \neq 0$. Тогда из следствия 3.18 и леммы 1.4 вытекает, что существует мономорфизм

$$Res_2 : Biend\,(I \oplus X_1) \longrightarrow Biend\, X_1\ .$$

Из леммы 4.4 получаем, что и в этом случае $P^{2(n-1)} Biend\, X_R \subseteq \hat{f}(\hat{R}_P)$, а модуль $_R(Biend\, X_R)$ не имеет P-кручения. Так как $\tilde{Q}_P$ – инъективный левый $\hat{R}_P$-модуль, то существует гомоморфизм $\varphi : {}_{\hat{R}_P}(Biend\, X_R) \to {}_{\hat{R}_P}(\tilde{Q}_P)$, продолжающий естественное вложение кольца $\hat{f}(\hat{R}_P)$ в $\tilde{Q}_P$. Пусть $i \in Ker\,\varphi$. Тогда $P^{2(n-1)} i \subseteq Ker\,\varphi$. Но $P^{2(n-1)} i \subseteq \hat{f}(\hat{R}_P)$ и, следовательно, $P^{2(n-1)} i = 0$. Отсюда $i = 0$. Покажем, что φ является гомоморфизмом колец. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}_P & \xrightarrow{\hat{f}} & Biend\, X_R \\ & \searrow^{i} & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ & & \tilde{Q}_P \end{array}\ .$$

По построению $\varphi\hat{f} = i$ – гомоморфизм колец. Пусть $x, y \in Biend\, X$. Так как $\tilde{Q}_P$ – кольцо частных кольца $\hat{R}_P$, то $\varphi(x) = (i(s))^{-1} i(x')$, где $s, x' \in \hat{R}_P$. Легко проверить, что $i(s)\varphi(xy) = \varphi(\hat{f}(s)xy) = \varphi(\hat{f}(x')y) = i(x')\varphi(y) = i(s)\varphi(x)\varphi(y)$. Следовательно, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Пусть $B = \varphi(Biend\, X)$. Из леммы 3.25 и из следствия 2.4 работы [6] вытекает, что B является ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом. Так как $\hat{R}_P P$ – обратимый идеал кольца $\hat{R}_P$ и $\hat{R}_P \subseteq B \subseteq (\hat{R}_P P)^{-2(n-1)}$, то из предложения 1.3 статьи [4] получаем, что модули $_{\hat{R}_P} B$ и $B_{\hat{R}_P}$ конечно порождены и, следовательно, нётеровы.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R, $M_1, \ldots, M_n$ - цикл соответствующий идеалу P, X_R - P-примарный R-модуль, $e(X)<\infty$. Тогда кольцо $Biend\, X_R$ является подпрямым произведением обобщенных однорядных колец $B_1, \ldots, B_k$; $k \le n$; модули ${}_R(Biend\, X_R)$ и $(Biend\, X_R)_R$ являются артиновыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверяется, что $ann^r_R X \supseteq P^{e(X)}$. Так как $R/ann^r_R X$ - обобщенное однорядное кольцо, то по лемме 2.2 X - прямая сумма однорядных модулей. Поскольку существует ровно n простых P-примарных модулей, то отсюда вытекает, что $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$, где модули $X_1, \ldots, X_k$ имеют однородный цоколь, а $k \le n$. Пусть $Res_i : Biend\, X_R \to Biend\, X_i$, $B_i = Res_i(Biend\, X_R)$.
Из леммы 4.2 следует, что $R/ann^r_R X_i \subseteq B_i \subseteq Biend\, X_i \subseteq Q_{max}(R/ann^r_R X_i)$.
По теореме 2.10 и лемме 2.12 кольцо B_i является обобщенным однорядным, а модули ${}_R B_i$ и $(B_i)_R$ - конечно порожденные артиновые. Очевидно, что кольцо $Biend\, X_R$ является подпрямым произведением колец $B_1, \ldots, B_k$. Отсюда следует, что модули ${}_R(Biend\, X)$ и $(Biend\, X)_R$ являются конечно порожденными артиновыми.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть P - максимальный обратимый идеал кольца R, $M_1, \ldots, M_n$ - цикл, соответствующий идеалу P, X_R - P-примарный R-модуль, $e(X)=\infty$. Тогда кольцо $Biend\, X_R$ является подпрямым произведением колец $B_1, \ldots, B_k$, где $k \le n$, B_1 является ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом, $\widehat{R}_P \subseteq B_1 \subseteq \widehat{Q}_P$, а кольца $B_2, \ldots, B_k$ являются обобщенными однорядными. Модули ${}_{\widehat{R}_P}(Biend\, X_R)$ и $(Biend\, X_R)_{\widehat{R}_P}$ являются нётеровыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3.22 вытекает, что $X_R = X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$, где $k \le n$, модуль X_1 удовлетворяет условию $*$, $X_1 \ne 0$, модули $X_2, \ldots, X_k$ имеют однородный цоколь и $e(X_2 \oplus \ldots \oplus X_k) < \infty$. Пусть $Res_i : Biend\, X_R \to Biend\, X_i$,
$B_i = Res_i(Biend\, X_R)$. Очевидно, что кольцо $Biend\, X_R$ является подпрямым произведением колец $B_1, \ldots, B_k$. Утверждения, относящиеся к кольцу B_1, следуют из теоремы 4.5 и из следствия 2.4 работы [6]. Утверждения, относящиеся к кольцам

$B_2, \ldots, B_k$, следуют из тех же рассуждений, что и в теореме 4.6. Так как конечное подпрямое произведение нётеровых модулей нетерово, то модули $\hat{R}_P(Biend\, X_R)$ и $(Biend\, X_R)\hat{R}_P$ являются нетеровыми.

ЛЕММА 4.8. Пусть X_R - P-примарный R-модуль, $X = X_1 \oplus X_2$, $e(X_2) < \infty$, $e(X_1) \geq e(X_2)$ и

$\varphi = Res: Biend\, X_R \to Biend\, X_1$. Тогда $(Ker\,\varphi)P^{n-1} = 0$.

Доказательство. Пусть $i \in Ker\,\varphi$. По следствию 2 работы [5] модуль X_2 является прямой суммой однорядных модулей. Пусть U_R - однорядное прямое слагаемое модуля X_2. Так как $e(X_1) \geq e(X_2)$ то существует такой однорядный подмодуль V_R модуля X_1, что $e(V) \geq e(U)$. Из следствия 3.17 вытекает, что существует такой гомоморфизм $\lambda: U_R \to V_R$, что $e(Ker\,\lambda) \leq n-1$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $\hat{\lambda}: X \xrightarrow{\pi_U} U \xrightarrow{\lambda} V \longrightarrow X$. Очевидно, что $\hat{\lambda}(Ui) = \hat{\lambda}(U)i \subseteq X_1 i = 0$. Следовательно, $Ui \subseteq soc^{n-1}U$. Отсюда $Xi \subseteq soc^{n-1}X$. Значит, $iP^{n-1} = 0$.

Автор благодарен А.В.Михалеву за внимание к работе.

Литература

1. Агапитов К.В. Наследственные нётеровы первичные кольца. 33 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 июня 1980 г., № 2334 - 80 деп.).
2. Холл М. Комбинаторика.- М.: Мир, 1970. - 330 с.
3. Eisenbud D., Griffith P. Serial rings. J. Algebra, 1971, 17, N 3, 389-400.
4. Eisenbud D., Robson J.C. Hereditary noetherian prime rings. J. Algebra, 1970, 16, N 1, 86-101.
5. Fuller K.R. Double centralizers of injectives and projectives over Artinian rings. Ill. J. Math., 1970, 14, N 4, 658-664.
6. Lenagan T.H. Bounded hereditary noetherian prime rings. J. London math. Soc., 1973, 6, N 2, 241-246.
7. Marubayashi H. Modules over bounded Dedekind prime rings. I. Osaka J. Math., 1972, 9, N 1, 95-110.

8. Murase I. On the structure of generalized uniserial rings. III. Scientific Papers of the College of General Education Univ. of Tokyo, 1964, 14, N1, 12-25.
9. Singh S. Modules over hereditary noetherian prime rings. Canad. J. Math., 1975, 27, N4, 867-883.
10. Singh S. Modules over hereditary noetherian prime rings. II. Canad. J. Math., 1976, 28, N1, 73-82.
11. Singh S. Some decompositions theorems on abelian groups and their generalization. II. Osaka J. Math., 1979, 16, N1, 45-55.
12. Silver L. Noncommutative localization and applications. J. Algebra, 1967, 7, N1, 44-76.
13. Stenström B. Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory. Springer, 1975.
14. Tachikawa H. Quasi-Frobenius rings and generalizations. QF-3 and QF-1 rings. Lect. Notes. Math. N351, 1973.
15. Upham M. Localization and completion of FBN hereditary rings. Commun. Algebra, 1979, 7, N12, 1269-1307.
16. Zelinsky D. Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math., 1953, 75, N1, 79-90.

ПЕРВЫЕ ГРУППЫ КОГОМОЛОГИЙ НАД МЕЖПРЯМЫМИ СУММАМИ $\mathfrak{M}$-СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ТИПА P^+ ГРУПП

И.Х.Беккер

Следуя Л.Прохазке [I] , назовем абелеву группу G без кручения $\mathfrak{M}$-сепарабельной типа P^+ ($\mathfrak{M}$ - любой бесконечный кардинал), если всякое множество её элементов мощности, меньшей $\mathfrak{M}$, содержится в некотором прямом слагаемом группы G , разложимом в прямую сумму групп типа P^+. Группа типа P^+ - это группа, изоморфная группе целых p-адических чисел J_p для некоторого простого числа p .

В настоящей работе рассматриваем свойства первых групп когомологий $H^1(\Phi, G)$ (Φ - подгруппа группы всех автоморфизмов $Aut\,G$ группы G) над межпрямыми суммами G $\mathfrak{M}_\alpha$-сепарабельных типа P^+ групп G_α ($\mathfrak{M}_\alpha$ - любой бесконечный кардинал, α пробегает произвольное множество индексов $\mathfrak{A}$). Изучение групп $H^1(\Phi, G)$ проводим, исходя из взаимосвязей между свойствами групп Φ и G . Развиваемый при этом подход к вычислению групп $H^1(\Phi, G)$ ($H^1(Aut\,G, G)$) позволяет установить для них как необходимые, так и достаточные признаки равенства нулю (получить некоторую когомологическую характеризацию $\mathfrak{M}$-сепарабельных типа P^+ групп и их межпрямых сумм) (теоремы 2.6, 2.8, 2.9).

Как следствие теорем 2.8, 2.9, получаем характеризацию алгебраически компактных групп без кручения (следствие 2.10).

В работе пользуемся стандартными обозначениями (см. [2] , [3]). Напомним некоторые из них: $Z^1(\Phi, G)$, $B^1(\Phi, G)$ -

соответственно группа скрещенных гомоморфизмов, группа главных скрещенных гомоморфизмов группы Φ в G.

$H^1(\Phi,G)=Z^1(\Phi,G)/B^1(\Phi,G)$, $\langle g\rangle_*^G$ - сервантная подгруппа группы G, порожденная её элементом g; $E(G)$ -кольцо всех эндоморфизмов группы G. Если $\varphi\in Aut\,G, H<G$, то $\varphi|H$ - ограничение φ на подгруппе H группы G; $\Phi|H$ - подгруппа группы $Aut\,H$, индуцированная группой $\Phi\leq Aut\,G$ на H. Если G_i - прямое слагаемое группы $G=\bigoplus_{i\in J} G_i$, то для удобства $Aut\,G_i$ рассматриваем как подгруппу группы $Aut\,G$ (т.е. отождествляем автоморфизм $\varphi_i\in Aut\,G_i$ и φ_i', где $\varphi_i'|G_i=\varphi_i$ и $\varphi_i'|G_j=\varepsilon$ для $i\neq j\in J$; ε - тождественный автоморфизм группы). Под словом "группа" понимаем далее "абелеву группу", кроме её групп автоморфизмов.

§ I. Вспомогательные предложения

Рассмотрим сначала некоторые свойства $\mathfrak{M}$-сепарабельных типа P^+ групп G, а также групп скрещенных гомоморфизмов, которые потребуются в дальнейшем при изучении групп $H^1(\Phi,G)$ и представляют также самостоятельный интерес.

Пусть G - $\mathfrak{M}$-сепарабельная типа P^+ группа, G_q^* - её максимальная q-делимая подгруппа (q - простое число), подгруппу $G_{(p)}=\bigcap_{q\neq p} G_q^*$ назовем p-компонентой группы G.

В [I] доказано, что всякая $\aleph_0$-сепарабельная типа P^+ группа G разлагается в прямую сумму своих p-компонент. Пусть $G=\bigoplus_{p\in\pi(G)} G_{(p)}$, где $\pi(G)$ - множество простых чисел, к которому относятся примарные компоненты группы G. Очевидно, что всякая $\mathfrak{M}$-сепарабельная типа P^+ группа G при $\mathfrak{M}>\aleph_0$ является также и $\aleph_0$-сепарабельной. Заметим, что каждая $G_{(p)}$ $\mathfrak{M}$-сепарабельной типа P^+ группы также является $\mathfrak{M}$-сепарабельной типа P^+ группой. Действительно, пусть $M\leq G_{(p)}$ и $|M|<\mathfrak{M}$. Вложим M в прямое слагаемое G_M группы G, разложимое в прямую сумму групп типа P^+, $G_M=\bigoplus_{i\in J} G_i$. Очевидно, что G_M q-делима по всем простым $q\neq p$, т.е. все G_i изоморфны одной и той же группе J_p. Следовательно, $G_M \subseteq G_{(p)}$, $G_{(p)} = G_M \oplus G'_{(p)}$ и $G_{(p)}$ - $\mathfrak{M}$-сепарабельная типа P^+ группа. Условимся $\aleph_0$-сепарабельную типа P^+ группу называть сепарабельной типа P^+ группой. В случае $G = G_{(p)}$ будем говорить, что G есть $\mathfrak{M}$-сепарабельная типа P_p^+ группа. Группу, разложимую в прямую сумму своих собственных характеристических и нехарактеристических подгрупп, назовем полухарактеристически разложимой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. (i) Всякое ненулевое прямое слагаемое сепарабельной типа P^+ группы есть также сепарабельная типа P^+ группа.

(ii) Сепарабельная типа P^+ группа неразложима полухарактеристически.

Доказательство. (i) Пусть G - сепарабельная типа P^+ группа, $G = G_1 \oplus G_2$ и $M = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ - произвольное конечное множество элементов группы G_1. Вложим M в некоторое прямое слагаемое A группы G, разложимое в прямую сумму групп типа P^+. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i=1} A_i$, где каждая A_i есть группа типа P^+, т.е. $A_i \cong J_p$ для некоторого простого p. Имеем $G = A \oplus B$ и A - алгебраически компактная группа [2,с.190]. Следовательно, A полна в Z-адической топологии [2,с.191]. Обозначим через A'_1 замыкание подгруппы $\langle g_1 \rangle_*^A$ в A. Тогда A'_1 выделяется прямым слагаемым в A [2,с.195], $A = A'_1 \oplus B'_1$, притом A'_1, B'_1 алгебраически компактны [2,с.189] и разложимы в прямые суммы конечного числа групп типа P^+ [2,с.199]. Пусть $\bar{G}_1$ - замыкание подгруппы G_1 в G. Так как $\langle g_1 \rangle_*^A \subseteq G_1$, то $A'_1 \subseteq \bar{G}_1$. Группа G_2 - редуцированная, поэтому $\bar{G}_1 = G_1$. Следовательно, A'_1 есть также прямое слагаемое группы G_1. Пусть $G_1 = A'_1 \oplus G'_1$ и $g_2 \notin A'_1$, $g_2 = a_1 + b_1$, где $a_1 \in A'_1$, $b_1 \in B'_1$. Очевидно $b_1 \in G_1 \cap B'_1$, рассмотрим замыкание A'_2 подгруппы $\langle b_1 \rangle_*^{B'_1}$ в B'_1. Оно содержится также и в группе G_1. Имеем, A'_2 есть прямое слагаемое группы B'_1 [2,с.195], $B'_1 = A'_2 \oplus B'_2$ и A'_2 разложимо в прямую сумму конечного числа групп типа P^+. Тогда $A = (A'_1 \oplus A'_2) \oplus B'_2$ и $G_1 = (A'_1 \oplus A'_2) \oplus G'_2$. Если $M \not\subset A'_1 \oplus A'_2$, то берем элемент, например $g_3 \notin A'_1 \oplus A'_2$, и проводим аналогичные рассуждения. Очевидно, что, рассуждая так далее, получим такое разложение группы $G_1 = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} A'_j \oplus G'_m$, что

$M < \bigoplus_{j=1}^{m} A'_j$ и $\bigoplus_{j=1}^{m} A'_j$ есть прямая сумма групп типа P^+. Следовательно, G_1 - сепарабельная типа P^+ группа.

(ii) Пусть сепарабельная типа P^+ группа G имеет разложение $G = G_1 \oplus G_2$, где $Hom(G_1, G_2) = 0$, а $Hom(G_2, G_1) \neq 0$. Пусть $0 \neq \eta \in Hom(G_2, G_1)$ и $\eta g_2 \neq 0$ для $g_2 \in G_2$. Так как G_1 и G_2 также сепарабельные типа P^+ группы, то вложим элементы ηg_2, g_2 соответственно в прямые слагаемые G'_1, G'_2 групп G_1, G_2, разложимые в прямые суммы групп типа P^+. Пусть $G'_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} A_i$, $G'_2 = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$, где A_i, B_j - группы типа P^+ ($m, n \geq 1$). Очевидно $Hom(G'_2, G'_1) \neq 0$. Отсюда следует, что $Hom(B_{j_1}, A_{i_1}) \neq 0$ хотя бы для одной пары групп B_{j_1}, A_{i_1}, т.е. $A_{i_1} \cong B_{j_1} \cong J_p$ для некоторого p. Но тогда $Hom(G_1, G_2) \neq 0$, что противоречит характеристичности G_1 в G. Следовательно, группа G неразложима полухарактеристически.

Пусть G - группа, $\Phi \leq Aut\, G$, $C(\Phi)$ - центр группы Φ. Отображение $f: \Phi \to G$ называется скрещенным гомоморфизмом, если для любых $\varphi, \psi \in \Phi$ всегда $f(\varphi\psi) = f\varphi + \varphi(f\psi)$; f называется главным скрещенным гомоморфизмом, если в группе G существует такой элемент a, что $f\varphi = a - \varphi a$ для любого $\varphi \in \Phi$. Автоморфизм $\varphi \in Aut\, G$ называется регулярным, если $\varphi g = g$ для $g \in G$ тогда и только тогда, когда $g = 0$. Известно такое свойство скрещенных гомоморфизмов [4], проверяемое непосредственно.

ЛЕММА I.2. Скрещенный гомоморфизм $f: \Phi \to G$ является главным тогда и только тогда, когда $f\sigma \in Im(\varepsilon - \sigma)$ хотя бы для одного регулярного автоморфизма σ группы G из $C(\Phi)$.

Следовательно, для группы G без кручения в случае $-\varepsilon \in \Phi$ $f: \Phi \to G$ является главным тогда и только тогда, когда $f(-\varepsilon) \in 2G$.

СЛЕДСТВИЕ I.3. Если $\sigma \in C(\Phi)$ - такой регулярный автоморфизм группы G, что $\varepsilon - \sigma \in Aut\, G$, то $H^1(\Phi, G) = 0$.

Очевидно, что если $f_1\sigma = 0$ для некоторого $f_1 \in Z^1(\Phi, G)$, то и $f_1 = 0$.

ЛЕММА I.4. Пусть $\Phi_1 \trianglelefteq \Phi$ и G_1 - множество всех элементов группы G, неподвижных относительно Φ_1. Тогда каждый скрещенный гомоморфизм $f: \Phi/\Phi_1 \to G_1$ можно продолжить до скрещенного гомоморфизма $f: \Phi \to G$.

Действительно, достаточно положить $f = f'\eta$, где η - естественный гомоморфизм $\Phi \twoheadrightarrow \Phi/\Phi_1$.

СЛЕДСТВИЕ I.5. Если $G = G_1 \oplus G_2$ и $Hom(G_1, G_2) = 0$, то всякий скрещенный гомоморфизм $f_1: \Phi|G_1 \to G_1$ можно продолжить до скрещенного гомоморфизма $f: \Phi \to G$. В частности, всякий $f_1 \in Z^1(Aut\, G_1, G_1)$ можно продолжить до $f \in Z^1(Aut\, G, G)$.

Заметим, что в случае $G = G_1 \oplus G_2$ и $Hom(G_1, G_2) = 0$ группа $Aut\, G = \Psi \leftthreetimes (Aut\, G_1 \times Aut\, G_2)$, где $\Psi \cong Hom(G_2, G_1)$ и $(\Psi \leftthreetimes Aut\, G_2) \lhd Aut\, G$. Для продолжения $f_1: \Phi|G_1 \to G_1$ до $f: \Phi \to G$ достаточно положить $f\tau = f_1\varphi_1$, где $\tau \in \Phi$, $\tau = \psi\varphi_1\varphi_2$, $\psi \in \Psi$, $\varphi_i \in Aut\, G_i$ ($i = 1,2$).

Полагаем далее, что группы G и Φ удовлетворяют условию ($*$): G имеет хотя бы один регулярный автоморфизм $\sigma \in C(\Phi)$, индуцирующий регулярный автоморфизм $\sigma_\alpha = \sigma|G_\alpha$ на каждом её ненулевом прямом слагаемом G_α, а Φ содержит все такие ограничения σ_α автоморфизма σ.

ЛЕММА I.6. Пусть $G = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$ ($\mathfrak{A}$ - произвольное множество индексов), $\sigma = (\ldots, \sigma_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, где $\sigma \in C(\Phi)$, $\sigma_\alpha = \sigma|G_\alpha$, $\sigma_\alpha \in \Phi$. Тогда для любых $f \in Z^1(\Phi, G)$ и $\varphi_\alpha \in Aut\, G_\alpha \cap \Phi$ всегда $f\varphi_\alpha \in G_\alpha$.

Доказательство. Пусть $G'_\alpha = \bigoplus_{\alpha' \neq \alpha} G_{\alpha'}$ $(\alpha' \in \mathfrak{A})$, $\varphi'_\alpha \in Aut\, G'_\alpha$. Имеем $\varphi_\alpha \varphi'_\alpha = \varphi'_\alpha \varphi_\alpha$ и для любого $f \in Z^1(\Phi, G)$ $f\varphi_\alpha - \varphi'_\alpha(f\varphi_\alpha) = f\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha(f\varphi'_\alpha)$. Пусть $f\varphi_\alpha = a_1 + b_1$, $f\varphi'_\alpha = a_2 + b_2$, где $a_i \in G_\alpha$, $b_i \in G'_\alpha$ $(i = 1,2)$. Тогда $b_1 - \varphi'_\alpha b_1 = a_2 - \varphi_\alpha a_2 = 0$. Положив теперь $\varphi'_\alpha = (\ldots, \sigma_{\alpha'}, \ldots)_{\alpha' \neq \alpha}$, получаем $b_1 = 0$ и $f\varphi_\alpha \in G_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ I.7. Если $G = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$ и $\Phi|G_\alpha \leq \Phi$, то всякий скрещенный гомоморфизм $f \in Z^1(\Phi, G)$ индуцирует некоторый скрещенный гомоморфизм $f_\alpha: \Phi|G_\alpha \to G_\alpha$.

Пусть G - группа, $Aut\, G$ которой содержит подгруппу Φ', изоморфную группе единиц целых p-адических чисел $U(Q_p^*)$, и $\mu': \Phi' \twoheadrightarrow U(Q_p^*)$ -изоморфное отображение Φ' на $U(Q_p^*)$. Будем говорить, что действие автоморфизма τ группы G есть умножение G на целое p-адическое число $\mu'(\tau)$, если для любого $g \in G$ элемент τg можно записать в виде $\tau g = \mu'(\tau) g$ и $\tau g \neq \beta g$, для любого другого целого p-адического числа $\beta \neq \mu'(\tau)$ из $\mu'(\Phi')$. В таком случае говорим также, что автоморфизм τ определяется целым p-адическим числом $\mu'(\tau)=\alpha_\tau$ (или α_τ определяет автоморфизм τ). Очевидно, что если автоморфизм τ группы G определяется целым p-адическим числом $\alpha_\tau=k_0+k_1p+\ldots+$ $+k_np^n+\ldots$ ($0\le k_n\le p-1$, $k_0>0$, $n=0,1,2,\ldots$), то τ регулярен на G, а τ^{-1} определяется числом α_τ^{-1}.

Если $\tau\in C(\Phi)$ и $k_0>1$, то $\tau-\varepsilon$ - автоморфизм группы G, определяемый целым p-адическим числом $\alpha_\tau-1$. Тогда по следствию I.3 получаем, что $H^1(\Phi,G)=0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.8. Пусть действие каждого автоморфизма $\varphi\in\Phi$ не p-делимой группы G без элементов порядка p есть умножение G на некоторое целое p-адическое число α_φ.

В таком случае $H^1(\Phi,G)\ne 0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon-\varphi\notin \mathrm{Aut}\,G$ для любого $\varphi\in\Phi$.

Доказательство. Заметим сначала, что если автоморфизм φ определяется целым p-адическим числом α_φ и $\varepsilon-\varphi\notin \mathrm{Aut}\,G$, то $k_0=1$, и наоборот.

Пусть $\mu:\Phi\rightarrowtail U(Q_p^*)$ - вложение группы Φ в группу единиц целых p-адических чисел и $k_0=1$ для каждого $\alpha_\varphi=\mu(\varphi)$. Покажем, что для такой группы Φ $H^1(\Phi,G)\ne 0$. Пусть $a\notin pG$. Построим отображение $f:\Phi\to G$ следующим образом: для любого $\varphi\in\Phi$ полагаем

$$f\varphi=x(\varphi)\quad,\ \text{где } px(\varphi)=(1-\mu(\varphi))a.$$

Очевидно, что если $\alpha_\varphi=1+l_1p+\ldots+l_np^n+\ldots$ ($0\le l_n\le p-1$, $n=1,2,\ldots$) и l_k - первый ненулевой коэффициент, то $x(\varphi)=p^{k-1}(\alpha_\psi a)$, где $\alpha_\psi=l_k+l_{k+1}p+\ldots+l_{k+n}p^n+\ldots$ - целое p-адическое число, определяющее некоторый автоморфизм $\psi\in\Phi'$ группы G, $\alpha_\psi=\mu'(\psi)$. Отображение f есть скрещенный гомоморфизм группы Φ в G.

Покажем, что $f\notin B^1(\Phi,G)$. Допустим противное, пусть G содержит такой элемент g_0, что для любого $\varphi\in\Phi$ $f\varphi=g_0-\varphi g_0$. Тогда имеем $px(\varphi)=p(g_0-\varphi g_0)=p(1-\mu(\varphi))g_0$. Отсюда следует $(1-\mu(\varphi))a=(1-\mu(\varphi))(pg_0)$ и $(1-\mu(\varphi))(a-pg_0)=0$. Так как умножение группы G на $1-\mu(\varphi)$ есть мономорфизм, то $a-pg_0=0$, что противоречит выбору элемента a. Следовательно, построенный скрещенный гомоморфизм $f:\Phi\to G$ не является главным.

Обратно, если $H^1(\Phi,G)\neq 0$ и хотя бы для одного $\varphi_1\in\Phi$ $\varepsilon-\varphi_1\in \mathrm{Aut}\,G$, то по следствию I.3 $H^1(\Phi,G)=0$. Следовательно, любой $\varphi\in\Phi$ определяется целым p-адическим числом $\mu(\varphi)=\alpha_\varphi$ с $k_0=1$, т.е. $\varepsilon-\varphi\notin \mathrm{Aut}\,G$.

СЛЕДСТВИЕ I.9. Если $\Phi\neq\langle\varepsilon\rangle$ - любая группа автоморфизмов аддитивной группы целых 2-адических чисел, то всегда $H^1(\Phi,J_2)\neq 0$. В частности $H^1(\mathrm{Aut}\,J_2,J_2)\neq 0$.

При $p>2$ $H^1(\mathrm{Aut}\,J_p,J_p)=0$. Однако согласно предложению I.8 $\mathrm{Aut}\,J_p$ содержит подгруппы Φ, для которых $H^1(\Phi,J_p)\neq 0$.

§ 2. Группы $H^1(\Phi,G)$ над межпрямыми суммами $\mathfrak{M}$-сепарабельных типа P^+ групп

Пусть далее G - редуцированная группа без кручения, $\Phi\leq \mathrm{Aut}\,G$ и группы Φ, G удовлетворяют условию ($*$), σ - регулярный автоморфизм группы G из $C(\Phi)$. Если $\varepsilon-\sigma\in \mathrm{Aut}\,G$, то по следствию I.3 всегда $H^1(\Phi,G)=0$. Поэтому полагаем далее, что $\varepsilon-\sigma\notin \mathrm{Aut}\,G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Пусть $\chi\in E(G)$. Подгруппу H группы G назовем χ-эндоморфной в G, если всякий раз из того, что $\chi g=h$, где $g\in G$, $h\in H$, следует $g\in H$.

Рассмотрим сначала межпрямую сумму G групп G_α, $\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha\leq G\leq \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$, где $\mathfrak{A}$ - произвольное множество индексов. Известно, что группа G имеет разложения вида $G=G_\alpha\oplus\bar{G}_\alpha$, где $\bar{G}_\alpha$ есть межпрямая сумма всех групп G_β ($\beta\in\mathfrak{A}$, $\beta\neq\alpha$). Так как автоморфизм $\sigma\in C(\Phi)$ группы G индуцирует автоморфизмы $\sigma_\alpha=\sigma|G_\alpha$ на группах G_α, то можно построить автоморфизм $\sigma'=(\ldots,\sigma_\alpha,\ldots)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ группы $G'=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$. Очевидно, $\sigma=\sigma'|G$, условимся σ также записывать в виде $\sigma=(\ldots,\sigma_\alpha,\ldots)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

Пусть $G=G_1\oplus G_2$ - любое прямое разложение группы G, $\mu_i: G_i\rightarrowtail G_j$ $(i,j=1,2;\ i\neq j)$ и Φ содержит все автоморфизмы t_i группы G вида $t_i g_i=g_i+\mu_i g_i$, если $g_i\in G_i$ и $t_i|G_j=\varepsilon$ (т.е. Φ содержит все автоморфизмы, индуцированные мономорфизмами μ_i, если только таковые существуют). При вычислении групп $H^1(\Phi, G)$ полезным оказывается такое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\varepsilon-\sigma_\alpha \notin Aut\, G_\alpha$. Если G_α изоморфна некоторой ($\varepsilon-\sigma$)-эндоморфной подгруппе G'_α группы $\bar{G}_\alpha$, то для любого $f \in Z^1(\cdot; G)$ всегда $f\sigma_\alpha \in Im(\varepsilon-\sigma_\alpha)$.

Доказательство. Согласно лемме I.6 $f\sigma_\alpha \in G_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пусть $\mu: G_\alpha \twoheadrightarrow G'_\alpha$, где $G'_\alpha \leq \bar{G}_\alpha$, и G'_α ($\varepsilon-\sigma$)-эндоморфна в $\bar{G}_\alpha$. Имеем $\sigma = \sigma_\alpha \sigma'_\alpha$, где $\sigma'_\alpha = (\ldots, \sigma_\beta, \ldots)_{\beta \neq \alpha}$ $(\beta \in \mathfrak{A})$, $\sigma'_\alpha \in Aut\, \bar{G}_\alpha$, притом σ_α регулярен на G_α, а σ'_α регулярен на $\bar{G}_\alpha$, $f\sigma'_\alpha \in \bar{G}_\alpha$. Группа G имеет автоморфизм $\tau \in \Phi$ вида $\tau = \varepsilon + \mu$ на G_α и $\tau = \varepsilon$ на $\bar{G}_\alpha$. Так как $\tau\sigma = \sigma\tau$, то $(\varepsilon-\sigma)f\tau = (\varepsilon-\tau)f\sigma$. Далее, $f\sigma = f\sigma_\alpha + f\sigma'_\alpha$ и $(\varepsilon-\tau)f\sigma = -\mu(f\sigma_\alpha)$. Тогда $(\varepsilon-\sigma)f\tau = \mu(-f\sigma_\alpha)$ и ($\varepsilon-\sigma$)-эндоморфность G'_α в $\bar{G}_\alpha$ влечет $f\tau \in G'_\alpha$. В то же время $(\varepsilon-\sigma)f\tau = \mu(\varepsilon-\sigma)\mu^{-1}(f\tau)$ и $\mu(\varepsilon-\sigma)\mu^{-1}(f\tau) = \mu(-f\sigma_\alpha)$. Отсюда следует $f\sigma_\alpha = (\varepsilon-\sigma)[\mu^{-1}(-f\tau)]$, где $\mu^{-1}(-f\tau) \in G_\alpha$. Следовательно, $f\sigma_\alpha \in Im(\varepsilon-\sigma_\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть G - межпрямая сумма групп без кручения G_α $(\alpha \in \mathfrak{A})$, ($\varepsilon-\sigma'$)-эндоморфная в G'. Если каждая G_α, для которой $\varepsilon-\sigma_\alpha \notin Aut\, G_\alpha$, изоморфна ($\varepsilon-\sigma$)-эндоморфной подгруппе G'_α группы $\bar{G}_\alpha$, то $H^1(\Phi, G) = 0$.

Действительно, для любого $f \in Z^1(\Phi, G)$ имеем $f\sigma = (\ldots, f\sigma_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, где $f\sigma_\alpha \in G_\alpha$. Если $\varepsilon-\sigma_\alpha \notin Aut\, G_\alpha$, то по предложению 2.2 $f\sigma_\alpha \in Im(\varepsilon-\sigma_\alpha)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ $f\sigma_\alpha = (\varepsilon-\sigma_\alpha)g_\alpha$, где g_α - некоторый элемент из G_α, и $f\sigma$ можно записать в виде $f\sigma = (\ldots, (\varepsilon-\sigma_\alpha)g_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ или $f\sigma = (\varepsilon-\sigma')(\ldots, g_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Так как группа G ($\varepsilon-\sigma'$)-эндоморфна в G', то $g_0 = (\ldots, g_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in G$. Следовательно, $f\sigma = (\varepsilon-\sigma)g_0$, $f\sigma \in Im(\varepsilon-\sigma)$ и по лемме I.2 $f \in B^1(\Phi, G)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть группа G есть прямое произведение (прямая сумма) групп G_α $(\alpha \in \mathfrak{A})$. Если каждая G_α, для которой $(\varepsilon-\sigma_\alpha) \notin Aut\, G_\alpha$, изоморфна некоторой группе G_β $(\beta \in \mathfrak{A},\ \beta \neq \alpha)$, то $H^1(\Phi, G) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть G - межпрямая сумма групп без кручения G_α $(\alpha \in \mathfrak{A})$.

а) Если группа G ($\varepsilon-\sigma'$)-эндоморфна в G' и для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ $H^1(\Phi | G_\alpha, G_\alpha) = 0$ и $\Phi | G_\alpha \leq \Phi$, то

$H^1(\Phi, G)=0$.

б) Если $H^1(\Phi,G)=0$ и $Hom\,(G_\alpha, \bar G_\alpha)=0$, то и $H^1(\Phi|G_\alpha, G_\alpha)=0$.

Доказательство. а) Всякий $f\in Z^1(\Phi,G)$ индуцирует некоторый скрещенный гомоморфизм $f_\alpha\in Z^1(\Phi|G_\alpha, G_\alpha)$ (следствие I.7), а по условию $f_\alpha \sigma_\alpha \in Im(\varepsilon-\sigma_\alpha)$ для любого $\alpha\in\mathfrak{U}$. Тогда $f\sigma=(\dots,f\sigma_\alpha,\dots)_{\alpha\in\mathfrak{U}}=(\dots,(\varepsilon-\sigma_\alpha)a_\alpha,\dots)_{\alpha\in\mathfrak{U}}$, где a_α - некоторый элемент из G_α, или $f\sigma = =(\varepsilon-\sigma')(\dots,a_\alpha,\dots)_{\alpha\in\mathfrak{U}}$. Учитывая теперь ($\varepsilon-\sigma'$)-эндоморфность группы G в G', получаем $f\sigma=(\varepsilon-\sigma)a$, где $a = =(\dots,a_\alpha,\dots)_{\alpha\in\mathfrak{U}}\in G$. Следовательно, $f\in B^1(\Phi,G)$ (лемма I.2), т.е. $H^1(\Phi,G)=0$.

Для проверки п.б) достаточно воспользоваться следствием I.5.

Применим теперь вышеустановленные свойства групп $H^1(\Phi,G)$ для характеризации межпрямых сумм $\mathfrak{M}$-сепарабельных типа P^+ групп.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть G - $\mathfrak{M}$-сепарабельная типа P^+ группа, $G=\bigoplus_{p\in\pi(G)} G_{(p)}$ и H_p - любое прямое слагаемое типа P^+ её p-компоненты $G_{(p)}$.

I) Если всякая p-компонента группы G не является группой типа P^+, то $H^1(\Phi,G)=0$.

2) Если $H^1(\Phi,G)=0$ и для любого $p\in\pi(G)$ действие каждого $\varphi\in\Phi|H_p$ на H_p есть умножение H_p на целое p-адическое число α_φ с $.\,K_0=1$, то всякая p-компонента группы G не является группой типа P^+.

3) Группа $H^1(Aut\,G, G)=0$ тогда и только тогда, когда 2-компонента $G_{(2)}$ не изоморфна J_2.

Доказательство. I) Пусть каждая p-компонента группы G не является группой типа P^+ и $f\in Z^1(\Phi,G)$. Вложим $f\sigma$ в прямое слагаемое $G'=\bigoplus_{i=1} G_i$ группы G, где каждая G_i - группа типа P^+. Имеем $G=G'\oplus G''$, $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m\cdot\sigma''$, где σ_i, σ'' - автоморфизмы, индуцированные σ соответственно на G_i, G''. Тогда $f\sigma=\sum_{i=1} f\sigma_i + f\sigma''$, где $f\sigma_i\in G_i$; $f\sigma''\in G''$ (лемма I.6) и $f\sigma''=0$.

Пусть далее хотя бы для одного прямого слагаемого G_{i_1} группы G' $\varepsilon-\sigma_i\notin Aut\,G_{i_1}$. Если G_{i_1} изоморфна некоторой G_j

$(i_1, j \in \{1,2,\dots,m\}, i_1 \neq j)$, то, учитывая $(\varepsilon-\sigma)$-эндоморфность G_i в G и применяя к группе G_{i_1} предложение 2.2, получаем $f\sigma_{i_1}^{+} \in Im(\varepsilon-\sigma_{i_1})$, т.е. $f\sigma_{i_1} = (\varepsilon-\sigma_{i_1})g_{i_1}$ для некоторого $g_{i_1} \in G_{i_1}$.

Пусть G_{i_1} не изоморфна ни одному прямому слагаемому G_j $(j \neq i_1)$ разложения группы G' и $G_{i_1} \cong J_q$. Очевидно, что $G_{i_1} \subset G_{(q)}$ и G_{i_1} выделяется прямым слагаемым в $G_{(q)}$, $G_{(q)} = G_{i_1} \oplus G'_{(q)}$. Так как $G_{(q)}$ есть сепарабельная типа P_q^{+} группа, то и $G'_{(q)}$ является таковой (предложение I.I, (i)). Следовательно, $G'_{(q)}$ также имеет прямые слагаемые, изоморфные J_q. Пусть A' - одно из таких прямых слагаемых, тогда $G_{(q)} = G_{i_1} \oplus A' \oplus G'''_{(q)}$ и $G_{i_1} \cong A'$. Очевидно, что A' $(\varepsilon-\sigma)$-эндоморфна в G. Применив теперь к G_{i_1} снова предложение 2.2, получаем $f\sigma_{i_1} \in Im(\varepsilon-\sigma_{i_1})$. Таким образом, доказано, что для любого i $f\sigma_i \in Im(\varepsilon-\sigma_i)$ и $f\sigma_i = (\varepsilon-\sigma_i)g_i$ для некоторого $g_i \in G_i$.

Возвращаясь теперь к записи элемента $f\sigma$, получаем $f\sigma = \sum_{i=1}^{m}(\varepsilon-\sigma_i)g_i$ или $f\sigma = (\varepsilon-\sigma)\sum_{i=1}^{m} g_i$, т.е. $f\sigma \in Im(\varepsilon-\sigma)$. Следовательно, по лемме I.2 $f \in B^1(\Phi, G)$. Доказано, что $H^1(\Phi, G) = 0$.

2) Пусть $H^1(\Phi, G) = 0$ и G - такая $\mathfrak{M}$-сепарабельная типа P^{+} группа, что для любого $p \in \pi(G)$ действие каждого $\varphi \in \Phi | H_p$ на H_p есть умножение H_p на целое p-адическое число $\alpha(\varphi)$ с $k_0 = 1$. Допустим, что одна из p-компонент группы G есть группа типа P^{+}. Например, $G_{(p_1)} \cong J_{p_1}$. Тогда для любого $\varphi \in \Phi | G_{(p_1)}$ имеем $\varepsilon - \varphi \notin Aut\, G_{(p_1)}$. Следовательно, по предложению I.8 $H^1(\Phi | G_{(p_1)}, G_{(p_1)}) \neq 0$. Так как $G_{(p_1)}$ характеристична в G и прямое слагаемое группы G, то всякий скрещенный гомоморфизм $f'_1 \in Z^1(\Phi | G_{(p_1)}, G_{(p_1)})$ можно продолжить до некоторого скрещенного гомоморфизма $f_1 \in Z^1(\Phi, G)$ (следствие I.5). Притом, если $f'_1 \notin B^1(\Phi | G_{(p_1)}, G_{(p_1)})$, то, очевидно, и $f_1 \notin B^1(\Phi, G)$, т.е. получаем $H^1(\Phi, G) \neq 0$, что противоречит условию. Следовательно, всякая p-компонента группы G не является группой типа P^{+}.

3) Положив $\Phi = Aut\, G$, $\sigma = -\varepsilon$ и проведя рассуждения такие же, как при доказательстве п.п. I), 2), получим доказательство п. 3).

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Если p-компонента $G_{(p)}$ $\mathfrak{M}$-сепарабельной типа P^+ группы G не изоморфна J_p, то $H^1(\Phi|G_{(p)}, G_{(p)})=0$.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть G - межпрямая сумма $\mathfrak{M}_\alpha$-сепарабельных типа P^+ групп G_α $(\alpha\in\mathfrak{A})$ и H_α - любое прямое слагаемое типа P^+ группы G_α.

I) Пусть G $(\varepsilon-\sigma')$-эндоморфна в G' и $\Phi|G_\alpha\leq\Phi$ для любого $\alpha\in\mathfrak{A}$. Группа $H^1(\Phi,G)=0$, если каждая G_α, для которой $\varepsilon-\sigma_\alpha\notin Aut\,G_\alpha$, удовлетворяет одному из условий:

(i) любая p-компонента $G_{(\alpha p)}$ группы G_α не является группой типа P^+;

(ii) если p'-компонента $G_{(\alpha p')}$ группы G_α есть группа типа P^+, то $p'\in\pi(G_\beta)$ хотя бы для одного $\beta\neq\alpha$ $(\beta\in\mathfrak{A})$.

2) Если $H^1(\Phi,G)=0$ и для каждой G_α с $\varepsilon-\sigma_\alpha\notin Aut\,G_\alpha$ эндоморфизм $\varepsilon-\varphi\notin Aut\,H_\alpha$ для любого $\varphi\in\Phi|H_\alpha$, то такая группа G_α удовлетворяет одному из условий (i), (ii).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть каждая группа G_α с $\varepsilon-\sigma_\alpha\notin Aut\,G_\alpha$ удовлетворяет одному из условий (i), (ii). Если все p-компоненты такой группы G_α не являются группами типа P^+, то согласно п. I) теоремы 2.6 получаем

$H^1(\Phi|G_\alpha, G_\alpha)=0$.

Пусть группа G_α удовлетворяет условию (ii). Имеем

$G_\alpha=\bigoplus_{p\in\pi(G_\alpha)} G_{(\alpha p)}$, где каждая p-компонента $G_{(\alpha p)}$ группы G_α есть сепарабельная типа P_p^+ группа. Обозначим $\sigma_{\alpha p}=\sigma|G_{(\alpha p)}$. Так как $G_{(\alpha p)}$ есть прямое слагаемое группы G, то $f\sigma_{\alpha p}\in G_{(\alpha p)}$ для любого $f\in Z^1(\Phi,G)$ (лемма I.6). Если $G_{(\alpha p)}$ не изоморфна J_p, то, рассуждая аналогично, как при доказательстве п. I) теоремы 2.6, получаем $H^1(\Phi|G_{(\alpha p)}, G_{(\alpha p)})=0$. Отсюда следует, что $f_\alpha\sigma_{\alpha p}\in Im\,(\varepsilon-\sigma_{\alpha p})$ для любого $f_\alpha\in Z^1(\Phi|G_{(\alpha p)}, G_{(\alpha p)})$. Так как всякий $f\in Z^1(\Phi,G)$ индуцирует некоторый $f'_\alpha\in Z^1(\Phi|G_{(\alpha p)}, G_{(\alpha p)})$ (следствие I.7), то получаем $f\sigma_{\alpha p}\in Im\,(\varepsilon-\sigma_{\alpha p})$.

Покажем, что и для p'-компоненты $G_{(\alpha p')}\cong J_{p'}$ группы G_α также $f\sigma_{\alpha p'}\in Im\,(\varepsilon-\sigma_{\alpha p'})$. Так как $p'\in\pi(G_\beta)$ для $\beta\neq\alpha$, то группа G имеет такое разложение $G=$ $=G_{(\alpha p')}\oplus G_{(\beta p')}\oplus G_1$, где $G_{(\alpha p')}$ изоморфна некоторому прямому слагаемому $G'_{(\beta p')}\cong J_{p'}$ группы $G_{(\beta p')}$. Очевидно, что $G'_{(\beta p')}$ $(\varepsilon-\sigma)$-эндоморфна в $G_{(\beta p')}\oplus G_1$. Тогда по предложению 2.2 получаем $f\sigma_{\alpha p'}\in Im\,(\varepsilon-\sigma_{\alpha p'})$.

Таким образом, для каждой p-компоненты $G_{(\alpha p)}$ группы G_α и любого скрещенного гомоморфизма $f \in Z^1(\Phi, G)$ имеем $f\sigma_{\alpha p} \in Im(\varepsilon - \sigma_{\alpha p})$. Рассмотрим теперь $f\sigma_\alpha$. Имеем $f\sigma_\alpha \in G_\alpha$ (лемма I.6). Так как G_α - $\mathfrak{M}_\alpha$-сепарабельная типа P^+ группа, то $f\sigma_\alpha$ можно вложить в прямую сумму конечного числа её p-компонент. Пусть $f\sigma_\alpha \in \bigoplus_{i=1} G_{(\alpha p_i)}$. Тогда $f\sigma_\alpha = \sum_{i=1}^{s} f\sigma_{\alpha p_i}$, где $f\sigma_{\alpha p_i} \in G_{(\alpha p_i)}$. Следовательно, $f\sigma_\alpha = \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon - \sigma_{\alpha p_i}) g_i$, где $g_i \in G_{(\alpha p_i)}$, и $f\sigma_\alpha = (\varepsilon - \sigma_\alpha)\sum_{i=1}^{s} g_i$, т.е. $f\sigma_\alpha \in Im(\varepsilon - \sigma_\alpha)$. Отсюда следует, что $H^1(\Phi | G_\alpha, G_\alpha) = 0$ (лемма I.2) и в случае, когда G_α удовлетворяет условию (ii). Применив теперь к группе G п. а) предложения 2.5, получаем $H^1(\Phi, G) = 0$.

2) Пусть $H^1(\Phi, G) = 0$ и каждая группа G_α с $\varepsilon - \sigma_\alpha \notin Aut\, G_\alpha$ такова, что $\varepsilon - \varphi \notin Aut\, H_\alpha$ для любого $\varphi \in \Phi | H_\alpha$. Пусть некоторая группа $G_{\alpha'}$ $(\alpha' \in \mathcal{U})$ не удовлетворяет ни одному из условий (i), (ii) из п. I) теоремы и $G_{(\alpha' p)}$ - её p-компонента есть группа типа P^+. Согласно предложению I.8 $H^1(\Phi | G_{(\alpha' p)}, G_{(\alpha' p)}) \neq 0$. Группа $G_{(\alpha' p)}$ характеристична в $G_{\alpha'}$ и $Hom(G_{(\alpha' p)}, \prod_{\alpha \neq \alpha'} G_\alpha) \cong \prod_{\alpha \neq \alpha'} Hom(G_{(\alpha' p)}, G_\alpha) = 0$. Следовательно, $Hom(G_{(\alpha' p)}, \tilde{G}) = 0$, где $\tilde{G} \oplus G_{(\alpha' p)} = G$, т.е. $G_{(\alpha' p)}$ характеристична также и в группе G. Так как всякий скрещенный гомоморфизм $f_{\alpha'}: \Phi | G_{(\alpha' p)} \to G_{(\alpha' p)}$ можно продолжить до некоторого скрещенного гомоморфизма $f': \Phi \to G$ (следствие I.5), то получаем, что и $H^1(\Phi, G) \neq 0$. Противоречие. Следовательно, если выполняются условия п. 2) теоремы, то всякая группа G_α, для которой $\varepsilon - \sigma_\alpha \notin Aut\, G_\alpha$, удовлетворяет или ($i$), или ($ii$). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть G - межпрямая сумма $\mathfrak{M}_\alpha$-сепарабельных типа P^+ групп G_α $(\alpha \in \mathcal{U})$, 2-сервантная в группе G'.

Группа $H^1(Aut\, G, G) \neq 0$ тогда и только тогда, когда группы G_α удовлетворяют таким двум условиям:

I) среди групп G_α есть единственная группа G_β с ненулевой 2-компонентой $G_{(\beta 2)}$;

2) $G_{(\beta 2)} \cong J_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пусть группы G_α удовлетворяют условиям I), 2). Так как G_β - единственная группа с

$G_{(p2)} \neq 0$ среди групп G_α, то $Hom(G_{(p2)}, G_\alpha) = 0$ для любого $\alpha \neq \beta$. Отсюда следует, что $Hom(G_{(p2)}, \bar{G}_p) \leq$ $\leq Hom(G_{(p2)}, \prod_{\alpha\neq\beta} G_\alpha) = 0$. Следовательно, $G_{(p2)}$ - характеристическое прямое слагаемое группы G. Далее, согласно следствию I.9 $H^1(Aut\,G \mid G_{(p2)}, G_{(p2)}) \neq 0$. Отсюда следует, что и $H^1(Aut\,G, G) \neq 0$.

2) Пусть $H^1(Aut\,G, G) \neq 0$. Допустим, что группы G_α не удовлетворяют условию I) или 2). Тогда, рассуждая аналогично, как при доказательстве п. I) предыдущей теоремы 2.8, получаем $f(-\varepsilon) \in 2G$ для любого $f \in \Sigma^1(Aut\,G, G)$, т.е. $H^1(Aut\,G, G) = 0$. Следовательно, группы G_α удовлетворяют условиям I), 2).

Заметим, что при доказательстве п. I) теоремы 2.9 2-сервантность группы G в G' не потребовалась.

Применим теперь теоремы 2.6, 2.8, 2.9 к алгебраически компактным группам. Хорошо известно [2, с.196], что алгебраически компактную группу G без кручения можно записать в виде $G = \prod_{p\in\pi} G_p$, где G_p - её p-адическая компонента; π - некоторое множество простых чисел. Очевидно, что каждая G_p вполне характеристична в G. Если $2 \notin \pi$, то G - группа 2-делимая. Заметим, что всякий элемент g группы G_p можно вложить в некоторое её прямое слагаемое, изоморфное J_p. Действительно, группа G_p полна в своей p-адической топологии. Пусть $\langle \hat{g} \rangle_*$ - замыкание подгруппы $\langle g \rangle_*^{G_p}$ в G_p. Тогда $\langle \hat{g} \rangle_* \cong J_p, \langle \hat{g} \rangle_* \leq G_p$ и $\langle \hat{g} \rangle_*$ выделяется прямым слагаемым в G_p [2, с. 196]. Отсюда следует, что G_p есть $\aleph_0$-сепарабельная типа P_p^+ группа. Действительно, пусть $0 \neq g_1, g_2, \ldots, g_k \in G_p$ и $G_p = G_1 \oplus G_2$, где G_1 - группа типа P^+, содержащая g_1. Пусть $g_2 = g_1' + g_2'$, $g_i' \in G_i$ $(i = 1, 2)$ и $g_2' \neq 0$. Так как группа G_2 также алгебраически компактна, то g_2' вложим в некоторое её прямое слагаемое G_2' типа P^+. Тогда $G = G_1 \oplus G_2' \oplus G_3$ и $g_1, g_2 \in$ $\in G_1 \oplus G_2'$. Рассуждая так дальше, получаем такое разложение группы $G = G_1 \oplus G_2' \oplus \ldots \oplus G_s' \oplus G_{s+1}$, что элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k$ принадлежат $G_1 \oplus G_2' \oplus \ldots \oplus G_s'$ - прямой сумме групп, изоморфных J_p. Следовательно, всякую алгебраически компактную группу G без кручения можно рассматривать как прямое произведение $\aleph_0$-сепарабельных типа P_p^+ групп G_p. Из теорем 2.8, 2.9 вытекает такое следствие для алгебраически компактных групп.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть G - алгебраически компактная группа без кручения, H_p - прямое слагаемое её p-адической компоненты G_p, изоморфное J_p.

1) Если каждая $G_p \ncong J_p$, то $H^1(\Phi, G) = 0$.

2) Если $H^1(\Phi, G) = 0$ и для любого $\varphi \in \Phi | H_p$ эндоморфизм $\varepsilon - \varphi \notin \mathrm{Aut}\, H_p$, то $G_p \ncong J_p$.

3) Группа $H^1(\mathrm{Aut}\, G, G) = 0$ тогда и только тогда, когда 2-адическая компонента G_2 не изоморфна J_2.

Литература

1. Прохазка Л. Прямые суммы групп типа P^+. - Comment math. Univ. carol., 1967, 8, №1, 85-114.
2. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы, т. 1.-М.: Мир, 1974.- 335 с.
3. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы, т. 2.-М.: Мир, 1977.- 416 с.
4. Nai-chao Hsu. The group of automorphisms of the holomorph of a group. - Pacif. J. Math., v. 11, 1961, 999-1012.

О ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

И.Х.Беккер

Пусть $S=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — полужесткая система абелевых групп без кручения конечного ранга [I]. Тогда на множестве $\mathfrak{A}$ можно задать такой частичный порядок $\preccurlyeq$, что $\alpha\preccurlyeq\beta\ (\alpha,\beta\in\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $Hom(G_\alpha, G_\beta)\neq 0$. Для таких систем S всегда $|\mathfrak{A}|\leq\aleph$, так как класс всех попарно неизоморфных абелевых групп без кручения конечного ранга имеет мощность континуума. Обозначим через $S^{\oplus}$ класс всех групп, изоморфных прямым суммам групп из полужесткой системы S. Рассмотрим далее такие полужесткие системы S, что $Hom(G_\alpha, G_\beta)$ — группа неразложимая для любых $G_\alpha, G_\beta\in S$ и классы $S^{\oplus}$ замкнуты относительно прямых слагаемых. Следовательно, можно полагать, что всякая такая полужесткая система S состоит из неразложимых групп. В [I], [2] выделены довольно широкие классы абелевых групп без кручения, для которых $S^{\oplus}$ замкнуты относительно прямых слагаемых.

Абелеву группу A без кручения назовем S^*-группой (S-группой), если A есть прямое произведение (прямая сумма) групп, изоморфных группам из системы S. Согласно [I] любые два прямых разложения S-группы имеют изоморфные продолжения.

В работе рассматриваем свойства S^*-групп. Для S^*-групп A, B устанавливаем критерий изоморфизма группы A группе $Hom(A,B)$ (теорема 7). Этот критерий оказывается полезным при изучении относительных голоморфов S^*-групп. В частности, при получении критерия определяемости S^*-группы своими относительными голоморфами (теорема 10).

Под словом группа подразумеваем дальше абелеву группу без кручения, кроме относительного голоморфа (голоморфа) или группы автоморфизмов группы. Пользуем я стандартными обозначениями и терминологией из [3].

Пусть $A=\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ есть S^*-группа ($A=\bigoplus_{\omega\in\Omega} A_\omega$ — S-группа), $A=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}_A} \hat{A}^{(\alpha)}$ $(A=\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}_A} A^{(\alpha)})$ — (1)

— её S^*-каноническое (S-каноническое) разложение (т.е.

$\hat{A}^{(\alpha)}=\prod_{\omega\in\Omega(\alpha)} A_\omega$, $A^{(\alpha)}=\bigoplus_{\omega\in\Omega(\alpha)} A_\omega$, где A_ω — группы,

изоморфные G_α, $\alpha\in\mathfrak{A}_A$, $\mathfrak{A}_A\subseteq\mathfrak{A}$, $\Omega(\alpha)\subseteq\Omega$ и

$\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}_A}\Omega(\alpha)=\Omega$), $V(A)$, $R(A)$ — соответственно делимая, редуцированная части группы A. Группу B без кручения назовем группой типа S_α, если B изоморфна G_α из S (или говорим, что S-тип группы B равен S_α, и пишем $t_S(B)=S_\alpha$).

На множестве типов $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ введем естественным образом частичный порядок $\leq$ следующим образом: $S_\alpha\leq S_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha\preccurlyeq\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathfrak{A})$.

Таким образом, S^*-группа (S-группа) есть прямое произведение (прямая сумма) своих S_α-однородных компонент $\hat{A}^{(\alpha)}(A^{(\alpha)})$.

Если $a_\alpha\in\hat{A}^{(\alpha)}(a_\alpha\in A^{(\alpha)})$, то a_α назовем элементом типа S_α. Пусть $a\in A$, $a=(\ldots,a_\alpha,\ldots)_{\alpha\in\mathfrak{A}_A}$, a_α — компоненты элемента a относительно данного S^*-канонического (S-канонического) разложения (1) группы A. Заметим, что тип S_α элемента $a_\alpha\in\hat{A}^{(\alpha)}$ $(a_\alpha\in A^{(\alpha)})$ не зависит от выбора S^*-канонического (S-канонического) разложения группы A.

Действительно, если, например, $A=\prod_{\beta\in\mathfrak{B}_A}\hat{B}^{(\beta)}$ — S^*-каноническое разложение S^*-группы A, отличное от (1), где

$\mathfrak{B}_A\subseteq\mathfrak{A}$, $\hat{B}^{(\beta)}=\prod_{\omega\in\Omega(\beta)} B_\omega$, B_ω — группы, изоморфные G_β, то из $a_\alpha\in\hat{B}^{(\beta)}$ следует существование ненулевых гомоморфизмов $\hat{A}^{(\alpha)}\to\hat{B}^{(\beta)}$ и $\hat{B}^{(\beta)}\to\hat{A}^{(\alpha)}$. Очевидно, что если одна из групп G_α или G_β изоморфна Q, то согласно определению полужесткой системы получаем $\alpha=\beta$. Пусть G_α и G_β – редуцированные группы конечного ранга. Так как G_α, G_β – группы узкие [3, с. 190] и $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, \hat{B}^{(\beta)}) \neq 0$,

$Hom(\hat{B}^{(\beta)}, \hat{A}^{(\alpha)}) \neq 0$, то $Hom(G_\alpha, G_\beta) \neq 0$ и

$Hom(G_\beta, G_\alpha) \neq 0$ [3, с. 191], т.е. $\alpha=\beta$.

Очевидно, что любой эндоморфизм S^*-группы (S-группы) A не понижает типы компонент её элементов относительно S^*-канонического (S-канонического) разложения. Будем также говорить, что S^*-группа (S-группа) A имеет соответственно бесконечный, конечный S^*-ранг (S-ранг), если $|\Omega| \geq \aleph_0$, $|\Omega| < \aleph_0$.

Для S^*-групп справедливы аналоги хорошо известных свойств векторных групп (в частности, теорем А.П.Мишиной из [4] и теоремы Е.Сонсяды о единственности представления векторной группы в виде произведения групп ранга I [5]). Сформулируем некоторые из них, используемые в дальнейшем.

ЛЕММА I. Если $Hom(A,B) \neq 0$ для S^*-групп $A=\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$, $B=\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, то и $Hom(A_{\omega_1}, B_{\lambda_1}) \neq 0$ для некоторых групп A_{ω_1}, B_{λ_1} $(\omega_1\in\Omega, \lambda_1\in\Lambda)$, т.е. $t_S(A_{\omega_1}) \leq t_S(B_{\lambda_1})$ для некоторых групп A_{ω_1}, B_{λ_1}.

ЛЕММА 2. Любое неразложимое прямое слагаемое конечного ранга S^*-группы $A=\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ изоморфно одной из групп A_ω.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}_A} \hat{A}^{(\alpha)}$, $B=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}_B} \hat{B}^{(\alpha)}$ – S^*-канонические разложения S^*-групп A, B.

I) Если $A \cong B$, то $\hat{A}^{(\alpha)} \cong \hat{B}^{(\alpha)} = \prod_{\lambda\in\Lambda(\alpha)} B_\lambda$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$ (B_λ – группа, изоморфная G_α, $\Lambda(\alpha) \subseteq \Lambda$).

2) Если справедлива обобщенная гипотеза континуума или $\hat{A}^{(\alpha)}$ – группа редуцированная и $\Omega(\alpha)$ – множество неизмеримое, то $\hat{A}^{(\alpha)} \cong \hat{B}^{(\alpha)}$ влечет $|\Omega(\alpha)| = |\Lambda(\alpha)|$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Эти предложения можно доказать аналогично, как 96.I - 96.3 из [3], учитывая при этом определение полужесткой системы групп и свойства узких групп [3, § 94]. Заметим, что всякая счетная редуцированная группа без кручения является узкой группой. Прямая сумма узких групп также узка.

ЛЕММА 4. Пусть $A=\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ — S^*-группа и Ω — множество неизмеримое. Всякое узкое прямое слагаемое C группы A изоморфно $\bigoplus_{i=1} A_{\omega_i}$, где $\omega_i \in \Omega$.

Действительно, согласно следствию 94.7 из [3], C изоморфно некоторому прямому слагаемому прямой суммы конечного числа групп A_ω. Пусть $C \cong A'$, где A' выделяется прямым слагаемым в группе $\bar{A}=\bigoplus_{j=1} A_{\omega_j}$, $\omega_j \in \Omega$. Имеем $\bar{A} \in S^\oplus$, поэтому и $A' \in S^\oplus$. Следовательно, $A' \cong \bigoplus_{i=1} A_{\omega_{j_i}}$, где $m \le n$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $A=\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ есть редуцированная S^*-группа и Ω — множество неизмеримое, то всякое прямое слагаемое группы A, являющееся S-группой, имеет конечный S-ранг. В частности, такая S^*-группа A является S-группой тогда и только тогда, когда она имеет конечный S^*-ранг.

Рассмотрим далее группу $Hom(A, B)$, где

$A=\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$, $B=\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ — S^*-группы, и $A=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}_A} \hat{A}^{(\alpha)}$, $B=\prod_{\beta\in\mathfrak{A}_B} \hat{B}^{(\beta)}$ — их S^*-канонические разложения. Пусть $\mathfrak{A}_A(\lambda)=\{\alpha \mid \alpha\in\mathfrak{A}_A, Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_\lambda)\neq 0\}$, $\Omega(\lambda)=\{\omega \mid \omega\in\Omega, Hom(A_\omega, B_\lambda)\neq 0\}$. Заметим, что каждая $Hom(A_\omega, B_\lambda)$ — группа конечного ранга.

ЛЕММА 6. Если $Hom(A, B)=\prod_{\beta\in\mathcal{L}} H_\beta$ есть редуцированная S^*-группа (H_β изоморфны группам из S) и $\mathcal{L}$ — множество неизмеримое, то $|\Omega(\lambda)|<\aleph_0$ для любого $\lambda\in\Lambda$.

Доказательство. Группа B — редуцированная. Так как $|\mathfrak{A}| \le \aleph$ и каждая B_λ — группа узкая [3, с.190], то $Hom(A, B)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}_A} Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_\lambda)=H$ [3, с. 193].

Пусть $|\Omega(\lambda')|\ge\aleph_0$ для некоторого $\lambda'\in\Lambda$. Тогда $|\mathfrak{A}_A(\lambda')|\ge\aleph_0$ или $|\Omega(\alpha)|\ge\aleph_0$ для некоторого $\alpha\in\mathfrak{A}_A(\lambda')$. Пусть $|\mathfrak{A}_A(\lambda')|\ge\aleph_0$. Если $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda'})\neq 0$, то $Hom(A_\omega, B_{\lambda'})\neq 0$ для $\omega\in\Omega(\alpha)$ (лемма I). Фиксируем в каждой группе $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda'})$, где $\alpha\in\mathfrak{A}_A(\lambda')$, по одному слагаемому $Hom(A_\omega, B_{\lambda'})\neq 0$. Обозначим их прямую сумму через H'. Каждая группа $Hom(A_\omega, B_{\lambda'})$ неразложима и изоморфна одной из групп H_β (лемма 2), поэтому H' является S-группой. Притом H' имеет бесконечный S-ранг и выделяется прямым слагаемым в H. Отсюда следует, что $Hom(A,B)$ также имеет прямое слагаемое бесконечного S-ранга, что противоречит следствию 5. Следовательно, $|\mathfrak{A}_A(\lambda')|<\aleph_0$.

Допустим теперь, что $|\Omega(\alpha)|\geq\aleph_0$ для некоторого $\alpha\in\in\mathfrak{A}_A(\lambda')$. Представим $\hat{A}^{(\alpha)}$ в виде $\hat{A}^{(\alpha)}=\prod\limits_{\omega\in\Omega(\alpha)}A_\omega=$

$=\prod\limits_{\omega'\in\Omega'(\alpha)}A_{\omega'}\oplus\prod\limits_{\omega''\in\Omega''(\alpha)}A_{\omega''}$, где $\Omega(\alpha)=\Omega'(\alpha)\cup\Omega''(\alpha)$ и $|\Omega'(\alpha)|=\aleph_0$. Тогда $Hom(\hat{A}^{(\alpha)},B_{\lambda'})\cong\bigoplus\limits_{\omega'\in\Omega'(\alpha)}Hom(A_{\omega'},B_{\lambda'})\oplus$ $\oplus Hom(\prod\limits_{\omega''\in\Omega''(\alpha)}A_{\omega''},B_{\lambda'})$ и $Hom(A,B)$ снова имеет прямое слагаемое бесконечного S-ранга. Противоречие. Следовательно, $|\Omega(\alpha)|<\aleph_0$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}(\lambda')$ и $|\Omega(\lambda')|<\aleph_0$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $A=\prod\limits_{\omega\in\Omega}A_\omega$, $B=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ — S^*-группы и Ω — множество неизмеримое. Группа A изоморфна группе $Hom(A,B)$ тогда и только тогда, когда для любого $\alpha\in\mathfrak{A}$ выполняются следующие условия:

(i) $|\Omega(\alpha)|<\aleph_0$;

(ii) существует единственная такая группа B_{λ_α} ($\lambda_\alpha\in\Lambda$), что $Hom(\hat{A}^{(\alpha)},B_{\lambda_\alpha})\neq 0$ и $|\mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha)|<\aleph_0$;

(iii) множество $\mathfrak{A}_A$ содержит такой единственный элемент β, что $Hom(\hat{A}^{(\beta)},B_{\lambda_\beta})\cong\hat{A}^{(\alpha)}$.

Доказательство. а) Пусть $A\cong Hom(A,B)=$ $=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}_H}\hat{H}^{(\alpha)}=H$, где $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}_H}\hat{H}^{(\alpha)}$ — S^*-каноническое разложение S^*-группы $Hom(A,B)$. Если делимая часть $V(A)$ группы A отлична от нуля, то A и B — делимые группы конечного ранга, притом $r(B)=1$. Следовательно, в таком случае условия (i) — (iii) имеют место.

Пусть A — группа редуцированная. Имеем $Hom(A,B)\cong$ $\cong\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}_A(\lambda)}Hom(\hat{A}^{(\alpha)},B_\lambda)$. По лемме 6 $|\Omega(\lambda)|<\aleph_0$ для любого $\lambda\in\Lambda$. Отсюда следует, что имеет место условие (i) и $|\mathfrak{A}_A(\lambda)|<\aleph_0$. Притом $Hom(A,B)\cong\prod\limits_{\lambda\in\Lambda,\omega\in\Omega}Hom(A_\omega,B_\lambda)$ и каждая группа $Hom(A_\omega,B_\lambda)$ изоморфна некоторой группе из полужесткой системы S. Далее, $\mathfrak{A}_A=\mathfrak{A}_H$ и для любых $\alpha\in\mathfrak{A}_A$,

$\omega \in \Omega(\alpha)$ существует такая группа $Hom(A_\delta, B_{\lambda_\alpha})$ $(\delta \in \Omega, \lambda_\alpha \in \Lambda)$, что $A_\omega \cong Hom(A_\delta, B_{\lambda_\alpha})$ (теорема 3). Так как $Hom(Hom(A_\delta, B_{\lambda_\alpha}), B_{\lambda_\alpha}) \neq 0$, то и $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda_\alpha}) \neq 0$. Пусть для $\hat{A}^{(\alpha)}$ существует еще одна группа $B_{\lambda'_\alpha}$, $\lambda'_\alpha \in \Lambda$, что $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda'_\alpha}) \neq 0$. Учитывая теперь (i), п. I) теоремы 3 и рассматривая S^*-канонические разложения групп A и $Hom(A,B)$, получаем, что хотя бы для одного $\gamma \in \mathfrak{A}_A$ $\hat{A}^{(\gamma)} \not\cong \hat{H}^{(\gamma)}$. Следовательно, имеет место (ii). Выполнимость условия (iii) очевидна.

б) Пусть для S^*-групп A и B выполняются условия (i)–(iii). Если $V(A) \neq 0$, то $V(B) \neq 0$, $r(V(B)) = 1$ и $R(A) = 0$. Согласно (i) $r(A) < \aleph_0$. Следовательно, получаем $A \cong Hom(A, B)$.

Пусть A — группа редуцированная. Тогда из (i), (iii) следует, что $V(B) = 0$. Каждая B_λ — группа узкая, поэтому, учитывая (ii), получаем, что S-ранг каждой группы $\hat{B}^{(\beta)}$, для которой $Hom(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}_A} \hat{A}^{(\alpha)}, \hat{B}^{(\beta)}) \neq 0$, равен I. Тогда $Hom(A, B) \cong$ $\cong \prod_{\beta \in \mathfrak{A}_B} \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}_A} Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, \hat{B}^{(\beta)})$ и так как $|\Omega(\alpha)|, |\mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha)| < \aleph_0$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}_A$, то $Hom(A, B)$ есть S^*-группа. Пусть $Hom(A,B) = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}_H} \hat{H}^{(\alpha)} = H$ — её S^*-каноническое разложение, $\mathfrak{A}_H \leq \mathfrak{A}$. Согласно (ii) подмножества $\mathfrak{A}_A(\lambda) \neq 0$ попарно не пересекаются, следовательно, $\mathfrak{A}_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \mathfrak{A}_A(\lambda)$, где $\Lambda' \leq \Lambda$. А по условию (iii) для любого $\alpha \in \mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha)$ существует единственное такое $\beta \in \mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha)$, что $Hom(\hat{A}^{\beta}, B_{\lambda_\alpha}) \cong \hat{A}^{(\alpha)}$ (здесь по (ii) $\lambda_\alpha = \lambda_\beta \in \Lambda'$).
Если теперь $\alpha \neq \alpha'$ $(\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha))$, то и $\beta \neq \beta'$, где $Hom(\hat{A}^{(\beta')}, B_{\lambda_\alpha}) \cong \hat{A}^{(\alpha')}$ $(\beta, \beta' \in \mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha))$.
Следовательно, соответствие $\alpha \mapsto \beta$ является подстановкой множества $\mathfrak{A}_A(\lambda_\alpha)$, т.е. каждая группа $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda_\alpha})$ изоморфна некоторой $\hat{A}^{(\alpha')}$ $(\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_A)$. В то же время группы $Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda_\alpha})$ являются S_α-однородными компонентами группы $Hom(A, B)$, $\hat{H}^{(\alpha')} = Hom(\hat{A}^{(\alpha)}, B_{\lambda_\alpha})$ и $\hat{H}^{(\alpha')} \cong \hat{A}^{(\alpha')}$. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{A}_H = \mathfrak{A}_A$ и $A \cong Hom(A, B)$.

Заметим, что как следствие из теоремы 7 вытекает критерий изоморфизма групп A и $Hom(A, B)$, установленный в [6] для векторных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. S^*-группу A назовем LS^*-группой, если каждое её прямое слагаемое также является S^*-группой.

Укажем один достаточный признак существования LS^*-групп, где $S=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — жесткая система групп [3, с. 148]. Для любых $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}\ (\alpha\neq\beta)$ такой системы $Hom(G_\alpha, G_\beta)=0$ и $Hom(G_\alpha, G_\alpha)$ изоморфна некоторой подгруппе группы Q. Следовательно, жесткая система групп — частный случай полужесткой. Если S состоит из одной группы G, то G называется жесткой группой. Нетрудно проверить, что для такой группы G естественный гомоморфизм $\eta: G \to Hom(Hom(G,G),G), \eta(g)\varphi=\varphi g$ для любых $g\in G$, $\varphi\in Hom(G,G)$ является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $S=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — жесткая система узких групп, $A=\prod\limits_{\omega\in\Omega} A_\omega$ — S^*-группа.

Если Ω—множество неизмеримое и для любых $\alpha,\beta\in\mathfrak{A}$ группа $Hom(G_\alpha, G_\alpha)$ не вкладывается в G_β, то каждое ненулевое прямое слагаемое группы A изоморфно группе $A'=\prod\limits_{\omega\in\Omega'} A_\omega$, где $\Omega'\subseteq\Omega$ (т.е. A является LS^*-группой).

Эта теорема является обобщением основного результата — теоремы I из [7] для жесткой системы узких групп. Её можно доказать аналогично как теорему I из [7], учитывая при этом свойства жестких узких групп. В частности, если группа $A=\prod\limits_{\omega\in\Omega} A_\omega$, где все A_ω изоморфны одной и той же жесткой группе G_α (такую группу будем далее называть G_α^*-свободной), то A есть LS^*-группа (т.е. каждое ненулевое прямое слагаемое такой группы A также является G_α^*-свободной).

Рассмотрим далее свойства RJ-голоморфов [8] редуцированных LS^*-групп, где $S=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — полужесткая система групп без кручения конечного ранга и для любых $G_\alpha, G_\beta\in S$ группа $Hom(G_\alpha,G_\beta)$ неразложима. Как и выше, полагаем, что класс $S^\oplus$ замкнут относительно прямых слагаемых. Следовательно, можно считать, что S состоит из неразложимых групп.

Пусть $\Gamma(A,\Phi)$, $\Gamma(B,\Psi)$ — соответственно RJ-голоморфы LS^*-групп $A=\prod\limits_{\omega\in\Omega} A_\omega$, $B=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ (Ω, Λ — множества неизмеримые), $\mu:\Gamma(A,\Phi)\rightarrowtail\Gamma(B,\Psi)$ — изоморфное отображение $\Gamma(A,\Phi)$ на $\Gamma(B,\Psi)$, $\mu A\neq B$, B_1, Ψ_1 и A_1, Φ_1 — соответственно множества всех первых, вторых компонент элементов групп μA и $\mu^{-1}B$. Тогда согласно лемме 2 из [8] группы A, B, как группы без кручения, имеют такие нетривиальные RJ-прямые разложения $A=A_1\oplus A_2$, $B=B_1\oplus B_2$ (т.е. $A_2, B_2\neq 0$), что: 1) $B_1=\mu A_1$, $B_2=\mu\Phi_1$, $A_2=\mu^{-1}\Psi_1$; 2) A_1, B_1 — ненулевые вполне характеристические подгруппы соответственно групп A, B; 3) $\Phi_1\cong Hom(A_2, A_1)$ и $\Psi_1\cong Hom(B_2, B_1)$. Следовательно, если A, B являются LS^*-группами, то $A_1, A_2, B_1, B_2, Hom(A_2, A_1)$ и $Hom(B_2, B_1)$-также LS^*-группы.

Пусть $A_1=\prod\limits_{\tau\in\Omega_1}A_\tau$, $A_2=\prod\limits_{\delta\in\Omega_2}A_\delta$ $(\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega)$, $A_1=\prod\limits_{\alpha_1\in\mathfrak{A}_1}\hat{A}^{(\alpha_1)}$, $A_2=\prod\limits_{\alpha_2\in\mathfrak{A}_2}\hat{A}^{(\alpha_2)}$ — соответственно S^*-канонические разложения групп A_1, A_2, $\hat{A}^{(\alpha_1)}=\prod\limits_{\tau\in\Omega_1(\alpha_1)}A_\tau$, $\hat{A}^{(\alpha_2)}=\prod\limits_{\delta\in\Omega_2(\alpha_2)}A_\delta$ $(\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_A)$, $B_1=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_1}B_\lambda$, $B_2=\prod\limits_{\sigma\in\Lambda_2}B_\sigma$ $(\Lambda_1\cup\Lambda_2=\Lambda)$.

Лемма 9. Если $A=A_1\oplus A_2$, $B=B_1\oplus B_2$ — нетривиальные RJ-прямые разложения редуцированных LS^*-групп A, B, индуцированные μ, то:

1) A_2 и B_2 являются S-группами с конечными и равными S-рангами;

2) для каждой группы A_δ, $\delta\in\Omega_2$ $(B_\sigma, \sigma\in\Lambda_2)$ существует единственная такая группа A_{τ_δ}, $\tau_\delta\in\Omega_1$ $(B_{\lambda_\sigma}, \lambda_\sigma\in\Lambda_2)$, что $t_S(A_\delta)\leq t_S(A_{\tau_\delta})$ $(t_S(B_\sigma)\leq t_S(B_{\lambda_\sigma}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Имеем A_1, A_2 — LS^*-группы и $Hom(A_2, A_1)\cong\prod\limits_{\tau\in\Omega_1}\bigoplus\limits_{\alpha_2\in\mathfrak{A}_2}Hom(\hat{A}^{(\alpha_2)}, A_\tau)$. Всякая абелева группа является максимальной нормальной абелевой подгруппой своего RJ-голоморфа (голоморфа). Следовательно, $\mu^{-1}B=A_1\oplus\Phi_1$ — максимальная нормальная абелева подгруппа в $\Gamma(A,\Phi)$. Поэтому для каждой A_δ существует хотя бы одна такая группа A_{τ_δ}, что $Hom(A_\delta, A_{\tau_\delta})\neq 0$. Группа $Hom(A_2, A_1)$ является LS^*группой и она имеет прямые слагаемые $Hom(\hat{A}^{(\alpha_2)}, A_{\tau_{\alpha_2}})\cong\bigoplus\limits_{\delta\in\Omega_2(\alpha_2)}Hom(A_\delta, A_{\tau_{\alpha_2}})$ и

$\bigoplus_{\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2} Hom(\hat{A}^{(\alpha_2)}, A_\tau)$, являющиеся S-группами. Отсюда по следствию 5 следует, что $\Omega_2(\alpha_2)$ и $\mathfrak{A}_2(\tau) = \{\alpha_2 \mid \alpha_2 \in \mathfrak{A}_2, Hom(\hat{A}^{(\alpha_2)}, A_\tau) \neq 0\}$ – множества конечные.

Пусть $\Omega_1' = \{\tau' \mid \tau' \in \Omega_1, Hom(A_2, A_{\tau'}) \neq 0\}$,

$\bar{\Omega}_1 = \{\bar{\tau} \mid \bar{\tau} \in \Omega_1, Hom(Hom(A_2, A_{\bar{\tau}}), A_{\bar{\tau}}) \neq 0\}$.

Имеем $A_1 \cong B_1$, $A_2 \cong Hom(B_2, B_1)$, $B_2 \cong Hom(A_2, A_1)$,

следовательно, $A_2 \cong Hom(Hom(A_2, A_1), A_1)$ и $A_2 \cong$
$\cong \prod_{\tau \in \Omega_1} \bigoplus_{\tau' \in \Omega_1'} \bigoplus_{\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2(\tau')} \bigoplus_{\delta \in \Omega_2(\alpha_2)} Hom(Hom(A_\delta, A_{\tau'}), A_\tau)$.
Все группы $Hom(A_\delta, A_{\tau'})$ и $Hom(Hom(A_\delta, A_{\tau'}), A_\tau)$

$(\tau, \tau' \in \Omega_1, \ \delta \in \Omega_2)$ как неразложимые прямые слагаемые соответственно LS^*-групп $Hom(A_2, A_1)$ и $Hom(Hom(A_2, A_1), A_1)$ изоморфны группам из системы S. Следовательно, A_2 имеет прямое слагаемое, изоморфное

$\bigoplus_{\tau' \in \Omega_1'} \bigoplus_{\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2(\tau')} \bigoplus_{\delta \in \Omega_2(\alpha_2)} Hom(Hom(A_\delta, A_{\tau'}), A_\tau)$ и являющееся S-группой. Отсюда следует, что Ω_1' – множество конечное (следствие 5). Проводя аналогичные рассуждения для LS^*-групп B_1 и B_2 , получаем, что и $|\bar{\Omega}_1| < \aleph_0$. Но тогда A_2 является S-группой и согласно следствию 5 её S-ранг конечен, т.е. $|\Omega_2| < \aleph_0$

2) Очевидно, что B_2 также является S-группой конечного S-ранга. Допустим, что для некоторой группы $\hat{A}^{(\alpha_2)} (\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2)$ существуют хотя бы две такие группы A_{τ_1} и A_{τ_2} $(\tau_1, \tau_2 \in \Omega_1)$, что $t_S(A_\delta) \leq t_S(A_{\tau_1})$ и $t_S(A_\delta) \leq t_S(A_{\tau_2})$, где $\delta \in \Omega_2(\alpha_2)$. Тогда из $B_2 \cong Hom(A_2, A_1)$ следует, что S-ранг группы B_2 больше S-ранга группы A_2 . Но для каждой B_{λ_2} $(\lambda_2 \in \Lambda_2)$ также существует хотя бы одна такая группа $B_{\lambda_1} (\lambda_1 \in \Lambda_1)$, что $Hom(B_{\lambda_2}, B_{\lambda_1}) \neq 0$. Следовательно, $A_2 \cong Hom(B_2, B_1)$ далее влечет, что S-ранг группы A_2 не меньше S-ранга группы B_2 . Получили противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, в любых нетривиальных RJ-прямых разложениях $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$ LS^*-групп A, B слагаемые A_2, B_2 являются S-группами. Будем далее A_2 записывать в виде $A_2 = \bigoplus_{i=1}^{m} A_{\delta_i}$, т.е. полагать, что

$\Omega_2 = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$.

Будем говорить, что группа A определяется своим RJ-голоморфом в классе групп $\mathcal{A}$, если для любой группы B из $\mathcal{A}$ такой, что $\Gamma(A,\Phi) \cong \Gamma(B,\Psi)$, всякий раз следует $A \cong B$. Известно, что всякая нередуцированная группа без элементов порядка 2 определяется своим RJ-голоморфом (голоморфом) в классе всех групп [9]. Установим теперь с помощью леммы 9 критерий определяемости редуцированной LS^*-группы A своим RJ-голоморфом $\Gamma(A,\Phi)$ в классе групп LS^*. Заметим, что если группа A без кручения вообще не имеет нетривиальных RJ-прямых разложений, то она всегда определяется своим RJ-голоморфом в классе всех групп без кручения. Действительно, пусть $\mu : \Gamma(A,\Phi) \rightarrowtail\!\!\!\!\to \Gamma(B,\Psi)$, где B — группа без кручения и $A_2 = 0$ в RJ-прямом разложении группы A, индуцированном μ. Тогда получаем $A = A_1$, $B = B_1$ и $\mu A = B$. Поэтому рассмотрим далее LS^*-группы, обладающие нетривиальными RJ-прямыми разложениями.

ТЕОРЕМА 10. Редуцированная LS^*-группа $A = \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ с неизмеримым множеством Ω определяется любым своим RJ-голоморфом в классе групп LS^* тогда и только тогда, когда любое её нетривиальное RJ-прямое разложение $A = A_1 \oplus A_2$

$$\Big(A_1 = \prod_{\tau\in\Omega_1} A_\tau,\ A_2 = \bigoplus_{i=1}^{m} A_{\delta_i},\ \Omega_2 = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\} \Big)$$

удовлетворяет условию (*):

существует такая подстановка σ множества Ω_2, $\sigma : \Omega_2 \rightarrowtail\!\!\!\!\to \Omega_2$, $\sigma\delta_i = \delta_{k_i}$, что $Hom(A_{\delta_i}, A_{\tau_{\delta_i}}) \cong A_{\delta_{k_i}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть LS^*-группа A определяется любым своим RJ-голоморфом $\Gamma(A,\Phi)$ в классе групп LS^*, т.е. для любой группы B из LS^* изоморфизм $\mu : \Gamma(A,\Phi) \rightarrowtail\!\!\!\!\to \Gamma(B,\Psi)$ влечет изоморфизм групп A и B. Пусть $\mu A \neq B$ и $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$ — нетривиальные RJ-прямые разложения, индуцированные μ. По условию A_1, A_2, B_1, B_2 — LS^*-группы, а согласно п. I) леммы 9 A_2 и B_2 являются S-группами с конечными и равными S-рангами. Применяя теперь к $A \cong B$ теорему 3 и учитывая, что

$A_1 \cong B_1$, $Hom(A_1, A_2) = 0$, $Hom(B_1, B_2) = 0$ (лемма 2 из [8]), получаем $A_2 \cong B_2$, т.е. $A_2 \cong Hom(A_2, A_1)$. Далее, согласно п.2) леммы 9 для каждой группы A_{δ_i} $(\delta_i \in \Omega_2)$ существует единственная такая группа $A_{\tau_{\delta_i}}$ $(\tau_{\delta_i} \in \Omega_1)$, что

$Hom(A_{\delta_i}, A_{\tau_{\delta_i}}) \neq 0$. Тогда из $A_2 \cong Hom(A_2, A_1)$ следует, что для всякого нетривиального RJ-прямого разложения группы A условие (*) имеет место.

б) Обратно, пусть любое нетривиальное RJ-прямое разложение LS^*-группы A удовлетворяет условию (*). Покажем, что такая группа A определяется любым своим RJ-голоморфом в классе LS^*. Действительно, пусть B — такая LS^*-группа, что её RJ-голоморф $\Gamma(B, \Psi)$ изоморфен RJ-голоморфу $\Gamma(A, \Phi)$ группы A,

$\mu: \Gamma(A, \Phi) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \Gamma(B, \Psi)$ и $\mu A \neq B$. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$ — нетривиальные RJ-прямые разложения групп A, B, индуцированные μ. Убедимся, что LS^*-группы A_2 и $Hom(A_2, A_1)$ изоморфны. Согласно лемме 9 эти группы удовлетворяют условиям (i) (ii) теоремы 7, а условие (*) эквивалентно условию (iii) той же теоремы. Следовательно, по теореме 7 $A_2 \cong Hom(A_2, A_1)$, т.е. $A_2 \cong B_2$. Так как всегда $A_1 \cong B_1$, то получаем $A \cong B$. Теорема доказана.

Из теоремы 10 как следствие вытекает критерий определяемости своими голоморфами некоторых векторных групп, установленный в [10].

Положив в доказательстве теоремы 10 $A = B$, получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 11. Всякая редуцированная LS^*-группа $A = \prod_{\omega \in \Omega} A_\omega$ с неизмеримым множеством Ω характеристична в любом своем RJ-голоморфе.

Литература

1. Arnold D., Lady E. Endomorphisms rings and direct sums of torsion free Abelian groups. – Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 211, 225–237.
2. Arnold D., Murley C. Abelian groups A, such that Hom(A,–) preserves direct sums of copies of A.

Pacific J. Math., 1975, 56, №1, 7-20.

3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т.2.-М.; Мир, 1977.-416 с.
4. Мишина А.П. О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга I. - Сиб.матем.ж., 1962, 3,244-249.
5. Sasiada E. On the isomorphism of decompositions of torsion free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one.-Bull. Acad. Polon. Sci., 1959, 7, 145-149
6. Себельдин А.М. О группах гомоморфизмов абелевых групп без кручения.-В сб.:Группы и модули. Томск, 1976, 70 - 77.
7. Balcerzyk S., Białynicki-Birula A., Łoś J. On direct decomposition of complete direct sums of groups of rank 1. - Bull. Acad. Polon. Sci, 1961, 9, 451-454.
8. Беккер И.Х. Определяемость редуцированных абелевых групп без кручения своими относительными голоморфами.-В сб.:Абелевы группы и модули. Томск, 1980, 3-18.
9. Беккер И.Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами. - Изв. вузов.Матем., 1975, №3, 97-99.
10. Гриншпон И.Э. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга I с изоморфными голоморфами.-В сб.:Группы и модули. Томск, 1976, 103-108.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

В.Д.Бурков

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и имеющими единицу,модули-унитарными.

Пусть K -коммутативное кольцо; R -алгебра над K и $Der_K R$ -группа K-дифференцирований алгебры R ,то есть K-линейных отображений $D: R \to R$,удовлетворяющих условию

$$D(xy) = xD(y) + D(x)y\,; \quad x, y \in R\,.$$

Дифференцирование D называется внутренним,если существует такой элемент $a \in R$,что $D(x) = xa - ax$.Обозначим через $IDer_K R$ подгруппу внутренних дифференцирований в группе $Der_K R$.Если M - (R,R)-бимодуль,то естественным образом определяются K -дифференцирования из R в M ,а также внутренние дифференцирования.Обозначим соответствующие группы дифференцирований через $Der_K(R,M)$ и $IDer_K(R,M)$.Заметим,что все введённые группы дифференцирований являются на самом деле K -модулями.

Для многих классов алгебр представляет интерес описание группы $Der_K R$. Так, К.Баклавским в [1] были явно найдены все дифференцирования алгебр инцидентности.Описанию дифференцирований квазиматричных алгебр посвящена работа И.Мюразе[2]. Автором настоящей работы в [3] этот вопрос был решён для класса обобщённых квазиматричных алгебр,включающего в себя как алгебры инцидентности,так и квазиматричные алгебры.Наконец,в работе [4] М.К.Смит описала дифференцирования групповых алгебр конечно-порождённых нильпотентных групп без кручения. Основным результатом настоящей работы является описание дифференцирований групповых алгебр периодических групп.

Пусть G -периодическая группа; K -коммутативное кольцо, в котором обратимы порядки всех элементов группы G ; KG -групповая алгебра группы G над кольцом K . Нас будут интересовать в основном бесконечные группы, в этом случае пусть $\overline{KG}$ обозначает (KG, KG)-бимодуль всех формальных выражений вида $\sum_{g\in G} \alpha_g g$ с коэффициентами α_g из K . Так как $KG \subseteq \overline{KG}$, то имеет место естественное вложение групп

$$\varphi: Der_K KG \longrightarrow Der_K(KG, \overline{KG}).$$

Дифференцирование D алгебры KG будем называть обобщённым внутренним дифференцированием, если D^{φ} -внутреннее дифференцирование из KG в $\overline{KG}$, то есть $D(x) = xa - ax$ для некоторого $a \in \overline{KG}$. Подгруппу обобщённых внутренних дифференцирований в группе $Der_K KG$ обозначим через $IDer_K^* KG$. Очевидно, что $IDer_K KG \subseteq IDer_K^* KG$. В то же время, как показывает следующий ниже пример, вообще говоря, $IDer_K KG \neq \neq IDer_K^* KG$.

ПРИМЕР. Пусть K -некоторое поле; $S_{\mathbb{Z}}$ -группа конечных подстановок на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$; $KS_{\mathbb{Z}}$ -групповая алгебра группы $S_{\mathbb{Z}}$ над полем K . Рассмотрим элемент $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)$ в $\overline{KS_{\mathbb{Z}}}$, где $\sigma(n)$ обозначает транспозицию $\begin{pmatrix} n & -n \\ -n & n\end{pmatrix}$. Легко проверить, что $xu - ux \in KS_{\mathbb{Z}}$ для любого $x \in KS_{\mathbb{Z}}$, поэтому отображение $D_u : KS_{\mathbb{Z}} \to KS_{\mathbb{Z}}$, переводящее x в $xu - ux$, является обобщённым внутренним дифференцированием алгебры $KS_{\mathbb{Z}}$. Нам осталось показать, что D_u не является внутренним дифференцированием. Пусть, напротив, $D_u = D_v$, где $v = \sum_{i\in I} \alpha_i g_i \in KS_{\mathbb{Z}}$. Поскольку множество I конечно, то найдутся целые числа m и n , на которых все подстановки g_i действуют тождественно. Обозначая через δ транспозицию $\begin{pmatrix} m & n \\ n & m\end{pmatrix}$, мы видим, что $D_v(\delta) = 0$. В то же время несложная проверка показывает, что $D_u(\delta) \neq 0$. Из полученного противоречия вытекает, что $IDer_K KS_{\mathbb{Z}} \neq IDer_K^* KS_{\mathbb{Z}}$.

Следующая теорема даёт в ряде случаев полное описание K -дифференцирований групповой алгебры KG периодической группы.

ТЕОРЕМА I. Пусть G -периодическая группа; K -коммутативное кольцо, в котором обратимы порядки всех элементов группы G. Тогда $Der_K KG = IDer_K^* KG$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D -дифференцирование групповой алгебры KG. Сопоставим ему семейство элементов $\{\alpha_{g,h} : g,h \in G\}$ кольца K, исходя из следующей формулы:

$$D(g) = \sum_{h\in G} \alpha_{g,h} h .$$

Из правила дифференцирования произведения $D(xy) = xD(y) + D(x)y$ непосредственно вытекает, что для любых $x, y, z \in G$ справедливо соотношение

$$\alpha_{xy,z} = \alpha_{y,x^{-1}z} + \alpha_{x,zy^{-1}}. \tag{I}$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся три леммы.

ЛЕММА I. Если элементы g и h группы G коммутируют, то $\alpha_{g,h} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть порядок элемента g равен n. Тогда $g^n = 1$ и поэтому $D(g^n) = \sum_{i+j=n-1} g^i D(g) g^j = 0$, откуда, ввиду перестановочности g и h, следует, что $n\alpha_{g,h} = 0$. Поскольку элемент n обратим в K, то этим завершается доказательство.

ЛЕММА 2. Если $x^{-1}hx = y^{-1}hy$, то $\alpha_{h^{-1}y,y} = \alpha_{h^{-1}x,x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы I следует, что $\alpha_{g,1} = 0$ для любого $g \in G$. Поэтому, полагая в (I) $z = y$, получим, что $\alpha_{xy,y} = \alpha_{y,x^{-1}y}$. Следовательно, для доказательства равенства $\alpha_{h^{-1}y,y} = \alpha_{h^{-1}x,x}$ достаточно показать, что $\alpha_{y,hy} = \alpha_{x,hx}$. Пусть $y^{-1}hy = x^{-1}hx$. Если мы умножим это равенство слева на y, а справа на x^{-1}, то получим, что $hyx^{-1} = yx^{-1}h$, то есть элемент yx^{-1} принадлежит централизатору элемента h. Обозначая элемент yx^{-1} через c и используя (I), получаем, что

$$\alpha_{y,hy} = \alpha_{cx,chx} = \alpha_{c,chx\cdot x^{-1}} + \alpha_{x,c^{-1}chx} = \alpha_{c,ch} + \alpha_{x,xh}.$$

Однако в силу леммы I, $\alpha_{c,ch} = 0$, что и доказывает лемму 2.

ЛЕММА 3. Если $g=x^{-1}hx$, то $\alpha_{g^{-1}y,y}+\alpha_{h^{-1}x,x}=\alpha_{h^{-1}xy,xy}$ для всякого $y\in G$.

Доказательство. Положим в (I) $z=hxy$. Тогда получим, что

$$\alpha_{xy,hxy}=\alpha_{y,x^{-1}hxy}+\alpha_{x,hxyy^{-1}}=\alpha_{y,gy}+\alpha_{x,hx}.$$

Отсюда с учётом равенства $\alpha_{xy,y}=\alpha_{y,x^{-1}y}$ следует утверждение леммы.

Для доказательства теоремы каждой тройке элементов g, h и x группы G таких, что $g=x^{-1}hx$, сопоставим уравнение $X_g-X_h=\alpha_{h^{-1}x,x}$, а затем объединим все такие уравнения в систему F. Покажем, что эта система имеет решение $\{\alpha_g : g\in G\}$ в кольце K. Для этого в каждом классе сопряжённых элементов S_i группы G отметим некоторый элемент g_i и положим $\alpha_{g_i}=0$, а далее из уравнений системы F найдём элементы α_g для всех остальных $g\in G$. Из доказанных нами лемм следует, что все элементы α_g определяются таким образом однозначно. Рассмотрим элемент $u=\sum_{g\in G}\alpha_g g\in \overline{KG}$ и покажем, что $D=D_u$, где D_u -обобщённое внутреннее дифференцирование, соответствующее элементу u. Для этого достаточно показать, что $D(g)=D_u(g)=gu-ug$ для всякого $g\in G$, то есть, что

$$\sum_{h\in G}\alpha_{g,h}h=\sum_{h\in G}\alpha_h gh-\sum_{h\in G}\alpha_h hg.$$

Таким образом, $D=D_u$ тогда и только тогда, когда для любых $g,h\in G$ имеет место равенство

$$\alpha_{g,h}=\alpha_{g^{-1}h}-\alpha_{hg^{-1}}. \qquad (2)$$

Заметим, что элементы g и h группы G сопряжены в G тогда и только тогда, когда существуют $x,y\in G$ такие, что $g=xy$ и $h=yx$. Отсюда легко вытекает, что решение $\{\alpha_g : g\in G\}$ системы F удовлетворяет (2). Тем самым показано, что $D=D_u$, чем завершается доказательство теоремы.

Если G -конечная группа, то в качестве следствия теоремы I получаем хорошо известный результат [5, с.41,76].

СЛЕДСТВИЕ . Если G -конечная группа и K -коммутативное кольцо,в котором обратим порядок группы G ,то любое K -дифференцирование групповой алгебры KG является внутренним.

По-прежнему,пусть G -периодическая группа,но уже K -произвольное (возможно,некоммутативное) кольцо; KG -групповое кольцо; $Der\,KG$ -группа дифференцирований,а $IDer^*KG$ - подгруппа обобщённых внутренних дифференцирований группового кольца KG .Через M обозначим множество конечных классов сопряжённости группы G ,для $i\in M$ пусть S_i обозначает соответствующий класс,а $s_i=\sum_{g\in S_i} g$.Заметим,что всякое дифференцирование δ кольца K можно продолжить до отображения

$$\delta': KG\to KG : \sum \alpha_i g_i \longmapsto \sum \delta(\alpha_i) g_i \quad .$$

Пусть $\delta=\{\delta_i : i\in M\}$ -семейство дифференцирований кольца K. Мы назовём это семейство локально конечным,если $\delta_i(\alpha)=0$ почти для всех $i\in M$ при фиксированном $\alpha\in K$.

Для того чтобы показать,что существуют бесконечные,но локально конечные семейства дифференцирований,возьмём кольцо R матриц $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{i,j=\infty}$ бесконечного порядка с конечным числом ненулевых элементов.Для любой такой матрицы M очевидно,что $e_{i,i+1}M=Me_{i,i+1}=0$ для всех достаточно больших i ,где $e_{i,i+1}$ -матричные единицы.Пусть δ_i -внутреннее дифференцирование кольца R ,соответствующее элементу $e_{i,i+1}$.Тогда семейство $\{\delta_i : i\in N\}$,как легко видеть,является локально конечным.

Если $\delta=\{\delta_i : i\in M\}$-локально конечное семейство дифференцирований кольца K ,то нетрудно проверить,что дифференцированием кольца KG является отображение $D_\delta : KG\to KG$, определённое следующей формулой:

$$D_\delta(u)=\sum_{i\in M}\delta_i'(u)\cdot s_i \quad .$$

Подгруппу дифференцирований такого вида в группе $Der\,KG$ обозначим через $CDer\,KG$.Таким образом,в группе $Der\,KG$ мы имеем подгруппу $CDer\,KG+IDer^*KG$.

Если M_o -множество всех классов сопряжённости группы G , а $\delta=\{\delta_i : i\in M_o\}$ -произвольное семейство дифференцирований кольца K ,то отображение,определённое по формуле

$$D_\delta(u)=\sum_{i\in M_0}\delta_i(u)s_i,$$

является дифференцированием из KG в $\overline{KG}$. Через $CDer(KG,\overline{KG})$ обозначим подгруппу таких дифференцирований в группе $Der(KG,\overline{KG})$.

Идея доказательства теоремы I может быть также применена и для описания дифференцирований группового кольца KG.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G -периодическая группа; K -кольцо, в котором обратимы порядки всех элементов группы G. Тогда любое дифференцирование D группового кольца KG можно представить в виде $D=D_1+D_2$, где D_1 и D_2 -дифференцирования из KG в $\overline{KG}$, причём D_1 -внутреннее дифференцирование, а $D_2\in CDer(KG,\overline{KG})$.

Доказательство. Пусть D -дифференцирование кольца KG. Дословно повторяя доказательство теоремы I, получаем элемент $u\in\overline{KG}$ такой, что $D(g)=gu-ug$ для всех $g\in G$. Пусть D_1 -внутреннее дифференцирование, соответствующее элементу u и $D_2=D-D_1$. Тогда D_2 -дифференцирование и $D_2(g)=0$ для всех $g\in G$.

Предположим, что $D_2(\alpha)=\sum_{g\in U_\alpha}\delta_g(\alpha)g$, где все члены суммы отличны от нуля. Дифференцируя равенство $\alpha\cdot g=g\cdot\alpha$, получим, что $D_2(\alpha)\cdot g=g\cdot D_2(\alpha)$, то есть $U_\alpha\cdot g=g\cdot U_\alpha$. Таким образом, для каждого $\alpha\in K$ подмножество U_α группы G обладает тем свойством, что $U_\alpha\cdot g=g\cdot U_\alpha$ для всех $g\in G$, то есть $U_\alpha=g\cdot U_\alpha\cdot g^{-1}$. Значит, каждое подмножество U_α является объединением некоторых классов сопряжённости группы G. Далее, очевидно, что δ_g -дифференцирование кольца K для любого $g\in G$. Кроме того, легко показать, что если элементы g и h сопряжены в G, то $\delta_g=\delta_h$. Следовательно, мы имеем семейство дифференцирований кольца K $\{\delta_i : i\in M_0\}$, причём $D_2(\alpha)=\sum_{i\in M_0}\delta_i(\alpha)s_i$. Таким образом, $D_2\in CDer(KG,\overline{KG})$, тем самым теорема 2 доказана.

Пусть снова K обозначает коммутативное кольцо; G - группа. Следующим объектом нашего изучения будут дифференцирования скрещенных групповых алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим семейство $\rho=\{\rho_{g,h} : g,h\in G\}$ обратимых элементов кольца K, удовлетворяющее соотношениям

$$\rho_{g_1,g_2g_3}\cdot\rho_{g_2,g_3}=\rho_{g_1,g_2}\cdot\rho_{g_1g_2,g_3}, \qquad (3)$$

где $g_1, g_2, g_3 \in G$. Это семейство называется системой факторов. Скрещенной групповой алгеброй с системой факторов $\wp$ называется K-алгебра K^tG, имеющая множество $\{t_g : g \in G\}$ в качестве базиса свободного K-модуля, и с умножением, заданным на элементах базиса следующим образом:

$$t_g \cdot t_h = \rho_{g,h}\, t_{gh}.$$

Кроме того, будем предполагать, что t_1 - единица алгебры K^tG.

Описание K-дифференцирований скрещенной групповой алгебры K^tG произвольной периодической группы G в общем случае, видимо, представляет серьёзные трудности. Однако если G - конечная группа, то существует довольно простой способ избежать сложных вычислений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K - коммутативное кольцо; G - конечная группа, порядок которой обратим в K; K^tG - скрещенная групповая алгебра с произвольной системой факторов. Тогда любое K-дифференцирование алгебры является внутренним.

Доказательство. Пусть R - алгебра над K; R^{op} - противоположная алгебра и $R^e = R \otimes_K R^{op}$. Рассмотрим отображение $\mu : R^e \to R$, определённое по формуле

$$\mu\left(\sum_i a_i \otimes a_i'\right) = \sum_i a_i a_i'.$$

Если $J = Ker\,\mu$, то имеет место точная последовательность правых R^e-модулей

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow R^e \xrightarrow{\mu} R \longrightarrow 0 .$$

Алгебра R называется K-сепарабельной, если существует элемент $e \in R^e$ такой, что $\mu(e) = 1$ и $J \cdot e = 0$. Известно, что K-сепарабельность алгебры R является достаточным условием для того, чтобы $Der_K R = IDer_K R$ [5, с.76].

Покажем, что алгебра K^tG является K-сепарабельной, тем самым будет доказана и теорема 3. Заметим, что из [3] при $g_2 = g^{-1}$ и $g_1 = g_3 = g$ следует, что для всех $g \in G$

$$\rho_{g,g^{-1}} = \rho_{g^{-1},g} \qquad (4)$$

Рассмотрим в $(K^tG)^e$ элемент $e = |G|^{-1}\sum_{g\in G} \rho^{-1}_{g,g^{-1}}\, t_g \otimes t_{g^{-1}}$. Очевидно, что $\mu(e) = 1$. Далее, поскольку J как $(K^tG)^e$-модуль порождается элементами $t_\tau \otimes t_1 - t_1 \otimes t_\tau$, где $\tau \in G$, то $J\,e = 0$ как только $(t_\tau \otimes t_1 - t_1 \otimes t_\tau)\, e = 0$ для всех $\tau \in G$. Нам осталось лишь провести простое вычисление

$$(t_\sigma\otimes t_1)\Big(\sum_{g\in G}\rho^{-1}_{g,g^{-1}}\cdot t_g\otimes t_{g^{-1}}\Big)-(t_1\otimes t_\sigma)\Big(\sum_{g\in G}\rho^{-1}_{g,g^{-1}}\cdot t_g\otimes t_{g^{-1}}\Big)=$$

$$=\sum_{g\in G}\rho^{-1}_{g,g^{-1}}\,\rho_{\tau,g}\cdot t_{\tau g}\otimes t_{g^{-1}}-\sum_{g\in G}\rho^{-1}_{g,g^{-1}}\,\rho_{g^{-1},\tau}\cdot t_g\otimes t_{g^{-1}\tau}=$$

$$=\sum_{g\in G}\left(\rho^{-1}_{g,g^{-1}}\,\rho_{\tau,g}-\rho^{-1}_{\tau g,g^{-1}\tau^{-1}}\cdot\rho_{g^{-1}\tau^{-1},\tau}\right)t_{\tau g}\otimes t_{g^{-1}}\ .$$

Теперь возьмём в (3) $g_1=g^{-1}\tau^{-1}$, $g_2=\tau$, $g_3=g$ и воспользуемся соотношением (4) ,в результате чего получим,что $(t_\tau\otimes t_1-t_1\otimes t_\tau)\cdot e=0$ для любого $\tau\in G$.Таким образом, $J\cdot e=0$,а значит,алгебра K^tG является K -сепарабельной,что и завершает доказательство.

Пусть F -поле характеристики 0 .Можно рассмотреть свойство группы G ,которое состоит в том,что у групповой алгебры FG нет дифференцирований,отличных от обобщённых внутренних.Из теоремы I следует,что таким свойством обладают периодические группы.В заключение работы мы покажем,что это свойство групп сохраняется при переходе к прямым произведениям.Точнее,имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G=H\times N$; K -коммутативное кольцо и все дифференцирования групповых алгебр KH и KN являются обобщёнными внутренними.Тогда все дифференцирования алгебры KG также являются обобщёнными внутренними.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть δ -дифференцирование алгебры KG .Его ограничения на KH и KN являются дифференцированиями $\delta_H : KH\to KG$ и $\delta_N : KN\to KG$. Дифференцирование δ_H можно представить в виде $\delta_H(f)=\sum_{n\in N}\delta_n(f)\cdot n$,где отображения $\delta_n : KH\to KH$ являются как легко видеть,дифференцированиями групповой алгебры KH для любого $n\in N$.По условию теоремы дифференцирования δ_n являются обобщёнными внутренними,то есть $\delta_n(x)=xu_n-u_nx$, где $u_n\in\overline{KH}$.Положим $u=\sum_{n\in N}u_n\cdot n\in\overline{KG}$,тогда очевидно, что $\delta_H = \delta_u$. Аналогично $\delta_N = \delta_v$, где $v \in K\overline{G}$. Далее, рассматривая $\delta - \delta_u$ вместо δ, мы можем считать, что $\delta_H = 0$, а $\delta_N = \delta_v$.

Обозначим через A и B множества классов сопряжённости групп H и N соответственно, для всяких $i \in A$ и $j \in B$ пусть S_i и T_j -соответствующие классы сопряжённости, $s_i = \sum_{h \in S_i} h$, $t_j = \sum_{n \in T_j} n$. Через $C(H)$ и $C(N)$ обозначим централизаторы в $K\overline{G}$ групп H и N соответственно. Нетрудно показать, что $C(H) = \{\sum_{i \in A} s_i x_i : x_i \in K\overline{N}\}$, $C(N) = \{\sum_{j \in B} y_j t_j : y_j \in K\overline{H}\}$. Докажем, что $v = w_H + w_N$, где $w_H \in C(H)$, а $w_N \in C(N)$. Элемент $v \in K\overline{G}$ можно представить матрицей /вообще говоря, бесконечной/ размера $|H| \times |N|$, состоящей из блоков, соответствующих классам сопряжённости S_i и T_j. Очевидно, что элемент из $K\overline{G}$ принадлежит $C(H)$ /соответственно $C(N)$ / тогда и только тогда, когда каждый блок матрицы этого элемента состоит из одинаковых строк /соответственно столбцов/.

Из предыдущих рассмотрений следует, что элемент v принадлежит $C(H) + C(N)$ тогда и только тогда, когда в каждом блоке разность любых двух строк /или столбцов/ состоит из одинаковых элементов. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $v - n^{-1} v n \in C(H)$ для любого $n \in N$, или, так как $n \in C(H)$, $nv - vn \in C(H)$.

Итак, если $\delta_H = 0$, а $\delta_N = \delta_v$, то для любых $n \in N$ и $h \in H$ выполнена цепочка равенств

$$0 = \delta(nh) - \delta(hn) = h\delta(n) - \delta(n)h = h(nv - vn) - (nv - vn)h$$

и по доказанному $v \in C(H) + C(N)$, то есть $v = w_H + w_N$. Пусть δ_{w_N} -обобщённое внутреннее дифференцирование, соответствующее элементу w_H. Ясно, что $\delta_{w_H} = 0$ на H и $\delta_{v - w_H} = \delta_{w_N} = 0$ на N, то есть $\delta_v = \delta_{w_H}$ на K. Таким образом, $\delta = \delta_{u + w_H}$, что доказывает теорему.

Автор благодарит А.В.Михалёва за внимание к работе.

Литература

1. Baclawski K. Automorphisms and derivations of incidence algebras.-Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 36, №2, 351-356.

2. Mürase J. Derivations of quasi-matrix algebras. -Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1964, 14, №2, 157-164.
3. Бурков В.Д.,Дифференцирования обобщённых квазиматричных колец.-Мат.заметки,1978,24,вып.1,с. III-122.
4. Smith M.K. Derivations of group algebras of finitely-generated torsion-free nilpotent groups.-Houston J. Math., 1978, 4, №2, 277-288.
5. De Meyer F., Ingraham E, Separable algebras over commutative rings.-Lecture Notes in Math., 1971, 181.

О СТРОЕНИИ ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С.Я.Гриншпон

В этой статье предлагается подход к изучению вполне характеристических подгрупп и связей их строения со строением самой группы для достаточно широких классов абелевых групп без кручения. С помощью этого подхода найдены связи между инвариантами рассматриваемых групп и соответствующими инвариантами их вполне характеристических подгрупп.

Статья состоит из четырех параграфов. В § I вводится понятие гомоморфной оболочки подгруппы A' группы A в группе B и с помощью него устанавливаются некоторые свойства вполне характеристических подгрупп абелевых групп.

§ 2 посвящен изучению транзитивных абелевых групп без кручения, то есть таких групп, в которых для любых двух элементов x и y, таких, что $\chi(x)\leq\chi(y)$, существует эндоморфизм φ со свойством $\varphi(x)=y$. ($\chi(x)$ - характеристика элемента x). В этом параграфе вводится понятие абелевой группы A, транзитивной относительно функции $\varphi_H : A\to H$, где H - некоторая нижняя полурешетка, а φ_H - функция со специальными свойствами, и показывается, что при изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп полезно рассматривать группы, транзитивные относительно таких функций (предложение 2.I). В § 2 доказана теорема 2.3, дающая полный ответ на вопрос, когда абелева группа без кручения, разложимая в прямую сумму групп является транзитивной группой. С помощью этой теоремы получен ряд результатов о свойствах транзитивных абелевых групп без кручения, а также описано строение транзитивных абелевых групп в некоторых классах абелевых групп без кручения.

В § 3 изучаются абелевы группы G без кручения, называемые χ-группами, вполне характеристические подгруппы S которых имеют вид $S=G[v]=\{g\in G \mid \chi(g)\geq v\}$, где v - некоторая последовательность, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞. Как следует из предложения 2.1, всякая χ-группа является транзитивной абелевой группой без кручения. Обратное, в общем случае, неверно. Получены необходимые и достаточные условия, при которых χ-группами являются прямые суммы групп (теорема 3.9, следствие 3.10) и транзитивные редуцированные группы с линейно упорядоченным множеством типов элементов (теорема 3.11). С помощью этих результатов удается выделить χ-группы в ряде классов абелевых групп без кручения.

В § 4 введен класс транзитивно разложимых абелевых групп без кручения, содержащий многие известные классы групп, как, например, класс всех прямых однородных сепарабельных групп без кручения, класс всех прямых сумм однородных алгебраически компактных групп без кручения, класс всех вполне разложимых групп и другие классы групп. В этом параграфе получено описание вполне характеристических подгрупп транзитивно разложимых групп (теорема 4.1). С помощью полученного описания для таких групп установлена связь между некоторыми инвариантами группы и соответствующими инвариантами её вполне характеристической подгруппы (теорема 4.2).

§ 1. Гомоморфные оболочки подгрупп абелевых групп

При изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп оказывается полезным понятие гомоморфной оболочки, которое введем следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть A и B - две абелевы группы и A' - подгруппа группы A. Гомоморфной оболочкой подгруппы A' в группе B будем называть подгруппу группы B, порожденную всеми элементами вида $\eta a'$, где $\eta\in Hom(A,B)$, $a'\in A'$.

Приведем некоторые простые свойства гомоморфных оболочек.

а) Гомоморфная оболочка подгруппы B группы A в группе G

является вполне характеристической подгруппой группы G.

б) Подгруппа S группы G вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда гомоморфная оболочка подгруппы S в G совпадает с S.

в) Пусть A_1, A_2 - подгруппы группы A; A_1', A_2' - соответственно их гомоморфные оболочки в некоторой группе G. Если существует эпиморфизм $\varphi: A_1 \twoheadrightarrow A_2$, допускающий продолжение до эндоморфизма группы A, то $A_2' \leq A_1'$.

Действительно, пусть $\eta \in Hom(A,G)$, $a_2 \in A_2$. Тогда $\eta a_2 \in A_2'$. Так как φ - эпиморфизм, то существует элемент $a_1 \in A_1$ такой, что $\varphi a_1 = a_2$. Если $\hat{\varphi}$ - продолжение φ ($\hat{\varphi} \in E(A)$ - кольцу всех эндоморфизмов группы A), то $\eta\hat{\varphi} \in Hom(A,G)$ и $\eta a_2 = \eta\hat{\varphi} a_1 \in A_1'$.

г) Если φ - изоморфное отображение группы A на группу B и A_1 - вполне характеристическая подгруппа группы A, то гомоморфная оболочка A_1 в B совпадает с подгруппой φA_1.

В самом деле, обозначим через A_1' гомоморфную оболочку подгруппы A_1 в B и предположим, что $A_1' \neq \varphi A_1$. Тогда $\varphi A_1 \subset A_1'$. Пусть M - множество всех таких элементов $b \in B$, что $b = \eta c$ для некоторого гомоморфизма $\eta \in Hom(A, B)$ и некоторого элемента $c \in A_1$. M - порождающее множество элементов группы A_1'. Так как $\varphi A_1 \subset A_1'$, то во множестве M существует такой элемент b', что $b' \neq \varphi a_1$ для всех элементов $a_1 \in A_1$. Имеем $b' \in M$, поэтому существуют такие $a_2 \in A_1$ и $\eta \in Hom(A, B)$, что $b' = \eta a_2$. Пусть $\eta' = \varphi^{-1}\eta$. Тогда $\eta' \in E(A)$ и $\eta' a_2 = \varphi^{-1}\eta a_2 = \varphi^{-1} b' = a$, где $a \in A$, $a \notin A_1$. Получили противоречие с вполне характеристичностью A_1 в A. Следовательно, $A_1' = \varphi A_1$.

Рассмотрим теперь гомоморфные оболочки подгрупп абелевых групп в делимых группах. Если G - примарная абелева p- группа, то через $G[p^k]$, где k - целое неотрицательное число, обозначим, как обычно [7], следующую подгруппу группы G: $\{g \in G \mid p^k g = 0\}$; полагаем также $G[p^\infty] = G$. Если a - элемент порядка p^k группы G, то через $e(a)$ обозначим его экспоненту, то есть $e(a) = k$.

ЛЕММА I.I. Пусть $V = \sum_p^\Phi V_p$ - периодическая делимая группа, $H = \sum_p^\Phi H_p$ - некоторая периодическая подгруппа абелевой группы G (V_p, H_p - примарные p-компоненты соответственно групп V и H). Гомоморфная оболочка подгруппы H группы G в группе V есть группа $\sum\limits_p^{\oplus} V_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$.

Доказательство. Пусть H' - гомоморфная оболочка подгруппы H в группе V и $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$. Если $m_p \neq \infty$, то существует $h \in H_p$ такой, что $p^{m_p}h = 0$. Для всякого элемента $v \in V_p$, такого, что $p^{m_p}v = 0$, существует гомоморфизм $\varphi: \langle h \rangle \to V$, где $\varphi h = v$. В силу инъективности группы V этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $\hat{\varphi}: G \to V$. Значит, $v \in H'$ и $V_p[p^{m_p}] \subseteq H'$. Если же $m_p = \infty$, то для всякого элемента $v' \in V_p$ существует элемент $h' \in H_p$, что $o(h') = o(v')$. Тогда существует гомоморфизм $\psi: \langle h \rangle \to V$ такой, что $\psi h' = v'$. Этот гомоморфизм допускает продолжение до гомоморфизма $\hat{\psi}: G \to V$. Значит, при $m_p = \infty$ $V_p[p^{m_p}] = V_p[p^{\infty}] = V_p \subseteq H'$. Итак, получили $\sum\limits_p^{\oplus} V_p[p^{m_p}] \subseteq H'$.

Пусть $h \in H'$, $h = h_{p_1} + h_{p_2} + \ldots + h_{p_k}$, где $h_{p_i} \neq 0$ - элементы из различных примарных компонент H'_{p_i} ($i = 1, 2, \ldots, k$) группы H'. Для всякого $i = \overline{1,k}$ $h_{p_i} = \varphi_1 h^{(1)} + \varphi_2 h^{(2)} + \ldots + \varphi_n h^{(n)}$, где $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)} \in H_{p_i}$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Hom}(G, V)$. Тогда если $m_{p_i} \neq \infty$, то $p_i^{m_{p_i}} h^{(j)} = 0$, $j = \overline{1,n}$. Отсюда следует $p_i^{m_{p_i}} \varphi_j h^{(j)} = 0$, $j = \overline{1,n}$ и, значит, $p_i^{m_{p_i}} h_{p_i} = 0$, то есть $h_{p_i} \in V[p_i^{m_{p_i}}]$. Итак, получили $H' \subseteq \sum\limits_p^{\oplus} V_p[p^{m_p}]$. Следовательно, $H' = \sum\limits_p^{\oplus} V_p[p^{m_p}]$.

ЛЕММА I.2. Пусть V - делимая группа, H - ненулевая непериодическая подгруппа абелевой группы G. Гомоморфная оболочка подгруппы H в группе V совпадает с группой V.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы I. I.

Пусть $G = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}}^{\oplus} A_\alpha$ и G' - вполне характеристическая подгруппа абелевой группы G. Известно, что $G' = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}}^{\oplus} A'_\alpha$, где A'_α вполне характеристическая подгруппа группы A_α ($\alpha \in \mathfrak{A}$), причем $A'_\alpha = G' \cap A_\alpha$ [7, с.60]. Если же A'_α - вполне характеристическая подгруппа группы A_α для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}}^{\oplus} A'_\alpha$ не обязательно вполне характеристична в $\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}}^{\oplus} A_\alpha$. Следующая лемма дает ответ на вопрос, в каком случае подгруппа $G'=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus}A'_\alpha$, где A'_α - вполне характеристична в $A_\alpha\ (\alpha\in\mathfrak{A})$, будет вполне характеристической подгруппой группы $G=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus}A_\alpha$.

ЛЕММА I.3. Пусть $G=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus}A_\alpha$, $G'=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus}A'_\alpha$, где A'_α - вполне характеристическая подгруппа группы $A_\alpha\ (\alpha\in\mathfrak{A})$. Подгруппа G' вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда для всякой упорядоченной пары индексов (γ,β), где $\gamma,\beta\in\mathfrak{A}$, $\gamma\neq\beta$, гомоморфная оболочка подгруппы A'_γ группы A_γ в A_β содержится в A'_β.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть G' - вполне характеристическая подгруппа группы G. Рассмотрим произвольную пару подгрупп A_β и A_γ ($\beta\in\mathfrak{A},\gamma\in\mathfrak{A}$) группы G. Пусть $a'_\gamma\in A'_\gamma$, $\eta\in Hom(A_\gamma,A_\beta)$. Каждому эндоморфизму ω группы G соответствует построчно сходящаяся матрица $(\omega_{\delta\sigma})_{\delta,\sigma\in\mathfrak{A}}$, где $\omega_{\delta\sigma}\in Hom(A_\delta,A_\sigma)$ [13, с.212]. Рассмотрим следующий эндоморфизм $\bar\eta\in E(G)$, представляемый матрицей $(\bar\eta_{\delta\sigma})_{\delta,\sigma\in\mathfrak{A}}$, где $\bar\eta_{\delta\sigma}=0$, если $(\delta,\sigma)\neq(\gamma,\beta)$ и $\bar\eta_{\gamma\beta}=\eta$. Имеем $\bar\eta a'_\gamma\in G'$. Следовательно, $\eta a'_\gamma\in A'_\beta$. Отсюда получаем, что гомоморфна оболочка подгруппы A'_γ содержится в A'_β.

б) Достаточность. Пусть для всякой упорядоченной пары индексов (γ,β), где $\gamma,\beta\in\mathfrak{A},\gamma\neq\beta$, гомоморфная оболочка подгруппы A'_γ группы A_γ в A_β содержится в A'_β. Покажем, что G' - вполне характеристическая подгруппа группы G. Пусть λ - произвольный эндоморфизм группы G и $g\in G'$, $g=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{\alpha_i}$, $a_{\alpha_i}\in A_{\alpha_i}$, $\alpha_i\in\mathfrak{A}$. Имеем $\lambda\to(\lambda_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma\in\mathfrak{A}}$, где $\lambda_{\beta\gamma}\in Hom(A_\beta,A_\gamma)$ и $\lambda g=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\delta\in\mathfrak{A}}\lambda_{\alpha_i\delta}a_{\alpha_i}$, причем лишь конечное число элементов $\lambda_{\alpha_i\delta}a_{\alpha_i}$ может быть отлично от нуля для всякого i. По условию $\lambda_{\alpha_i\delta}a_{\alpha_i}\in A'_\delta$. Следовательно, G' - вполне характеристическая подгруппа группы G.

ТЕОРЕМА I.4. Пусть G - абелева группа, $G=R\oplus V_0\oplus\sum\limits_{p}^{\oplus}V_p$, где R и V_0 - редуцированная и делимая без кручения части группы G соответственно, а V_p - примарная p-компонента делимой части группы G. Подгруппа S группы G вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих двух видов:

I) $S=R'\oplus\sum_p^{\oplus}V[p^{k_p}]$, где $R'=\sum_p^{\oplus}R'_p$ - периодическая, вполне характеристическая подгруппа группы R (R'_p - примарная p-компонента группы R') и $k_p\geqslant sup\{e(\tau)\mid\tau\in R'_p\}$ (k_p - целое неотрицательное число или ∞);

2) $S=R'\oplus V_0\oplus\sum_p^{\oplus}V_p$, где R' - вполне характеристическая подгруппа группы R .

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Необходимость. Пусть S - вполне характеристическая подгруппа группы G . $S=$ $=R'\oplus(V_0\cap S)\oplus\sum_p(V_p\cap S)$, где $R'=R\cap S$ - вполне характеристическая подгруппа группы R .

Если R' - периодическая группа, то возможны следующие случаи: I) $S\cap V_0\neq 0$ и 2) $S\cap V_0=0$. Так как $S\cap V_0$ вполне характеристическая подгруппа группы V_0 , то в случае I) $S\cap V_0=$ $=V_0$, и по лемме I.2 гомоморфная оболочка V_0 в группе $\sum_p^{\oplus}V_p$ совпадает с $\sum_p^{\oplus}V_p$. Применяя теперь лемму I.3, получаем $S=R'\oplus\sum_p^{\oplus}V_p\oplus V_0$. Если же $S\cap V_0=0$, то в силу лемм I.I и I.3 получаем $\sum_p^{\oplus}V_p[p^{m_p}]\leq\sum_p^{\oplus}(S\cap V_p)$, где $m_p=sup\{e(\tau)\mid\tau\in R'_p\}$. Так как $\sum_p^{\oplus}(S\cap V_p)$ - вполне характеристическая подгруппа в $\sum_p^{\oplus}V_p$, то $\sum_p^{\oplus}(S\cap V_p)=\sum_p^{\oplus}V_p[p^{k_p}]$, и поэтому $k_p\geqslant m_p$. Итак, если R' - периодическая группа и $S\cap V_0=0$, то $S=R'\oplus\sum_p^{\oplus}V_p[p^{k_p}]$, где $k_p\geqslant sup\{e(\tau)\mid\tau\in R'_p\}$.

Если R' - ненулевая непериодическая группа, то по лемме I.2 гомоморфная оболочка подгруппы R' группы R в группе $V_0\oplus\sum_p^{\oplus}V_p$ совпадает с $V_0\oplus\sum_p^{\oplus}V_p$. Поэтому $S=R'\oplus V_0\oplus$ $\oplus\sum_p^{\oplus}V_p$.

б) Достаточность. Пусть $S=R'\oplus\sum_p^{\oplus}V_p[p^{k_p}]$, где $R'=\sum_p^{\oplus}R'_p$ - периодическая, вполне характеристическая подгруппа группы R и $k_p\geqslant sup\{e(\tau)\mid\tau\in R'_p\}$. Если $a\in R'_p$ и $\varphi\in$ $\in Hom(R,\sum_p^{\oplus}V_p\oplus V_0)$, то $p^{k_p}\varphi a=0$. Значит, $\varphi a\in$ $\in V_p[p^{k_p}]$. Отсюда следует, что гомоморфная оболочка подгруппы R' группы R в группе $\sum_p^{\oplus} V_p \oplus V_0$ содержится в $\sum_p^{\oplus} V_p[p^{k_p}]$. Значит, S - вполне характеристическая подгруппа группы G .

Если $S = R' \oplus \sum_p^{\oplus} V_p \oplus V_0$, то, очевидно, S вполне характеристична в G.

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Из теоремы I.4 непосредственно следует результат, полученный в [9] (теорема I, с.I3-I4), о вполне характеристических подгруппах абелевых групп вида $G = T \oplus \mathcal{D} \oplus H$, где T - делимая примарная группа; $\mathcal{D}$ - делимая группа без кручения, а H - редуцированная группа без кручения.

§ 2. Транзитивные абелевы группы без кручения

Рассмотрим множество $\mathfrak{X}$, состоящее из всех последовательностей $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, где каждое $v^{(i)}$ - целое неорицательное число или символ ∞ , $i \in N$. Такие последовательности будем называть характеристиками. Во множестве $\mathfrak{X}$ естественным образом вводится частичный порядок, а именно $v \leq w$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in N$, $v^{(i)} \leq w^{(i)}$. Относительно этого частичного порядка $\mathfrak{X}$ является полной решеткой. Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ - множество всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Если G - абелева группа без кручения, $0 \neq x \in G$, то характеристика $\chi_G(x)$ (или $\chi(x)$) элемента x в группе G - это такая характеристика $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, в которой каждое $v^{(i)}$ есть p_i-высота $h_{p_i}^G(x)$ (или $h_{p_i}(x)$) элемента x в группе G .

При изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп G без кручения интерес представляют группы, в которых каждая вполне характеристическая подгруппа имеет вид $G[v] = \{g \in G \mid \chi(g) \geq v\}$, где v - некоторая характеристика. Такие группы обладают одним важным свойством (свойством транзитивности), что будет вытекать из следующих общих рассмотрений.

Пусть A - абелева группа, H - некоторая нижняя полурешетка и $\varphi_H : A \to H$ - функция со следующими свойствами:

1) $\varphi_H(\eta a) \geqslant \varphi_H(a)$ для всякого $a \in A$ и $\eta \in E(A)$;

2) $\varphi_H(a+b) \geqslant \varphi_H(a) \wedge \varphi_H(b)$ для любых $a, b \in A$;

3) $\varphi_H(0) \geqslant h$ для всякого $h \in H$.

Пусть $h \in H$ и $A[h] = \{a \in A \mid \varphi_H(a) \geqslant h\}$. $A[h]$ – подгруппа группы A. Действительно, если $a, b \in A[h]$, то $-b \in A[h]$, так как существует $\eta \in E(A)$ такой, что $\eta g = -g$ для всякого элемента $g \in A$. Поэтому в силу 1) $\varphi_H(-b) \geqslant \geqslant \varphi_H(b) \geqslant h$. Имеем $\varphi_H(a-b) \geqslant \varphi_H(a) \wedge \varphi_H(-b) \geqslant \varphi_H(a) \wedge \wedge \varphi_H(b) \geqslant h$. Значит, $A[h]$ – подгруппа группы A. Очевидно, $A[h]$ вполне характеристична в A.

Назовем абелеву группу A φ_H-группой, если всякая её вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A[h]$, где $h \in H$. Абелеву группу A назовем транзитивной относительно функции φ_H, если для любых двух её элементов a, b, для которых $\varphi_H(a) \leqslant \varphi_H(b)$, существует $\eta \in E(A)$ такой, что $\eta a = b$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Всякая φ_H-группа транзитивна относительно функции φ_H.

Доказательство. Пусть A – φ_H-группа, и предположим, что A не является транзитивной относительно функции φ_H. Тогда существуют элементы $a, b \in A$ такие, что $\varphi_H(a) \leqslant \leqslant \varphi_H(b)$, но для всякого $\eta \in E(A)$ $\eta a \neq b$. Рассмотрим подгруппу $S = \{\eta a \mid \eta \in E(A)\}$, S – вполне характеристическая подгруппа группы A и поэтому $S = A[h]$ для некоторого $h \in H$. Тогда $\varphi_H(a) \geqslant h$, а значит, $\varphi_H(b) \geqslant h$, то есть $b \in A[h] = S$, чего быть не может. Получили противоречие. Следовательно, A транзитивна относительно функции φ_H.

Из предложения 2.1., в частности, вытекает, что класс вполне транзитивных абелевых p-групп [6, с.11] является наиболее широким классом p-групп, в котором для любой группы G вполне характеристические подгруппы имеют вид $G(\alpha)$, где α – некоторая U – последовательность в смысле [11].

Пусть теперь G – абелева группа без кручения и $\varphi_X : G \to X$ – функция, отображающая каждый элемент $g \in G$ на его характеристику в группе G. Из предложения 2.1 непосредственно следует, что если всякая вполне характеристическая подгруппа группы G имеет вид $G[v]$, $v \in X$, то группа G транзитивна относительно функции φ_X. В дальнейшем группу G без кручения, транзитивную относительно функции φ_x, будем называть просто транзитивной. Итак, абелева группа G без кручения называется транзитивной, если для любых двух её элементов x и y, таких, что $\chi(x)\le\chi(y)$, существует эндоморфизм $\varphi\in E(G)$ со свойством $\varphi(x)=y$ (см. также [2]).

Транзитивными группами являются алгебраически компактные, однородные сепарабельные, квазисервантно инъективные [12], сильно однородные [2], [8] и другие абелевы группы без кручения.

Настоящий параграф посвящен изучению транзитивных абелевых групп без кручения. В следующем параграфе будут исследованы абелевы группы A без кручения, любая вполне характеристическая подгруппа которых имеет вид $A[v]$, $v\in X$.

Введем понятие транзитивной системы групп, которое нам понадобится в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Множество абелевых групп без кручения $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называется транзитивной системой групп, если для каждой пары групп (A_β, A_γ), $\beta\in\mathfrak{A}$, $\gamma\in\mathfrak{A}$ (β может совпадать с γ) выполняется условие: из того, что $a\in A_\beta$, $b\in A_\gamma$ и $\chi(a)\le\chi(b)$ следует, что существует $\varphi\in Hom(A_\beta, A_\gamma)$ со свойством $\varphi a=b$.

Понятно, что каждая группа, принадлежащая транзитивной системе групп, является транзитивной группой.

Приведем примеры транзитивных систем групп.

1. Множество $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, где каждая A_α - алгебраически компактная группа. Транзитивность этой системы следует из сервантной инъективности алгебраически компактных групп.

2. Множество групп $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, где каждая группа B_α транзитивна, и $B_\beta\cong B_\gamma$ для любых $\beta,\gamma\in\mathfrak{A}$. Действительно, пусть φ -изоморфное отображение B_β на B_γ, $a\in B_\beta$, $b\in B_\gamma$ и $\chi(a)\le\chi(b)$. Имеем $\chi(\varphi^{-1}b)\ge\chi(a)$, и поэтому существует эндоморфизм η группы B_β такой, что $\eta a=\varphi^{-1}b$. Пусть $\psi=\varphi\eta$. Тогда $\psi\in Hom(B_\beta, B_\gamma)$ и $\psi a=b$. Следовательно, система групп $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ транзитивна.

3. Множество $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, где каждая группа C_α - однородная сепарабельная группа. Действительно, пусть C_β и C_γ - однородные сепарабельные группы ($\beta,\gamma\in\mathfrak{A}$), $a\in C_\beta$, $d\in C_\gamma$, $\chi(d)\ge\chi(a)$. Имеем $C_\beta=\langle a\rangle_*\oplus C_1$, $C_\gamma=\langle d\rangle_*\oplus C_2$. Ясно, что существует $\eta\in Hom(C_\beta, C_\gamma)$, отображающий a в d.

Рассмотрим теперь множество абелевых групп без кручения, характеристики элементов которых обладают специальным свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $M=\{A_i\}_{i\in J}$ – некоторое множество абелевых групп без кручения. Будем говорить, что система групп M удовлетворяет условию монотонности для характеристик, если для всякой группы A_j и любого элемента $0\neq a_j\in A_j$, $j\in J$, из выполнения соотношений: а) $\inf_{\chi}\{\chi(a_{i_1}),\chi(a_{i_2}),\dots,\chi(a_{i_s})\}\leq\chi(a_j)$, где $a_{i_k}\in A_{i_k}$, $i_k\in J$, $k=\overline{1,s}$, $i_k\neq i_l$ при $k\neq l$, и б) $\chi(a_j)\neq\chi(a_{i_k})$ для всех $k=\overline{1,s}$ следует существование элементов $a_{j_1},a_{j_2},\dots,a_{j_r}\in A_j$ со следующими свойствами: 1) $a_{j_1}+a_{j_2}+\dots+a_{j_r}=a_j$; 2) для каждого элемента a_{j_l} $(l=\overline{1,r})$ найдется такой элемент a_{i_k} $(k=\overline{1,s})$, что $\chi(a_{j_l})\geq\chi(a_{i_k})$.

ЛЕММА 2.2. Если $M=\{A_i\}_{i\in J}$, где все A_i – однородные группы без кручения одного и того же типа, то M удовлетворяет условию монотонности для характеристик.

Доказательство. Пусть $a_j\in A_j$, $j\in J$, $\chi(a_j)\geq\inf_{\chi}\{\chi(a_{i_1}),\dots,\chi(a_{i_s})\}$, где $a_{i_k}\in A_{i_k}$; $i_k\in J$, $k=\overline{1,s}$, и пусть не существует элемента a_{i_k} $(k=\overline{1,s})$ такого, что $\chi(a_j)\geq\chi(a_{i_k})$. Лишь для конечного множества простых чисел p $h_p(a_{i_1})>h_p(a_j)$ (учитываем, что характеристики элементов a_{i_1} и a_j эквивалентны). Пусть $\{p_{l_1},p_{l_2},\dots,p_{l_t}\}$ – множество всех тех простых чисел, для которых $h_p(a_{i_1})>h_p(a_j)$. Существует такое целое положительное число m_0, все различные простые делители которого есть $p_{l_1},p_{l_2},\dots,p_{l_t}$, что $\chi(a_{i_1})\leq\chi(m_0a_j)$. Так как $\chi(a_j)\geq\inf_{\chi}\{\chi(a_{i_1}),\dots,\chi(a_{i_s})\}$, то для всякого p_r $(r=\overline{l_1,l_t})$ найдется элемент $a^{(p_r)}$, равный одному из элементов a_{i_k} $(k=\overline{1,s})$, что $h_{p_r}(a^{(p_r)})\leq h_{p_r}(a_j)$. Существует число $m_r\in N$ такое, что $\chi(a^{(p_r)})\leq\chi(m_ra_j)$, причем m_r можно выбрать не делящимся на p_r. Имеем $(m_0,m_1,\dots,m_t)=1$. Тогда существуют такие целые числа $u_0,u_1,\dots,u_t$, что $u_0m_0+u_1m_1+\dots+u_tm_t=1$, а значит, $a_j=\sum_{n=0}^{t}u_nm_na_j$, где $\chi(u_0m_0a_j)\geq\chi(a_{i_1})$, $\chi(u_nm_na_j)\geq\chi(a^{(p_{l_n})})$ для $n=\overline{1,t}$. Следовательно, система групп M удовлетворяет условию монотонности для характеристик.

С помощью введенных понятий докажем теорему о транзитивности абелевых групп без кручения, разложимых в прямые суммы групп.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $G=\sum_{i\in J}^{\oplus}A_i$ - абелева группа без кручения. Группа G транзитивна тогда и только тогда, когда система групп $\{A_i\}_{i\in J}$ транзитивна и удовлетворяет условию монотонности для характеристик.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть группа $G=\sum_{i\in J}^{\oplus}A_i$ транзитивна. Рассмотрим подгруппы A_t и A_j, $t,j\in J$. Пусть $a\in A_t$, $b\in A_j$ и $\chi(a)\le\chi(b)$. Тогда существует $\varphi\in E(G)$, что $\varphi a=b$. Рассмотрим $\psi=\pi_j\varphi|_{A_t}$, где π_j - естественная проекция G на A_j. Тогда $\psi\in Hom(A_t,A_j)$ и $\psi a=b$.

Пусть $a_j\in A_j$ и $\chi(a_j)\geq\inf_{\chi}\{\chi(a_{i_1}),\chi(a_{i_2}),\dots,\chi(a_{i_s})\}$, где элементы a_{i_k}, $k=\overline{1,s}$ принадлежат различным прямым слагаемым в разложении $G=\sum_{i\in J}^{\oplus}A_i$. Тогда $\chi(a_j)\geq\chi(a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_s})$, и так как G - транзитивная группа, то существует $\varphi\in E(G)$ такой, что $a_j=\varphi(a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_s})$. Имеем $a_j=\pi_j\varphi a_{i_1}+\dots+\pi_j\varphi a_{i_s}$ (2.1) $\pi_j\varphi a_{i_k}\in A_j$ и $\chi(\pi_j\varphi a_{i_k})\geq\chi(a_{i_k})$ для всех $k=\overline{1,s}$. Удаляя из суммы (2.1) слагаемые, равные нулю, получаем, что $a_j=$ $=a_{j_1}+a_{j_2}+\dots+a_{j_r}$, где каждое из слагаемых удовлетворяет свойству 2) определения 2.2.

б) Достаточность. Пусть $b_1,b_2\in\sum_{i\in J}^{\oplus}A_i$, $b_1=a_{l_1}+a_{l_2}+\dots+a_{l_s}$ (2.2), $b_2=a_{k_1}+a_{k_2}+\dots+a_{k_n}$ (2.3) - разложения элементов b_1 и b_2 в сумму своих координат в соответствующих слагаемых A_i и $\chi(b_1)\le\chi(b_2)$. Покажем, что для всякого элемента a_{k_j}, $j=$ $=\overline{1,n}$, существует эндоморфизм φ_j группы G такой, что $\varphi_j b_1=$ $=a_{k_j}$. Тогда эндоморфизм $\varphi=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j$ переводит элемент b_1 в b_2, значит, G -транзитивная группа.

Если существует для элемента a_{k_j} такой элемент a_{l_i}, что $\chi(a_{l_i})\le\chi(a_{k_j})$ $(i=\overline{1,s})$, то в силу транзитивности системы групп $\{A_i\}_{i\in J}$ найдется $\psi\in Hom(A_{l_i},A_{k_j})$, что $\psi a_{l_i}=a_{k_j}$. Рассмотрим эндоморфизм $\varphi_j\in E(G)$ такой, что $\varphi_j c=\psi c$, если $c\in A_{l_i}$ и $\varphi_j c=0$, если $c\in A_t$, где $t\neq l$, $t\in J$. Тогда $\varphi_j b_1=a_{k_j}$.

Пусть не существует элемента a_{l_i} $(i=\overline{1,s})$ такого, что $\chi(a_{k_j})\geq\chi(a_{l_i})$. Имеем $\chi(a_{k_j})\geq\chi(b_2)\geq\chi(b_1)=\inf_{\chi}\{\chi(a_{l_1}),$

$\chi(a_{e_2}),\ldots,\chi(a_{e_s})\}$. Так как система групп $\{A_i\}_{i\in J}$ удовлетворяет условию монотонности для характеристик, то существуют элементы $a_{j_1},\ldots,a_{j_t}\in A_{k_j}$, что $a_{k_j}=a_{j_1}+\ldots+a_{j_\tau}$, и для всякого a_{j_t} $(t=\overline{1,\tau})$ найдется элемент $a^{(t)}$, равный одному из элементов a_{e_m} $(m=\overline{1,s})$, что $\chi(a_{j_t})\geqslant\chi(a^{(t)})$. В силу транзитивности системы $\{A_i\}_{i\in J}$ существует гомоморфизм $\varphi_{j_t}\in$ $\in Hom(A^{(t)},A_{j_t})$ ($A^{(t)}$ - это группа из множества $\{A_i\}_{i\in J}$, содержащая элемент $a^{(t)}$), что $\varphi_{j_t}a^{(t)}=a_{j_t}$. Рассмотрим эндоморфизм φ_{j_t} группы G такой, что $\varphi_{j_t}c=\psi_{j_t}c$ если $c\in A^{(t)}$ и $\varphi_{j_t}c=0$, если $c\in A_i$, $A_i\neq A^{(t)}$. Пусть $\varphi_j=\sum_{t=1}^{\tau}\varphi_{j_t}$, тогда $\varphi_j b_1=(\sum_{t=1}^{\tau}\varphi_{j_t})b_1=\sum_{t=1}^{\tau}\varphi_{j_t}a^{(t)}=\sum_{t=1}^{\tau}a_{j_t}=a_{k_j}$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают следующие два результата, полученные в [I].

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Всякое прямое слагаемое транзитивной группы транзитивно.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $A=\sum_{i\in J}^{\oplus}A_i$ - редуцированная абелева группа без кручения и для любого простого числа p и любого $i\in J$, если $pA_i\neq A_i$, то $pA_j=A_j$ для всех $j\neq i, j\in J$. Группа A транзитивна тогда и только тогда, когда транзитивна каждая группа A_i, $i\in J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость сразу следует из следствия 2.4. Докажем достаточность.

Рассмотрим систему групп $\{A_i\}_{i\in J}$. Эта система групп транзитивна, так как каждая группа A_i $(i\in J)$ транзитивна и любые два элемента $0\neq a\in A_j$, $0\neq b\in A_t$ $(j,t\in J, j\neq t)$ имеют несравнимые характеристики.

Система групп $\{A_i\}_{i\in J}$ удовлетворяет условию монотонности для характеристик, так как если для элемента $0\neq a_j\in A_j, j\in J$, выполняется $\chi(a_j)\geqslant\inf_{\chi}\{\chi(a_{i_1}),\ldots,\chi(a_{i_s})\}$ где $a_{i_k}\in A_{i_k}$, $i_k\in$ $\in J$, $k=\overline{1,s}$, $i_k\neq i_e$ при $k\neq e$, то среди элементов $a_{i_1},\ldots,a_{i_s}$ обязательно найдется элемент из группы A_j, характеристика которого сравнима с характеристикой элемента a_j и не превосходит эту характеристику.

Следующее утверждение показывает, что вопрос о транзитивности произвольной группы сводится к вопросу о транзитивности её редуцированной части.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Абелева группа G без кручения транзитивна тогда и только тогда, когда её редуцированная часть транзитивна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G=R\oplus V$, где R и V - редуцированная и делимая части группы G соответственно. Необходимость сразу же следует из следствия 2.4. Докажем достаточность.

Пусть R - транзитивная абелева группа. Рассмотрим множество $M=\{R,V\}$. M - транзитивная система групп. Действительно, пусть $0\neq v\in V, a\neq 0$ и $a\in R$ либо $a\in V$. Имеем $\chi(a)\leq\chi(v)$. Существует $\varphi\in Hom(\langle a\rangle_*,V)$ такой, что $\varphi a=v$. В силу инъективности группы V гомоморфизм φ можно продолжить до гомоморфизма $\psi\in Hom(R,V)$. Так как $\inf_{\chi}\{\chi(r_1),\chi(v_1)\}=\chi(r_1)$, где $r_1\in R, v_1\in V$, то система групп M удовлетворяет условию монотонности для характеристик. Значит, по теореме 2.3 G - транзитивная группа.

В дальнейшем мы будем рассматривать только редуцированные транзитивные группы.

Рассмотрим теперь редуцированные транзитивные группы $G=A\oplus B$, в которых $Hom(A,B)=0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть транзитивная редуцированная группа $G=A\oplus B$ такова, что $Hom(A,B)=0$. Если p -такое простое число, что $pA\neq A$, то $pB=B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует простое число p, для которого $pA\neq A$ и $pB\neq B$. Пусть $0\neq a\in A$, $0\neq b\in B$, $h_p(a)=0$, $h_p(b)=0$. Имеем $\chi(b)\geq \inf_{\chi}\{\chi(pb),\chi(a)\}$. Так как группа $G=A\oplus B$ транзитивна, то по теореме 2.3 система $\{A,B\}$ транзитивна и удовлетворяет условию монотонности для характеристик. Понятно, что $\chi(b)<\chi(pb)$ и из условия $Hom(A,B)=0$ и транзитивности системы $\{A,B\}$ получаем, что $\chi(b)\ngeq\chi(a)$. Тогда должны существовать такие элементы $b_1,b_2,\dots,b_r$ в группе B, что $b=b_1+b_2+\dots+b_r$, и выполняется по крайней мере одно из двух неравенств $\chi(b_i)\geq\chi(a)$ или $\chi(b_i)\geq\chi(pb)$ для каждого $i=\overline{1,r}$ Однако $\chi(b_i)\ngeq\chi(a)$, так как $Hom(A,B)=0$. Следовательно, $\chi(b_i)\geq\chi(pb)$ для всякого i, но тогда $h_p(b)\geq 1$. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Если транзитивная редуцированная группа $G=A\oplus B$ такова, что $Hom(A,B)=0$, то и $Hom(B,A)=0$.

Доказательство. По предыдущему следствию получаем, что всякий раз из $pA \neq A$ следует $pB = B$, а значит, и всякий раз из $pB \neq B$ следует $pA = A$, где p -простое число. Следовательно, характеристики любых элементов $0 \neq a \in A$ и $0 \neq b \in B$ несравнимы и поэтому $Hom(B, A) = 0$.

Дальнейшие результаты этого параграфа будут связаны с описанием транзитивных абелевых групп в некоторых классах абелевых групп без кручения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть $G = \sum\limits_{i \in J}^{\oplus} G_i$ - редуцированная абелева группа без кручения, где все G_i - однородные группы одного и того же типа. Группа G транзитивна тогда и только тогда, когда система групп $\{G_i\}_{i \in J}$ транзитивна.

Доказательство. Необходимость сразу следует из теоремы 2.3. Для доказательства достаточности нужно воспользоваться леммой 2.2 и теоремой 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Пусть $G = \sum\limits_{i \in J}^{\oplus} A_i$, $A_i \cong A$ для всех i, где A - однородная редуцированная абелева группа без кручения. Группа G транзитивна тогда и только тогда, когда A - транзитивная группа.

Доказательство следует из леммы 2.2, теоремы 2.3 и рассмотренного примера 2 транзитивной системы групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Пусть $G = \sum\limits_{i \in J}^{\oplus} G_i$ - редуцированная абелева группа и для всякой пары групп $(G_j, G_k), j, k \in J$, по крайней мере одна из групп $Hom(G_j, G_k)$ или $Hom(G_k, G_j)$ равна нулю. Группа G транзитивна тогда и только тогда, когда каждая группа G_i транзитивна и выполняется условие: если $i_1, i_2 \in J$, $i_1 \neq i_2$, то для любого простого числа p, такого, что $pG_{i_1} \neq G_{i_1}$, имеет место $pG_{i_2} = G_{i_2}$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть G - транзитивная группа. Тогда каждое её прямое слагаемое транзитивно. Имеем $G_{i_1} \oplus G_{i_2}$ - транзитивная группа ($i_1, i_2 \in J$), и так как по крайней мере одна из групп $Hom(G_{i_1}, G_{i_2})$ или $Hom(G_{i_2}, G_{i_1})$ равна нулю, то по следствию 2.7 для всякого простого числа p, такого, что $pG_{i_1} \neq G_{i_1}$, следует $pG_{i_2} = G_{i_2}$.

Достаточность непосредственно получается из следствия 2.5.

Рассмотрим теперь однородно разложимые абелевы группы без кручения. Пусть $G=\sum\limits_{i\in J}^{\oplus}A_i$, где A_i - однородные группы без кручения. Если собрать вместе компоненты A_i одного и того же типа и взять их прямую сумму, то мы получи каноническое (наименьшее однородное) [6, с.212] разложение $G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}G_t$, где G_t - однородные группы различных типов t. Дадим критерий транзитивности однородно разложимой группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что однородно разложимая группа $G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}G_t$ (записано каноническое разложение группы G) удовлетворяет условию контрастности для типов, если для всяких двух типов $t_1, t_2\in T$, $t_1\neq t_2$, и любого простого числа p, такого, что $pG_{t_1}\neq G_{t_1}$, имеет место $pG_{t_2}=G_{t_2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Однородно разложимая редуцированная абелева группа $G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}G_t$ транзитивна тогда и только тогда, когда каждая однородная компонента её канонического разложения транзитивна и G удовлетворяет условию контрастности для типов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если $t_1,t_2\in T$ и $t_1\neq t_2$, то по крайней мере одна из групп $Hom(G_{t_1}, G_{t_2})$ или $Hom(G_{t_2}, G_{t_1})$ равна нулю. Теперь остается применить предыдущее предложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Известно, что любые два канонических разложения однородно разложимой абелевой группы без кручения изоморфны [6, с. 212]. Если G - транзитивная редуцированная однородно разложимая группа, то она обладает единственным каноническим разложением. Действительно, пусть $G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}G_t$ и $G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}H_t$ - два канонических разложения группы G. В силу предложения 2.12 каждая группа G_t и H_t вполне характеристична в G, причем $G_{t_1}\cap H_{t_2}=0\ (t_1,t_2\in T)$, если $t_1\neq t_2$. Имеем для всякого $\ell\in T$ $G_\ell=G_\ell\cap G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}(G_\ell\cap H_t)=G_\ell\cap H_\ell$, то есть $G_\ell\leq H_\ell$. Аналогично $H_\ell=H_\ell\cap G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}(H_\ell\cap G_t)=G_\ell\cap H_\ell$, то есть $H_\ell\leq G_\ell$. Итак, для всякого $\ell\in T$ $H_\ell=G_\ell$.

Учитывая, что всякая однородная сепарабельная группа без кручения транзитивна, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Пусть $G=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}G_t$, где G_t - редуцированная однородная сепарабельная группа типа t, T - некоторое множество типов (в частности, G - вполне разложимая группа). Группа G транзитивна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию контрастности для типов.

Так как всякая абелева группа, полная в своей p-адической топологии, алгебраически компактна [7, с.197], то из предложений 2.9 и 2.12 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.14. Пусть $G=\sum\limits_{p\in\pi}^{\oplus} G_p$, где π - некоторое множество простых чисел; G_p - прямые суммы групп без кручения, полных в своей p-адической топологии. Тогда G -транзитивная группа.

Назовем абелеву группу A без кручения обобщенно сепарабельной группой, если каждое конечное подмножество элементов из A содержится в некотором однородно разложимом прямом слагаемом группы A.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Редуцированная обобщенно сепарабельная группа транзитивна тогда и только тогда, когда каждое её однородно разложимое прямое слагаемое удовлетворяет условию контрастности для типов и любая однородная компонента канонического разложения такого слагаемого транзитивна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Необходимость следует из следствия 2.4 и предложения 2.12.

б) Достаточность. Пусть $a_1\in A$, $a_2\in A$ и $\chi_A(a_1)\leq\chi_A(a_2)$. Вложим элементы a_1 и a_2 в однородно разложимое прямое слагаемое A' группы A. Имеем $A=A'\oplus A''$ и $\chi_{A'}(a_1)\leq\chi_{A'}(a_2)$. Так как A' удовлетворяет условию контрастности для типов и любая однородная компонента группы A' транзитивна, то по предложению 2.12 существует $\varphi\in E(A')$ такой, что $\varphi a_1=a_2$. φ допускает продолжение до эндоморфизма группы A и, значит, A -транзитивная группа.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. Редуцированная сепарабельная группа без кручения транзитивна тогда и только тогда, когда её каждое вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга удовлетворяет условию контрастности для типов.

В заключение параграфа покажем, что элементы транзитивной обобщенно сепарабельной группы обладают одним интересным свойством. Обозначим через $t(a)$ тип элемента a.

СЛЕДСТВИЕ 2.17. Если характеристики двух элементов a и b редуцированной транзитивной обобщенно сепарабельной группы G

содержат символы ∞ на одних и тех же местах, то $t(a)=t(b)$.

Доказательство. Вложим элементы a и b в однородно разложимое прямое слагаемое $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t$ группы G, где A_t - однородная группа типа t; T - некоторое множество типов. Пусть $a=a_{t_1}+a_{t_2}+\ldots+a_{t_n}$, $b=b_{t_{\alpha_1}}+b_{t_{\alpha_2}}+\ldots+b_{t_{\alpha_m}}$, где $0\neq a_{t_j}$ - элементы из различных компонент A_{t_j} ($j=1,2,\ldots,n$; $t_j\in T$); $0\neq b_{t_{\alpha_k}}$ - элементы из различных компонент $A_{t_{\alpha_k}}$ ($k=1,2,\ldots,m$; $t_{\alpha_k}\in T$). Покажем, что для всякого j существует такое k, что $t_j=t_{\alpha_k}$. Действительно, найдется такое простое число p, что $pA_{t_j}\neq A_{t_j}$, и если бы $t_j\neq t_{\alpha_k}$ для всех $k=1,2,\ldots,m$, то в силу условия контрастности для типов группы A (следствие 2.15) имели бы $pA_{t_{\alpha_k}}=A_{t_{\alpha_k}}$. Тогда $h_p(a)\neq\infty$, $h_p(b)=\infty$, чего быть не может, так как характеристики элементов a и b содержат символы ∞ на одних и тех же местах. Аналогично для всякого k существует такое j, что $t_{\alpha_k}=t_j$. Значит, $t(a)=t(b)$.

§ 3. χ- группы

В этом параграфе будут изучаться абелевы группы без кручения, вполне характеристические подгруппы которых имеют специальный вид. Прежде чем перейти к рассмотрению таких групп, докажем ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3.1. Пусть S - вполне характеристическая подгруппа абелевой группы G без кручения. Тогда если p - такое простое число, что $pG=G$, то $pS=S$.

Доказательство. Рассмотрим следующий эндоморфизм η группы G: $\eta g=\frac{g}{p}$ для всякого $g\in G$. Тогда если $s\in S$, то $\eta s=\frac{s}{p}\in S$, то есть $pS=S$.

Пусть A - абелева группа без кручения и $v=(v^{(1)},v^{(2)},\ldots,v^{(N)},\ldots)$ - произвольная характеристика. Рассмотрим вполне характеристическую подгруппу $A[v]=\{a\in A \mid \chi(a)\geq v\}$ группы A.

ЛЕММА 3.2. Если $A[v]$ содержит элемент конечной p_k- высоты группы A, то в группе $A[v]$ есть элемент c такой, что $h^A_{p_k}(c)=v^{(k)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in A[v]$ и $h^A_{p_k}(a) \neq \infty$. Так как $a \in A[v]$, то $\chi_A(a) \geqslant v$ и, значит, $h^A_{p_k}(a) \geqslant v^{(k)}$. Если $h^A_{p_k}(a) = v^{(k)}$, то в качестве элемента c берем a. Если же $h^A_{p_k}(a) = v^{(k)} + t$, где $t > 0$, то пусть $c = \frac{a}{p_k^t}$. Тогда $h^A_{p_k}(c) = v^{(k)}$, и если $\chi_A(a) = w, \chi_A(c) = u$, то $w^{(s)} = u^{(s)}$ для всех $s \neq k, s \in N$. Так как $w > v$, то $u \geqslant v$, значит, $c \in A[v]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $A = R \oplus V$ - абелева группа без кручения, где R, V - соответственно её редуцированная и делимая части. Ненулевая подгруппа S группы A вполне характеристична в A тогда и только тогда, когда $S = R_1 \oplus V$, где R_1 - вполне характеристическая подгруппа группы R.

Эта лемма непосредственно следует из теоремы I.4.

Итак, при рассмотрении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения можно ограничиться редуцированными группами.

Пусть A - произвольная редуцированная абелева группа без кручения. Введем на множестве всех характеристик отношение ρ_A. Будем считать, что $v \rho_A w$ тогда и только тогда, когда v и w удовлетворяют следующему условию: если в группе A есть элемент a конечной p_k- высоты такой, что выполняется по крайней мере одно из двух неравенств $\chi(a) \geqslant v$ или $\chi(a) \geqslant w$, то $v^{(k)} = w^{(k)}$. Введенное отношение ρ_A является отношением эквивалентности.

ЛЕММА 3.4. Пусть A - редуцированная абелева группа без кручения, v и w - две характеристики. $A[v] = A[w]$ тогда и только тогда, когда $v \rho_A w$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Достаточность. Пусть $v \rho_A w$ и $a \in A[v]$, то есть $\chi_A(a) \geqslant v$. Для всех таких простых чисел p_i, что $h^A_{p_i}(a) < \infty$, имеем $v^{(i)} = w^{(i)}$. Следовательно, $\chi_A(a) \geqslant w$, а значит, $a \in A[w]$. Получили $A[v] \leq A[w]$. Обратное включение доказывается аналогично.

б) Необходимость. Пусть $A[v] = A[w]$, и в группе A есть элемент a конечной p_k-высоты такой, что $\chi(a) \geqslant v$, то есть $a \in A[v]$. Тогда по лемме 3.2 существует элемент $c \in A[v]$ такой, что $h^A_{p_k}(c) = v^{(k)}$, и так как $c \in A[w]$, то $w^{(k)} \leq v^{(k)}$. Аналогично $w^{(k)} \geqslant v^{(k)}$. Следовательно, $w^{(k)} = v^{(k)}$. Лемма доказана.

Обозначим через $\bar{v}$ класс эквивалентности по отношению ρ_A, содержащий характеристику v. Каждый такой класс эквивалентности содержит наибольшую в этом классе характеристику. Действительно, пусть $v \in \bar{v}$, $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}, \ldots)$ и π_1 – множество, состоящее из тех и только тех простых чисел p, для которых в группе A существует элемент a конечной p-высоты такой, что $\chi(a) \geq v$. Рассмотрим $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}, \ldots)$, где $w^{(i)} = \infty$, если $p_i \notin \pi_1$, и $w^{(i)} = v^{(i)}$, если $p_i \in \pi_1$. Ясно, что $w \in \bar{v}$ и для всякой характеристики $u \in \bar{v}$, $u \leq w$. Обозначим наибольшую характеристику класса эквивалентности $\bar{v}$ через $m(\bar{v})$. Факторьмножество $\mathfrak{X}/\rho_A$ можно частично упорядочить, если положить $\bar{v}_1 \leq \bar{v}_2$ тогда и только тогда, когда $m(\bar{v}_1) \leq m(\bar{v}_2)$. Относительно этого частичного порядка $\mathfrak{X}/\rho_A$ является решеткой $(\bar{v}_1 \wedge \bar{v}_2 = \overline{m(\bar{v}_1) \wedge m(\bar{v}_2)}, \bar{v}_1 \vee \bar{v}_2 = \overline{m(\bar{v}_1) \vee m(\bar{v}_2)})$.

Обозначим через $\Phi_\chi(A)$ решетку всех таких вполне характеристических подгрупп группы A, которые имеют вид $A[v]$, $v \in \mathfrak{X}$. Понятно, что $A[\bar{v}_2] \leq A[\bar{v}_1]$ в том и только в том случае, когда $\bar{v}_1 \leq \bar{v}_2$. Итак, имеет место следующая

ЛЕММА 3.5. Соответствие $\mu: \bar{v} \to A[v]$ определяет антиизоморфизм решеток $\mathfrak{X}/\rho_A$ и $\Phi_\chi(A)$.

Пусть $M \leq A$, обозначим через $\chi_A(M)$ (или $\chi(M)$) множество $\{\chi_A(m) \mid m \in M\}$.

ЛЕММА 3.6. Пусть S – вполне характеристическая подгруппа редуцированной абелевой группы A без кручения, $v = \inf_{\mathfrak{X}} \chi(S)$. Если $S = A[u]$, то $v = m(\bar{u})$.

Доказательство. Если $a \in S = A[u]$, то $\chi_A(a) \geq u$. Имеем $v = \inf_{\mathfrak{X}} \chi(S) = \inf_{\mathfrak{X}} \{\chi_A(a) \mid a \in S\} \geq u$.

Пусть $a \in A$, $\chi_A(a) \geq u$ и $h_{p_k}(a) \neq \infty$. По лемме 3.2 существует элемент $c \in A[u]$, что $h^A_{p_k}(c) = u^{(k)}$. Поэтому $v^{(k)} = u^{(k)}$.

Если b такой элемент группы A, что $\chi(b) \geq v$, и $h_{p_k}(b) \neq \infty$, то $\chi(b) \geq u$, и поэтому $v^{(k)} = u^{(k)}$. Итак, $v \rho_A u$ и $v \geq u$, то есть $v = m(\bar{u})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Редуцированная абелева группа A без кручения называется χ-группой, если любая её вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A[u]$, где u – некоторая характеристика.

Как отмечено в § 2, всякая χ-группа является транзитивной группой.

Из леммы 3.5 вытекает, что решетка вполне характеристических подгрупп χ- группы A антиизоморфна решетке $\mathfrak{X}/\rho_A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Любая вполне характеристическая подгруппа S χ- группы A также является χ- группой.

Доказательство. Пусть S' - вполне характеристическая подгруппа группы S. Так как S и S' вполне характеристичны в A, то $S'=A[w]$, $S=A[v]$, где $w=\inf_{\mathfrak{X}}\chi_A(S')$, $v=\inf_{\mathfrak{X}}\chi_A(S)$ (лемма 3.6). $S'\leq S$ и поэтому $w\geqslant v$. Если $0\neq a\in S$, то для всякого $p_k\in\Pi$ $h^S_{p_k}(a)=h^A_{p_k}(a)-v^{(k)}$ и $\chi_S(a)=$ $=\chi_A(a)-v$. Покажем, что $S'=S[w-v]$. Пусть $0\neq a\in S'$, то есть $\chi_A(a)\geqslant w$. Тогда $\chi_S(a)=\chi_A(a)-v\geqslant w-v$, и поэтому $a\in$ $\in S[w-v]$. Получили $S'\leq S[w-v]$.

Пусть теперь $0\neq a\in S[w-v]$. Тогда $\chi_S(a)\geqslant w-v$ и, значит, $\chi_A(a)\geqslant w$. Поэтому $a\in A[w]=S'$. Получили $S[w-v]\leq S'$. Итак, $S'=S[w-v]$ и S - χ-группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть R - полная решетка. Будем говорить, что множество $M\leq R$ обладает свойством конечной сравнимости в R, если для всякого бесконечного подмножества $M_1\leq M$ из того, что $u\in M$ и $u\geqslant\inf_R M_1$, следует существование в M_1 такого конечного подмножества M_2, для которого $u\geqslant\inf_R M_2$.

Если K - некоторое множество характеристик, то обозначим через $A[K]$ подгруппу группы A, порожденную всеми такими элементами $a\in A$, для которых существует $v\in K$, что $\chi_A(a)\geqslant v$. Понятно, что $A[K]$ - вполне характеристическая подгруппа группы A.

ТЕОРЕМА 3.8. Если абелева группа A без кручения является χ-группой, то множество $\chi(A)$ обладает свойством конечной сравнимости в $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть A - χ-группа, $M=\chi(A)$, $M_1\leq M$, $M_1=\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, $|M_1|\geqslant\aleph_0$, $u\in M$ и $u\geqslant\inf_{\mathfrak{X}}M_1$. Существует элемент $b\in A$ такой, что $\chi(b)=u$. Рассмотрим вполне характеристическую подгруппу $A[M_1]$ группы A. Так как A - χ-группа, то $A[M_1]=A[v]$, где v - некоторая характеристика. В качестве v можно взять $\inf_{\mathfrak{X}}M_1$ (лемма 3.6). Тогда $b\in$ $\in A[M_1]=A[\inf_{\mathfrak{X}}M_1]$ и, следовательно, $b=b_{\alpha_1}+b_{\alpha_2}+\ldots+b_{\alpha_n}$, где $\chi_A(b_{\alpha_i})\geqslant\chi_{\alpha_i}$, $\chi_{\alpha_i}\in M_1$, $i=1,2,\ldots,n$. Отсюда получаем $u=\chi(b)\geqslant\inf_{\mathfrak{X}}\{\chi(b_{\alpha_1}),\chi(b_{\alpha_2}),\ldots,\chi(b_{\alpha_n})\}\geqslant\inf_{\mathfrak{X}}\{\chi_{\alpha_1},\chi_{\alpha_2},\ldots,\chi_{\alpha_n}\}$.

Значит, в M_1 есть конечное подмножество $M_2=\{x_{\alpha_i}\}_{i=\overline{1,n_0}}$ такое, что $u \geq \inf_x M_2$.

Для абелевых групп без кручения, разложимых в прямые суммы групп, справедлива такая

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $A=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus} A_\alpha$ - транзитивная редуцированная абелева группа без кручения. Группа A является χ-группой тогда и только тогда, когда каждая группа $A_\alpha\ (\alpha\in\mathfrak{A})$ - χ-группа.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть S_γ - вполне характеристическая подгруппа группы A_γ (γ - некоторый индекс из $\mathfrak{A}$) и $S_\gamma \neq A_\gamma[v]$ для любой характеристики v. Для всякого $\beta\neq\gamma,\ \beta\in\mathfrak{A}$, в группе A_β рассмотрим вполне характеристическую подгруппу $S_\beta=A_\beta[M]$, где $M=\chi_{A_\gamma}(S_\gamma)$. Пусть $\beta,\delta\in\mathfrak{A}$, тогда гомоморфная оболочка S_β в A_δ содержится в S_δ. Действительно, пусть $g\in S_\beta,\ \delta\neq\gamma,\ \varphi\in Hom(A_\beta,A_\delta)$ и $\varphi g\neq 0$. $g=g_1+g_2+\ldots+g_k$, где $\chi(g_i)\geq x_i$ и $x_i\in M$ для всякого $i=1,2,\ldots,k$. Отсюда получаем $\varphi g=\varphi g_1+\varphi g_2+\ldots+\varphi g_k$ и для каждого $i=\overline{1,k}$ $\chi(\varphi g_i)\geq\chi(g_i)\geq x_i$. Значит, $\varphi g\in S_\delta$.

Пусть теперь $b\in S_\beta\ (\beta\neq\gamma)$ и $\varphi\in Hom(A_\beta,A_\gamma),\ \varphi b\neq 0$. Так как $b\in S_\beta\in A_\beta[M]$, то существуют такие элементы $a_i\in S_\gamma$, $i=\overline{1,k}$, что $b=b_1+b_2+\ldots+b_k$ и $\chi(b_i)\geq\chi(a_i)$ для всех $i=\overline{1,k}$. Имеем $\varphi b=\varphi b_1+\varphi b_2+\ldots+\varphi b_k$ и $\chi(\varphi b_i)\geq\chi(b_i)\geq\chi(a_i)$ для всех i. Группа A_γ транзитивна, поэтому существуют такие эндоморфизмы $\eta_i\in E(A_\gamma)$, что $\eta_i a_i=\varphi b_i$. Следовательно, $\varphi b_i\in S_\gamma$ и, значит, $\varphi b\in S_\gamma$.

Пусть $S=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus} S_\alpha$. В силу леммы I.3 S - вполне характеристическая подгруппа группы A. Так как A - χ-группа, то $S=A[v]$ для некоторой характеристики v, но тогда и $S_\alpha=A_\alpha[v]$ для всякого $\alpha\in\mathfrak{A}$ (учитываем, что если $A=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus} A_\alpha$, то $A[v]=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus} A_\alpha[v]$). Получили противоречие с тем, что $S_\gamma\neq A_\gamma[v]$. Необходимость доказана.

б) Достаточность. Пусть S - вполне характеристическая подгруппа группы A. Тогда $S=\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}^{\oplus}(S\cap A_\alpha)$. Так как A_α - χ-группа, то $S\cap A_\alpha$ можно представить в виде $A_\alpha[v_\alpha]$, где $v_\alpha=\inf_x \chi_{A_\alpha}(S\cap A_\alpha)$. Будем считать, что если $A_\alpha[v_\alpha]$ - нулевая группа, то $v_\alpha = (\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$.

Пусть A_γ и A_β таковы, что $Hom(A_\gamma, A_\beta) \neq 0$, $v_\gamma^{(\kappa)} \neq \infty$ и $p_\kappa A_\beta \neq A_\beta$ $(\gamma, \beta \in \mathfrak{A})$. Покажем, что в этом случае в множестве элементов $\{\varphi a \mid \varphi \in Hom(A_\gamma, A_\beta)\}$, где $a \in A_\gamma$, $h_{p_\kappa}(a) \neq \infty$, существует элемент конечной p_κ- высоты. Предположим противное. Так как $p_\kappa A_\beta \neq A_\beta$, то найдется $b \in A_\beta$ такой, что $h_{p_\kappa}(b) = h_{p_\kappa}(a)$. Имеем $\chi(b) \geq \inf_\chi \{\chi(p_\kappa b), \chi(a)\}$, причем $\chi(b) \neq \chi(a)$, так как в противном случае существовал бы $\varphi \in Hom(A_\gamma, A_\beta)$, что $\varphi a = b$ (теорема 2.3), а это противоречит нашему предположению. Очевидно, $\chi(b) < \chi(p_\kappa b)$. Так как $A = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}}^{\oplus} A_\alpha$ - транзитивная абелева группа, то согласно теореме 2.5 система групп $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию монотонности для характеристик, и, значит, существуют элементы $b_1, b_2, \ldots, b_\tau \in A_\beta$, что $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_\tau$, и для всякого $i = \overline{1, \tau}$ выполняется по крайней мере одно из неравенств $\chi(b_i) \geq \chi(a)$ или $\chi(b_i) \geq \chi(p_\kappa b)$. Заметим, что среди элементов b_i $(i = \overline{1, \tau})$ есть хотя бы один элемент конечной p_κ- высоты, так как $h_{p_\kappa}(b) \neq \infty$. Если b_j $(j \in \{1, 2, \ldots, \tau\})$ элемент конечной p_κ- высоты и $\chi(b_j) \geq \chi(a)$, то в силу транзитивности системы групп $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ существовал бы $\varphi_j \in Hom(A_\gamma, A_\beta)$, что $\varphi_j a = b_j$, а это противоречит нашему предположению. Тогда $\chi(b_j) \geq \chi(p_\kappa b)$ и, значит, $h_{p_\kappa}(b) \geq h_{p_\kappa}(p_\kappa b)$, чего быть не может.

Итак, в случае, когда $Hom(A_\gamma, A_\beta) \neq 0$, $v_\gamma^{(\kappa)} \neq \infty$ и $p_\kappa A_\beta \neq A_\beta$, во множестве элементов $\{\varphi a \mid \varphi \in Hom(A_\gamma, A_\beta)\}$, где $a \in A_\gamma$; $h_{p_\kappa}(a) \neq \infty$, существует элемент конечной p_κ-высоты. В этом случае в подгруппе $A_\gamma[v_\gamma]$ есть элементы группы A конечной p_κ-высоты, и среди них существует элемент a_1 такой, что $h_{p_\kappa}^{A_\gamma}(a_1) = v_\gamma^{(\kappa)}$. Тогда во множестве элементов $\{\varphi a_1 \mid \varphi \in Hom(A_\gamma, A_\beta)\}$ есть элемент b такой, что $h_{p_\kappa}^{A_\beta}(b) \neq \infty$. По лемме I.3 $b \in A_\beta[v_\beta]$. Если $h_{p_\kappa}^{A_\beta}(b) = h_{p_\kappa}^{A_\gamma}(a_1)$, то полагаем $c = b$. Если же $h_{p_\kappa}^{A_\beta}(b) = h_{p_\kappa}^{A_\gamma}(a_1) + n$, где $n > 0$, то $c = \frac{b}{p_\kappa^n}$. Имеем $\chi(c) \geq \chi(a_1)$ и $h_{p_\kappa}^{A_\beta}(c) = h_{p_\kappa}^{A_\gamma}(a_1)$. Тогда, учитывая транзитивность системы групп $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ и лемму I.3, получаем $c \in A_\beta[v_\beta]$. Значит, $v_\beta^{(\kappa)} \leq v_\gamma^{(\kappa)}$. Так как $Hom(A_\gamma, A_\beta) \neq 0$, то и $Hom(A_\beta, A_\gamma) \neq 0$ (следствие 2.8), и поэтому аналогичным образом можно показать, что $v_\gamma^{(\kappa)} \leq v_\beta^{(\kappa)}$.

Следовательно, $v_\gamma^{(k)} = v_\beta^{(k)}$.

Пусть теперь A_γ и A_β таковы ($\gamma, \beta \in \mathfrak{A}$), что $Hom(A_\gamma, A_\beta) = 0$, $v_\gamma^{(k)} \neq \infty$. Тогда по следствию 2.7 $p_k A_\beta = A_\beta$ и, значит, $v_\beta^{(k)} = \infty$.

Итак, получили, что для всякой пары индексов (γ, β) $\gamma, \beta \in \mathfrak{A}$ и любого натурального числа k выполняется условие: если $v_\gamma^{(k)} \neq v_\beta^{(k)}$, то $v_\gamma^{(k)}$ либо $v_\beta^{(k)}$ есть символ ∞.

Пусть $K_{\gamma,\beta} = \{k \in N \mid v_\gamma^{(k)} \neq \infty, v_\beta^{(k)} = \infty\}$. Для всякого $k \in K_{\gamma,\beta}$ имеем $p_k A_\beta = A_\beta$, поэтому $v_\beta \rho_{A_\beta} w_\beta$, где $w_\beta^{(\ell)} = v_\beta^{(\ell)}$, если $\ell \notin K_{\gamma,\beta}$ и $w_\beta^{(\ell)} = n_\ell$, где n_ℓ - произвольное целое неотрицательное число, если $\ell \in K_{\gamma,\beta}$.

Рассмотрим теперь $w = \inf_{\mathfrak{X}} \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеем $v_\alpha \rho_{A_\alpha} w$. Следовательно, $A_\alpha[v_\alpha] = A_\alpha[w]$ (лемма 3.4), а значит, $S = \sum^{\oplus}_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha[v_\alpha] = \sum^{\oplus}_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha[w] = A[w]$.

Теорема доказана.

Учитывая теорему 2.3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пусть $A = \sum^{\oplus}_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ - редуцированная абелева группа без кручения. A - χ-группа тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) Система групп $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ транзитивна;

(2) Система групп $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию монотонности для характеристик;

(3) Каждая группа $A_\alpha (\alpha \in \mathfrak{A})$ - χ-группа.

Обозначим через $T(A)$ множество всех различных типов элементов группы A без кручения. $T(A)$ будем рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного отношения порядка (то есть $t_1 \leq t_2$ тогда и только тогда, когда существуют характеристики $\chi_1 \in t_1$ и $\chi_2 \in t_2$ такие, что $\chi_1 \leq \chi_2$).

Рассмотрим теперь абелевы группы A без кручения, у которых множество $T(A)$ является линейно упорядоченным (относительно естественного отношения порядка).

ТЕОРЕМА 3.11. Для транзитивной редуцированной абелевой группы A без кручения с линейно упорядоченным множеством $T(A)$ следующие условия эквивалентны:

(I) A - χ-группа;

(2) Если характеристики элементов a и b группы A содержат символы ∞ на одних и тех же местах, то $t(a)=t(b)$.

Доказательство. а) Пусть A - транзитивная редуцированная абелева группа без кручения с линейно упорядоченным множеством $T(A)$, в которой выполняется условие (2), S - ненулевая вполне характеристическая подгруппа группы A, $M=\chi_A(S)$ и $v=\inf_{\chi} M$. Разобьем множество натуральных чисел N на два подмножества $N_1=\{i\in N \mid v^{(i)}=\infty\}$ и $N_2=\{j\in N \mid v^{(j)}\neq\infty\}$, и для всякого $j\in N_2$ обозначим через X_j следующее подмножество элементов группы S:

$X_j=\{x\in S \mid h^A_{p_j}(x)=v^{(j)}\}$. Покажем, что для всякого $j\in N_2$ в X_j существует такой элемент $\bar{x}_j$, что $h_{p_i}(\bar{x}_j)=\infty$ тогда и только тогда, когда $i\in N_1$. Предположим противное, пусть в X_j нет элемента с указанным свойством. Тогда в S есть элемент y такой, что $h^A_{p_j}(y)>h^A_{p_j}(x_j)$, где x_j - произвольный фиксированный элемент из X_j, и $h_{p_i}(y)=\infty$ тогда и только тогда, когда $i\in N_1$. Рассмотрим элемент x_j+y. Имеем $h^A_{p_j}(x_j+y)=h^A_{p_j}(x_j)=v^{(j)}$, $h^A_{p_i}(x_j+y)=\infty$, если $i\in N_1$. Если бы $h^A_{p_t}(x_j+y)=\infty$, где $t\in N_2$, то типы элементов x_j и x_j+y были бы несравнимы, так как $\infty=h^A_{p_t}(x_j+y)>h^A_{p_t}(x_j)$ (замечаем, что так как $h^A_{p_t}(y)<\infty$ и $h^A_{p_t}(x_j+y)=\infty$, то $h^A_{p_t}(x_j)<\infty$), а $h^A_{p_\ell}(x_j+y)<h^A_{p_\ell}(x_j)$ для такого $\ell\in N_2$, для которого $h^A_{p_\ell}(x_j)=\infty$. Итак, получили, что в S есть элемент x_j+y такой, что $h_{p_j}(x_j+y)=v^{(j)}$ и $h^A_{p_i}(x_j+y)=\infty$ тогда и только тогда, когда $i\in N_1$.

Покажем теперь, что $S=A[v]$. Пусть $a\in A$, $\chi(a)\geqslant v$ и $\chi(a)$ содержит символы ∞ на тех же местах, что и характеристика v. Зафиксируем некоторое $j\in N_2$ и рассмотрим элемент $\bar{x}_j$. Так как $t(\bar{x}_j)=t(a)$, то существует $k\in N$, для которого $\chi(ka)=\chi(\bar{x}_j)$. Если $k=1$, то $a\in S$ в силу транзитивности группы A. Если же $k\neq 1$ и $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_\tau}$ - все различные простые делители числа k (заметим, что k можно выбрать так, чтобы $i_1, i_2, \dots, i_\tau\in N_2$), то существуют такие целые числа m_{i_t} $(t=\overline{1,\tau})$, что $\chi(m_{i_t}a)\geqslant\chi(\bar{x}_{i_t})$. Причем каждое m_{i_t} можно выбрать так, что $(m_{i_t}, p_{i_t})=1$, так как $\chi(a) \geqslant v$, и поэтому p_{i_t}-высота элемента a в группе A не меньше соответствующей высоты элемента $\bar{x}_{i_t}$. Значит, $(k, m_{i_1}, \dots, m_{i_r})=1$, и, следовательно, существуют такие целые числа $n, n_1, \dots, n_r$, что $nk+\sum_{t=1}^{r} n_t m_{i_t} = 1$. Тогда $a = nka + \sum_{t=1}^{r} n_t m_{i_t} a$, где каждое слагаемое в силу транзитивности группы A принадлежит S (учитываем, что $\chi(nka) \geqslant \chi(\bar{x}_j)$, $\chi(n_t m_{i_t} a) \geqslant \chi(\bar{x}_{i_t})$ и $\bar{x}_j \in S$, $\bar{x}_{i_t} \in S$ для каждого $t=\overline{1,r}$). Поэтому $a \in S$.

Пусть теперь $a \in A$, $\chi(a) > v$ и существует $j \in N_2$ такое, что $h_{p_j}(a)=\infty$. Пусть p_m – такое простое число, что $h_{p_m}(a) \neq \infty$. Так как $t(a) > t(\bar{x}_m)$, то существует такое $k \in N$, что $\chi(ka) > \chi(\bar{x}_m)$, и поэтому в группе A есть элемент $\bar{a}_m$, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$\chi(\bar{a}_m) > \chi(\bar{x}_m)$, $h_{p_m}(\bar{a}_m) = h_{p_m}(\bar{x}_m)$ и $t(\bar{a}_m) = t(a)$ ($\bar{a}_m = \frac{ka}{p_m^{r}}$, где $r = (\chi(ka))^{(m)} - (\chi(\bar{x}_m))^{(m)}$). В силу транзитивности группы A $\bar{a}_m \in S$. Проводя теперь рассуждения, аналогично вышеприведенным (вместо элементов $\bar{x}_{i_t}$ будем теперь использовать элементы $\bar{a}_{i_t}$), получим $a \in S$.

б) Импликация (I) $\Longrightarrow$ (2) будет следовать из такой леммы, в которой не предполагается линейная упорядоченность множества $T(A)$.

ЛЕММА 3.12. Если A – редуцированная χ-группа, то для любых двух элементов a и b этой группы, характеристики которых содержат символы ∞ на одних и тех же местах, имеем $t(a)=t(b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a, b \in A$, $h_{p_i}(a)=\infty$ тогда и только тогда, когда $h_{p_i}(b)=\infty$ и $N_1 = \{i \in N \mid h_{p_i}(a)=\infty\}$. Предположим, что $t(a) \neq t(b)$. Возможны следующие случаи: I) $t(a)$ и $t(b)$ несравнимы; 2) $t(a)$ и $t(b)$ сравнимы, тогда положим для определенности $t(a) < t(b)$. В каждом из этих случаев рассмотрим вполне характеристическую подгруппу $S = \{g \in A \mid t(g) \geqslant t(b)\}$ группы A. Так как A – χ-группа, то $S = A[v]$, $v \in \mathfrak{X}$, причем по лемме 3.6 v можно выбрать так, что $v^{(i)} = \infty$, если $i \in N_1$, и $v^{(j)} = 0$, если $j \in N \setminus N_1$. Но подгруппе $\{g \in A \mid t(g) \geqslant t(b)\}$ элемент a не принадлежит, а подгруппе $A[v]$ элемент a принадлежит. Получили противоречие. Следовательно, $t(a) = t(b)$.

Доказанные теорема 3.11 и лемма 3.12 дают возможность выделить χ-группы в ряде классов абелевых групп без кручения.

Назовем абелеву группу A без кручения квазиоднородной, если характеристики любых двух её ненулевых элементов содержат символы ∞ на одних и тех же местах.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. Для квазиоднородной редуцированной абелевой группы A без кручения следующие условия эквивалентны:

(1) A - χ-группа;

(2) A - однородная транзитивная группа.

Доказательство. Так как всякая χ-группа транзитивна, то для доказательства (1) $\Longrightarrow$ (2) достаточно применить лемму 3.12. Справедливость импликации (2) $\Longrightarrow$ (1) сразу следует из теоремы 3.11.

Следствие 3.13. включает основной результат [2] о транзитивных однородных группах.

СЛЕДСТВИЕ 3.14. Однородная редуцированная абелева группа без кручения является χ-группой тогда и только тогда, когда A - транзитивная группа.

Рассмотрим теперь класс однородно разложимых абелевых групп без кручения.

СЛЕДСТВИЕ 3.15. Однородно разложимая редуцированная абелева группа A без кручения является χ-группой тогда и только тогда, когда A - транзитивная группа.

Доказательство. Так как всякая χ-группа является транзитивной группой, то будем доказывать только достаточность. Пусть $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t$ - каноническое разложение группы A, где A_t - однородная группа типа t; T - некоторое множество типов. Так как A - транзитивная группа, то каждая группа $A_t (t\in T)$ транзитивная однородная группа, а, значит, в силу следствия 3.14 A_t - χ-группа. Применяя теперь теорему 3.9, получаем, что A - χ-группа.

Учитывая предложение 2.12, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.16. Однородно разложимая редуцированная абелева группа $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t$, где A_t - однородные группы различных типов t, является χ-группой тогда и только тогда, когда для любого $t\in T$ группа A_t транзитивна и A удовлетворяет условию контрастности для типов.

Применяя следствие 2.13, выделяем χ-группы в классе абелевых групп без кручения, являющихся прямыми суммами однородных сепарабельных групп.

СЛЕДСТВИЕ 3.17. Пусть A - редуцированная абелева группа, разложимая в прямую сумму однородных сепарабельных групп (в частности, A - вполне разложимая группа). A является χ-группой тогда и только тогда, когда A удовлетворяет условию контрастности для типов.

Рассмотрим теперь квазиоднородные сепарабельные группы без кручения.

СЛЕДСТВИЕ 3.18. Для квазиоднородной редуцированной сепарабельной группы A следующие условия эквивалентны:

(I) A - транзитивная группа;

(2) A - однородная группа;

(3) A - χ-группа.

Доказательство. (I)$\Longrightarrow$(2) в силу следствия 2.17. Справедливость импликации (2)$\Longrightarrow$(3) следует из следствия 3.14 и из того, что всякая однородная сепарабельная группа транзитивна, (3)$\Longrightarrow$(I) верно для любой χ-группы.

Следствия 2.14 и 3.15 дают возможность получить также

СЛЕДСТВИЕ 3.19. Пусть $G=\sum\limits_{p\in\pi}^{\oplus} G_p$, где π - некоторое множество простых чисел; G_p - прямые суммы групп без кручения, полных в своей p-адической топологии. Тогда G - χ-группа.

Покажем, что любая вполне характеристическая подгруппа транзитивной однородно разложимой группы наследует свойство транзитивности.

СЛЕДСТВИЕ 3.20. Любая вполне характеристическая подгруппа S транзитивной редуцированной однородно разложимой группы A также является транзитивной группой.

Доказательство. По следствию 3.15 A - χ-группа. Тогда $S=A[v]$, где v - некоторая характеристика, и поэтому S -однородно разложимая группа. S является χ-группой в силу предложения 3.7. Применяя теперь следствие 3.15, получаем, что S - транзитивная группа.

В заключение параграфа отметим, что лемма 3.12 дает возможность строить транзитивные абелевы группы без кручения, не являющиеся χ-группами. Построим один пример такой группы.

Пример. Пусть $A=\prod\limits_{p\in\Pi} A_p$ (Π - множество всех простых чисел), где каждая группа A_p - редуцированная группа без кручения, полная в своей p-адической топологии. Группа A - алгебраически компактная группа [7, с.196], значит, A - транзитивная группа. Пусть $a=(\ldots,a_p,\ldots)$ и $b=(\ldots,b_p,\ldots)$ - элементы группы A $(a_p\in A_p, b_p\in A_p)$ такие, что $h_p(a_p)=1$ и $h_p(b_p)=2$ для всех $p\in\Pi$. Тогда $\chi(a)=(1,1,\ldots,1,\ldots)$, $\chi(b)=(2,2,\ldots,2,\ldots)$ и в силу леммы 3.12 A не является χ-группой. Отсюда, в частности, следует, что для прямых произведений групп утверждение, аналогичное теореме 3.9, уже не имеет места, то есть если $A=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}A_\alpha$ - транзитивная редуцированная абелева группа без кручения, где каждая группа A_α - χ-группа, то A не обязательно будет χ-группой.

§ 4. Вполне характеристические подгруппы транзитивно разложимых абелевых групп без кручения

В настоящем параграфе получено описание вполне характеристических подгрупп однородно разложимых абелевых групп без кручения $A=\sum_{t\in T}^{\oplus}A_t$ (T - некоторое множество типов; A_t - однородная группа типа t), где $\{A_t\}_{t\in T}$ - транзитивная система групп. С помощью этого описания установлена связь между некоторыми инвариантами группы и соответствующими инвариантами её вполне характеристической подгруппы.

Условимся при рассмотрении однородно разложимых групп записывать их канонические разложения (если не сделано дополнительных замечаний).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Редуцированную однородно разложимую абелеву группу $A=\sum_{t\in T}^{\oplus}A_t$ без кручения назовем транзитивно разложимой группой, если система групп $\{A_t\}_{t\in T}$ транзитивна.

Класс транзитивно разложимых групп достаточно широк. Он содержит все вполне разложимые абелевы группы без кручения, прямые суммы однородных сепарабельных или однородных алгебраически компактных абелевых групп без кручения, все абелевы группы без кручения вида $A=\sum_{p\in\pi}^{\oplus}C_p\oplus\sum_{t\in T}^{\oplus}D_t$, где C_p - прямая сумма абелевых групп без кручения, полных в своей p-адической топологии; D_t - однородная сепарабельная группа типа t (π - некоторое множество простых чисел; T - некоторое множество типов); $T\cap\{t(C_p)\}_{p\in\pi}=\varnothing$ ($t(C_p)$ - тип группы C_p) и другие группы.

Обозначим через $\Phi(A)$ решетку всех вполне характеристических подгрупп транзитивно разложимой группы $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}A_t$.

Рассмотрим функции f, отображающие множество T во множество $\mathcal{X}$ всех характеристик и удовлетворяющих следующим условиям (чтобы сократить количество скобок будем записывать аргумент как индекс):

1) либо $f_t=(f_t^{(1)},f_t^{(2)},\dots,f_t^{(k)},\dots)\le\chi$ для некоторой $\chi\in t$, либо $f_t^{(k)}=\infty$ для всех $k\in N$;

2) $f_t^{(k)}=\infty$ для всех k, для которых $p_tA_t=A_t$;

3) если $t_1>t_2$ $(t_1,t_2\in T)$, то для всякого k такого, что $p_kA_{t_1}\ne A_{t_1}$, имеем $f_{t_1}^{(k)}\le f_{t_2}^{(k)}$.

Обозначим множество функций, удовлетворяющих свойствам 1) — 3) через $F(A)$. $F(A)$ можно частично упорядочить, положив $f\le g$ тогда и только тогда, когда $f_t\le g_t$ для всякого $t\in T$. Непосредственно проверяется, что $F(A)$ - решетка. Докажем теорему о связи между решетками $\Phi(A)$ и $F(A)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Всякая вполне характеристическая подгруппа транзитивно разложимой группы $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}A_t$ имеет вид $\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}A_t[f_t]$, где $f\in F(A)$. Соответствие $\mu: f\to\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}A_t[f_t]$ определяет антиизоморфизм решеток $F(A)$ и $\Phi(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем вначале, что μ отображает $F(A)$ в $\Phi(A)$. Пусть $f\in F(A)$. Докажем, что $\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}A_t[f_t]\in\Phi(A)$, то есть $\sum\limits_{t\in T}^{\oplus}A_t[f_t]$ - вполне характеристическая подгруппа группы A. Рассмотрим $t_1,t_2\in T$ такие, что $t_1\ne t_2$ и $Hom(A_{t_1},A_{t_2})\ne 0$. Покажем, что гомоморфная оболочка подгруппы $A_{t_1}[f_{t_1}]$ в A_{t_2} содержится в $A_{t_2}[f_{t_2}]$. Пусть $0\ne a_1\in A_{t_1}[f_{t_1}]$, то есть $\chi_{A_{t_1}}(a)\ge f_{t_1}$, и пусть $0\ne\varphi\in Hom(A_{t_1},A_{t_2})$. Тогда $\chi(\varphi a)\ge f_{t_1}$ и, значит, $(\chi(\varphi a))^{(k)}\ge f_{t_1}^{(k)}$ для всякого $k\in N$. Так как $Hom(A_{t_1},A_{t_2})\ne 0$, то $t_2>t_1$, и поэтому в силу условия 3) для функций из $F(A)$ имеем $f_{t_2}^{(k)}\le f_{t_1}^{(k)}$ для всякого k, для которого $p_kA_{t_2}\ne A_{t_2}$. Если же $p_\ell A_{t_2}=A_{t_2}$, то $f_{t_2}^{(\ell)}=\infty$ и $(\chi(\varphi a))^{(\ell)}=\infty$. Итак, для всякого $k\in N$ $(\chi(\varphi a))^{(k)}\ge f_{t_2}^{(k)}$, то есть $\chi(\varphi a)\ge f_{t_2}$ и $\varphi a\in A_{t_2}[f_{t_2}]$. Теперь, применяя лемму 1.3, получим, что $\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t[f_t]\in \Phi(A)$.

Покажем теперь, что μ-сюръективное отображение, то есть всякая вполне характеристическая подгруппа транзитивно разложимой группы $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t$ имеет вид $\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t[f_t]$, где $f\in F(A)$. Пусть $S\in \Phi(A)$. Рассмотрим функцию f, отображающую множество T в множество $\mathfrak{X}$, такую, что для всякого $t\in T$

$f_t=\inf_{\mathfrak{X}}\{\chi_{A_t}(s)\mid s\in S\cap A_t\}$, если $S\cap A_t\neq 0$, и

$f_t=(\infty,\infty,\dots,\infty,\dots)$, если $S\cap A_t=0$. Такая функция f удовлетворяет условиям 1) и 2) для функций из $F(A)$ по построению. Покажем, что f удовлетворяет свойству 3). Так как $S\cap A_t$ - вполне характеристическая подгруппа однородной транзитивной группы A_t, то $S\cap A_t=A_t[v_t]$, где v_t - некоторая характеристика, причем v_t можно взять равным f_t (следствие 3.14, лемма 3.6). Пусть $t_1>t_2$ $(t_1,t_2\in T)$, $p_kA_{t_1}\neq A_{t_1}$ и $f_{t_2}^{(k)}\neq\infty$. Так как $p_kA_{t_2}\neq A_{t_2}$, то существует элемент $a\in A_{t_2}[f_{t_2}]$ такой, что $h_{p_k}^{A_{t_2}}(a)=f_{t_2}^{(k)}$. В группе A_{t_1} найдется элемент b такой, что $\chi_{A_{t_1}}(b)\geq\chi_{A_{t_2}}(a)$ и $h_{p_k}^{A_{t_1}}(b)=f_{t_2}^{(k)}$. Элемент b принадлежит гомоморфной оболочке подгруппы $A_{t_2}[f_{t_2}]$ в A_{t_1} в силу транзитивности системы $\{A_t\}_{t\in T}$. Значит, $b\in S\cap A_{t_1}=A_{t_1}[f_{t_1}]$, но тогда $f_{t_1}^{(k)}\leq f_{t_2}^{(k)}$. Итак, $f\in F(A)$, причем $\mu f=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t[f_t]=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} S\cap A_t=S$. Сюръективность отображения μ доказана.

Докажем, что μ-инъективное отображение. Пусть $f,g\in F(A)$ и $\mu f=\mu g$. Имеем $\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t[f_t]=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t[g_t]$. Так как $A_t[g_t]\leq A_t$ и $A_t[f_t]\leq A_t$, то $A_t[g_t]=A_t[f_t]$ для всякого $t\in T$. Если $A_t[g_t]=A_t[f_t]=0$, то $g_t^{(k)}=f_t^{(k)}=\infty$ для всякого $k\in N$ и $g_t=f_t$. Пусть $A_t[g_t]=A_t[f_t]\neq 0$. Тогда в силу леммы 3.4 имеем $g_t\rho_{A_t}f_t$. Пусть $0\neq a\in A_t[g_t]$. Тогда если $h_{p_k}^{A_t}(a)\neq\infty$, то $g_t^{(k)}=f_t^{(k)}$; если же $h_{p_k}^{A_t}(a)=\infty$, то $p_kA_t=A_t$ и поэтому $f_t^{(k)}=g_t^{(k)}=\infty$. Значит, для всех $k\in N$ $g_t^{(k)}=f_t^{(k)}$ и, следовательно, $g_t=f_t$. Итак, $g_t=f_t$ для всякого $t\in T$, поэтому $g=f$, и отображение μ инъективно.

Понятно, что $f\leq g$ $(f,g\in F(A))$ тогда и только тогда, когда $\mu g\leq \mu f$. Поэтому биекция μ является решеточным антиизоморфизмом. Теорема доказана.

Пусть $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t$ (4.I) - однородно разложимая абелева группа без кручения, S - её вполне характеристическая подгруппа, $S=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} S'_t$ (4.2), где $S'_t=S\cap A_t$. Заметим, что если $A=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} B_t$ - другое каноническое разложение группы A и $S=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} S''_t$, где $S''_t=S\cap B_t$, то $S'_t\cong S''_t$. Действительно, так как любые два канонических разложения группы A изоморфны, то существует автоморфизм φ группы A такой, что $\varphi A_t=B_t$. Тогда $\varphi S'_t\le S$ и $\varphi S'_t\le B_t$, откуда $\varphi S'_t\le S\cap B_t=S''_t$. Аналогично $\varphi^{-1}S''_t\le S'_t$ и, значит, $S''_t\le\varphi S'_t$. Следовательно, $\varphi S'_t=S''_t$, то есть $S'_t\cong S''_t$. Поэтому $t(S'_t)$ - тип группы S'_t, если S'_t - однородная группа, и $r(S'_t)$ - ранг S'_t не зависят от канонического разложения группы A.

Найдем связь между типами и рангами прямых слагаемых S'_t разложения (4.2) и типами и рангами прямых слагаемых $A_t\ (t\in T)$ разложения (4.I) в случае, когда A - транзитивно разложимая группа.

Будем говорить, что семейство типов $\{\tau_t\}_{t\in T}$ соответствует вполне характеристической подгруппе $S=\sum\limits_{t\in T}^{\oplus} S'_t$ $(S'_t=A_t\cap S)$, где S'_t - однородные группы, если для всякого $t\in T$ $t(S'_t)=\tau_t$.

Пусть t_1 и t_2 - два типа, $v=(v^{(1)},v^{(2)},\dots,v^{(n)},\dots)$, $w=(w^{(1)},w^{(2)},\dots,w^{(n)},\dots)$ - характеристики, принадлежащие соответственно типам t_1 и t_2. Сумму типов t_1+t_2 определим как тип, содержащий характеристику $v+w=(v^{(1)}+w^{(1)},v^{(2)}+w^{(2)},\dots,v^{(n)}+w^{(n)},\dots)$, где $\infty+\ell=\infty$ для всякого ℓ. Разность t_1-t_2 двух типов $t_1\ge t_2$ определим как тип, содержащий характеристику $v-w=(v^{(1)}-w^{(1)},v^{(2)}-w^{(2)},\dots,v^{(n)}-w^{(n)},\dots)$, где $v=(v^{(1)},v^{(2)},\dots,v^{(n)},\dots)\in t_1$, $w=(w^{(1)},w^{(2)},\dots,w^{(n)},\dots)\in t_2$, $v\ge w$ и полагаем $\infty-\ell=\infty$ для всякого ℓ. Заметим, что в [6, с. 133] для рассмотренных операций над типами применяется мультипликативная запись, для наших целей удобнее пользоваться аддитивной записью.

Если характеристика v принадлежит типу t и $v^{(k)}=\infty$, то будем писать $t^{(k)}=\infty$.

Условимся считать, что нулевой группе соответствует тип t° (несобственный тип), который обладает следующими свойствами:

I) $t^{\circ} < t$ для всякого типа $t \neq t^{\circ}$; 2) $t \leq t^{\circ} - t^{\circ}$ для всякого типа t.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $A = \sum_{t \in T}^{\oplus} A_t$ - транзитивно разложимая абелева группа.

I) Если семейство типов $\{\tau_t\}_{t \in T}$ соответствует некоторой вполне характеристической подгруппе $S = \sum_{t \in T}^{\oplus} S_t' \ (S_t' = A_t \cap S)$, то оно удовлетворяет следующим условиям: а) $\tau_t \leq t$ для всякого $t \in T$; б) если для некоторого $k \in N$ $p_k A_t = A_t$, то $\tau_t^{(k)} = \infty$; в) если $t_1 > t_2 \ (t_1, t_2 \in T)$, то $\tau_{t_1} \geq t_1 - t_2 + \tau_{t_2}$.

2) Если $S = \sum_{t \in T}^{\oplus} S_t' \ (S_t' = A_t \cap S)$ - вполне характеристическая подгруппа группы A и $S_t' \neq 0$, то $\tau(S_t') = \tau(A_t)$.

Доказательство. I. Пусть семейство типов $\{\tau_t\}_{t \in T}$ соответствует вполне характеристической подгруппе $S = \sum_{t \in T}^{\oplus} S_t'$ группы A. Если p - такое простое число, что $pA_t = A_t$, то $pS_t' = S_t'$ (лемма 3.I), поэтому условие б) имеет место. Очевидно, выполняется а). Покажем, что выполняется условие в). Пусть $t_1 > t_2 \ (t_1, t_2 \in T)$. В случае, когда $\tau_{t_2} = t^{\circ}$, условие в) автоматически выполняется, так как оно в этом случае имеет вид $\tau_{t_1} \geq t^{\circ}$.

Пусть теперь $\tau_{t_1} \neq t_0$. Так как S - вполне характеристическая подгруппа транзитивно разложимой группы A, то по теореме 4.I существует такая функция $f \in F(A)$, что $S = \sum_{t \in T}^{\oplus} S_t' = \sum_{t \in T}^{\oplus} A_t[f_t]$. Понятно, что S_t' - однородные группы. Рассмотрим $S_{t_1}' = A_{t_1}[f_{t_1}]$ и $S_{t_2}' = A_{t_2}[f_{t_2}]$. Пусть $0 \neq a \in S_{t_1}'$ и $\chi_{A_{t_1}}(a) \geq f_{t_2}$, тогда $\chi_{S_{t_1}'}(a) = \chi_{A_{t_1}}(a) - f_{t_1}$. Так как $f_{t_1}^{(k)} \leq f_{t_2}^{(k)}$ для всякого $k \in N$ такого, что $p_k A_{t_1} \neq A_{t_2}$, то $\chi_{S_{t_1}'}(a) \geq \chi_{A_{t_1}}(a) - f_{t_2}$. Имеем $\chi_{S_{t_2}'}(b) = \chi_{A_{t_2}}(b) - f_{t_2}$, где $0 \neq b \in S_{t_2}'$, откуда $f_{t_2} = \chi_{A_{t_2}}(b) - \chi_{S_{t_2}'}(b)$. Поэтому $\chi_{S_{t_1}'}(a) \geq \chi_{A_{t_1}}(a) - (\chi_{A_{t_2}}(b) - \chi_{S_{t_2}'}(b))$. Переходя к типам, получим $\tau_{t_1} \geq t_1 - t_2 + \tau_{t_2}$.

2. Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ - максимальная независимая система элементов группы $A_t \ (t \in T)$ и $0 \neq a \in S_t' = A_t[f_t]$, $f \in F(A)$. Так как A_t - однородная группа, то для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такое $m_\alpha \in N$, что $\chi_{A_t}(m_\alpha a_\alpha) \geq \chi_{A_t}(a)$. Тогда

$m_\alpha a_\alpha \in A_t[f_t] = S'_t$ для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Система элементов $\{m_\alpha a_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ линейно независима в группе S'_t. Значит, $r(S'_t) = r(A_t)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс таких однородно разложимых редуцированных абелевых групп G без кручения, которые удовлетворяют следующему условию: если $A = \sum^{\oplus}_{t \in T} A_t$ – однородно разложимая вполне характеристическая подгруппа группы G (A может совпадать с G), то всякое семейство типов $\{\tau_t\}_{t \in T}$, в котором выполняются условия а) – в) теоремы 4.2, соответствует некоторой вполне характеристической подгруппе S группы A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $A = \sum^{\oplus}_{t \in T} A_t$, где A_t – однородная редуцированная сепарабельная группа типа t; T – некоторое множество типов. Если множество T является линейно упорядоченным (относительно естественного порядка) и его порядковый тип – один из следующих: ω, ω^*, $\omega^* + \omega$ или n, где $n \in N$, то $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство этого предложения проведем в случае, когда порядковый тип T равен $\omega^* + \omega$ (в остальных случаях оно проводится аналогично). Если множество T имеет порядковый тип $\omega^* + \omega$, то его можно записать в виде $T = \{t_k\}_{k \in Z}$, где Z – множество целых чисел, причем $t_{k_1} < t_{k_2}$ $(k_1, k_2 \in Z)$ тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$. Пусть $\{\tau_t\}_{t \in T}$ – семейство типов, удовлетворяющих условиям а) – в) теоремы 4.2 относительно группы $A = \sum^{\oplus}_{t \in T} A_t$. Заметим, что группа A как прямая сумма однородных редуцированных сепарабельных групп, является транзитивно разложимой.

Построим функцию $f: T \to \mathfrak{X}$ следующим образом. Для каждого типа $t_k \in T$ составим разность $t_k - \tau_{t_k} - \tau'_{t_k}$. Полагаем, что f_{t_0} – произвольная фиксированная характеристика, принадлежащая типу τ'_{t_0} (условимся считать, что несобственному типу t° принадлежит единственная характеристика $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$). Если для типа τ'_{t_n}, где $n \geq 0$, характеристика f_{t_n} уже выбрана, то в типе $\tau'_{t_{n+1}}$ выбираем характеристику $f_{t_{n+1}}$ так, чтобы для всех $f^{(s)}_{t_{n+1}} \neq \infty$ выполнялось $f^{(s)}_{t_{n+1}} \leq f^{(s)}_{t_n}$ $(s \in N)$. Такую характеристику $f_{t_{n+1}}$ можно выбрать в силу условия в) для семейства типов $\{\tau_t\}_{t \in T}$. Если для типа τ'_{t_m}, где $m \leq 0$, характеристика f_{t_m} уже выбрана, то в типе $\tau'_{t_{m-1}}$ выбираем характеристику $f_{t_{m-1}}$ так, чтобы $f^{(s)}_{t_{m-1}} \geq f^{(s)}_{t_m}$ для всех таких $s \in N$, для которых $f^{(s)}_{t_m} \neq \infty$. Такой выбор характеристики

$f_{t_{m-1}}$ можно также осуществить в силу условия в) для семейства типов $\{\tau_t\}_{t\in T}$. Таким образом, любым двум различным типам $t_{k_1}, t_{k_2} \in T$ будут соответствовать характеристики $f_{t_{k-1}}$ и $f_{t_{k_2}}$ удовлетворяющие условию 3) для функций $f \in F(A)$. Понятно, что построенная функция f удовлетворяет условиям I) и 2) для функций из $F(A)$. Значит, $f \in F(A)$. Пусть $S'_t = A_t[f_t]$ для всякого $t \in T$. Так как $A = \sum\limits_{t\in T}^{\oplus} A_t$ – транзитивно разложимая группа, то по теореме 4.I $S = \sum\limits_{t\in T}^{\oplus} S'_t$ – вполне характеристическая подгруппа группы A.

Покажем, что вполне характеристической подгруппе S соответствует семейство типов $\{\tau_t\}_{t\in T}$. Если $\tau_t = t^\circ$, то $S'_t = 0$, так как в этом случае $f_t = (\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$, а A_t – редуцированная группа. Если же $\tau_t \neq t^\circ$, то $t(S'_t) = t(A_t[f_t]) =$ $= t - \tau'_t = t - (t - \tau_t) = \tau_t$.

Для окончания доказательства достаточно заметить, что в условиях предложения 4.3 любая вполне характеристическая подгруппа S группы A является прямой суммой однородных сепарабельных групп, причем множество типов прямых слагаемых канонического разложения группы S является линейно упорядоченным и его порядковый тип – один из следующих: $\omega, \omega^*, \omega^* + \omega$ или n, где $n \in N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.I. В [5] получено описание вполне характеристических подгрупп прямых сумм однородных сепарабельных абелевых групп без кручения $G = \sum\limits_{\tau\in T}^{\oplus} G_\tau$ с помощью последовательностей, состоящих из так называемых τ- чисел [5, с. 51]. Это описание непосредственно следует из теоремы 4.I настоящего параграфа, так как для всякой однородной сепарабельной группы $G_\tau\ (\tau \in T)$ τ-число, входящее в последовательность, которая соответствует некоторой вполне характеристической подгруппе группы G, есть не что иное, как характеристика v_τ такая, что $v_\tau \rho_{G_\tau} f_\tau$ для некоторой функции $f \in F(G)$. Отметим, что утверждение об однозначности представления вполне характеристических подгрупп прямых сумм однородных сепарабельных групп в виде последовательности τ- чисел, сформулированное в [5], в общем случае неверно, а справедливо только для редуцированных групп.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пусть J – произвольное множество, $\langle a_i \rangle$ – бесконечная циклическая группа для каждого $i \in J$. С помощью результатов § 2 можно непосредственно установить, что всякая K-прямая сумма $\oplus_K Z$ групп $\langle a_i \rangle$, где K - идеал булевой алгебры $B(J)$ всех подмножеств из J, является транзитивной абелевой группой без кручения (в частности, транзитивными группами являются прямые суммы и прямые произведения бесконечных циклических групп, а также группы Бэра-Шпекера [10]).

Действительно, пусть $A=\oplus_K Z$, $0\neq a\in A$, $0\neq b\in A$ и $\chi(a)\leq \chi(b)$. Для каждого $i\in J$ обозначим через ρ_i и π_i соответственно координатные вложения и проекции. Существует $j\in J$, что $\pi_j a\neq 0$. Пусть $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}, \dots\}$ - множество тех и только тех простых чисел, для которых высота элемента $\pi_j a$ отлична от нуля, и пусть $\pi_{j_t} a$ $(j_t\in J, t=\overline{1,k})$ элемент, имеющий минимальную p_{i_t}-высоту среди всех элементов $\pi_i a$ $(i\in J)$. Имеем $A=A'\oplus A''$, где A' подгруппа группы A, порожденная элементами $\rho_j a_j, \rho_{j_1} a_{j_1}, \dots, \rho_{j_k} a_{j_k}$. A' - прямая сумма бесконечных циклических групп. Так как $\chi(a)\leq\chi(b)$, то $\chi(a')\leq\chi(\rho_i\pi_i b)$ для всякого $i\in J$, где a' - координата элемента a в прямом слагаемом A'. Учитывая предложение 2.10, получаем, что для всякого $i\in J$ существует $\varphi_i\in Hom(A', \langle \rho_i a_i \rangle)$, что $\varphi_i a'=\rho_i\pi_i b$. Пусть φ отображение A в A такое, что для всякого $g\in A$ $(g=g'+g''$, где $g'\in A', g''\in A'')$, имеем $\pi_i\varphi g=\pi_i\varphi_i g'$ для любого $i\in J$. Тогда $\varphi\in E(A)$ и $\varphi(a)=b$. Значит, A - транзитивная группа.

Учитывая однородность группы A, получаем (следствие 3.14), что любая её вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $A[v]$, где $v\in\mathfrak{X}$, и в силу того, что тип группы A идемпотентен, имеем $S=nA$, где $n=\min\{|n_i(b)|\,|\,i\in J, b\in S; n_i(b)a_i=\pi_i b\}$. Таким образом, из результатов § 2 и 3 настоящей статьи следует известный результат Гебеля [10] о строении вполне характеристических подгрупп групп $\oplus_K Z$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Следуя [4], назовем абелеву группу G без кручения группой типа P^+, если для некоторого простого числа p она изоморфна J_p аддитивной группе всех целых p-адических чисел. Абелева группа G без кручения называется сепарабельной типа P^+, если любое её конечное множество элементов содержится в некотором прямом слагаемом группы G, равном прямой сумме групп типа P^+ [4].

Сепарабельной группой типа P^+ является, в частности, всякая редуцированная абелева группа без кручения, на которой можно задать структуру унитарного Q_p^*-модуля, где Q_p^* - кольцо целых p-адических чисел. Это вытекает из того, что всякий циклический подмодуль редуцированного Q_p^*-модуля G без кручения, порожденный элементом нулевой p-высоты, выделяется в G прямым слагаемым [3, с. 294; II, с. 52].

Результаты § 2,3 дают возможность заключить, что всякая сепарабельная группа типа P^+ является транзитивной группой и даже более того - χ-группой. Действительно, пусть G - сепарабельная группа типа P^+, $0 \neq a \in G$, $0 \neq b \in G$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$. Имеем $G = G_1 \oplus G_2$, где G_1 - прямая сумма групп типа P^+ и $a, b \in G_1$. Так как $\chi_{G_1}(a) \leq \chi_{G_1}(b)$, то в силу следствия 2.14 существует $\varphi \in E(G_1)$, что $\varphi a = b$. Эндоморфизм φ допускает продолжение до эндоморфизма группы G. Итак, G - транзитивная группа. Пусть $G_{(p)} = \prod_{q \in \Pi, q \neq p} G^*_{(q)}$, где $G^*_{(q)}$ - максимальная q-делимая подгруппа группы G (p - простое число). Тогда $G = \sum_{p \in \Pi}^{\oplus} G_{(p)}$ [4, с. 96]. Имеем: $G_{(p)}$ - транзитивная (следствие 2.4) однородная группа и поэтому $G_{(p)}$ - χ-группа (следствие 3.14). Применяя теперь теорему 3.9, получаем, что G - χ-группа. Значит, всякая вполне характеристическая подгруппа сепарабельной типа P^+ группы G имеет вид $G[v]$, где $v \in \mathfrak{X}$.

Литература

1. Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные и транзитивные абелевы группы без кручения. - Томск, 1977 г. - 45 с. - Рукопись представлена Томск.ун-том.Деп. в ВИНИТИ 30 июня 1977, № 2942-77.
2. Крылов П.А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения. - В кн.: Сб. аспирантских работ по матем. Томск, 1973, с. 15-20.
3. Куликов Л.Я. Обобщенные примарные группы, I. - Труды ММО, 1952, т. I, с. 247-326.
4. Прохазка Л. Прямые суммы групп типа P^+. - Comment math. Univ. Carol., 1967, N1, с. 85-114.
5. Пятков В.С. О решетке вполне характеристических подгрупп од-

ного класса сепарабельных абелевых групп без кручения. - В кн.: Группы и модули. Томск, 1976, с. 49-56.

6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. - М.: Мир, 1977. - 416 с.
7. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. I. - М.: Мир, 1974.- 335 с.
8. Arnold D.M. Strongly homogeneous torsion free abelian groups of finite rank. - Proc. Amer. Math. Soc., 1967, v. 56, p. 67-72.
9. Brameret M.P. Groupes p-reduits. - In: Semin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1962-1963 (1967), N2, p. 13/01 - 13/26.
10. Göbel R. The characteristic subgroups of the Baer-Specker group. - Math. Zeit., 1974, N3, s. 289-292.
11. Kaplansky I. Infinite abelian groups. - Michigan: Ann Arbor, 1954, - 90p.
12. Reid J.D. Quasi-pure-injectivity and quasi-pure-projectivity. - Lect. Notes Math., 1977, v. 616, p. 219-227.
13. Fuchs L. Abelian groups. - Budapest: Academiai Kiado, 1966. - 367 p.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С САМОИНЪЕКТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ И КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ С АННУЛЯТОРНЫМ УСЛОВИЕМ

А.В.Иванов

Введение

В [2] (проблема 84 г)) поставлена задача описать самоинъективные кольца эндоморфизмов абелевых групп. В [5] получено решение этой проблемы для самоинъективных справа колец эндоморфизмов в случае редуцированных групп. Редуцированная абелева группа G имеет самоинъективное справа кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда она является вполне инвариантной сервантной подгруппой в $\prod_{p\in P} B_p$, где P - множество простых чисел, а B_p - прямые суммы циклических p-групп одного и того же порядка p^n, где n может зависеть от p. В случае нередуцированных групп для самоинъективности справа кольца эндоморфизмов необходимо, чтобы делимая часть группы G была группой без кручения, а редуцированная часть имела бы указанный вид (в настоящей работе такие редуцированные группы будут называться SI - группами). Заметим, что в [5] предполагается, что кольцо эндоморфизмов действует на группе справа и соответственно вместо самоинъективности справа рассматривается самоинъективность слева.

В настоящей работе доказывается, что в нередуцированном случае для самоинъективности справа кольца эндоморфизмов группы G необходимо и достаточно, чтобы группа G имела указанный вид и, кроме того, чтобы редуцированная часть группы G была периодической. При этом кольцо эндоморфизмов самоинъективно слева тогда и только тогда, когда оно самоинъективно справа, причем, делимая часть и все p-компоненты периодической части группы G имеют конечные ранги. В процессе доказательства описываются группы, кольца эндоморфизмов которых обладают аннуляторным условием для конечно порожденных левых (правых) идеалов, что дает другие доказательства некоторых утверждений в [5].

Основные обозначения и определения стандартны и взяты из [I]. Если I - подмножество кольца R, то через I^1 обозначается правый аннулятор подмножества I, а через ${}^1I$ - левый. $T(G)$ обозначает периодическую часть группы G; $T_p(G)$ - p-компоненту периодической части. Прямая сумма абелевых групп обозначается через $\oplus$ или $\sum$. Кольцо эндоморфизмов группы G обозначается через $E(G)$.

§ I. SI-группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Редуцированную группу G будем называть SI-группой, если выполнены следующие условия:

I. $T_p(G)$ - прямая сумма циклических p-групп одного порядка.

2. Существует изоморфное вложение

$$\sum_p T_p(G) \subseteq G \subseteq \sum_p^* T_p(G) .$$

3. Если $x^i=(x_1^i, \dots, x_n^i, \dots)\ (x_k^i \in T_{p_k}(G)),\ i=1,2,$ причем $o(x_n^1) \leq o(x_n^2)$ для всех n, и $x^2 \in G$, то $x^1 \in G$.

Если G - произвольная группа, то существует гомоморфизм колец $f: E(G) \to E(T(G))$, сопоставляющий каждому $\alpha \in E(G)$ ограничение α на $T(G)$.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть редуцированная группа G такова, что для любого простого числа p группа $T_p(G)$ является прямой суммой циклических групп одного порядка. Тогда для того, чтобы группа G являлась SI-группой, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:

I. $G/T(G)$ - делимая группа,

2. f - изоморфизм, т.е. G - вполне характеристическая подгруппа в $\sum_p^* T_p(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть G - SI-группа; в частности, выполнено условие 2 определения. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in G$ и $p=p_n$ - простое число. Так как группа $T_q(G)$ является p-делимой при $q\neq p$, то при $i\neq n$ существует $y\in T_{p_i}(G)$ такой, что $x_i=py_i$. Положим $y=(y_1,\dots,y_{n-1},0,y_{n+1},\dots)\in\sum\limits_p^* T_p(G)$. Тогда $O(y_i)=O(x_i)$ при $i\neq n$, $O(0)\leq O(x_n)$, откуда в силу п. 3 определения SI-группы имеем $y\in G$. Ясно, что $x+T(G)=p(y+T(G))$, что доказывает делимость $G/T(G)$.

Так как $G/T(G)$ делима, а G редуцирована, то любой эндоморфизм группы G однозначно определяется своим ограничением на $T(G)$. Отсюда f инъективно. Пусть $\beta\in E(T(G))$. Определим $\alpha\in E(G)$ формулой

$$\alpha(x_1,\dots,x_n,\dots)=(\beta(x_1),\dots,\beta(x_n),\dots).$$

Так как $O(\beta(x_i))\leq O(x_i)$, то $Im\,\alpha\subseteq G$ в силу условия 3 определения SI-группы. Отсюда $\alpha\in E(G)$ и, очевидно, $f(\alpha)=\beta$, т.е. f сюръективно, что доказывает необходимость условий I,2.

Достаточность. Надо проверить условия 2,3 определения SI-группы. Так как $T_p(G)$ - ограниченная группа, то она является прямым слагаемым группы G [I, теорема 27.5]. Отсюда существует разложение $G=T_p(G)\oplus H_p$. Пусть $\pi_p: G\to T_p(G)$ - соответствующая проекция. Определим гомоморфизм

$$\alpha: G\to\sum_p{}^* T_p(G),$$

$$\alpha(g)=(\pi_{p_1}(g),\dots,\pi_{p_n}(g),\dots).$$

Ясно, что $Ker\,\alpha=\bigcap\limits_p H_p$. Покажем, что это делимая группа. Прежде всего заметим, что $pH_p=H_p$. В самом деле, $H_p\supseteq\sum\limits_{q\neq p}T_q(G)$, $H_p/\sum\limits_{q\neq p}T_q(G)\cong(H_p\oplus T_p(G))/(\sum\limits_p T_p(G))=G/T(G)$ - делимая группа и $\sum\limits_{q\neq p}T_q(G)$ - p-делимая группа. Отсюда H_p - p-делимая группа. Пусть $x\in\bigcap\limits_p H_p$ и q - фиксированное простое число. Тогда существует $y\in H_q$ такой, что $x=qy$. Покажем, что $y\in H_p$ для всех p. В самом деле, запишем $y=t+h$, где $t\in T_p(G)$, $h\in H_p$ $(p\neq q)$. Тогда $qt=qy-qh=x-qh\in H_p\cap T_p(G)=0$. Но $t\in T_p(G)$, где $(p,q)=1$, откуда $t=0$, и $y=h\in H_p$. Итак, $y\in\bigcap\limits_p H_p$ и $x=qy$, т.е. $\bigcap\limits_p H_p$ - делимая группа. Но G редуцирована, откуда $\operatorname{Ker}\alpha = 0$. Тем самым мы проверили условие 2.

Проверим условие 3. Пусть $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i, \dots)$ $(x_n^i \in T_{p_n}(G))$, $i = 1,2$, $O(x_n^1) \leq O(x_n^2)$ и $x^2 \in G$. Тогда существуют гомоморфизмы $\varphi_n : \langle x_n^2 \rangle \to \langle x_n^1 \rangle$ такие, что $\varphi_n(x_n^2) = x_n^1$. В силу условия теоремы группы $T_{p_n}(G)$ квазиинъективны [I, с. I26, упр. II] ,т.е. φ_n продолжаются до эндоморфизмов $\psi_n \in E(T_{p_n}(G))$. Они определяют эндоморфизм $\psi \in E(T(G))$, который индуцируется эндоморфизмом группы G (так как f сюрьективно), который мы снова обозначим через ψ . Покажем, что $\psi(x^2) = x^1$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi' : G \to \sum_p^* T_p(G)$, где

$$\psi'(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\psi_1(x_1), \dots, \psi_n(x_n), \dots) .$$

Тогда $\psi'|_{T(G)} = \psi|_{T(G)}$, а так как по условию $G/T(G)$ - делимая группа, то $\psi' = \psi$, откуда $\psi(x^2) = \psi'(x^2) = (\psi_1(x_1^2), \dots, \psi_n(x_n^2), \dots) = (x_1^1, \dots, x_n^1, \dots) = x^1$. Следовательно, $x^1 = \psi(x^2) \in G$, т.е. выполнено условие 3 определения SI-группы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.2. Прямое слагаемое SI-группы является SI-группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G \oplus H$ - SI-группа. Тогда $G/T(G) \oplus H/T(H) \cong (G \oplus H)/T(G \oplus H)$ - делимая группа, откуда $G/T(G)$ - делимая группа. Ясно, что $T_p(G)$ - прямая сумма циклических групп одного порядка. Пусть $\pi : G \oplus H \to G$ - проекция, $f : E(G \oplus H) \to E(T(G \oplus H))$ - изоморфизм ограничения, тогда $f(\pi) : T(G \oplus H) \to T(G)$ - проекция. В силу [2, с.256, в] имеем

$$E(T(G)) \cong f(\pi) E(T(G \oplus H)) f(\pi) = f(\pi) f(E(G \oplus H)) f(\pi) = f(\pi E(G \oplus H) \pi) \cong \underset{\circ}{f}(E(G)) \cong E(G) ,$$

где все изоморфизмы естественные. Отсюда по теореме I.I G - SI-группа. Следствие доказано.

§ 2. Абелевы группы с кольцами эндоморфизмов, удовлетворяющими аннуляторному условию для конечно порожденных левых идеалов и с самоинъективными справа кольцами эндоморфизмов

Согласно [4, с.107], левый идеал I кольца R называется аннуляторным, если он совпадает с левым аннулятором некоторого подмножества кольца R. Левый идеал I является аннуляторным тогда и только тогда, когда $I={}^{\perp}(I^{\perp})$. Говорят, что кольцо R удовлетворяет аннуляторному условию для n-порожденных (конечно порожденных) левых идеалов, если каждый n-порожденный (конечно порожденный) левый идеал является аннуляторным. Очевидно, что кольцо R удовлетворяет аннуляторному условию для конечно порожденных левых идеалов тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет аннуляторному условию для n-порожденных левых идеалов при всех n.

ТЕОРЕМА 2.I. Группа G имеет кольцо эндоморфизмов с аннуляторным условием для n-порожденных левых идеалов тогда и только тогда, когда $G=\mathcal{D}\oplus R$, где $\mathcal{D}$ - делимая группа без кручения, а R - редуцированная группа, причем:

I. Для любого простого числа p $T_p(R)$ - прямая сумма циклических групп одного порядка.

2. $R/T(R)$ - делимая группа. Следовательно, существует вложение R в качестве сервантной подгруппы в $\sum\limits_p^* T_p(R)$, содержащей $\sum\limits_p T_p(G)$.

3. Если H - эндоморфный образ группы R, то любой гомоморфизм $H\to R$ продолжается до эндоморфизма группы R.

4. Если $\mathcal{D}\neq 0$, то любая подгруппа $H\subseteq G$ такая, что R/H вкладывается в прямую сумму n экземпляров G, содержит существенную подгруппу, порожденную образами гомоморфизмов $R\to H$.

5. Если $H\subseteq R$ - подгруппа, являющаяся пересечением ядер некоторых n эндоморфизмов группы R, и K - подгруппа в H, порожденная образами гомоморфизмов $R\to H$, то любая подгруппа M группы G, являющаяся ядром некоторого эндоморфизма группы G, и такая, что $K\subseteq M$, содержит H.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\Longrightarrow$ Покажем, что если $E(G)$ удовлетворяет аннуляторному условию для главных левых идеалов, то выполнены условия I - 3. Прежде всего покажем, что G не может иметь двух прямых слагаемых, являющихся коциклическими группами разных порядков и p-примарными для одного p. Пусть это не так;

$$G = A \oplus B \oplus G_1,$$

где A, B - коциклические группы и $|A| < |B|$. Тогда A - циклическая группа порядка p^k с образующим a и существует вложение $\rho : A \to B$. Определим эндоморфизмы $\alpha, \beta \in E(G)$, полагая

$$\alpha|_A = \rho, \ \alpha|_B = 0, \ \alpha|_{G_1} = 0,$$

$$\beta|_A = 1_A, \ \beta|_B = 0, \ \beta|_{G_1} = 0.$$

Тогда $\operatorname{Ker}\alpha = B \oplus G_1 = \operatorname{Ker}\beta$. Отсюда, если $\varphi \in \alpha^{\perp}$, то $\alpha\varphi = 0$, т.е. $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$, откуда $\beta\varphi = 0$ или $\beta \in {}^{\perp}\varphi$. Итак, $\beta \in {}^{\perp}(\alpha^{\perp})$. Так как $E(G)$ удовлетворяет аннуляторному условию для главных идеалов, то ${}^{\perp}(\alpha^{\perp}) = E(G)\alpha$, откуда $\beta \in E(G)\alpha$. Поэтому существует $\gamma \in E(G)$ такой, что $\beta = \gamma\alpha$. Отсюда $a = \beta(a) = \gamma\alpha(a)$. Но $\alpha(a) \in B$ имеет порядок $p^k < |B|$, откуда $\alpha(a) = pb$ для некоторого $b \in B$, т.е. $a = \gamma(pb) = p\gamma(b)$. Так как A - прямое слагаемое группы G, то a делится на p в A, что противоречит тому, что a - образующий циклической p-группы A.

Таким образом, $T_p(G)$ - либо делимая группа, либо прямая сумма циклических групп одного порядка. Отсюда существует разложение $G = T_p(G) \oplus G_1$. Покажем, что $pG_1 = G_1$. Пусть $\pi : G \to G_1$ - проекция. Покажем, что $(p\pi)^{\perp} = \pi^{\perp}$. В самом деле, если $p\pi\varphi = 0$, то $\operatorname{Im}(\pi\varphi) \subseteq G_1$, а так как G_1 - группа без p-кручения, то из $p\pi\varphi = 0$ получаем, что $\pi\varphi = 0$, т.е. $\varphi \in \pi^{\perp}$, а обратное включение очевидно. Следовательно, в силу аннуляторного условия имеем $E(G)\pi = {}^{\perp}(\pi^{\perp}) = {}^{\perp}((p\pi)^{\perp}) = E(G)p\pi = pE(G)\pi$. Отсюда существует $\varphi \in E(G)$ такой, что $\pi = p\varphi\pi$. Поэтому для любого $x_1 \in G_1$ имеем $x = \pi(x) = p\varphi\pi(x) \in pG$. Так как G_1 - прямое слагаемое в G, то $x \in pG_1$, т.е. $G_1 = pG_1$.

Покажем теперь, что $T_p(G)$ - прямая сумма циклических групп одного порядка. Пусть это не так. Тогда в силу доказанного выше $T_p(G)$ - делимая группа и $G=T_p(G)\oplus H$, где H p-делима. Пусть $\pi: G \to T_p(G)$ - проекция. Тогда аддитивная группа левого идеала $E(G)\pi$ содержится в $Hom(G, T_p(G))$, а так как $pG=G$, то $Hom(G, T_p(G))$ - группа без p-кручения [I, с.213, Д]. При этом аддитивная группа $E(G)\pi$ содержит прямое слагаемое $\pi E(G)\pi \cong E(T_p(G))$, которое является p-редуцированной группой [I, доказательство теорема 46.I]. Следовательно, аддитивная группа $E(G)\pi$ - группа без p-кручения, не являющаяся p-делимой. С другой стороны, пусть $\varphi\in(p\pi)^{\perp}$, тогда $p\pi\varphi=0$. Но всякий ненулевой элемент из $Hom(G, T_p(G))$ имеет бесконечный порядок, откуда $\pi\varphi=0$, т.е. $(p\varphi)^{\perp}=\varphi^{\perp}$. Так как $E(G)p\pi$ и $E(G)\pi$ - аннуляторные левые идеалы, то $E(G)\pi={}^{\perp}((E(G)\pi)^{\perp})={}^{\perp}(\pi^{\perp})={}^{\perp}((p\pi)^{\perp})=$ $={}^{\perp}((E(G)p\pi)^{\perp})=E(G)p\pi=pE(G)\pi$. Это противоречит тому, что аддитивная группа $E(G)\pi$ не является p-делимой. Это доказывает необходимость условия I.

Так как для каждого простого числа p существует разложение $G=T_p(G)\oplus G_p$, где G_p - p-делимая группа, то $G/T(G)$ - p- делимая группа для любого простого числа p. Следовательно, $G/T(G)$ - делимая группа. В силу первой части доказательства предложения 3 в [5] для R существует вложение, указанное в условии 2.

Пусть $\varphi\in E(G)$ и $\alpha: Im\,\varphi \to R$ - гомоморфизм. Тогда продолжим φ и $\alpha\varphi$ до эндоморфизмов группы G, полагая их равными нулю на $\mathcal{D}$. Имеем $Ker\,\varphi \subseteq Ker(\alpha\varphi)$, откуда $\varphi^{\perp}\subseteq(\alpha\varphi)^{\perp}$, т.е. $\alpha\varphi\in{}^{\perp}(\varphi^{\perp})=E(G)\varphi$. Поэтому существует $\beta\in E(G)$ такой, что $\alpha\varphi=\beta\varphi$. Ясно, что тогда β является продолжением α до гомоморфизма $R\to G$. Поэтому, если $\pi: G\to R$ - проекция, то $\pi\beta$ - искомое продолжение α до эндоморфизма группы R.

Предположим, что $\mathcal{D}\neq 0$ и условие 4 не выполнено, H - подгруппа в R такая, что R/H изоморфна подгруппе в $\sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, где $G_i=G$ (берется внешняя прямая сумма), причем существует ненулевой элемент $x\in H$ такой, что $\langle x\rangle \cap$ $\cap\langle Im\,\varphi \mid \varphi: G\to H\rangle=0$. Так как каждая p-компонента в группе H ограничена, то, очевидно, $\langle Im\,\varphi \mid \varphi: G\to H\rangle$ содержит $T(H)$, откуда x имеет бесконечный порядок. Пусть $h: R\to\sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ - гомоморфизм с ядром H, $\pi_i: \sum\limits_{i=1}^{n} G_i \to$

$\to G$ - проекция. Тогда имеем гомоморфизмы $h_i = \pi_i h$ из R в $\mathcal{D}$, которые можно считать эндоморфизмами группы G, равными нулю на $\mathcal{D}$. Пусть K - максимальная подгруппа в G, содержащая $\langle Im\varphi \mid \varphi: R \to H\rangle$, такая, что $\langle x\rangle \cap K = 0$. Так как $o(x) = \infty$, то легко видеть, что $T(R) \subseteq K$. Поэтому $R/K \cong Q$, откуда существует гомоморфизм $k: R \to \mathcal{D}$ с ядром K. Продолжим k до эндоморфизма группы G, полагая его равным нулю на $\mathcal{D}$. Пусть $\pi: G \to R$ - проекция. Предположим, что $\varphi \in \{h_1, \ldots, h_n\}^{\perp}$. Тогда $Im\,\varphi \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\, h_i = Ker\, h \oplus \mathcal{D} = H \oplus \mathcal{D}$, откуда $Im(\pi\varphi) \subseteq H$. Отсюда по определению группы K получаем, что $Im(\pi\varphi) \subseteq K \subseteq Ker\, k$, т.е. $k\pi\varphi = 0$. Так как $k|_{\mathcal{D}} = 0$, то отсюда $k\varphi = 0$. Следовательно, $k \in {}^{\perp}(\{h_1, \ldots, h_n\}^{\perp}) = {}^{\perp}((\sum\limits_{i=1}^{n} E(G)h_i)^{\perp}) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(G)h_i$. Поэтому существуют $\alpha_i \in E(G)$, $1 \le i \le n$, такие, что $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$. Но тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\, h_i \subseteq Ker\, k$, т.е. $H \oplus \mathcal{D} \subseteq K \oplus \mathcal{D}$. Так как $H, K \subseteq R$ и $G = R \oplus \mathcal{D}$, то $H \subseteq K$. Но $x \in H \setminus K$, что дает противоречие. Следовательно, условие 4 доказано.

Докажем условие 5. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E(R)$, $H = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i$, $K = \langle Im\varphi \mid \varphi: R \to H\rangle$ и $k \in E(R)$ таковы, что $K \subseteq Ker\, k \subseteq H$. Продолжим $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, k$ до эндоморфизмов группы G, полагая их равными нулю на $\mathcal{D}$. Пусть $\xi \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^{\perp}$. Тогда для любого $i \le n$ имеем $\varphi_i \xi = 0$, т.е. $Im\,\xi \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i = H \oplus \mathcal{D}$, откуда $Im(\pi\xi) \subseteq H$, где $\pi: G \to R$ - проекция. Отсюда по определению подгруппы K получаем, что $Im(\pi\xi) \subseteq K$, т.е. $k\pi\xi = 0$. Так как $k|_{\mathcal{D}} = 0$, то отсюда $k\xi = 0$, т.е. $k \in {}^{\perp}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^{\perp}) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(G)\varphi_i$. Поэтому существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E(G)$ такие, что $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$. Но тогда $H \oplus \mathcal{D} = Ker\, h = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_i \subseteq Ker\, k = K \oplus \mathcal{D}$. Отсюда $H \subseteq K$, что и требовалось.

$\Leftarrow$. Пусть $G = \mathcal{D} \oplus R$, $\mathcal{D}$ - делимая группа без кручения, R - редуцированная группа, для которой выполнены условия 1 - 5. Покажем, что тогда любой n-порожденный левый идеал в $E(G)$ является аннуляторным. Пусть $I \subseteq E(G)$ - левый идеал, порожденный элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\pi_1: G \to \mathcal{D}$, $\pi: G \to R$ -

проекции. Пусть $\varphi\in {}^{\perp}(I^{\perp})$. Тогда $\pi_1\varphi\in {}^{\perp}(I^{\perp})$ и $\pi\varphi\in {}^{\perp}(I^{\perp})$. Покажем, что $\pi_1\varphi\in I$ и $\pi\varphi\in I$, отсюда будет следовать, что $\varphi\in I$, т.е. ${}^{\perp}(I^{\perp})=I$.

Рассмотрим сначала эндоморфизм $\pi_1\varphi$. Если $\mathcal{D}=0$, то $\pi_1\varphi=0$ и $\pi_1\varphi\in I$. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $\mathcal{D}\neq 0$. Покажем, что если $H=R\cap\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}\alpha_i$, то $H\subseteq\operatorname{Ker}(\pi_1\varphi)$. Пусть это не так, тогда существует элемент $x\in H\setminus\operatorname{Ker}(\pi_1\varphi)$. Так как группа R/H вкладывается в $\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Im}\alpha_i\subseteq\sum_{i=1}^{n}G_i$, где $G_i=G$, то по условию 4 H содержит существенную подгруппу $\langle\operatorname{Im}\varphi_i \mid \varphi_i: R\to H\rangle$, т.е. для некоторого $n\neq 0$ имеем $nx\in\langle\operatorname{Im}\varphi_i \mid \varphi_i: R\to H\rangle$. Отсюда существуют $\psi_1,\dots,\psi_n\in E(R)$ такие, что $\operatorname{Im}\psi_i\subseteq H$, и элементы $g_1,\dots,g_n\in R$, для которых имеет место $nx=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(g_i)$. Можно считать ψ_i эндоморфизмами группы G, равными нулю на $\mathcal{D}$. Тогда $\psi_i\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}^{\perp}$, т.е. $\psi_i\in I^{\perp}$, откуда $(\pi_1\varphi)\psi_i=0$, так как $\pi_1\varphi\in {}^{\perp}(I^{\perp})$. Следовательно, $(\pi_1\varphi)(nx)=$ $=\sum_{i=1}^{n}\pi\varphi\psi_i(g_i)=0$, то есть $n\pi_1\varphi(x)=0$. Так как $\operatorname{Im}(\pi_1\varphi)\subseteq\mathcal{D}$ – группа без кручения, то $\pi_1\varphi(x)=0$, что противоречит тому, что $x\notin\operatorname{Ker}(\pi_1\varphi)$. Таким образом

$$R\cap\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}\alpha_i\subseteq R\cap\operatorname{Ker}(\pi_1\varphi).$$

Определим отображение

$$\alpha: R\to\sum_{i=1}^{n}G_i\,,\quad G_i=G\,,$$

полагая

$$\alpha(x)=(\alpha_1(x),\dots,\alpha_n(x)).$$

Тогда $\operatorname{Ker}\alpha=R\cap\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}\alpha_i\subseteq R\cap\operatorname{Ker}(\pi_1\varphi)$, откуда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_1\varphi"'] & \operatorname{Im}\alpha\subseteq\sum_{i=1}^{n}G_i \arrow[d, dashed, "\rho"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

В силу инъективности $\mathcal{D}$ отображение ρ можно продолжить до гомоморфизма $\sum_{i=1}^{n} G_i \to \mathcal{D}$, который мы снова обозначим через ρ. Тогда ρ задается набором гомоморфизмов $\rho_1, \dots, \rho_n \in$ $\in Hom(G, \mathcal{D})$, т.е. если $x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in G$, то $\rho(x) =$ $= \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i)$. Продолжим ρ_i до эндоморфизмов группы G, полагая $\rho_i|_R = 0$. Очевидно, что тогда $\pi_1 \varphi = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha_i \in I$.

Рассмотрим теперь эндоморфизм $\pi \varphi \in {}^{\perp}(I^{\perp})$. Покажем, что тогда

$$H = R \cap \bigcap_{i=1}^{n} Ker(\pi \alpha_i) \subseteq R \cap Ker(\pi \varphi).$$

В самом деле, если K - подгруппа в H, порожденная образами гомоморфизмов $R \to H$, то из того, что $\pi\varphi \in {}^{\perp}(I^{\perp})$, в силу условия 5 получаем $H \subseteq R \cap Ker(\pi\varphi)$, так как $K \subseteq R \cap Ker(\pi\varphi)$. Далее действуем так же, как и в случае эндоморфизма $\pi_1 \varphi$, используя вместо инъективности $\mathcal{D}$ возможность продолжать гомоморфизмы, определенные на эндоморфных образах (условие 3). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что при доказательстве достаточности условий I - 5 условия I,2 не использовались. Следовательно, их можно вывести из условий 3 - 5. Условия I,2 приведены в формулировке потому, что они дают некоторую информацию о строении группы G, а также используются при доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Группа G имеет самоинъективное справа кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

I. G - SI-группа.

2. $G = \mathcal{D} \oplus H$, где $\mathcal{D}$ - делимая группа без кручения; H - периодическая группа, каждая p-компонента которой - прямая сумма циклических групп одного порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\Longrightarrow$. Так как самоинъективное справа кольцо обладает аннуляторным условием для конечно порожденных левых идеалов, то в силу теоремы 2.I $G = \mathcal{D} \oplus H$, где $\mathcal{D}$ - делимая группа без кручения, а H - редуцированная группа, удовлетворяющая условию 2 теоремы 2.I. Это - другое доказательство первой части предложения 3 из 5.

Далее, предложение 3 в [5] показывает, что H является SI-группой. Остается доказать, что если $\mathcal{D}\neq 0$ и H не является периодической, то $E(G)$ не может быть самоинъективно справа. Предположим, напротив, что $E(G)$ самоинъективно, и покажем, что это ведет к противоречию.

Пусть $a=(a_1,\dots,a_n,\dots)\in\sum\limits_p{}^{*}T_p(H)$ - элемент бесконечного порядка, принадлежащий H. Тогда множество $P=\{i\in N\,|\,a_i\neq 0\}$ бесконечно. Пусть $P=P_1\cup P_2$, где $P_1\cap P_2=\varnothing$ - бесконечные множества. Определим эндоморфизм $\pi\in E(H)$, полагая для каждого $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in H$ $\pi(x)=(y_1,\dots,y_n,\dots)$, где

$$y_i=\begin{cases}x_i & \text{при } i\in P_1\ ,\\ 0 & \text{при } i\notin P_1\ .\end{cases}$$

Поскольку H - SI-группа, то $E(H)\cong E(T(H))\cong\prod\limits_p E(T_p(H))$, откуда видно, что π - центральный идемпотент в $E(H)$, имеющий координаты 0 или $1_{T_p(H)}$. Продолжим π до эндоморфизма $\bar{\pi}$ группы $G=\mathcal{D}\oplus H$, полагая $\bar{\pi}|_{\mathcal{D}}=0$.

Пусть $I=\{\alpha\in E(G)\,|\,\alpha|_{\mathcal{D}}=0, \operatorname{Im}\alpha\subseteq\mathcal{D}\}$. Это правый идеал в $E(G)$. Определим отображение $f: I\to E(G)$, полагая $f(\alpha)=\alpha\circ\bar{\pi}$. Покажем, что f - гомоморфизм правых идеалов. Требуется проверить, что для любого $\alpha\in I$ и любого $\beta\in E(G)$ имеет место $\alpha\circ\beta\circ\bar{\pi}=\alpha\circ\bar{\pi}\circ\beta$. Достаточно рассмотреть два случая: $\operatorname{Im}\beta\subseteq\mathcal{D}$ и $\operatorname{Im}\beta\subseteq H$, так как любой эндоморфизм группы G является суммой таких эндоморфизмов.

I случай. $\operatorname{Im}\beta\subseteq\mathcal{D}$. Так как $\alpha|_{\mathcal{D}}=\bar{\pi}|_{\mathcal{D}}=0$, то обе части проверяемого равенства равны нулю.

2 случай. $\operatorname{Im}\beta\subseteq H$. Так как $\mathcal{D}$ - делимая, а H - редуцированная группы, то отсюда $\beta|_{\mathcal{D}}=0$. Поэтому $(\alpha\circ\beta\circ\bar{\pi})|_{\mathcal{D}}=0=(\alpha\circ\bar{\pi}\circ\beta)|_{\mathcal{D}}$. Далее, так как $\bar{\pi}|_H=\pi$ принадлежит центру $E(H)$, то $(\alpha\circ\beta\circ\bar{\pi})|_H=\alpha\circ(\beta|_H)\circ\pi=\alpha\circ\pi\circ(\beta|_H)=(\alpha\circ\bar{\pi}\circ\beta)|_H$. Следовательно, $\alpha\circ\beta\circ\bar{\pi}=\alpha\circ\bar{\pi}\circ\beta$.

Итак, f - гомоморфизм правых идеалов. Так как $E(G)$ самоинъективно справа, то существует $\varphi\in E(G)$ такой, что $f(\alpha)=\varphi\alpha$ для всех $\alpha\in I$ [3, теорема 3.41]. Итак, для любого $\alpha\in I$ имеем $\alpha\circ\bar{\pi}=\varphi\circ\alpha$. Покажем, что это равенство ведет к противоречию.

Проверим, что $\varphi|_{\mathcal{D}}$ - тождественное отображение. Пусть $x \in \mathcal{D}$ и Q - сервантная оболочка x в $\mathcal{D}$. Поскольку множество P_1 бесконечно, то существует эпиморфизм

$$\psi : \sum_{i \in P_1}^{*} \langle a_i \rangle \longrightarrow Q \ .$$

Так как H - SI-группа, то $\sum_{i \in P_1}^{*} \langle a_i \rangle$ можно считать вложенной в H. В силу инъективности Q ψ продолжается до гомоморфизма $\alpha : G \to Q$, который можно выбрать равным нулю на $\mathcal{D}$. Так как $Q \subseteq \mathcal{D} \subseteq G$, то $\alpha \in E(G)$, причем, очевидно, $\alpha \in I$. Пусть $x = \psi(y)$ для некоторого $y \in \sum_{i \in P_1}^{*} \langle a_i \rangle$. Тогда $\varphi(x) = \varphi \circ \psi(y) = \varphi \circ \alpha(y) = \alpha \circ \bar{\pi}(y) = \alpha(y) = x$, что доказывает наше утверждение. Но тогда, так как при $\alpha \in I$ имеем $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \mathcal{D}$, то $\varphi \circ \alpha = \alpha$, и получаем, что для любого $\alpha \in I$ имеет место $\alpha \circ \bar{\pi} = \alpha$.

С другой стороны, построим гомоморфизмы ψ и α как выше, но используя вместо P_1 множество P_2. Тогда $\psi \neq 0$. Однако если $y \in \sum_{i \in P_2}^{*} \langle a_i \rangle$, то $\psi(y) = \alpha(y) = \alpha \circ \bar{\pi}(y) = \alpha(0) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что в нередуцированном случае периодическая часть группы должна совпадать со всей редуцированной частью.

$\Longleftarrow$. В любом из случаев $E(G) \cong \prod_i R_i$, где R_i - кольца эндоморфизмов либо делимой группы без кручения, либо прямой суммы циклических p-групп одного порядка. Так как прямое произведение самоинъективных колец самоинъективно, то достаточно самоинъективности каждого слагаемого.

Делимая группа $\mathcal{D}$ без кручения является векторным пространством над полем Q рациональных чисел, и ясно, что $E(G) = \operatorname{End}_{Q} \mathcal{D}$. В силу [4, следствие 19.29] $E(G)$ самоинъективно справа. Если G является p-группой, то самоинъективность доказана в [5, теорема 9]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Самоинъективное справа кольцо R является кольцом эндоморфизмов некоторой абелевой группы тогда и только тогда, когда $R = \prod_p R_p \times R_0$, где R_0 - кольцо линейных преобразований векторного пространства над Q, а R_p - кольцо эндоморфизмов прямой суммы циклических p-групп одного порядка.

§ 3. Самоинъективные слева кольца эндоморфизмов

В этом параграфе при ссылках мы будем использовать левосторонние варианты соответствующих утверждений.

ЛЕММА 3.1. Если $E(G)$ самоинъективно слева, то $T_p(G)$ - прямая сумма делимой группы и прямой суммы циклических групп одного порядка.

Доказательство. Пусть лемма неверна, тогда G имеет два циклических прямых слагаемых разных порядков, являющихся p-группами. Пусть $G = A \oplus B \oplus G_1$, где A, B - циклические p-группы и $|A| < |B|$. Пусть $\rho: B \to A$ - эпиморфизм, $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ и $\rho(b) = a$. Определим эндоморфизмы $\alpha, \beta \in E(G)$, полагая

$$\alpha|_A = 0, \quad \alpha|_B = \rho, \quad \alpha|_{G_1} = 0,$$

$$\beta|_A = 1_A, \quad \beta|_B = 0, \quad \beta|_{G_1} = 0.$$

Тогда $\operatorname{Im}\alpha = A = \operatorname{Im}\beta$. Отсюда, если $\varphi \in {}^{\perp}\alpha$, то $\varphi\alpha = 0$, т.е. $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$, откуда $\varphi\beta = 0$, и $\beta \in \varphi^{\perp}$. Итак, $\beta \in ({}^{\perp}\alpha)^{\perp} = \alpha E(G)$ в силу самоинъективности $E(G)$ слева [4, следствие 19.11]. Поэтому существует $\gamma \in E(G)$ такой, что $\beta = \alpha\gamma$. Пусть $\gamma(a) = na + mb + g_1$, где $g_1 \in G_1$. Тогда $O(mb) \le O(\gamma(a)) \le O(a)$ и $O(a) < O(b)$. Отсюда m делится на p, $m = pm_1$. Имеем $a = \beta(a) = \alpha\gamma(a) = \alpha(na + pm_1 b + g_1) = pm_1\rho(b) = pm_1 a$, то есть $(1 - pm_1)a = 0$. Отсюда $O(a)$ не делится на p, что противоречит тому, что $\langle a \rangle$ - p-группа.

ЛЕММА 3.2. Если $E(G)$ самоинъективно слева, то $T_p(G)$ - прямая сумма циклических групп одного порядка.

Доказательство. Пусть лемма неверна, тогда $G = A \oplus B$, где A - делимая p-группа и $A \neq 0$. Пусть

$$I = \{\alpha \in E(G) \mid \alpha|_B = 0\}.$$

Это левый идеал в $E(G)$. Ясно, что аддитивная группа I совпадает с $E(A)$ и является p-редуцированной группой без кручения. Определим гомоморфизм левых идеалов

$$f: pI \to E(G),$$
$$f(p\alpha) = \alpha.$$

В силу самоинъективности $E(G)$ слева существует $\beta \in E(G)$ такой, что $f(p\alpha) = p\alpha\beta$ для всех $\alpha \in I$ [3, теорема 3.41], то есть $\alpha = p\alpha\beta$. Если π - проекция G на A, то для любого $\alpha \in I$ имеем $\alpha = \alpha\pi = p\alpha\beta\pi \in pI$, откуда $I = pI$, что противоречит p-редуцированности I. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Если $E(G)$ самоинъективно слева, то $G = T_p(G) \oplus G_1$, где $pG_1 = G_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.2 $p^n T_p(G) = 0$ для некоторого n. Отсюда $p^n E(G)$ не имеет p-кручения. Поэтому можно определить гомоморфизм левых идеалов

$$f: p^{n+1}E(G) \to E(G),$$
$$f(p^{n+1}\alpha) = p^n\alpha.$$

Так как $E(G)$ самоинъективно слева, то существует $\beta \in E(G)$ такой, что $f(p^{n+1}\alpha) = p^{n+1}\alpha\beta$ для всех $\alpha \in E(G)$, то есть $p^n\alpha = p^{n+1}\alpha\beta$. Пусть α - тождественный эндоморфизм, тогда для любого $a \in G_1$ имеем $p^n a = p^n\alpha(a) = p^{n+1}\alpha\beta(a) \in p^{n+1}G$. Так как G_1 - прямое слагаемое группы G, то $p^n a = p^{n+1}b$, где $b \in G_1$. Поскольку G_1 - группа без p-кручения, то $a = pb$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 3.4. Если $E(G)$ самоинъективно слева, то если G не редуцирована, то $G = D \oplus H$, где D - делимая группа без кручения, а H - периодическая группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем $G = D \oplus H$, где D - делимая, H - редуцированная группы. Тогда по лемме 3.2 D - группа без кручения. По лемме 3.3 $G/T_p(G)$ - p-делимая группа, откуда $G/T(G)$ p-делима для каждого простого числа p. Следовательно, $D \oplus H/T(H) \cong G/T(G)$ - делимая группа. Отсюда $H/T(H)$ - делимая группа без кручения. Предположим, что $H/T(H) \neq 0$. Тогда существует эпиморфизм $H/T(H)$ на прямое слагаемое Q группы D. Это дает эпиморфизм $\alpha: H \to Q$. Продолжим α до эндоморфизма группы G, полагая его равным нулю на $\mathcal{D}$. Пусть β - проекция G на Q. Тогда $\mathcal{I}m\,\alpha = \mathcal{I}m\,\beta$, то есть ${}^{\perp}\alpha = {}^{\perp}\beta$, откуда $\beta \in ({}^{\perp}\alpha)^{\perp}$. Но $({}^{\perp}\alpha)^{\perp} = \alpha E(G)$ [4, следствие IУ.II]. Поэтому существует $\gamma \in E(G)$ такой, что $\beta = \alpha\gamma$. Пусть $0 \neq x \in Q$, тогда $x = \beta(x) = \alpha\gamma(x)$. Но $\gamma(x) \in \mathcal{D}$, откуда $\alpha\gamma(x) = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 3.5. $E(G)$ самоинъективно слева тогда и только тогда, когда все p-компоненты группы G - конечные прямые суммы циклических групп одного порядка и выполнено одно из условий:

1. G - SI-группа,
2. $G = \mathcal{D} \oplus T$, где $\mathcal{D}$ - делимая группа без кручения конечного ранга, а T - периодическая группа.

Доказательство

$\Longrightarrow$. Пусть G - редуцированная группа и $E(G)$ самоинъективно слева. Покажем, что тогда G является SI-группой. В силу леммы 3.2 $T_p(G)$ - прямая сумма циклических групп одного порядка, а в силу леммы 3.3 $G/T(G)$ - делимая группа. Ввиду теоремы I.I достаточно доказать, что $E(G) \cong E(T(G))$. Рассмотрим $E(T(G))$ как левый $E(G)$-модуль, полагая $\alpha x = (\alpha|_{T(G)})x$ для $x \in E(T(G))$, $\alpha \in E(G)$. Отображение

$$i : E(G) \to E(T(G)),$$
$$i(\alpha) = \alpha|_{T(G)}$$

является гомоморфизмом левых $E(G)$-модулей. Если $i(\alpha) = 0$, то $\alpha|_{T(G)} = 0$, откуда $\alpha = 0$, так как G - редуцированная, а $G/T(G)$ - делимая группа. Отсюда i - вложение. Покажем, что оно существенно. Пусть $0 \neq \alpha \in E(T(G))$. Тогда существует такое простое число p, что $\alpha|_{T_p(G)} \neq 0$. Пусть

$\pi : T(G) \to T_p(G)$ - проекция. Тогда имеем гомоморфизм

$\pi\alpha|_{T(G)} : T(G) \to T_p(G)$. Так как $T_p(G)$ - ограниченная группа, то она сервантно инъективна [I, теорема 38.I], т.е. существует $\beta : G \to T_p(G)$ такой, что $\beta|_{T(G)} = \pi\alpha$.

Гомоморфизм β можно рассматривать как эндоморфизм группы G, тогда $0 \neq \pi\alpha = i(\beta) \in \mathcal{I}m\, i$. Итак, i - существенное вложение. Так как $E(G)$ самоинъективно слева, то i - изоморфизм [3, предложение 3.58 Б]. Следовательно, G является

SI-группой.

Остается доказать, что все p-компоненты группы G конечны. По теореме 2.2 $E(G)$ самоинъективно справа. Отсюда ввиду [4, предложение 19.41] $E(G)$ конечно по Дедекинду [4, с. 137]. Но это невозможно, если некоторая из p-компонент бесконечна. В самом деле, пусть $G=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \oplus G_1$, где C_n - изоморфные между собой циклические группы. Тогда существует изоморфизм $\alpha: \sum_{n=1}^{\infty} C_n \oplus G_1 \to \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \oplus G_1$. Пусть $\beta|_{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \oplus G_1} = \alpha^{-1}$, $\beta|_{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}} = 0$. Тогда $\beta\alpha = 1$, но $\alpha\beta \neq 1$, т.е. $E(G)$ не конечно по Дедекинду. Следовательно, все p-компоненты группы G должны быть конечны. Аналогично в нередуцированном случае делимая часть группы G должна иметь конечный ранг.

$\Leftarrow$. Если G удовлетворяет указанным условиям, то $E(G) \cong \cong \prod_p R_p \times R_0$, где R_p - кольцо эндоморфизмов конечной прямой суммы циклических p-групп одного порядка; R_0 - кольцо эндоморфизмов делимой группы без кручения конечного ранга. Ясно, что R_p Морита-эквивалентно кольцу $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ или равно нулю, а R_0 - кольцо матриц над $\mathbb{Q}$. Отсюда все сомножители самоинъективны слева, т.е. $E(G)$ самоинъективно слева. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Кольцо R является самоинъективным слева кольцом эндоморфизмов абелевой группы тогда и только тогда, когда $R = \prod R_p \times R_0$, где R_p - кольцо матриц над $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, а R_0 - кольцо матриц над $\mathbb{Q}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Любое самоинъективное слева кольцо эндоморфизмов абелевой группы самоинъективно справа. Самоинъективное справа кольцо эндоморфизмов абелевой группы самоинъективно слева тогда и только тогда, когда оно конечно по Дедекинду.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть R - самоинъективное справа кольцо эндоморфизмов абелевой группы. Если R π-регулярно, то R - прямое произведение регулярного кольца и самоинъективного слева кольца.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 2.3

$R=\prod_p R_p \times R_0$, где R_p - кольцо эндоморфизмов прямой суммы циклических p-групп одного порядка, а R_0 - кольцо эндоморфизмов делимой группы без кручения. В силу [2, предложение 112.4] R_p - либо кольцо эндоморфизмов конечной группы, либо кольцо эндоморфизмов элементарной группы. Пусть $P = \{p \mid R_p$ - кольцо эндоморфизмов конечной группы$\}$. Тогда $R = (\prod_{p\in P} R_p) \times (\prod_{p\notin P} R_p \times R_0)$. Первый сомножитель самоинъективен слева в силу теоремы 3.5, а второй регулярен в силу [2, предложение 112.7].

Автор благодарен А.П.Мишиной и А.В.Михалеву за ценные советы и замечания при чтении рукописи.

Литература

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы т. 1.- М.:Мир, 1974.-335 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 2.-М.:Мир, 1977.-416 с.
3. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории, т. 1.-М.:Мир, 1977.- 688 с.
4. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории, т. 2.- М.:Мир, 1979.- 463 с.
5. Rangaswamy K.M. Abelian groups with self-injective endomorphism rings. Lect. Notes Math., 1974, 372, 595-604.

О ПОЛУНАСЛЕДСТВЕННОСТИ ПОЛУСТРУКТУРНЫХ СУММ КОЛЕЦ

В.В.Игнатов

Полуструктурные суммы колец были введены Вайсгласом [I]. Янецкий и Вайсглас [2] доказали, что полная полуструктурная сумма $R=\sum_{\alpha\in L} R_\alpha$ колец R_α регулярна тогда и только тогда, когда R_α регулярно для всякого $\alpha\in L$. В настоящей работе вводится понятие строгой полуструктурной суммы, являющееся частным случаем полуструктурной суммы Вайсгласа, и исследуется вопрос о полунаследственности таких сумм. Все рассматриваемые кольца предполагаются имеющими единицу, а все кольцевые гомоморфизмы переводят единицу в единицу. Под полуструктурой понимается моноид, в котором выполнены тождества $e^2=e,\ ef=fe$. Подполуструктурой называется подмоноид в таком моноиде. Порядок вводится естественным образом, т.е. $e\le f$, если $ef=e$.

Пусть дана система колец R_α, индексированных элементами из некоторой полуструктуры L, причем если $\alpha\geqslant\beta$, то определен кольцевой гомоморфизм $\varphi^\alpha_\beta: R_\alpha\to R_\beta$, который тождествен, если $\alpha=\beta$, и $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$ влечет $\varphi^\beta_\gamma\varphi^\alpha_\beta=\varphi^\alpha_\gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Строгой полуструктурной суммой колец R_α называется кольцо $R=\langle R_\alpha, \varphi^\alpha_\beta\rangle_{\alpha\in L}$, аддитивная группа которого является прямой суммой аддитивных групп R_α, а умножение на образующих задается следующим образом: если $r_\alpha\in R_\alpha,\ r_\beta\in R_\beta$, $\alpha\beta=\gamma$, то $r_\alpha r_\beta=\varphi^\alpha_\gamma(r_\alpha)\varphi^\beta_\gamma(r_\beta)$.

ЛЕММА I. Пусть $R=\langle R_\alpha, \varphi^\alpha_\beta\rangle_{\alpha\in L}$. Тогда существует вложение колец $\sigma: R\to\prod_{\alpha\in L} R_\alpha$, являющееся изоморфизмом, если полуструктура L конечна.

Доказательство. Если $r=\sum r_\alpha$, то положим $\sigma(r)=(p_1,\dots,p_\xi,\dots)_{\xi\in L}$, где $p_\xi=\sum_{\alpha\geq\xi}\varphi_\xi^\alpha(r_\alpha)$. Из того, что каждый элемент кольца R однозначно представляется в виде $\sum r_\alpha$, следует, что, для того чтобы отображение σ было гомоморфизмом колец, достаточно, чтобы σ действовало как гомоморфизм на образующих r_α. Пусть $r_\alpha\in R_\alpha$. Тогда $\sigma(r_\alpha)=(p_1,\dots,p_\xi,\dots)_{\xi\in L}$, где

$$p_\xi=\begin{cases}\varphi_\xi^\alpha(r_\alpha), & \text{если } \xi\leq\alpha,\\ 0, & \text{если } \xi\nleq\alpha.\end{cases}$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения: $\sigma(1)=1$; $r,r'\in R_\alpha$ влечет $\sigma(r+r')=\sigma(r)+\sigma(r')$; $\sigma(\sum r_\alpha)=\sum\sigma(r_\alpha)$; $\sigma(-r_\alpha)=-\sigma(r_\alpha)$. Пусть далее $\sigma(r_\alpha r_\beta)=(p_1,\dots,p_\xi,\dots)$, $\sigma(r_\alpha)=(p_1',\dots,p_\xi',\dots)$, $\sigma(r_\beta)=(p_1'',\dots,p_\xi'',\dots)$ и $\alpha\beta=\gamma$. Тогда -

$$p_\xi=\begin{cases}\varphi_\xi^\gamma[\varphi_\gamma^\alpha(r_\alpha)\varphi_\gamma^\beta(r_\beta)], & \text{если } \xi\leq\gamma,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

С другой стороны

$$p_\xi'p_\xi''=\begin{cases}\varphi_\xi^\alpha(r_\alpha)\varphi_\xi^\beta(r_\beta), & \text{если } \xi\leq\gamma,\\ 0, & \text{если } \xi\nleq\gamma,\end{cases}$$

ибо $\xi\nleq\gamma$ влечет $\xi\nleq\alpha$ или $\xi\nleq\beta$. Таким образом, $\sigma(r_\alpha r_\beta)=\sigma(r_\alpha)\sigma(r_\beta)$. Проверим, что σ вложение. Действительно, если $r=\sum r_\alpha$ и $\sigma(r)=(p_1,\dots,p_\xi,\dots)=0$ то, поскольку носитель $supp(r)$ - конечное частично упорядоченное множество, оно удовлетворяет условию максимальности. Индукцией по $supp(r)$ докажем, что $r_\alpha=0$ для всякого α. Если $\alpha=1$, то $r_1=p_1=0$. Пусть $r_\xi=0$ для $\xi>\alpha$. Тогда $0=p_\alpha=r_\alpha+\sum_{\xi>\alpha}\varphi_\alpha^\xi(r_\xi)$, откуда $r_\alpha=0$ и, следовательно, $r=\sum r_\alpha=0$. В случае конечной полуструктуры L отображение σ является изоморфизмом. Действительно, пусть $p=(p_1,\dots,p_n)\in\prod R_i$, нужно найти $r=\sum r_i$ такое, что $\sigma(r)=p$. Эти элементы r_i находятся индукцией по множеству L из рекурентных соотношений: $r_1=p_1$, $r_k=p_k-\sum_{i>k}\varphi_k^i(r_i)$.

Пусть $R=\langle R_\alpha,\varphi_\beta^\alpha\rangle_{\alpha\in L}$ - строгая полуструктурная сумма колец и L_1 - подполуструктура в L, тогда RL_1 обозначает подкольцо кольца R, состоящее из элементов вида $\sum r_i$, $i\in L_1$. Допустим, что $L_1\subseteq L_2$ и L_2 -конечна. Посмотрим, как RL_1 вкладывается в KL_2. Для этого расомотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} RL_1 \arrow[r, "u"] & RL_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \\ \prod\limits_{\alpha\in L_1} R_\alpha \arrow[u, "\sigma_1^{-1}"] \arrow[r, dashed, "v"] & \prod\limits_{\beta\in L_2} R_\beta, \end{tikzcd} \tag{I}$$

где u - естественное вложение, а σ_1, σ_2 - изоморфизмы, упомянутые в лемме I. Введем функцию $m: L_2 \to L_1$, положив $m(k)= \inf\{l \mid l \geq k, l\in L_1\}$. Ясно, что $m(k)=k$ тогда и только тогда, когда $k\in L_1$. Рассмотрим гомоморфизм $v=\sigma_2 \circ u \circ \sigma_1^{-1}$. Пусть $v(p_1,\dots,p_n)=(\bar p_1,\dots,\bar p_m)$. Тогда $\sigma_1^{-1}(p_1,\dots,p_n)=\sum r_i$ и $p_k= \sum\limits_{i\geq k}\varphi_k^i(r_i)$. Отсюда получаем

$$\bar p_k=\sum_{i\geq k}\varphi_k^i(r_i)=\sum_{i\geq k}\varphi_k^{m(k)}\varphi^i_{m(k)}(r_i)=\varphi_k^{m(k)}\Big[\sum_{i\geq m(k)}\varphi^i_{m(k)}(r_i)\Big]=\varphi_k^{m(k)}p_{m(k)},$$

т.е.

$$\bar p_k=\begin{cases} p_k & \text{, если } k\in L_1, \\ \varphi_k^{m(k)}p_{m(k)} & \text{, если } k\in L_2\setminus L_1. \end{cases} \tag{2}$$

СЛЕДСТВИЕ. Кольцо RL_1 — ретракт кольца RL_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что существует гомоморфизм $\pi: \prod\limits_{L_2} R_\beta \to \prod\limits_{L_1} R_\alpha$ такой, что $\pi\circ v=1$. Но такой гомоморфизм, очевидно, задается равенством $\pi(\bar p_1,\dots,\bar p_m)= =(p_1,\dots,p_n)$, где $p_i=\bar p_i$.

Кольцо R называется полунаследственным слева, если каждый конечно порожденный левый идеал кольца R является проективным R-модулем. Легко видеть, что каждый такой идеал с n образующими является образом некоторого гомоморфизма $\varphi: {}_RR^n \to {}_RR$. Поэтому все конечно порожденные левые идеалы будут проективны тогда и только тогда, когда ядра всех гомоморфизмов из $Hom(R^n, R)$ будут выделяться в R^n прямым слагаемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a\in Hom(R^n, R)$. Положим

$${}^\perp a=\{x \mid x\in End_R R^n, a\circ x=0\}.$$

ЛЕММА 2. Если $a \in Hom(R^n, R)$, то ядро a выделяется в R^n прямым слагаемым тогда и только тогда, когда $^{\perp}a$ порождается идемпотентом.

Доказательство. Легко показать, что если $^{\perp}a = \langle \pi \rangle$, где $\pi^2 = \pi$, то $\ker a = Im \pi$ выделяется прямым слагаемым как образ идемпотентного эндоморфизма. Обратно, если $R^n = \ker a \oplus H$, то $^{\perp}a = \langle \pi \rangle$, где π - проектирование на $\ker a$ с ядром H.

Отсюда следует, что кольцо R полунаследственно слева тогда и только тогда, когда для любого $a \in Hom(R^n, R)$ правый идеал $^{\perp}a$ порождается идемпотентом. Если от гомоморфизмов перейти к матрицам, которые им соответствуют, то получим следующий критерий полунаследственности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Кольцо R полунаследственно тогда и только тогда, когда для любого столбца a элементов из R левый идеал кольца матриц $^{\perp}a$ порождается идемпотентом, где $^{\perp}a = \{\tau \mid \tau \in M_n(R),\ \tau a = 0\}$.

Если $\varphi: P \to S$ - гомоморфизм колец, а τ -матрица над кольцом R, то через $\varphi(\tau)$ обозначается матрица, полученная применением φ ко всем элементам τ.

ЛЕММА 3. Ретракт полунаследственного кольца является полунаследственным кольцом.

Доказательство. Если кольцо S - ретракт кольца R, то имеем последовательность $S \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} S$, где $\pi \circ i = 1$. Если теперь a - столбец элементов из S, то $^{\perp}ia = \langle e \rangle$ по предложению I. Предположим $\tau a = 0$. Тогда $i(\tau) i(a) = 0$ и, следовательно, $i(\tau) = \tau' e$. Применив к обеим частям этого равенства гомоморфизм π, получим $\tau = \pi(\tau')\pi(e)$. Поэтому $^{\perp}a = \langle \pi e \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если строгая полуструктурная сумма $R = \langle R_\alpha, \varphi^\alpha_\beta \rangle_{\alpha \in L}$ полунаследственна, то кольцо R_α полунаследственно для всякого $\alpha \in L$.

Доказательство. Пусть i_α -естественное вложение R_α в R, а σ - вложение R в $\prod_{\alpha \in L} R_\alpha$, построенное в лемме I. Тогда $(\pi_\alpha \circ \sigma) \circ i_\alpha = 1$ и, следовательно, R_α полунаследственно как ретракт R.

Если a -матрица над кольцом $R = \langle R_\alpha, \varphi^\alpha_\beta \rangle_{\alpha \in L}$, то $supp(a)$ обозначает подполуструктуру, порожденную носителями всех элементов матрицы a. Если a -столбец элементов кольца R -

$=\langle R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle_{\alpha\in L}$, а L_1 – подполуструктура в L, содержащая $supp(a)$. Тогда $E(a, L_1)$ обозначает множество идемпотентов, порождающих ${}^\perp a$ в кольце $M_n(RL_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Строгая полуструктурная сумма $R=$ $=\langle R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle_{\alpha\in L}$ полунаследственна тогда и только тогда, когда для любого столбца a элементов из R существует конечная подполуструктура L_1, содержащая $supp(a)$, и существует идемпотент $e\in M_n(RL_1)$ такие, что для любой конечной подполуструктуры $L_2 \supseteq L_1$, $e\in E(a, L_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна, поскольку в случае выполнения условий предложения 3 идемпотент e порождает ${}^\perp a$ в кольце $M_n(R)$. Для доказательства необходимости рассмотрим ${}^\perp a$ в кольце $M_n(R)$. В силу полунаследственности ${}^\perp a = \langle e \rangle$. Пусть L_1 – подполуструктура, порожденная множеством $supp(e) \cup supp(a)$. Докажем, что $e\in E(a, L_2)$ для любой конечной подполуструктуры $L_2 \supseteq L_1$. В самом деле, пусть $\tau a = 0$ для некоторой матрицы τ над кольцом RL_2. Тогда $\tau = \tau' e$. Если L_3 -подполуструктура, порожденная множеством $L_2 \cup supp(\tau')$ и $\pi: RL_3 \to RL_2$ – ретракция, тогда $\tau = \pi(\tau')e$, что доказывает соотношение $e\in E(a, L_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гомоморфизм колец $\varphi: R\to S$ называется наследственным, если для любого столбца a элементов кольца R справедлива импликация

$$^\perp a = \langle e \rangle \Rightarrow {}^\perp \varphi a = \langle \varphi e \rangle .$$

Заметим, что включение $\langle \varphi e \rangle \subseteq {}^\perp \varphi a$ справедливо всегда.

ЛЕММА 4. Естественная проекция $\pi: R\oplus S \to R$ является наследственным гомоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a – столбец элементов из $R\oplus S$ и ${}^\perp a = \langle e \rangle$, где $e=(e_r, e_s)$. Предположим $\tau a_r = 0$. Тогда $\tau' a = 0$, где $\tau' = (\tau, 0)$, и, следовательно, $\tau' = p e$. Проектируя на $M_n(R)$, получаем $\tau = p_r e_r$, т.е. ${}^\perp a_r = \langle e_r \rangle$.

ЛЕММА 5. Пусть гомоморфизмы $\varphi_i: R\to S_i$ наследственны для всех $i\in I$. Тогда гомоморфизм $\varphi = \prod \varphi_i : R \to \prod_{i\in I} S_i$ наследственен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a – столбец элементов из R и ${}^\perp a = \langle e \rangle$. Предположим $s\in {}^\perp \varphi a$, т.е. $s\varphi(a) = 0$. Тогда для любого i имеет место $s_i(\varphi a)_i = s_i \varphi_i(a) = 0$, откуда

$s_i = r_i \varphi_i(e)$. Положив $r=(r_i)$, получим $s = r\varphi(e)$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА. Пусть $R = \langle R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle_{\alpha \in L}$ - строгая полуструктурная сумма колец, где почти все гомоморфизмы φ_β^α наследственны. Тогда R—полунаследственное кольцо тогда и только тогда, когда R_α полунаследственны для всех $\alpha \in L$.

Доказательство. Необходимость доказана в предложении 2, докажем достаточность. Пусть Λ - подполуструктура, порожденная теми α и β, для которых гомоморфизмы φ_β^α не наследственны, a -столбец элементов R, а L_1 -полуструктура, порожденная множеством $\Lambda \cup supp(a)$. Полунаследственность колец R_α обеспечивает полунаследственность кольца $RL_1 \approx \prod\limits_{\alpha \in L_1} R_\alpha$. Следовательно, существует идемпотент $e \in E(a, L_1)$. Для любой конечной подполуструктуры $L_2 \supseteq L_1$ естественное вложение $u: RL_1 \to RL_2$ равняется $\sigma_2^{-1} \circ v \circ \sigma_1$ (см. диаграмму (I)). Докажем, что гомоморфизм v наследственен. Как видно из формулы (2), гомоморфизм v представляет собой произведение некоторого числа естественных проекций и некоторого числа гомоморфизмов вида $\varphi_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha$, где π_α - естественная проекция, а φ_β^α наследственен, так как $\beta \notin \Lambda$. Согласно лемме 5 v является наследственным гомоморфизмом, тогда наследственность u вытекает из того, что все изоморфизмы наследственны. Из наследственности u вытекает, что $e \in E(a, L_2)$, и кольцо полунаследственно по предложению 3.

Пусть $S = \langle S_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle_{\alpha \in L}$, где все кольца S_α совпадают с кольцом R, а все гомоморфизмы φ_β^α единичны. Тогда кольцо S изоморфно полугрупповому кольцу RL кольца R над полуструктурой L. Поэтому из теоремы вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ. Пусть L - полуструктура. Полугрупповое кольцо RL полунаследственно тогда и только тогда, когда полунаследственно кольцо R.

Предложение 3 позволяет дать другие достаточные условия полунаследственности строгой полуструктурной суммы колец, но они громоздко формулируются, поэтому здесь не приводятся. В случае произвольных гомоморфизмов φ_β^α полунаследственность всех R_α не является достаточной для полунаследственности кольца $R = \langle R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle$, что показывает следующий пример: пусть полуструктура L это множество натуральных чисел с операцией $ij = max(i,j)$, $R_i =$

$= \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$ для любого i, а гомоморфизмы задаются следующим образом: $\varphi_j^i(\bar{n}, m) = (\bar{m}, m)$ для всех i, j. Используя предложение 3 и формулу (2), можно показать, что аннулятор элемента $(\bar{3}, 3)_1$ не порождается идемпотентом.

В заключение автор выражает благодарность профессору Л.А. Скорнякову за руководство работой, а также И.Б.Кожухову за ряд полезных замечаний.

Литература

1. Weissglass J. Semigroup rings and semilattice sums of rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 39, №3, 471-478.
2. Janeski J. and Weissglass J. Regularity of semilattice sums of rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 39, №3, 479-482.

ПРОДОЛЖЕНИЕ АВТОМОРФИЗМОВ В ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С.Ф.Кожухов

Задача о продолжении автоморфизмов различных подгрупп A заданной группы G до автоморфизмов самой группы G является одной из интересных задач теории групп. Особый интерес представляет эта задача в случае, когда группа автоморфизмов подгруппы A хорошо изучена, в то время как группа автоморфизмов самой группы G изучена мало. В работе рассматривается класс почти вполне разложимых абелевых групп, то есть групп, квазиравных вполне разложимым абелевым группам без кручения. Автоморфизмы вполне разложимых групп представляются специальными матрицами [I] , то есть имеется достаточно хорошее описание групп автоморфизмов таких групп. Что касается групп автоморфизмов почти вполне разложимых групп, то их строение почти не изучено. Данная работа посвящена описанию таких почти вполне разложимых групп G , что всякий автоморфизм любой её вполне разложимой подгруппы, квазиравной группе G , продолжается до автоморфизма самой группы.

Подгруппу H группы G без кручения назовем квазиравной группе G , если фактор-группа G/H ограничена. Подгруппа $A \oplus B$ называется квазиразложением группы G , если она квазиравна G . При этом A и B называются квазислагаемыми группы G. Для любого подмножества M группы G без кручения через $\langle M \rangle_*$ обозначаем сервантную подгруппу группы G, порожденную M . Если $A \oplus B$ - квазиразложение группы G , то $\langle A \rangle_* \oplus \langle B \rangle_*$ также является квазиразложением группы G. Поэтому в дальнейшем рассматриваем только те квазиразложения группы G без кручения, квазислагаемые которых сервантны в G. Если G - почти вполне разложимая группа, то всякую квазиравную ей вполне разложимую подгруппу $A=\bigoplus_{i\in J} A_i$, $r(A_i)=1$, будем называть полным квазиразложением группы G (здесь через $r(A_i)$ обозначается ранг группы A_i). Для подгруппы $H\subset G$, $r(H)=1$ (элемента $g\in G$) через $\tau_G(H)$ обозначаем тип группы H в G (соответственно $\tau_G(g)$ - тип элемента g в группе G). Через $\chi_G(g)$, $h_p^G(g)$ обозначаем соответственно характеристику или p-высоту элемента g в группе G. Если ясно, в какой группе рассматривается характеристика, тип или p-высота, то индекс G будем опускать. Тип τ назовем p-делимым для простого числа p, если в его характеристике на p-м месте стоит символ ∞. Под ε всюду понимается тождественный автоморфизм соответствующей группы. Если $G=G_1\oplus G_2$, то согласно [2, с. 259], каждый автоморфизм Φ группы G представляется матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix},$$

где φ_{11}, φ_{22} - эндоморфизмы групп G_1, G_2, а $\varphi_{12}\in Hom(G_1,G_2)$ и $\varphi_{21}\in Hom(G_2,G_1)$. При этом если $g=g_1+g_2$, $g_1\in G_1$, $g_2\in G_2$, то $\Phi(g)=[\varphi_{11}(g_1)+\varphi_{21}(g_2)]+[\varphi_{22}(g_2)+\varphi_{12}(g_1)]$. Группы, рассматриваемые в работе, являются абелевыми группами без кручения. Все остальные обозначения и терминология стандартны .. взяты из [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Почти вполне разложимая группа G называется L-группой, если каждый автоморфизм любого её полного квазиразложения продолжается до автоморфизма самой группы G.

Очевидно, что делимая группа является L-группой. Пусть почти вполне разложимая группа $G=R(G)\oplus V(G)$, где $R(G)$, $V(G)$ - соответственно редуцированная и делимая части группы G, является L-группой. Для любого полного квазиразложения $A=\bigoplus_{i\in J} A_i$ группы $R(G)$ подгруппа $A\oplus V(G)$ есть полное квазиразложение группы G. Так как для всякого автоморфизма φ группы A автоморфизм $\bar{\varphi}$ группы $A\oplus V(G)$, действующий как φ на A и как ε на $V(G)$, продолжается до автоморфизма группы G, то группа $R(G)$ также является L-группой. Обратно, пусть редуцированная часть группы G является L-группой. Если $A \oplus V(G)$ - полное квазиразложение группы G, то $G = \langle A \rangle_* \oplus V(G)$. Всякий автоморфизм Φ группы $A \oplus V(G)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix},$$

где φ_1, φ_2 - автоморфизмы групп A и $V(G)$ соответственно, а $\psi \in Hom(A, V(G))$. Поскольку автоморфизм Φ_1, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix},$$

продолжается по условию до автоморфизма группы G, а гомоморфизм ψ группы A в $V(G)$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\psi}$ группы $\langle A \rangle_*$ в группу $V(G)$, ввиду инъективности группы $V(G)$, то Φ продолжается до автоморфизма группы G.

Таким образом, почти вполне разложимая группа G является L-группой тогда и только тогда, когда L-группой является её редуцированная часть $R(G)$. Поэтому в дальнейшем рассматриваем только редуцированные почти вполне разложимые группы.

ЛЕММА I. Пусть G - почти вполне разложимая группа и $A = \bigoplus_{i \in J} A_i$ - некоторое её полное квазиразложение. Если каждый автоморфизм подгруппы A продолжается до автоморфизма группы G, то $2G \subseteq A$.

Доказательство. Если $G = A$, то очевидно, что $2G \subseteq A$. Итак, пусть A - собственная подгруппа группы G, n - натуральное число со свойством $nG \subseteq A$. Запишем n в виде $n = 2^s n_1$, $(2, n_1) = 1$. Для любого элемента $g \in G$ $2^s n_1 g = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$, $a_{i_j} \in A_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$. Согласно условию для любого $j = 1, \ldots, k$ группа G обладает автоморфизмом φ_j, действующим как ε на A_{i_j} и как $-\varepsilon$ на остальных квазислагаемых. Тогда $2^s n_1 \varphi_j(g) = -a_{i_1} - \ldots - a_{i_{j-1}} + a_{i_j} - a_{i_{j+1}} - \ldots - a_{i_k}$ и, значит, $2^s n_1(\varphi_j(g) + g) = 2a_{i_j}$. Отсюда следует, что $a_{i_j} = 2^{s-1} n_1 a'_{i_j}$, $a'_{i_j} \in A_{i_j}$, если $s \geq 1$, или $a_{i_j} = n_1 a'_{i_j}$, если $s = 0$. В первом случае получаем $2^s n_1 g = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} = 2^{s-1} n_1 a'_{i_1} + \ldots + 2^{s-1} n_1 a'_{i_k}$, то есть $2g = a'_{i_1} + \ldots + a'_{i_k}$. Во втором случае $g = a'_{i_1} + \ldots + a'_{i_k}$, поэтому $2G \leq A$.

ЛЕММА 2. Пусть A и B - группы ранга I. Если $2A \neq A$, $2B \neq B$ и $Hom(A,B) \neq 0$, то для любого элемента $a \in A$, $a \notin 2A$, существует такой гомоморфизм $\varphi \in Hom(A,B)$, что $\varphi(a) \notin 2B$.

Доказательство. Так как $Hom(A,B) \neq 0$, то $\tau(A) \leq \tau(B)$. Поскольку $2B \neq B$ и $\tau(A) \leq \tau(B)$, то в группе B можно выбрать такой элемент b, что $b \notin 2B$ и $\chi_A(a) \leq \chi_B(b)$. Ввиду того, что A и B - группы ранга I, соответствие $a \to b$ продолжается до некоторого гомоморфизма $\varphi \in Hom(A,B)$ так, что $\varphi(a) = b$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть G - почти вполне разложимая группа, $A = \bigoplus_{i \in J} A_i$ - некоторое её полное квазиразложение, причём $G \neq A_{i_0} \oplus \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$. Если всякий автоморфизм группы A продолжается до автоморфизма группы G, то для любого $i \neq i_0$, либо $\tau(A_{i_0})$ не меньше $\tau(A_i)$, либо $\tau(A_i)$ 2-делим.

Доказательство. Пусть $\tau(A_{i_1})$ не 2-делим, покажем, что $\tau(A_{i_0}) \nleq \tau(A_{i_1})$. Согласно лемме I, $2G \leq A$. В группе G существует элемент g такой, что $g \notin A$, $2g = a_{i_0} + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$, причем $a_{i_0} \neq 0$ и $a_{i_0} \notin 2A_{i_0}$. В противном случае, если для любого $g \notin A$ равенство $2g = a_{i_0} + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$ влечет за собой $a_{i_0} = 0$ либо $a_{i_0} \in 2A_{i_0}$, то тогда $G = A_{i_0} \oplus \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$. Действительно, так как $2G \leq A$, то $2G \leq A_{i_0} \oplus \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$. Если $g \in G$, то $2g = a_{i_0} + a_2$, где $a_{i_0} \in A_{i_0}$, $a_2 \in \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$. В случае, когда $a_{i_0} = 0$, $2g = a_2$, что влечет $g \in \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$. Если же $a_{i_0} \neq 0$, то $a_{i_0} = 2a'_{i_0}$, $a'_{i_0} \in A_{i_0}$, поэтому $2(g - a'_{i_0}) = a_2 \in \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$. Это равенство означает, что $g - a'_{i_0} \in \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$ и значит $g \in A_{i_0} \oplus \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$, то есть $G = A_{i_0} \oplus \langle \bigoplus_{j \neq i_0} A_j \rangle_*$.

Итак, в группе G существует элемент $g \notin A$ такой, что $2g = a_{i_0} + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$, $a_{i_0} \neq 0$, $a_{i_0} \notin 2A_{i_0}$. Пусть $\tau(A_{i_0}) \leq \tau(A_{i_1})$. Тогда $Hom(A_{i_0}, A_{i_1}) \neq 0$ и согласно условию для любого $0 \neq \varphi \in Hom(A_{i_0}, A_{i_1})$ автоморфизм Φ группы A, определенный матрицей

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varphi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \end{pmatrix},$$

продолжается до некоторого автоморфизма $\hat{\Phi}$ группы G. Следовательно, $2\hat{\Phi}(g)=a_{i_0}+[\varphi(a_{i_0})+a_{i_1}]+\dots+a_{i_k}$, поэтому $2[\hat{\Phi}(g)-g]=\varphi(a_{i_0})$. Поскольку A_{i_1} сервантна в G, то $\varphi(a_{i_0})\in 2A_{i_1}$. Таким образом, получили, что $a_{i_0}\notin 2A_{i_0}$ и для любого $0\neq\varphi\in Hom(A_{i_0},A_{i_1})\varphi(a_{i_0})\in 2A_{i_1}$. Это противоречит лемме 2, значит, $\tau(A_{i_0})\nleq\tau(A_{i_1})$.

Известно [3], что любые два полных квазиразложения почти вполне разложимой группы конечного ранга изоморфны между собой. Следующая лемма говорит о том, что это утверждение справедливо и для групп бесконечного ранга.

ЛЕММА 3. Если G - почти вполне разложимая группа и A, B - два её полных квазиразложения, то $A\cong B$.

Доказательство. Пусть m и n - такие два натуральных числа, что $mG\leq A$ и $nG\leq B$. Так как $mB\leq A$ и $mB\cong B$, то можно считать, что B является подгруппой группы A.

Итак, имеем вполне разложимую группу A, её вполне разложимую подгруппу B и $nA\subset B$. Чтобы доказать, что B изоморфна A, достаточно показать, что $A(\alpha)/A^*(\alpha)\cong B(\alpha)/B^*(\alpha)$ для любого типа α [2, с. 134]. Здесь для любой группы H через $H(\alpha)$ обозначается подгруппа группы H, порожденная всеми её элементами, типы которых больше или равны α, а $H^*(\alpha)$ - подгруппа в H, порожденная всеми теми элементами, типы которых строго больше типа α.

Если $x\in B(\alpha)$, то $\tau_A(x)\geq\tau_B(x)\geq\alpha$, то есть $B(\alpha)\leq A(\alpha)$. Обратно, если $x\in A(\alpha)$, то $\tau_B(nx)\geq\tau_{nA}(nx)=\tau_A(x)\geq\alpha$, значит, $nA(\alpha)\leq B(\alpha)\leq A(\alpha)$. Аналогично показываем, что $nA^*(\alpha)\leq B^*(\alpha)\leq A^*(\alpha)$. Рассмотрим отображение φ фактор-группы $A(\alpha)/A^*(\alpha)$ в фактор-группу $B(\alpha)/B^*(\alpha)$, переводящее элемент $a+A^*(\alpha)$ в элемент $na+B^*(\alpha)$. Очевидно, что φ является гомоморфизмом. Пусть $\varphi(a_1+A^*(\alpha))=\varphi(a_2+A^*(\alpha))$, то есть

$n(a_1-a_2)\in B^*(\alpha)\subseteq A^*(\alpha)$. Поскольку для вполне разложимой группы A подгруппа $A^*(\alpha)$ сервантна в группе A, то $a_1-a_2\in A^*(\alpha)$ и, значит, $a_1+A^*(\alpha)=a_2+A^*(\alpha)$. Следовательно, гомоморфизм φ есть мономорфизм. Пусть ψ - гомоморфизм группы $B(\alpha)/B^*(\alpha)$ в группу $A(\alpha)/A^*(\alpha)$, ставящий в соответствие каждому элементу $b+B^*(\alpha)$ элемент $b+A^*(\alpha)$. Если $\psi(b_1+B^*(\alpha))=\psi(b_2+B^*(\alpha))$, то $b_1-b_2\in A^*(\alpha)$. В таком случае $n(b_1-b_2)\in B^*(\alpha)$, поэтому $b_1-b_2\in B^*(\alpha)$, так как подгруппа $B^*(\alpha)$ сервантна в B. Таким образом, ψ также является мономорфизмом. Итак, группы $A(\alpha)/A^*(\alpha)$ и $B(\alpha)/B^*(\alpha)$ вкладываются друг в друга, следовательно, ранги этих групп равны. Поскольку эти группы являются однородными вполне разложимыми, то равенства их рангов достаточно для их изоморфизма.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G - почти вполне разложимая группа и $A=\bigoplus_{i\in J}A_i$ - некоторое её полное квазиразложение, то множество $T(G)$ всех типов слагаемых A_i ранга I не зависит от выбора этого полного квазиразложения, то есть является инвариантом группы G.

ЛЕММА 4. Если почти вполне разложимая группа G такова, что в $T(G)$ есть хоть одна пара сравнимых типов, то G обладает собственным полным квазиразложением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G не вполне разложима, то она, очевидно, обладает собственным полным квазиразложением. Пусть $G=\bigoplus_{i\in J}G_i$, где G_i - группы ранга I, и предположим, что $\tau(G_{i_1})\leq\tau(G_{i_2})$. Рассмотрим подгруппу $G'=G_{i_1}\oplus G_{i_2}$. Так как G_{i_2} не является делимой группой, то в ней можно выбрать элемент g_2, p-высота которого равна нулю для некоторого простого p. Выберем в группе G_{i_1} такой элемент g_1, что $\chi(g_1)\leq\chi(g_2)$, и рассмотрим подгруппу $\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$. Эта подгруппа является собственной подгруппой группы G'. Действительно, если $G'=\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$, то $h_p[(pg_1+g_2)-g_2]=\min[h_p(pg_1+g_2), h_p(g_2)]=\min(0,0)=0$. С другой стороны $h_p[(pg_1+g_2)-g_2]=h_p(pg_1+g_2-g_2)=h_p(pg_1)=1$. Полученное противоречие говорит о том, что $\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$ - собственная подгруппа в G'. Покажем, что $pG'=p(\langle g_1\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*)\subseteq\langle pg_1\oplus g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$. Так как $\langle g_2\rangle_*\subset\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$, то надо показать, что $p(\langle g_1\rangle_*)\subset\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$. Пусть $g\in\langle g_1\rangle_*$ и m, n - такие целые числа, что $mg=ng_1$ или

$g=\frac{n}{m}g_1$. Поскольку g_1 делится на m и $\tau(g_1)\leq\tau(g_2)$, то g_2 и pg_1+g_2 также делятся на m . В таком случае $pg=p\frac{n}{m}g_1=$ $=\frac{n}{m}pg_1+\frac{n}{m}g_2-\frac{n}{m}g_2=\frac{n}{m}(pg_1+g_2)-\frac{n}{m}g_2\in\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$. Таким образом, $\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*$ - собственное полное квазиразложение группы G' . Следовательно, $\langle pg_1+g_2\rangle_*\oplus\langle g_2\rangle_*\oplus(\oplus_{i\neq i,k}G_i)$ - собственное полное квазиразложение группы G .

Отсюда в качестве следствия вытекает

ТЕОРЕМА I. Пусть G - почти вполне разложимая группа и каждый тип из $T(G)$ 2-делим. Группа G является L-группой тогда и только тогда, когда она вполне разложима и $T(G)$ состоит из попарно несравнимых типов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G вполне разложима, $T(G)$ состоит из попарно несравнимых типов и $G=\oplus_{i\in J}G_i$, $r(G_i)=1$, то согласно [4] любое другое полное квазиразложение группы G совпадает с данным разложением в прямую сумму групп ранга I. Поэтому группа G является L-группой.

Обратно, пусть каждый автоморфизм любого полного квазиразложения группы G продолжается до автоморфизма самой группы G. Если $A=\oplus_{i\in J}A_i$ - произвольное полное квазиразложение группы G , то согласно лемме I $2G\leq A$. Поскольку каждый тип из $T(G)$ 2-делим, то группа G 2-делима. В таком случае $G=$ $=2G\leq A\leq G$, то есть $G=A$. Таким образом, группа G не имеет собственных полных квазиразложений. Следовательно, она вполне разложима и согласно лемме 4 типы в $T(G)$ попарно несравнимы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G - такая почти вполне разложимая группа, что множество $T(G)$ не имеет 2-делимых типов. Для группы G следующие условия эквивалентны:

(а) группа G является L-группой;

(б) множество $T(G)$ состоит из попарно несравнимых типов и $2G\leq A$ для некоторого полного квазиразложения $A=\oplus_{i\in J}A_i$ группы G;

(в) существует такое полное квазиразложение $A=\oplus_{i\in J}A_i$ группы G , что каждая подгруппа A_i вполне характеристична в G и естественный гомоморфизм θ группы $Aut(G)$ в группу $Aut(A)$, ставящий в соответствие каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм $\bar{\varphi}=(\varphi_i)_{i\in J}$, где φ_i - ограничение φ на подгруппе A_i, является изоморфизмом.

Доказательство. Докажем сначала эквивалентность условий (а) и (б). Предположим, что G - L-группа. Если существуют два типа $\alpha, \beta \in T(G)$ и $\alpha \leq \beta$, то согласно лемме 4 G обладает собственным полным квазиразложением $A=\bigoplus_{i\in J} A_i$. Причем, как следует из доказательства леммы 4, $\tau(A_{i_1})=\alpha$ и $G\neq A_{i_1}\oplus\langle\bigoplus_{i\neq i_1} A_i\rangle_*$. Так как в $T(G)$ нет 2-делимых типов, то согласно следствию I $\tau(A_{i_1})\nleq\tau(A_i)$, $i\neq i_1$, что противоречит условию $\alpha\leq\beta$. Таким образом, типы в $T(G)$ попарно несравнимы. Из леммы I следует, что для любого полного квазиразложения $A=\bigoplus_{i\in J} A_i$ $2G\leq A$.

Обратно, пусть группа G удовлетворяет условию (б), покажем, что она является L-группой. Пусть $B=\bigoplus_{i\in J} B_i$ - произвольное полное квазиразложение группы G. Так как $T(G)$ состоит из попарно несравнимых типов, то каждое слагаемое A_i из полного квазиразложения $A=\bigoplus_{i\in J} A_i$ вполне характеристично в A и $Hom(A_i,A_j)=0$ для любых $i,j\in J$, $i\neq j$. В таком случае A - единственное полное квазиразложение группы G [4], поэтому $B=A$. Поскольку слагаемое A_i вполне характеристично в A, то любой автоморфизм φ группы A можно представить в виде вектора $\varphi=(\varphi_i)_{i\in J}$ где φ_i - ограничение автоморфизма φ на подгруппе A_i. Так как A_i - группа ранга I, то φ_i действует на подгруппе A_i как умножение на некоторое рациональное число $\frac{m_i}{n_i}$, $i\in J$. Пусть g - произвольный элемент группы G и $2g=a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}$, $a_{i_j}\in A_{i_j}$. Покажем, что автоморфизм φ продолжается до автоморфизма группы G. Так как каждая группа A_i n_i-делима и m_i-делима, то числа m_i и n_i оба нечётные. Таким образом, $m_i-n_i=2t_i$, $i\in J$. В таком случае в группе G разрешимо уравнение $2x=\frac{m_{i_1}}{n_{i_1}}a_{i_1}+\ldots+\frac{m_{i_k}}{n_{i_k}}a_{i_k}$ и $x_0=g+\frac{t_{i_1}}{n_{i_1}}a_{i_1}+\ldots+\frac{t_{i_k}}{n_{i_k}}a_{i_k}$ является его решением. Действительно, $2x_0=2g+2\frac{t_{i_1}}{n_{i_1}}a_{i_1}+\ldots+\frac{2t_{i_k}}{n_{i_k}}a_{i_k}=\frac{m_{i_1}-n_{i_1}}{n_{i_1}}a_{i_1}+\ldots+\frac{m_{i_k}-n_{i_k}}{n_{i_k}}a_{i_k}+a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}=\frac{m_{i_1}}{n_{i_1}}a_{i_1}+\ldots+\frac{m_{i_k}}{n_{i_k}}a_{i_k}$. Теперь, полагая $\bar\varphi(g)=x_0$, получим автоморфизм $\bar\varphi$ группы G, являющийся продолжением автоморфизма φ.

Теперь докажем эквивалентность условий (а) и (в). Если G - L-группа, то, как только что доказали, выполнено условие (б). Значит, множество $T(G)$ состоит из попарно несравнимых типов. В таком случае, как уже отмечалось при доказательстве эквивалентности условий (а) и (б), группа G обладает единственным полным квазиразложением $A=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} A_i$, причем $Hom(A_i,A_j)=0$, $i,j\in\mathcal{J}$, $i\neq j$. Тогда согласно [4] подгруппы A_i вполне характеристичны как в A, так и в G. Следовательно, имеет место мономорфизм θ из группы $Aut(G)$ в группу $Aut(A)$, ставящий в соответствие каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм группы A, представляемый вектором $(\varphi_i)_{i\in\mathcal{J}}$, где φ_i - ограничение φ на A_i. Так как каждый автоморфизм группы A представляется в виде такого вектора и продолжается до автоморфизма группы G, то θ является эпиморфизмом. Следовательно, условие (а) влечёт выполнение условия (в).

Обратно, пусть для группы G выполнено условие (в). Тогда согласно [4] подгруппа $A=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} A_i$ из условия (в) есть единственное полное квазиразложение группы G. Поскольку подгруппы A_i вполне характеристичны в G, то они также вполне характеристичны в A [4]. Значит, любой автоморфизм $\bar\varphi$ группы A представляется в виде вектора $(\varphi_i)_{i\in\mathcal{J}}$, где φ_i - ограничение $\bar\varphi$ на подгруппе A_i. Согласно условию существует такой автоморфизм φ группы G, что $\theta(\varphi)=\bar\varphi$. Следовательно, любой автоморфизм $\bar\varphi$ группы A продолжается до автоморфизма группы G, то есть G - L-группа.

ТЕОРЕМА 3. Почти вполне разложимая группа G является L-группой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(а) $2G\subseteq A\subseteq G$ для любого полного квазиразложения $A=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} A_i$ группы G;

(б) множество $T(G)$ разбивается на два таких подмножества $T_1(G)$ и $T_2(G)$, что типы в $T_1(G)$ попарно несравнимы и не 2-делимы, а типы в $T_2(G)$ 2-делимы и также попарно несравнимы.

Доказательство. Пусть G является L-группой и $A=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} A_i$ - произвольное её полное квазиразложение. Условие (а) для группы G выполнено ввиду леммы I. Если $\mathcal{J}'$ - подмножество тех индексов i из $\mathcal{J}$, для которых подгруппы A_i не 2-делима, то $2G\subseteq \bar A\oplus\bar{\bar A}$, где $\bar A=\langle\bigoplus_{i\in\mathcal{J}'} A_i\rangle_*$ и $\bar{\bar A}=\langle\bigoplus_{i\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{J}'} A_i\rangle_*$. Для любого $g\in G$ $2g=\bar a+\bar{\bar a}$, $\bar a\in\bar A$, $\bar{\bar a}\in\bar{\bar A}$. Поскольку группа

$\bar{\bar{A}}$ 2-делима, то $\bar{\bar{a}}=2\bar{\bar{a}}_1$, $\bar{\bar{a}}_1\in\bar{\bar{A}}$. В таком случае $2(g-\bar{\bar{a}}_1)=\bar{a}$, то есть $g-\bar{\bar{a}}_1=\bar{a}_1$, $\bar{a}_1\in\bar{A}$. Это означает, что $G=\bar{A}\oplus\bar{\bar{A}}$. Поскольку прямая сумма полных квазиразложений групп $\bar{A}$ и $\bar{\bar{A}}$ является полным квазиразложением группы G и G – L-группа, то очевидно, что $\bar{A}$ и $\bar{\bar{A}}$ также являются L-группами. Следовательно, $T(G)=T(\bar{A})\cup T(\bar{\bar{A}})$ и типы в $T(\bar{A})$ попарно несравнимы ввиду теоремы 2, а в $T(\bar{\bar{A}})$ типы попарно несравнимы ввиду теоремы I.

Обратно, пусть группа G удовлетворяет условиям (а) и (б), $A=\bigoplus_{i\in J} A_i$ – её полное квазиразложение и $A=\bar{A}\oplus\bar{\bar{A}}$, где $T(\bar{A})=T_1(G)$ и $T(\bar{\bar{A}})=T_2(G)$. Так как $2G\leq\bar{A}\oplus\bar{\bar{A}}$, то, рассуждая, как при доказательстве необходимости условий данной теоремы, получаем $G=\langle\bar{A}\rangle_*\oplus\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$. Поскольку $2\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*\leq\bar{\bar{A}}\leq\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$ и $\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$ 2-делима, то $\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*=\bar{\bar{A}}$, то есть $\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$ является вполне разложимой группой, а $T(\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*)$ состоит из 2-делимых попарно несравнимых типов. Согласно теореме I группа $\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$ является L-группой. Если B – произвольное полное квазиразложение группы $\langle\bar{A}\rangle_*$, то очевидно, что $B\oplus\bar{\bar{A}}$ – полное квазиразложение группы G. Согласно условию (а) $2G\leq B\oplus\bar{\bar{A}}$, поэтому $2(\langle\bar{A}\rangle_*)\leq B$. Так как типы в $T(\langle\bar{A}\rangle_*)$ попарно несравнимы и не 2-делимы, то по теореме 2 группа $\langle\bar{A}\rangle_*$ является L-группой. Поскольку группа $\bar{A}$ не 2-делима, $\bar{\bar{A}}$ – 2-делимая группа, то $Hom(\bar{\bar{A}},\bar{A})=0$. Поэтому любой автоморфизм Φ группы A относительно разложения $A=\bar{A}\oplus\bar{\bar{A}}$ задается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} & \psi \\ 0 & \bar{\bar{\varphi}} \end{pmatrix},$$

где $\bar{\varphi}$, $\bar{\bar{\varphi}}$ – автоморфизмы групп $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$ соответственно, а $\psi\in Hom(\bar{A},\bar{\bar{A}})$. Этот автоморфизм Φ можно записать в виде суммы эндоморфизмов $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, где Φ_1, Φ_2 определяются соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} & 0 \\ 0 & \bar{\bar{\varphi}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\langle\bar{A}\rangle_*$ и $\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$ – L-группы, то автоморфизм Φ_1 продолжается до автоморфизма $\hat{\Phi}_1$ группы G. Покажем, что Φ_2 продолжается до эндоморфизма группы G. Если $g\in G$, то $2g=\bar{a}+\bar{\bar{a}}$, $\bar{a}\in\bar{A}$ и $\bar{\bar{a}}\in\bar{\bar{A}}$. Так как группа $\langle\bar{\bar{A}}\rangle_*$ 2-делима, то в группе G

разрешимо уравнение $2x=\psi(\bar{a})$. Полагая $\hat{\Phi}_2(g)=x$, получим эндоморфизм группы G, являющийся продолжением Φ_2. В таком случае $\hat{\Phi}=\hat{\Phi}_1+\hat{\Phi}_2$ есть автоморфизм группы G, ограничение которого на A совпадает с Φ. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если почти вполне разложимая группа G является L-группой, то имеют место следующие утверждения:

(а) максимальная 2-делимая подгруппа G_2 группы G является вполне разложимой группой, причем множество $T(G_2)$ состоит из попарно несравнимых типов;

(б) подгруппа G_2 выделяется в G прямым слагаемым, то есть $G=G_1\oplus G_2$ для некоторой подгруппы G_1;

(в) подгруппа G_1 является почти вполне разложимой группой, у которой $T(G_1)$ состоит из попарно несравнимых типов.

Литература

I. Кишкина З.М. Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения// Изв. АН СССР, Сер. матем., 9, 1945, 201-232.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 2. - М.: Мир, 1977.- 416 с.

3. Butler M.C.R. A class of torsion-free abelian groups of finite rank. Proc. London Math. Soc., 15, 1965, 680-698.

4. Кожухов С.Ф. Группы автоморфизмов регулярно полных абелевых групп без кручения. - Томск, 1977, - 29 с. Рукопись депонирована в ВИНИТИ, 1977, № 2790-77.

ПОДКОЛЬЦА КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБР И ИХ АДДИТИВНЫЕ ГРУППЫ

П.А.Крылов

ВВЕДЕНИЕ. Подкольца конечномерных рациональных алгебр играют важную роль в теории абелевых групп. Кольца эндоморфизмов групп без кручения конечного ранга являются такими подкольцами. С другой стороны, согласно теореме Корнера [I] редуцированное подкольцо с единицей конечномерной рациональной алгебры изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторой абелевой группы без кручения конечного ранга. Как обычно, будем приписывать кольцу свойства его аддитивной группы. Так,"кольцо без кручения" означает, что аддитивная группа кольца не имеет кручения и т.д. Таким образом, кольца без кручения конечного ранга это в точности подкольца конечномерных рациональных алгебр.

В § I этой статьи рассматриваются в терминах аддитивной группы кольца различные свойства колец без кручения конечного ранга, связанные с радикалом Джекобсона. Доказательства результатов несложны и используют технику локализации. В работах [2] и [3] были найдены сильно неразложимые группы без кручения конечного ранга, являющиеся аддитивными группами полупростых колец. В статье этот вопрос решается полностью. С помощью результатов § I дается описание аддитивных групп полупростых колец без кручения конечного ранга или, что равносильно, описываются группы без кручения конечного ранга, являющиеся аддитивными группами полупростых колец (теорема 2.5). Кроме того, в § 2 приводится отличное от существующего описание аддитивных групп полупервичных колец без кручения конечного ранга (колец "типа полупростой алгебры" в терминологии работы [4].

§ 3 посвящён в основном вопросу об описании всех колец, которые можно построить на данной группе без кручения конечного ранга. Приводятся известные результаты и описываются группы без кручения конечного ранга с полупростой алгеброй квазиэндоморфизмов, являющиеся нильгруппами, т.е. допускающие только нулевое умножение. Используя результаты § I, можно по другому получить некоторые результаты работы автора [5].

Все рассматриваемые кольца ассоциативны. Если R - кольцо без кручения, то R^+ - аддитивная группа кольца R; $\widehat{R}$ - минимальная рациональная алгебра, содержащая R. Таким образом, $\widehat{R} \cong R \otimes Q$, где Q - поле рациональных чисел (тензорное произведение здесь и далее рассматривается над кольцом целых чисел). Будем отождествлять $\widehat{R}$ с $R \otimes Q$, а R с его образом при каноническом мономорфизме $R \to R \otimes Q$. Из сказанного вытекает, что для любого $x \in \widehat{R}$ существует натуральное n со свойством $nx \in R$. Обозначим $N(R)$ - первичный радикал; $J(R)$ - радикал Джекобсона кольца R.

Если R имеет конечный ранг, то $\widehat{R}/N(\widehat{R})$ - конечномерная полупростая Q-алгебра. Следовательно, $\widehat{R}/N(\widehat{R})$ имеет единицу. Отсюда легко вывести, что каждый односторонний идеал кольца $\widehat{R}/N(\widehat{R})$ является идеалом алгебры $\widehat{R}/N(\widehat{R})$. Следовательно, $\widehat{R}/N(\widehat{R})$-классически полупростое кольцо. Аналогично если R содержит единицу, то $\widehat{R}$ - двусторонне артиново кольцо. Между R и $\widehat{R}$ существуют также следующие соотношения: I) полупервичность R равносильна классической полупростоте $\widehat{R}$; 2) первичность R равносильна простоте $\widehat{R}$.

Действительно, если N - нильпотентный идеал в R, то N порождает нильпотентный идеал в $\widehat{R}$. Если же N^* - ненулевой нильпотентный идеал в $\widehat{R}$, то $N^* \cap R$ - ненулевой нильпотентный идеал в R. Таким образом, R не содержит ненулевых нильпотентных идеалов (т.е. полупервично) тогда и только тогда, когда их не содержит $\widehat{R}$ (т.е. классически полупросто в силу его артиновости). Этим установлено I). Такими же простыми рассуждениями проверяется и 2).

§ 1. Радикал Джекобсона колец без кручения конечного ранга

Пусть R — кольцо без кручения. Существует наибольший идеал $d(R)$ в R, являющийся рациональной алгеброй. ($d(R)$ совпадает с наибольшей делимой подгруппой группы R^+). Во всех утверждениях этого параграфа R — кольцо без кручения конечного ранга такое, что $d(R) \leq N(R)$. В частности, сюда попадают редуцированные кольца, т.е. кольца R, для которых $d(R)=0$.

ЛЕММА 1.1. Пусть A - максимальный правый идеал кольца R, содержащий $N(R)$. Тогда $A \geq pR$ для некоторого простого числа p.

Доказательство. Так как $A \geq N(R)$, то можно считать, что $N(R)=0$, т.е. R — полупервичное кольцо. Известно [6, предложение 121.3], что либо $A \geq pR$ для некоторого простого p, либо $(R/A)^+$ — делимая группа без кручения. Покажем, что второй случай невозможен. Достаточно доказать, что $(R/A)^+$ — периодическая группа или, что эквивалентно, $\hat{A} = A \otimes Q = \hat{R}$.

Ввиду классической полупростоты кольца $\hat{R}$ $\hat{R} = \hat{A} \oplus e\hat{R}$ для некоторого идемпотента e. Пусть n — натуральное число со свойством $ne \in R$. Тогда neR — правый идеал в R и $A \cap neR = 0$. В силу максимальности A либо $A \oplus neR = R$, либо $A \oplus neR = A$. В первом случае $neR \neq 0$ и $pneR = neR$ для каждого простого p (снова в силу максимальности A). Значит, neR — делимая группа и $neR \leq d(R)$. Но по предположению $d(R) \leq N(R)=0$. Следовательно, выполняется второй случай $A \oplus neR = A$. Отсюда $neR=0$, $e=0$ и $\hat{R} = \hat{A}$.

Введём следующие обозначения: $\mathcal{P}$ — множество всех простых чисел, $\Pi(R) = \{p \in \mathcal{P} \mid pR \neq R\}$, $H(R) = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} pR$, $R_p = R/pR$, F_p — поле из p элементов. Далее, для $p \in \mathcal{P}$ пусть идеал J_p в R таков, что $J_p \geq pR$ и $J(R_p) = J_p/pR$.

ТЕОРЕМА 1.2. Для кольца R справедливы следующие утверждения: 1) $H(R) \leq J(R)$ и $J(R)/H(R)$ - нильпотентный идеал; 2) $J(R) = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} J_p$; 3) фактор-кольцо $R/J(R)$ изоморфно подпрямой сумме полупростых конечномерных F_p-алгебр $A_p = R_p/J(R_p)$, $p \in \Pi(R)$.

Доказательство. 1) Имеем $J(R) = \bigcap A$, где A пробегает все максимальные регулярные правые идеалы кольца R. Пусть $x \in H(R)$. Если A — максимальный регулярный правый идеал кольца R, то $A \geq pR \geq H(R)$ для некоторого $p \in \mathcal{P}$ (лемма 1.1).

Следовательно, $x\in A$ и $x\in J(R)$. Отсюда $H(R)\subseteq J(R)$. Пусть n – ранг кольца R, т.е. $n=\dim_{\mathbb{Q}} R\otimes Q$. Тогда для каждого $p\in\pi$ $\dim_{F_p} R_p\leq n$. Следовательно, все радикалы $J(R_p)$ нильпотентны, причем индексы нильпотентности ограничены в совокупности числом n. Докажем, что $(J(R)/H(R))^n=0$. Пусть $x_1,\dots,x_n\in J(R)$. Тогда $x_1+pR,\dots,x_n+pR\in J(R_p)$. Следовательно, $(x_1+pR)\cdot\ldots\cdot(x_n+pR)=0$ или $x_1\cdot\ldots\cdot x_n\in pR$ для каждого p. Таким образом, $x_1\cdot\ldots\cdot x_n\in\bigcap pR=H(R)$.

2) Гомоморфный образ квазирегулярного идеала является квазирегулярным идеалом, поэтому $(J(R)+pR)/pR\subseteq J(R_p)=J_p/pR$. Следовательно, $J(R)\subseteq J_p$ для каждого p и $J(R)\subseteq\bigcap J_p$. Обратно. Пусть $x\in\bigcap J_p$. Если A – некоторый максимальный регулярный правый идеал кольца R, то $A\supseteq pR$ для некоторого p (лемма I.I). Следовательно, A/pR – максимальный регулярный правый идеал кольца R_p. Отсюда $A/pR\supseteq J(R_p)=J_p/pR$ и $A\supseteq J_p$. Значит, $x\in J_p\subseteq A$. Таким образом, $x\in\bigcap A$, где A пробегает все максимальные регулярные правые идеалы кольца R. Следовательно, $x\in J(R)$.

3) Рассмотрим идеалы $J_p/J(R)\,(p\in\Pi(R))$ кольца $R/J(R)$. В силу 2) $\bigcap_{p\in\Pi(R)} J_p/J(R)=0$. Далее

$$R/J(R)/J_p/J(R)\cong R/J_p\cong R/pR/J_p/pR=R_p/J(R_p).$$

Следовательно, $R/J(R)$ изоморфно подпрямой сумме полупростых конечномерных F_p-алгебр $A_p=R_p/J(R_p),\ p\in\Pi(R)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.3. Кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда R полупервично и $H(R)=0$. В частности, полупервичное кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда $H(R)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если R полупросто, то $N(R)\subseteq J(R)=0$. Далее, ввиду теоремы I.2 $H(R)\subseteq J(R)=0$. Обратно, пусть $N(R)=H(R)=0$. По теореме I.2 идеал $J(R)/H(R)$ нильпотентен. Следовательно, $J(R)$ – нильпотентный идеал и $J(R)\subseteq \subseteq N(R)=0$.

СЛЕДСТВИЕ I.4. I) Если $H(R)=0$, то радикал $J(R)$ нильпотентен. 2) Радикал $J(R)$ нильпотентен тогда и только тогда, когда $H(R/N(R))=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) вытекает из теоремы I.2. Так как $J(R/N(R))=J(R)/N(R)$, то нильпотентность $J(R)$ равносильна полупростоте $R/N(R)$. Теперь 2) вытекает из следствия I.3.

СЛЕДСТВИЕ I.5. Если R – полупростое кольцо, то радикал $J(S)$ нильпотентен для любого подкольца S кольца R. В частности, полупервичные подкольца полупростого кольца полупросты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если R полупросто, то $H(R)=0$.

Отсюда $H(S)=\bigcap_p pS \subseteq \bigcap pR = H(R)=0$ и $J(S)$ нильпотентен по следствию I.4.

Закончим параграф рассмотрением вопроса о классической полупростоте фактор-кольца $R/J(R)$. Прежде заметим, что $R/N(R)$ является кольцом без кручения (см. [6, предложение I2I.4]).

ТЕОРЕМА I.6. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $R/J(R)$ – классически полупростое кольцо;

2) $nR \subseteq J(R)$ для некоторого натурального числа n, т.е. $J(R)$ имеет конечный индекс в R;

3) $|\Pi(R/N(R))| < \aleph_0$.

Если выполняется одно из условий I) - 3), то $R/J(R) \cong \sum_{i=1}^{k} {}^{\oplus} A_{p_i}$, где A_{p_i} – полупростая конечномерная F_{p_i} -алгебра, $i=1,\dots,k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что R – полупервичное кольцо. Докажем I) $\Longrightarrow$ 2). По теореме I.2 кольцо $\bar{R}=R/J(R)$ изоморфно подпрямой сумме конечномерных F_p-алгебр A_p, $p\in\Pi(R)$. Пусть $\Pi(R)=\{p_1,p_2,\dots\}$. Рассмотрение цепочки $p_1\bar{R} \supset p_1p_2\bar{R} \supset \dots$ показывает, что почти все $A_{p_i}=0$, т.е. $\bar{R}$ – конечное кольцо. Таким образом, $nR \subseteq J(R)$ для некоторого n.

2) $\Longrightarrow$ 3). На основании [4, следствие 3.5] (см. также [6, теорема I2I.7]) R содержит подкольцо S конечного индекса такое, что $S=\sum_{i=1}^{s} \oplus S_i$, где все S_i - первичные кольца. Установим, что $|\Pi(S_i)|<\aleph_0$, $i=1,\dots,s$. Пусть k – натуральное число, для которого $kR\subseteq S$. Тогда $nkR\subseteq J(R)$ и nkR – квазирегулярный идеал в S. Следовательно, $nkS\subseteq nkR\subseteq J(S)$ и $nkS_i\subseteq J(S_i)$, $i=1,\dots,s$. Допустим, что для некоторого i_0 $|\Pi(S_{i_0})|=\aleph_0$. Тогда $H(S_{i_0})=0$ ввиду того, что $S_{i_0}^{+}$ – однородная группа [6, лемма I2I.6]. Отсюда $J(S_{i_0})=0$, так как S_{i_0} – первичное кольцо и $N(S_{i_0})=0$ (следствие I.3), что противоречит $nkS_{i_0}\subseteq J(S_{i_0})$. Следовательно, $|\Pi(S_i)|<\aleph_0$ ($i=1,\dots,s$) и $|\Pi(S)| \le \le \sum_{i=1}^{s}|\Pi(S_i)|<\aleph_0$.
Так как S имеет конечный индекс в R, то также $|\Pi(R)|<\aleph_0$.

3) $\Longrightarrow$ I). Если $\Pi(R)=\{p_1,\dots,p_s\}$, то $H(R)=\bigcap_{i=1}^{s}p_iR=p_1\dots p_sR$ имеет конечный индекс в R. Так как $J(R)\supseteq H(R)$, то $J(R)$ также имеет конечный индекс в R.

Если $R/J(R)$-классически полупростое кольцо, то из доказательства импликации I) $\Longrightarrow$ 2) следует, что $R/J(R)$ изоморфно подпрямой сумме F_{p_i}-алгебр A_{p_i}, $i=1,\dots,k$. Но всякая подпрямая сумма этих алгебр совпадает с их прямой суммой (см.доказательство следствия 2.7 работы [5]). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. 1) Если $|\Pi(R)|<\aleph_0$, то $R/J(R)$-классически полупростое кольцо. 2) Если R - полупервичное кольцо или R - кольцо с единицей, то $R/J(R)$-классически полупростое кольцо тогда и только тогда, когда $|\Pi(R)|<\aleph_0$.

Доказательство. 1) Если $pR=R$, то $p(R/N(R))=R/N(R)$. Отсюда $\Pi(R/N(R))\leq\Pi(R)$ и осталось сослаться на теорему 1.6.

2) Пусть R содержит единичный элемент 1. Докажем, что $\Pi(R/N(R))=\Pi(R)$. Пусть $p\notin\Pi(R/N(R))$, т.е. $pR+N(R)=R$. Тогда $1=px+y, x\in R, y\in N(R)$. Отсюда $px=1-y$-обратимый элемент. Следовательно, $pxz=1$ для некоторого $z\in R$. Теперь $R=1R=pxzR\leq pR$ и $R=pR$, т.е. $p\notin\Pi(R)$. Этим установлено $\Pi(R/N(R))\supseteq\Pi(R)$. Обратное включение справедливо всегда. Утверждение следует теперь из теоремы 1.6.

§ 2. Аддитивные группы полупервичных и полупростых колец

Основной результат параграфа — теорема 2.6. Она содержит характеризации аддитивных групп полупростых колец без кручения конечного ранга.

Если R - кольцо и $A\cong R^+$, то будем говорить, что R - кольцо на A. В целях удобства будем считать, что A - аддитивная группа кольца R. В этом параграфе A обозначает редуцированную группу без кручения конечного ранга. Положим $\Pi(A)=\{p\in\mathfrak{X}\mid pA\neq A\}$, $H(A)=\bigcap_{p\in\mathfrak{X}}pA$ — подгруппа Фраттини группы A. Если R - кольцо на A, то, очевидно, $\Pi(A)=\Pi(R)$, $H(A)=H(R)$.

Следующие три следствия получаются непосредственно из результатов § 1: первое из них вытекает из теоремы 1.2 и касается проблем 94 [6] об "абсолютных" радикалах Джекобсона для группы A.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. $H(A)\leq J(R)$ для каждого кольца R на A.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $H(A)=0$ и R - кольцо на A, то радикал $J(R)$ нильпотентен. Более того, если B - подгруппа в A и S - кольцо на B, то радикал $J(S)$ нильпотентен.

Доказательство. Если $B\leq A$, то $pB\leq pA$ и $H(S)=H(B)=\bigcap pB\leq\bigcap pA=H(A)=0$. Радикал $J(S)$ нильпотентен по следствию 1.4.

Следующее утверждение вытекает из следствия 1.7.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если $|\Pi(A)|<\aleph_0$, то кольцо $R/J(R)$ классически полупросто для каждого кольца R на A. Обратно, если на A существует полупервичное кольцо R или кольцо R с единицей такое, что $R/J(R)$ классически полупросто, то $|\Pi(A)| < \aleph_0$.

Группа A квазиизоморфна группе B [обозначение: $A \sim B$], если существуют такие подгруппы $A' \leq A$ и $B' \leq B$, что $A' \cong B'$, A' имеет конечный индекс в A, B' имеет конечный индекс в B (см. [6, стр. 176]). Группа A называется сильно неразложимой, если A не квазиизоморфна никакой разложимой группе. Далее положим $\mathcal{E}(A) = End_Z A \otimes Q$ - алгебра (или кольцо) квазиэндоморфизмов группы A. Различные сведения об этой алгебре можно найти в [7] и [8].

Следуя [2], будем называть группу A сильно неприводимой, если каждая её ненулевая вполне характеристическая подгруппа имеем в A конечный индекс. Очевидно, сильно неприводимая группа является неприводимой в смысле [7], т.е. не содержит собственных сервантных вполне характеристических подгрупп. Известно, что если A - неприводимая группа, то $A \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где A_i - сильно неразложимые неприводимые группы и $A_1 \cong A_2 \cong \ldots \cong A_n$. Легко проверить, что если группа A - сильно неприводима, то группы A_i также сильно неприводимы. Таким образом, сильно неприводимая группа квазиизоморфна прямой сумме копий сильно неразложимой сильно неприводимой группы.

Если A - сильно неразложимая сильно неприводимая группа без кручения конечного ранга, то $\mathcal{E}(A)$ - поле алгебраических чисел и класс ненулевых колец на A совпадает с классом колец, квазиизоморфных кольцу эндоморфизмов группы A [2].

Бьюмонт и Пирс описали аддитивные группы полупервичных колец и аддитивные группы подколец некоторого фиксированного поля алгебраических чисел [9]. Можно дать другое более простое и непосредственное описание аддитивных групп полупервичных колец.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. На группе A существует полупервичное кольцо тогда и только тогда, когда A квазиизоморфна прямой сумме сильно неприводимых групп.

Доказательство. Пусть R - полупервичное кольцо на A. Известно, что R содержит подкольцо S конечного индекса такое, что S - прямая сумма первичных колец $S_1, \ldots, S_n$ [4, следствие 3.5]. Таким образом, $A \sim S_1^+ \oplus \ldots \oplus S_n^+$. Достаточно показать, что аддитивная группа первичного кольца является сильно неприводимой группой. Итак, пусть S - первичное кольцо на группе B. Тогда $\hat{S}$ - простая алгебра. Если T -

вполне характеристическая подгруппа в B, то T - идеал в S. В силу простоты $\hat{S}$ $T \otimes Q = \hat{S}$. Следовательно, существует натуральное число k со свойством $k1 \in T$, где 1 - единичный элемент алгебры $\hat{S}$. Теперь $kB = k(1B) = (k1)B \leq T$, т.е. T имеет конечный индекс в B и B - сильно неприводимая группа.

Пусть теперь $A \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n, A_1, \ldots, A_n$ - сильно неприводимые группы. Можно считать, что группы A_i сильно неразложимы. По замечанию перед предложением на группе A_i существует кольцо R_i, являющееся подкольцом некоторого поля алгебраических чисел. Тогда $S = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ - полупервичное кольцо на $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. По следствию 2.7 [4] на A существует кольцо R со свойством $Q \otimes R \cong Q \otimes S$. Отсюда R - также полупервичное кольцо. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2.5. Следующие утверждения эквивалентны:

I. A - аддитивная группа полупростого кольца;

2. $A \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где группы $A_1, \ldots, A_n$ сильно неприводимы и $H(A_1) = \ldots = H(A_n) = 0$;

3. $H(A) = 0$ и $A \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n, A_1, \ldots, A_n$ - сильно неприводимые группы;

4. $H(A) = 0$ и A - аддитивная группа полупервичного кольца.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) $\Longrightarrow$ 2) и I) $\Longrightarrow$ 3). Так как $H(A) \sim \sum_{i=1}^{n} \oplus H(A_i)$, то 2) эквивалентно 3). Пусть R - полупростое кольцо на A. Тогда $H(A) = H(R) = 0$ (следствие I.3). Оставшееся утверждение относительно A, а также импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) содержатся в предложении 2.4. 4) $\Longrightarrow$ I). На A существует полупервичное кольцо R (предложение 2.4). Далее $H(R) = H(A) = 0$ и R полупросто по следствию I.3. Получили R - полупростое кольцо на A.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Для сильно неразложимой группы A эквивалентны следующие утверждения:

I) каждое ненулевое кольцо на A полупросто;

2) на A существует полупростое кольцо;

3) A - сильно неприводимая группа и $H(A) = 0$;

4) A - сильно неприводимая группа и $|\Pi(A)| = \aleph_0$.

Заметим, что сильно неприводимая группа однородна. Для однородной группы A условие $H(A) = 0$ равносильно $|\Pi(A)| = \aleph_0$. Эквивалентность I) и 2) доказана в [2] и [3]. Она вытекает также из следствия I.3 и того факта, что каждое ненулевое кольцо на сильно неприводимой сильно неразложимой группе является подкольцом некоторого поля алгебраических чисел (см. теорему 3.I).

Другая характеризация сильно неразложимых групп, являющихся аддитивными группами полупростых колец, получена в [2] и [3]. Она основана на следующем. Пусть I – кольцо всех целых величин некоторого поля алгебраических чисел K. Если P – простой идеал в I, то $I_P = \{x/y \mid x, y \in I,\ y \notin P\}$ – локализация кольца I относительно P. Далее, если $\mathcal{P}$ – некоторое множество простых идеалов в I, то определим $I_{\mathcal{P}} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} I_P$. В [9] доказано, что все кольца некоторого класса квазиравных целых подколец в K содержатся в одном из колец $I_{\mathcal{P}}$. Кольцо $I_{\mathcal{P}}$ целозамкнуто и является целым замыканием каждого кольца из этого класса.

Если теперь A – сильно неразложимая группа, то на A существует полупростое кольцо тогда и только тогда, когда $A \cong R^+$, где R – целое подкольцо некоторого поля алгебраических чисел K и $R \doteq I_{\mathcal{P}}$ (квазиравно), причем $\mathcal{P}$ – пустое, либо бесконечное множество ([2, теорема 5], [3, теорема 5.5]).

Покажем, что приведенное условие эквивалентно условию 4 следствия 2.6. Действительно, $A \cong R^+$ равносильно сильной неприводимости группы A. Это вытекает из того, что сильно неразложимая группа A является сильно неприводимой тогда и только тогда, когда A есть аддитивная группа некоторого подкольца поля алгебраических чисел или, что то же, аддитивной группой полупервичного кольца (см. предложение 2.4, теорема 3.I). Далее условие на множество $\mathcal{P}$ равносильно тому, что $|\Pi(I_{\mathcal{P}})| = \aleph_0$. Нужно учесть, что простые идеалы кольца $I_{\mathcal{P}}$ имеют вид $PI_{\mathcal{P}}$ $(P \in \mathcal{P})$. Кроме того, они максимальны в $I_{\mathcal{P}}$, а максимальный идеал содержит $pI_{\mathcal{P}}$ для некоторого простого числа p (лемма I.I). Наконец, условие $|\Pi(I_{\mathcal{P}})| = \aleph_0$ равносильно $|\Pi(A)| = |\Pi(R)| = \aleph_0$.

Кольцо R называется радикальным, если $R = J(R)$. В [10] поставлена проблема описания аддитивных групп радикальных колец (см. также [3]).

СЛЕДСТВИЕ 2.7. На группе A существует полупервичное радикальное кольцо тогда и только тогда, когда $|\Pi(A)| < \aleph_0$ и $A \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ – сильно неприводимые группы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость получается из следствия 2.3 и предложения 2.4. Докажем достаточность. По предложению 2.4 на A существует полупервичное кольцо R. Так как

$|\Pi(A)| < \aleph_0$, то по следствию 2.3 и теореме I.6 $kR \subseteq J(R)$ для некоторого натурального k . Отсюда kR - радикальное кольцо. Кроме того, kR полупервично и $(kR)^+ \cong R^+ = A$. Следовательно, на A существует полупервичное радикальное кольцо.

Пусть A - сильно неразложимая сильно неприводимая группа. Тогда, используя терминологию работы [3], из следствий 2.6 и 2.7 получаем следующее. Группа A является либо сильно полупростой либо радикальной. Причем, первое имеет место тогда и только тогда, когда $|\Pi(A)| = \aleph_0$, второе - тогда и только тогда, когда $|\Pi(A)| < \aleph_0$.

§ 3. Кольца на группах без кручения конечного ранга

Основные проблемы исследования взаимоотношения структуры кольца со структурой его аддитивной группы таковы:

1. Для данного класса колец найти аддитивные группы колец этого класса.

2. Для данной группы A найти все кольца на группе A .

В этом параграфе кратко рассмотрим состояние исследований в этой области для колец и групп без кручения конечного ранга.

Аддитивные группы полупервичных и полупростых колец описаны, причем, можно считать, удовлетворительным образом (см. [9] и § 2 этой работы). Представляется интересным описать аддитивные группы наследственных колец без кручения конечного ранга, в частности дедекиндовых колец и колец главных идеалов.

Можно отметить, что если R - наследственное (справа) кольцо без кручения конечного ранга, то $\hat{R} = R \otimes Q$ - также наследственное кольцо. Следовательно, $\hat{R}$ - классически полупростое кольцо, т.к. оно артиново. В таком случае R - полупервичное кольцо. Таким образом, $R^+ \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где все A_i - сильно неприводимые группы (предложение 2.4). Какие квазипрямые суммы сильно неприводимых групп являются аддитивными группами наследственных колец, неизвестно.

Что касается проблемы 2, то Дж. Рейдом [2] был достигнут значительный прогресс в случае сильно неразложимых групп. Псевдоцоколь $Soc A$ группы A без кручения - это сервантная подгруппа, порожденная семейством всех минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп группы A [7]. Результаты Дж.Рейда можно теперь резюмировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть A - сильно неразложимая группа без кручения конечного ранга.

1. Если алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(A)$ полупроста (или равносильно $A = Soc A$) и A не является сильно неприводимой группой, то A - нильгруппа. Если A - сильно неприводимая группа, то $\mathcal{E}(A)$ - поле алгебраических чисел и класс колец на A совпадает с классом колец, квазиизоморфных кольцу эндоморфизмов группы A.

2. Если алгебра квазиэндоморфизмов не полупроста, то каждое кольцо на A нильпотентно.

Таким образом, если на A существует ненильпотентное кольцо, то A - сильно неприводимая группа. Если на A существует ненулевое нильпотентное кольцо, то каждое кольцо на A нильпотентно (в терминологии [3] A - радикальная группа).

Вопрос о том, какие группы A с неполупростой алгеброй $\mathcal{E}(A)$ являются нильгруппами, остается нерешённым. Можно доказать, что если $P_0 = 0, P_1 = Soc A, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m = A$ - цепочка псевдоцоколей группы A [5], то $R^k \subseteq P_{m-k+1}$ для любого кольца R на A. В частности, $R^{m+1} = 0$.

Попытки описать произвольные нильгруппы без кручения конечного ранга тем более наталкиваются на значительные трудности ввиду недостатка наших сведений о структуре групп без кручения. Однако, используя теорему Бьюмонта-Пирса [4, теорема 1.4], можно легко обозреть группы, допускающие только нильпотентные умножения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. [11, теорема 2.1]. Каждое кольцо на группе A без кручения конечного ранга нильпотентно тогда и только тогда, когда A не имеет сильно неприводимых квазислагаемых.

В работе [8] доказано, что группа без кручения конечного ранга с полупростой алгеброй квазиэндоморфизмов обладает некоторым каноническим квазиразложением (пример: вполне разложимая группа с попарно несравнимыми типами прямых слагаемых). С помощью этого результата найдем нильгруппы с полупростой алгеброй квазиэндоморфизмов.

ТЕОРЕМА 3.3. Следующие утверждения относительно группы A без кручения конечного ранга с полупростой алгеброй $\mathcal{E}(A)$ эквивалентны:

1) A - нильгруппа;

2) каждое кольцо на A нильпотентно;

3) A не имеет сильно неприводимых квазислагаемых;

4) все собственные квазислагаемые группы A являются нильгруппами.

Доказательство. Очевидно, 1)$\Longrightarrow$2). В силу предложения 3.2 2)$\Longrightarrow$3). Покажем, что 3)$\Longrightarrow$1). На основании теоремы I работы [8] существует группа B такая, что $A \sim B$ и $B=\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} B_i$, где $Hom(B_i, B_j)=0$ для $i \neq j$, $B_i = \sum_{j=1}^{n_i}{}^{\oplus} B_{ij}$, причем все $\mathcal{E}(B_{ij})$ - тела и $B_{ij} \cong B_{ik}$, $j, k = 1, \ldots, n_i$. Достаточно доказать, что B - нильгруппа [4, следствие 2.7]. Если S - кольцо на B, то $B_1, \ldots, B_n$ - идеалы в S. Учитывая строение групп $B_1, \ldots, B_n$ и первое утверждение теоремы 3.I, заключаем, что $B_1, \ldots, B_n$ - нулевые кольца. Следовательно, S - также нулевое кольцо и B - нильгруппа. Импликация 1)$\Longrightarrow$4) справедлива всегда. Пусть выполняется 4) и S - кольцо на B. Как и выше, S индуцирует кольца на $B_1, \ldots, B_n$. По предположению эти кольца являются нулевыми кольцами. Значит, S - также нулевое кольцо. Отсюда B, а следовательно, и A - нильгруппа. Теорема доказана.

Можно найти мощность множества всех колец на группе с полупростой алгеброй квазиэндоморфизмов. К этому же классу групп относятся аддитивные группы E - колец без кручения конечного ранга (колец, левое регулярное представление которых является изоморфизмом). В [12] доказано, что кольцо R является E - кольцом тогда и только тогда, когда $R^+ \sim A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где все A_i - сильно неприводимые группы и $Hom(A_i, A_j)=0$ для $i \neq j$. Этот факт также выводится из теоремы I [8] и предложения 2.4 этой статьи.

Литература

1. Corner A.L.S. Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring. - Proc London Math Soc. 1963, 13, 687-710.
2. Reid J.D. On rings on groups. - Pacific J. Math. 1974, 53, № 1, 229-237.

3. Beaumont R. A., Lawver D. A. Strongly semi-simple abelian groups. - Pacific J. Math. 1974, 53, №2, 237-336.

4. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings. - Ill. J. Math. 1961, 5, 61-98.

5. Крылов П.А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. - Матем. сб., 1974, 95, № 10, 214-228.

6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т.2. - М.: Мир, 1977, с 416.

7. Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group. - Topics in abelian groups. Chicago, 1963, 51-68.

8. Крылов П.А. Абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов. - Известия вузов. (Математика), 1979, 11.

9. Beaumont R. A., Pierce R. S. Subrings of algebraic number fields. - Acta Sci. Math., Szeged, 1961, 22, 202-216.

10. Haimo F. Radical and antiradical groups. - Rocky Mountain J. Math. 1973, 3, 91-106.

11. Wickless W. J. Abelian groups which admit only nilpotent multiplications. - Pacific J. Math. 1972, 40, №1, 251-259.

12. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute. - Math. Ann. 1977, 228, 197-214.

О КОПОЛУПРОСТЫХ КЛАССАХ МОДУЛЕЙ

В.Т.Марков

В ряде работ [I - 6] рассматривались различные аспекты колокализации, в частности классы кополупростых относительно некоторого кручения модулей (см. определение I). Известно [5], что если кручение τ джансово, т.е. класс τ-периодических модулей радикально-полупрост [7, с. 92], то оно однозначно определяется классом τ-кополупростых модулей. В настоящей статье дается описание классов модулей, совпадающих с классом всех τ-кополупростых модулей для некоторого джансова кручения τ.

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и содержащими единицу, все модули - левыми унитарными. Под бимодулем над кольцом R понимается унитарный левый и правый R-модуль с обычным условием ассоциативности: для любого элемента $m \in M$ бимодуля M и любых элементов a, b кольца R $a(mb)=(am)b$. Без отдельных ссылок используются термины и обозначения, принятые в [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть τ - кручение в категории модулей над кольцом R. Модуль M называется τ-кополупростым, если $Hom_R(M,N)=0$ для любого τ-периодического модуля N.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. [7, с. 91-92]. Радикальный фильтр, соответствующий джансову кручению τ, содержит наименьший левый идеал $L(\tau)$, который является двусторонним идемпотентным идеалом. Обратно, любой идемпотентный двусторонний идеал I задает джансово кручение τ такое, что модуль M является τ-периодическим тогда и только тогда, когда $IM=0$, при этом $I=L(\tau)$.

Для произвольного R-бимодуля W положим $tr(W)=$ $=\Sigma\{\varphi(W)\mid\varphi\in Hom({}_RW_R, R)\}$. Для произвольного семейства индексов A через $M^{(A)}$ обозначим прямую сумму A экземпляров модуля M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бимодуль W над кольцом R будем называть (строго) идемпотентным, если (существует сюръективный гомоморфизм бимодулей $\varphi: W\to tr(W)$ и) $tr(W)W=W$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Примером строго идемпотентного бимодуля служит любой идемпотентный двусторонний идеал. Если I - идеал коммутативной дедекиндовой области D, не являющийся главным идеалом, то I - идемпотентный, т.к. $tr(I)=D$, в силу обратимости любого идеала дедекиндовой области, но не строго идемпотентный бимодуль. Неглавные идеалы существуют в любой дедекиндовой области с неединичной группой классов дивизоров, например в кольце целых элементов поля $Q[10]$, где Q - поле рациональных чисел [8, табл. I, с. 481]. Этот пример сообщен автору К.В.Агапитовым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Бимодуль W идемпотентен тогда и только тогда, когда $W^{(A)}$- строго идемпотентный бимодуль для некоторого множества индексов A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W'=W^{(A)}$ - строго идемпотентный бимодуль, $\varphi: W'\to tr(W')$ - сюръективный гомоморфизм бимодулей, $i_\alpha: W\to W'$ - каноническое вложение для любого $\alpha\in A$. Легко видеть, что $tr(W)\supseteq\sum_{\alpha\in A}\varphi i_\alpha(W)=\varphi(\sum_{\alpha\in A} i_\alpha(W))=$ $=\varphi(W')=tr(W')$. Обратное включение очевидно, следовательно, $tr(W)=tr(W')$ и $tr(W)W=tr(W')W=W$. Теперь пусть W - идемпотентный бимодуль. Положим $A=Hom({}_RW_R, R)$, $W'=W^{(A)}$. Тогда $tr(W')=tr(W)$. Пусть $\varphi(i_\alpha(x))=\alpha(x)$ для любого $x\in W$ и любого $\alpha\in A$. Отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi: W'\to R$, при этом $\varphi(W')=\sum_{\alpha\in A}\alpha(W)=tr(W)$ и $tr(W')W'=tr(W)W'=W'$. Таким образом, W'- строго идемпотентный бимодуль.

ТЕОРЕМА I. Пусть K - класс модулей над кольцом R. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) класс K совпадает с классом τ-кополупростых модулей для некоторого джансова кручения τ;

(в) класс K замкнут относительно взятия гомоморфных образов и прямых сумм и содержит образующий, который является идемпотентным бимодулем;

(с) класс K замкнут относительно взятия гомоморфных образов и прямых сумм и содержит образующий, который является строго идемпотентным бимодулем.

Доказательство. Заметим, что из предложения 2 следует эквивалентность условий (в) и (с). Пусть τ - джансово кручение, K - класс τ-кополупростых модулей. Замкнутость класса K относительно взятия гомоморфных образов и прямых сумм очевидна в силу определения I. Пусть $W = L(\tau)$. Тогда W - строго идемпотентный бимодуль. Известно [5], что модуль M является τ-кополупростым тогда и только тогда, когда $L(\tau)M = M$, откуда $W \in K$. Осталось показать, что W - образующий в классе K . Пусть $M \in K$, $\pi: R^{(A)} \to M$ - гомоморфизм свободного модуля $R^{(A)}$ на модуль M , где A - некоторое множество индексов. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: W \otimes_R M \to M$ такой, что $\varphi(x \otimes m) = xm$ для любых $x \in W$, $m \in M$. Гомоморфизм φ сюръективен, так как $WM = M$. Следовательно, сюръективен и гомоморфизм $\varphi(1_W \otimes \pi): W \otimes_R R^{(A)} \to M$. Но $W \otimes_R R^{(A)} \cong W^{(A)}$, поэтому M - фактормодуль прямой суммы копий модуля W, т.е. W -образующий, поэтому из условия (а) следует условие (с). Обратно, пусть класс K удовлетворяет условию (с), W - строго идемпотентный бимодуль, являющийся образующим в классе K , и $I = tr(W)$. Согласно предложению I существует джансово кручение τ такое, что $L(\tau) = I$. Покажем, что R-модуль M принадлежит классу K тогда и только тогда, когда $IM = M$. Действительно, если $M \in K$, то существует сюръективный гомоморфизм $\psi: W^{(A)} \to K$, где A - некоторое множество индексов, так как W - образующий в классе K . Тогда $IM = I\psi(W^{(A)}) = \psi(IW^{(A)}) = M$. Обратно, пусть $IM = M$ и $\pi: R^{(A)} \to M$ - гомоморфизм свободного модуля $R^{(A)}$ на M , где A - некоторое множество индексов. Тогда $\tilde{\varphi}(1_W \otimes \pi): W \otimes_R R^{(A)} \to M$ - сюръективный гомоморфизм, если $\tilde{\varphi}: W \otimes_R M \to M$ - сюръективный гомоморфизм, заданный условием $\tilde{\varphi}(x \otimes m) = \varphi(x)m$, где $\varphi: W \to I$ - сюръективный гомоморфизм из определения 2. Ввиду условия (с) $W^{(A)} \in K$, следовательно, модуль M как гомоморфный образ модуля $W \otimes_R R^{(A)}$, изоморфного модулю $W^{(A)}$, также принадлежит классу K. Следовательно, K - класс τ-кополупростых модулей. Теорема доказана.

Литература

1. McMaster R.J. Cotorsion theories and colocalization. - Can. J. Math., 1975, vol. 27, N 3, p. 618-628.
2. Sato M. The concrete description of colocalization.- Proc. Japan Acad., 1976, vol. 52, N 9, p. 501-504.
3. Ohtake K. Colocalization and localization.- J. Algebra, Appl. Algebra, 1977, vol. 11, N 13, p. 217-241.
4. Kato T. Duality between colocalization and localization. - J. Algebra, 1978, vol. 55, N 2, p. 351-374.
5. Golan J.S., Miller R.W. Cotorsionfree modules and colocalization. - Commun. Algebra, 1978, vol. 6, N 12, p. 1217-1230.
6. Golan J.S. Colocalization at idempotent ideals.- in: Ring theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New-York - Basel, 1979, p. 631-668.
7. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули.-М.: Наука, 1969. - 150 с.
8. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел.-М.: Наука, 1972. - 495 с.

СЕРВАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

В.А.Никифоров

В Коуровской тетради [I, с. 51] А.П.Мишиной была поставлена следующая задача: каковы те вполне разложимые абелевы группы без кручения, в которых всякая сервантная подгруппа вполне разложима? Эта задача была решена для сервантных подгрупп групп конечного ранга в работах [3] и [4]. Заметим, что хотя сервантная подгруппа H вполне разложимой группы G без кручения не всегда вполне разложима, но она может быть почти вполне разложимой, то есть содержать такую вполне разложимую подгруппу A, что H/A ограничена. Поэтому естественным образом возникает задача: каковы те вполне разложимые абелевы группы без кручения конечного ранга, в которых всякая сервантная подгруппа почти вполне разложима? В данной работе дается полное описание таких групп на языке типов групп ранга I (теоремы 9, 10).

Автор приносит благодарность сотрудникам кафедры алгебры Томского университета за оказанную помощь в ходе работы над этой статьей и подготовки ее в печать.

§ I. Группы и графы

Под словом "группа" в дальнейшем всюду понимаем абелеву группу без кручения, а под графом *) – конечный неориентированный граф

---

*) Основные понятия теории графов заимствованы из [5], [6].

без петель и кратных ребер. Если G - граф, то через $V(G)$ будем обозначать множество его вершин, а через $X(G)$ - множество его ребер. Если ребро $(a,b)\in X(G)$, то говорим, что ребро (a,b) инцидентно вершинам a,b и вершины a,b инцидентны ребру (a,b). Вершину $a\in V(G)$ будем называть концевой вершиной графа G, если она инцидентна только одному ребру из $X(G)$. Под цепью будем понимать последовательность $S=(x_0,x_1,\dots,x_k)$ ребер $x_i=(a_i,a_{i+1})$, $i=0,1,\dots,k$, в которой каждые два соседние ребра имеют по общей вершине и в ней нет повторяющихся ребер и вершин. Под циклом будем понимать такую последовательность $S=(x_0,\dots,x_k)$ ребер графа G, что любая ее собственная последовательность $S'=(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+s})$ является цепью, но S не является цепью**). Вершины графа G $a,b\in V(G)$ называем связанными, если существует цепь с концами a,b. Длину наименьшей цепи между вершинами a, b будем называть расстоянием между этими вершинами и обозначать через $d(a,b)$. Граф H называем частью графа G (пишем $H\subset G$), если $X(H)\subseteq X(G)$ и вершины, инцидентные ребрам из $X(H)$ в графе G, принадлежат $V(G)$. Если $V(H)=V(G)$ и H является частью графа G, то H будем называть суграфом графа G. Если $A\subset V(G)$, то граф H с $V(H)=A$ и множеством всех ребер из G таких, что их концевые вершины лежат в A, будем называть подграфом графа G. Будем говорить, что граф G связный, если любые его две вершины связаны. Если граф G не имеет циклов, то будем называть его лесом, а в случае, когда G - лес и связный граф - деревом. Граф G называем полным, если любые его две вершины инцидентны.

Группу G называем квазипрямой суммой групп $C_1,C_2,\dots,C_k$, если группа $C_1\oplus C_2\oplus\dots\oplus C_k$ имеет конечный индекс в группе G. В этом случае группы C_i называем квазипрямыми слагаемыми группы G [8]. Квазипрямое разложение группы G называем полным, если $r(C_i)=1$ и группы C_i сервантны в G. Если группа G обладает полным квазиразложением, то говорим, что G - почти вполне разложимая группа. Пусть G - почти вполне разложимая группа и $\Omega(G)$ - множество типов квазипрямых слагаемых полного квазиразложения группы G. Зададим на $\Omega(G)$ граф $\mathcal{F}$ и опреде-

---

**) Введенные понятия цепи и цикла соответствуют понятиям простой цепи и простого цикла соответственно.

лим весовую функцию μ ребер графа $\mathcal{F}$ следующим образом: $V(\mathcal{F})=\Omega(G)$, ребро $(a,b)\in X(\mathcal{F})$, если существует пересечение типов a, b (т.е. получаем полный граф) и $\mu((a,b))=a\cap b$ (т.е. весовая функция ребра графа $\mathcal{F}$ равна пересечению типов, соответствующих вершинам этого ребра). Граф $\mathcal{F}$ с весовой функцией μ будем называть графом группы G. Через $\mathcal{F}(\tau)$ $(\mathcal{F}^*(\tau))$ будем обозначать часть графа $\mathcal{F}$ группы G, рёбрами которого являются все те ребра из $X(\mathcal{F})$, вес которых больше либо равен (строго больше) типа τ. Элементарным гомоморфизмом графа G называем отождествление двух его смежных вершин (т.е. таких вершин a, b графа G, для которых существует ребро $(a,b)\in X(G)$). Под гомоморфизмом графа G понимаем последовательность его элементарных гомоморфизмов[*)]. Определим гомоморфизм λ для графа $\mathcal{F}(\tau)$ следующим образом: в графе $\mathcal{F}(\tau)$ отождествляются все вершины, принадлежащие одной и той же связной компоненте графа $\mathcal{F}^*(\tau)$. Полученный таким образом граф будем называть гомоморфным образом графа $\mathcal{F}(\tau)$ при гомоморфизме λ и обозначать $\lambda\mathcal{F}(\tau)$.

Докажем теперь лемму технического характера.

ЛЕММА I. Пусть Φ - некоторое множество типов групп без кручения ранга I, удовлетворяющее условию:

для любых попарно несравнимых типов $\alpha, \beta, \gamma\in\Phi$ во множестве $\{\alpha\cap\beta, \alpha\cap\gamma, \beta\cap\gamma\}$ есть не более одной пары несравнимых типов.

Тогда пересечение любого конечного набора типов из Φ равно пересечению некоторых двух типов из этого набора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\alpha, \beta, \gamma\in\Phi$. По условию леммы имеем во множестве $\{\alpha\cap\beta, \alpha\cap\gamma, \beta\cap\gamma\}$ хотя бы одну пару сравнимых типов. Пусть для определенности $\alpha\cap\beta\leq\alpha\cap\gamma$, тогда $\alpha\cap\beta=(\alpha\cap\beta)\cap(\alpha\cap\gamma)=\alpha\cap\beta\cap\gamma$. Допустим, что заключение леммы выполнено для любого набора из $(k-1)$-го типов из Φ. Рассмотрим пересечение $\alpha_1\cap\alpha_2\cap\ldots\cap\alpha_k$, $\alpha_i\in\Phi$, $i=1,2,\ldots,k$. Так как пересечение первых трех типов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равно пересечению некоторых двух из них, например $\alpha_1\cap\alpha_2\cap\alpha_3=\alpha_2\cap\alpha_3$, то имеем $\alpha_1\cap\alpha_2\cap\alpha_3\cap\ldots\cap\alpha_k=\alpha_2\cap\alpha_3\cap\ldots\cap\alpha_k$. Правая часть этого равенства по индуктивно-

---

*) Данное здесь определение гомоморфизма графа отличается от определения, данного в [5].

му предположению равна пересечению некоторых двух типов из $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$. $\circ$

§ 2. Основные леммы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вершину i графа группы G назовем простой, если во множестве весов ребер, инцидентных вершине i, существует наибольший вес.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{F}$ - граф группы G. Если во множестве весов ребер произвольного подграфа H графа $\mathcal{F}$ не более $|V(H)|-1$ различных максимальных весов, то граф $\mathcal{F}$ имеет не менее двух простых вершин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|V(\mathcal{F})|=2$, то граф $\mathcal{F}$ состоит из одного ребра и утверждение очевидно. Допустим, что утверждение выполнено для $|V(\mathcal{F})| \le k-1$. Пусть $|V(\mathcal{F})| = k$. Рассмотрим такую часть R графа $\mathcal{F}$, что в $X(R)$ содержатся все те ребра из $X(\mathcal{F})$, веса которых максимальны во множестве весов ребер из $X(\mathcal{F})$ и различны между собой. Очевидно, что граф R не имеет циклов. Действительно, если граф R имеет цикл, то для минимального подграфа графа $\mathcal{F}$, содержащего этот цикл, условие леммы не выполнено. Если часть R связна, то концевые вершины части R - простые в $\mathcal{F}$. Действительно, пусть $(i,r) \in X(R)$ и i - концевая вершина графа R. Если $d(i,s)=2$, $s \in V(R)$, то, поскольку различных максимальных весов ребер в графе $R_2 = \{(i,r),(i,s),(s,r)\}$ не более двух, имеем $\mu(i,s) \le \mu(i,r)$. Действительно, максимальными весами ребер из $X(R_2)$ будут веса ребер $(i,r),(s,r)$. Если $\mu(i,s) \le \mu(i,r)$, то имеем требуемое. Пусть $\mu(i,s) \le \mu(s,r)$. Тогда $\mu(s,r) = s \cap r \geqslant \mu(i,s) = i \cap s = i \cap s \cap r \le i \cap r = \mu(i,r)$. $\circ$
Допустим, что для любой вершины $v \in V(R)$ $\mu(i,v) \le \mu(i,r)$, если $d(i,v) \le t-1$. Пусть $\ell \in V(R)$ и $d(i,\ell)=t$. Так как число различных максимальных весов ребер подграфа $R_t = \{(i,r),\ldots,(s,\ell)\}$ графа $\mathcal{F}$ не более $|V(R_t)|-1=t$, то $\mu(i,\ell) \le \mu(k,m)$, где $(k,m) \in X(R_t) \cap X(R)$. Далее имеем $\mu(k,m) \geqslant \mu(i,\ell) = i \cap \ell = i \cap \ell \cap k \cap m \le i \cap m = \mu(i,m)$, а так как $d(i,m) < t$, то $\mu(i,r) \geqslant \mu(i,m) \geqslant \mu(i,\ell)$. Если $v \in V(\mathcal{F}) \setminus V(R)$, то $\mu(i,v) \le \mu(k,\ell)$, где $(k,\ell) \in X(R)$, то есть $\mu(i,v) \le \mu(i,k) \le \mu(i,r)$. Так как концевых вершин в графе R

не менее двух, то лемма в этом случае доказана. Если часть R графа $\mathcal{F}$ несвязна, то рассмотрим два случая: 1. $V(R)\subset V(\mathcal{F})$; 2. $V(R)=V(\mathcal{F})$.

Случай 1. Граф R является также частью графа $\mathcal{F}'$, где $\mathcal{F}'$ – подграф графа $\mathcal{F}$ со множеством вершин $V(\mathcal{F}')=V(R)$. По индуктивному предположению граф $\mathcal{F}'$ имеет не менее двух простых вершин. Пусть i – простая вершина в $\mathcal{F}'$ и $(i,r)\in X(R)$. Рассмотрим ребро, инцидентное вершине i в графе $\mathcal{F}$, $(i,s)\in X(\mathcal{F})$. Так как $\mu(i,s)\leq\mu(k,l)$, где $(k,l)\in X(R)$, то $\mu(i,s)\leq\mu(i,k)\leq\mu(i,r)$. Действительно, имеем $i\cap s\leq k\cap l$, откуда $i\cap s\leq k$ и $i\cap s=i\cap s\cap k\leq i\cap k$. То есть i – простая вершина в графе $\mathcal{F}$.

Случай 2. Рассмотрим подграф $\mathcal{F}''$ графа $\mathcal{F}$, где $V(\mathcal{F}'')=V(\mathcal{F})\setminus r$ и r – концевая вершина графа R. По индуктивному предположению граф $\mathcal{F}''$ имеет по крайней мере две простые вершины. Следовательно, хотя бы одна из них не инцидентна ребру $(k,r)\in X(R)$ в графе R. Пусть это вершина i. Так как $V(R)=V(G)$, то существует $(i,l)\in X(R)$, а так как r – концевая вершина и $i\neq k$, то $l\neq r$. Следовательно, $(i,l)\in X(\mathcal{F}'')$ и $\mu(i,l)$ – максимальный вес во множестве весов ребер графа $\mathcal{F}''$. Так как r – концевая вершина графа R и $i\neq k$, то $(i,r)\notin X(R)$, $\mu(i,r)\leq\mu(m,t)$, $(m,t)\in X(R)$ и $m\neq r$. Откуда $\mu(i,r)\leq\mu(i,m)\leq\mu(i,l)$, так как i – простая вершина в $\mathcal{F}''$. То есть i – простая вершина в графе $\mathcal{F}$. Заметим, что i – концевая вершина в графе R. Повторив аналогичные рассуждения для вершины i, найдем вторую простую вершину графа $\mathcal{F}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{F}$ – граф группы G; i – простая вершина графа $\mathcal{F}$; $\mu(i,k)$ – максимальный вес во множестве весов ребер из $X(\mathcal{F})$. Тогда для подграфа $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ такого, что $V(\mathcal{F}')=V(\mathcal{F})\setminus i$, справедливы следующие равенства:

$$|V(\lambda\mathcal{F}'(\tau))|=|V(\lambda\mathcal{F}(\tau))|\quad,\ \text{если}\ \tau\neq\mu(i,k);$$
$$|V(\lambda\mathcal{F}'(\tau))|=|V(\lambda\mathcal{F}(\tau))|-1\quad,\ \text{если}\ \tau=\mu(i,k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим такой подграф $\mathcal{F}'$ графа $\mathcal{F}$, что $V(\mathcal{F}')=V(\mathcal{F})\setminus i$. Очевидно, что части $\mathcal{F}'(\tau)$ и $\mathcal{F}(\tau)$ совпадают, если тип τ несравним либо строго больше типа $\mu(i,k)$. Пусть $\tau<\mu(i,k)$. Тогда i,k принадлежат одной и той же связной компоненте графа $\mathcal{F}^*(\tau)$ и $\lambda(i)=\lambda(k)$. Заметим, что граф $\mathcal{F}'^*(\tau)$ можно получить из графа $\mathcal{F}^*(\tau)$ удалением всех ребер, инцидентных вершине i. При этом число связных компонент в графе $\mathcal{F}'^*(\tau)$ будет равно числу связных компонент в графе $\mathcal{F}^*(\tau)$. Действительно, если вершины s, t графа $\mathcal{F}^*(\tau)$ связаны через вершину i, то, так как i – простая вершина, имеем $\mu(i,s) \le \mu(i,k)$, $\mu(i,t) \le \mu(i,k)$ или $\mu(i,s) \le \mu(k,s)$ и $\mu(i,t) \le \mu(k,t)$. То есть вершины s, t связаны через вершину k и, следовательно, вершины s, t связаны в графе $\mathcal{F}'^*(\tau)$. Число вершин в соответствующих связных компонентах графов $\mathcal{F}^*(\tau)$ и $\mathcal{F}'^*(\tau)$ одинаково, кроме связной компоненты, содержащей вершину k. В этой связной компоненте число вершин в $\mathcal{F}^*(\tau)$ на единицу больше, чем в $\mathcal{F}'^*(\tau)$. По определению гомоморфизма λ имеем $|V(\lambda \mathcal{F}'(\tau))| = |V(\mathcal{F}'(\tau))| - |V(\mathcal{F}'^*(\tau))| + m$, где m – число связных компонент графа $\mathcal{F}'^*(\tau)$. Покажем, что $|V(\mathcal{F}(\tau))| = |V(\mathcal{F}'(\tau))| + 1$. Пусть $s \ne i$, $s \in V(\mathcal{F}(\tau))$. Тогда существует $t \in V(\mathcal{F}(\tau))$ такое, что $(s,t) \in X(\mathcal{F}(\tau))$. Если $t \ne i$, то $(s,t) \in X(\mathcal{F}'(\tau))$. Пусть $t = i$. Тогда $\tau \le \mu(s,i) \le \mu(i,k)$, так как i – простая вершина в графе $\mathcal{F}$. Следовательно, $\tau \le \mu(s,i) \le \mu(k,s)$ и $(k,s) \in X(\mathcal{F}'(\tau))$. Согласно сказанному выше имеем

$$
\begin{aligned}
|V(\lambda \mathcal{F}'(\tau))| &= |V(\mathcal{F}'(\tau))| - |V(\mathcal{F}'^*(\tau))| + m = \\
&= |V(\mathcal{F}'(\tau))| + 1 - (|V(\mathcal{F}'^*(\tau))| + 1) + m = \\
&= |V(\mathcal{F}(\tau))| - |V(\mathcal{F}^*(\tau))| + m = |V(\lambda \mathcal{F}(\tau))|.
\end{aligned}
$$

Если $\tau = \mu(i,k)$, то, так как $\mu(i,k)$ – максимальный вес, имеем $\lambda \mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(\tau)$ и $\lambda \mathcal{F}'(\tau) = \mathcal{F}'(\tau)$. Следовательно, $|V(\lambda \mathcal{F}'(\tau))| = |V(\lambda \mathcal{F}(\tau))| - 1$, если $\tau = \mu(i,k)$.

Теперь введем еще несколько определений, которые понадобятся в дальнейшем. Подгруппу A группы B будем называть квазиравной группе B, если A имеет конечный индекс в группе B (обозначение $A \doteq B$) [8]. Тип элемента $g \in G$ (сервантной подгруппы A группы G ранга I) будем обозначать через $\tau(g)$ ($\tau(A)$). Сервантную оболочку подгруппы H группы G будем обозначать через H_*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $G \doteq \sum_{i=1}^{k} {}^{\oplus} G_i$, $\tau(G_i) = 1$. Сервантную подгруппу H группы G будем называть сервантной подгруппой вида (I), если H можно записать в виде $H = \langle g_1 + g_2, \ldots, g_{s-1} + g_s \rangle_*$, где $g_i \in G_{t(i)}$, $s \le k$, и t – некоторая подстановка множества $J = \{1, 2, \ldots, k\}$. Пусть G – почти вполне разложимая группа и H – её сервантная подгруппа вида (I). Через $S(H)$ обозначим подграф графа группы G со множеством вершин $V(S(H)) = \{\tau(g_i),\ i = 1, \ldots, s\}$.

ЛЕММА 4. Пусть G – почти вполне разложимая группа конечного ранга; H – её сервантная подгруппа вида (I) и множество типов элементов группы G $T(G)$ удовлетворяет условию:

(*) для любого набора k попарно несравнимых типов из $T(G)$ множество их попарных пересечений S содержит не более ($k-1$)-го различных типов, максимальных в S .

Тогда

$$r\left(H(\tau)/H_*^*(\tau)\right)=|V(\lambda S(H)(\tau))|-1,$$

где $H(\tau)=\{g\in H \mid \tau(g)\geqslant\tau\}$ и $H^*(\tau)=\langle\{g\in H \mid \tau(g)>\tau\}\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $K_1=H_*^*(\tau)$. Выберем элемент $h_1\in H(\tau)\setminus K_1$ вида $h_1=g_s+g_t$, где $g_s\in G_s$, $g_t\in G_t$. Такой элемент существует. Действительно, пусть $h\in H(\tau)\setminus K_1$ и разложение mh в группе G имеет минимальное число ненулевых компонент, $mh=g_1+\ldots+g_r$, $g_i\in G_i$. Если $r=2$, то положим $h_1=mh$. Допустим, что $r>2$. Тогда $g_1'+g_2'\in H(\tau)$, так как $\tau(g_1'+g_2')=\tau(g_1)\cap\tau(g_2)\geqslant$ $\geqslant\tau(g_1)\cap\tau(g_2)\cap\ldots\cap\tau(g_r)=\tau(mh)\geqslant\tau$.
Так как элемент mh имеет минимальное число ненулевых компонент в разложении в группе G, то $g_1'+g_2'\in K_1$. Пусть n_1, n_2 – такие целые числа, что $n_1g_1+n_2g_1'=0$.
Тогда $n_1mh-n_2(g_1'+g_2')\in K_1$. Так как K_1 – сервантная подгруппа, то $h\in K_1$. Следовательно, $r=2$. Обозначим через $K_2=\langle K_1, h_1\rangle_*$. Если $H(\tau)\setminus K_2\neq\varnothing$, то выберем элемент h_2 вида $h_2=g_e+g_t$, $g_e\in G_e$, $g_t\in G_t$ и так далее. Пусть $H_1=\langle h_1, h_2,\ldots,h_k\rangle_*$. Тогда в силу выбора h_i $H_1\cap H_*^*(\tau)=0$. Действительно, если это пересечение отлично от нуля, то существует ненулевой элемент $h\in H_1\cap H_*^*(\tau)$ $h=m_1h_1+m_2h_2+\ldots+m_eh_e$. По построению группы H_1 $h'=m_1h_1+m_2h_2+\ldots+m_{e-1}h_{e-1}\in K_e$. Так как $h\in H_*^*(\tau)$, то $h\in K_e$. Следовательно, в силу сервантности K_e $h_e\in K_e$, что противоречит выбору h_e. Таким образом, H_1 является $H_*^*(\tau)$ – высокой подгруппой группы $H(\tau)$. Очевидно, что $r(H_1)=r\left(H(\tau)/H_*^*(\tau)\right)$. Рассмотрим суграф B графа $\lambda S(H)(\tau)$, в котором множество ребер – образы ребер $(\tau(g_s),\tau(g_t))\in X(S(H)(\tau))$ при гомоморфизме λ, где $g_s+g_t=h_i\in H_1$. Допустим, что граф B имеет цикл. Пусть ребра этого цикла соответствуют элементам $h_{i_1},\ldots,h_{i_r}$, где $h_i\mapsto\lambda(\tau(g_s),\tau(g_t))$, $h_i=g_s+g_t$. Тогда по определению гомоморфизма λ в графе $S(H)(\tau)$ существует

цикл из ребер, соответствующих элементам h_i веса τ, и из ребер веса строго большего τ. Так как $H \cap G_i = 0$, то $h_{i_r} \in \langle H^*(\tau), h_{i_s} \mid s = 1, \ldots, r-1 \rangle_*$, что противоречит выбору элементов h_i. Допустим, что B – несвязный граф. Пусть $\mu, \nu \in V(B)$ и вершины μ, ν не связны. Заметим, что $(\mu, \nu) \in X(\lambda S(H)(\tau))$. Пусть $(\tau(g_s), \tau(g_t)) \in S(H)(\tau)$ – прообраз ребра (μ, ν) при гомоморфизме λ. Вес $\mu(\tau(g_s), \tau(g_t)) = \tau$ и $h = g_s' + g_t' \notin H_*^*(\tau)$, $h \notin H_1$. Так как $H_1 - H_*^*(\tau)$ – высокая подгруппа группы $H(\tau)$, то $mh = h' + h''$, где $h' \in H_1'$, $h'' \in H_*^*(\tau)$.

$h' = h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_r} = (g_s' + g_e') + (g_e'' + g_n') + \ldots + (g_p'' + g_k'), h_i \in H_1,$

$h'' = h_{j_1} + h_{j_2} + \ldots + h_{j_q} = (g_k'' + g_\varphi') + \ldots + (g_\varphi'' + g_t'), h_j \in H^*(\tau)$.

Следовательно, образы вершин $\tau(g_s)$, $\tau(g_t)$ связаны в графе B (по определению гомоморфизма λ). Поэтому граф B – дерево, то есть имеем $|V(B)| = k+1$. Так как B есть суграф графа $\lambda S(H)(\tau)$, то

$$k = |V(B)| - 1 = |V(\lambda S(H)(\tau))| - 1 = \tau(H_1) = \tau\left({}^{H(\tau)}/_{H_*^*(\tau)} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть G – почти вполне разложимая группа конечного ранга; $\Omega(G)$ удовлетворяет условию ($*$); H – сервантная подгруппа вида (I) группы G. Тогда существует сервантная подгруппа H_1 вида (I) такая, что $\tau(H_1) = \tau(H) - 1$ и

$$1 + \sum_{\tau \in T(H)} \tau_{H_1}(\tau) = \sum_{\tau \in T(H)} \tau_H(\tau), \text{ где } \tau_H(\tau) = \tau\left({}^{H(\tau)}/_{H_*^*(\tau)} \right),$$

$T(H)$ – множество типов элементов группы H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф $S(H)$. По условию ($*$) получаем, что условие леммы 2 выполнено. Пусть i – простая вершина графа $S(H)$ и $H_1 = \langle g_1 + g_2, \ldots, g_{i-1} - g_{i+1}, \ldots, g_{k-1} + g_k \rangle_* \subset H$. Тогда $V(S(H_1)) = V(S(H)) \setminus i$. Теперь из лемм 3, 4 следует $\tau(H_1) = \tau(H) - 1$ и $1 + \sum_{\tau \in T(H)} \tau_{H_1}(\tau) = \sum_{\tau \in T(H)} \tau_H(\tau)$.

§ 3. Сервантные подгруппы вполне разложимых и почти вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга

Рассмотрим сначала задачу описания вполне разложимых групп без кручения конечного ранга, у которых каждая сервантная подгруппа почти вполне разложима. Очевидно, что во вполне разложимой группе G всякая сервантная подгруппа почти вполне разложима тогда и только тогда, когда почти вполне разложима каждая сервантная подгруппа её редуцированной части. Поэтому в дальнейшем рассматриваем только редуцированные абелевы группы без кручения конечного ранга. Так как вполне разложимая группа является почти вполне разложимой, то будем использовать результаты и обозначения предыдущего параграфа.

ЛЕММА 6. Всякая сервантная подгруппа вида (I) вполне разложимой группы G почти вполне разложима тогда и только тогда, когда $\Omega(G)$ удовлетворяет условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие (*) не выполнено. Пусть $\tau_1,\dots,\tau_k\in\Omega(G)$ и $G_1,\dots,G_k$ – прямые слагаемые группы G типов $\tau_1,\dots,\tau_k$ соответственно. Рассмотрим $H=$ $=\langle g_1+g_2,\dots,g_{k-1}+g_k\rangle_*$, $g_i\in G_i$. Так как условие (*) не выполнено для типов $\tau_1,\dots,\tau_k$, то в $T(H)$ существует более $(k-1)$-го различных максимальных типов. Следовательно,

$$\sum_{\tau\in T(H)}\tau_H(\tau)\geq\sum_{\tau_{max}}\tau_H(\tau)>k-1=\tau(H),$$

то есть группа H не может быть почти вполне разложимой [9]. Обратно, допустим, что любая сервантная подгруппа вида (I) ранга, меньшего k, почти вполне разложима и $\tau(H)=k$. Тогда по следствию 5 существует такая H_1 вида (I) ранга $k-1$, что

$$\sum_{\tau\in T(H)}\tau_H(\tau)=1+\sum_{\tau\in T(H)}\tau_{H_1}(\tau)$$

. По индуктивному предположению имеем

$$\sum_{\tau\in T(H)}\tau_H(\tau)=1+\sum_{\tau\in T(H)}\tau_{H_1}(\tau)=1+\tau(H_1)=\tau(H),$$

то есть группа H почти вполне разложима [9].

ТЕОРЕМА 7. Если во вполне разложимой группе G всякая сервантная подгруппа почти вполне разложима, то $T(G)$ удовлетворяет условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условие (*) не выполняется на $\Omega(G)$, то по лемме 6 существует не почти вполне разложимая сервантная подгруппа вида (I). Допустим, что условие (*) выполнено на $\Omega(G)$, но не выполнено на $T(G)$. Пусть типы $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in T(G)$ попарно несравнимы, не удовлетворяют условию (*) и $\alpha_1,\dots,\alpha_s\in\Omega(G)$, $s\geq 0$, а $\alpha_{s+1},\dots,\alpha_k\notin\Omega(G)$. Так как $\alpha_i=\tau(g)$, $g\in G$, $g=g_1+\dots+g_t$, $g_s\in G_s$ и тип $\alpha_i=\tau(g)=\tau(g_1)\cap$

$\cap \ldots \cap \tau(g_t)$, то по лемме I $\alpha_i = \tau_{m_i} \cap \tau_{\ell_i}$ где $\tau_{m_i} = \tau(G_{m_i})$ и $\tau_{\ell_i} = \tau(G_{\ell_i})$. Зафиксируем для каждого типа α_i, $i = s+1, \ldots, k$, по одному такому представлению. Допустим, что $\alpha_i = \tau_i$, $i = 1, \ldots, s$. Пусть $S = \{(m_i, \ell_i)\ i = s+1, \ldots, k\}$, причем пары (m_i, ℓ_i) и (ℓ_i, m_i) считаются одинаковыми, и $J' = \{1, 2, \ldots, s, m_i, \ell_i \mid i = s+1, \ldots, k\}$. Положим $J_0 = \{1, 2, \ldots, s\}$. Зададим на множестве $J' \setminus J_0$ отношение $\rho : k, s \in J' \setminus J_0$ находятся в отношении ρ, если в S существует последовательность

$$(k, \ell), (\ell, r), \ldots, (m, n), (n, s).$$

Очевидно, что ρ – отношение эквивалентности. Следовательно, $J' \setminus J_0$ разобьется на непересекающиеся классы. Обозначим эти классы через $J_1, J_2, \ldots, J_t$. Тогда $J' = J_0 \cup J_1 \cup \ldots \cup J_t$. Рассмотрим прямое слагаемое A группы G

$$A = G_1 \oplus \ldots \oplus G_s \oplus \sum_{i \in J_1}^{\oplus} G_i \oplus \ldots \oplus \sum_{i \in J_t}^{\oplus} G_i$$ и

подгруппу B, $B = G_1 \oplus \ldots \oplus G_s \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_t$, где H_ℓ – сервантные подгруппы вида (I) ранга $|J_\ell| - 1$ и $H_\ell \subset \sum\limits_{i \in J_\ell}^{\oplus} G_i$.

Очевидно, что подгруппа B сервантна в A, а следовательно, и в G. Группа B почти вполне разложима, так как каждое H_ℓ $(\ell = 1, \ldots, t)$ почти вполне разложимо. $\Omega(B) = \{\alpha_i \mid i = 1, \ldots, k\}$. Для группы B можем записать $nB \subset G' \subset B$, где G' – вполне разложимая группа и $\Omega(G') = \Omega(B)$. Так как $\Omega(G')$ не удовлетворяет условию (*), то в G', по лемме 6, существует не почти вполне разложимая сервантная подгруппа H вида (I). Очевидно, что группа H имеет конечный индекс в своей сервантной оболочке H_* в группе B и H_* не является почти вполне разложимой.

ЛЕММА 8. Пусть $G = \sum\limits_{i \in J}^{\oplus} G_i$ – вполне разложимая группа без кручения; H – такая сервантная ее подгруппа, что $H \cap G_i = 0$, $i \in J$. Тогда H вкладывается в некоторую сервантную подгруппу группы G вида (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – ненулевая сервантная подгруппа группы G. Обозначим через $J(H)$ следующее множество: $\{i \in J \mid \pi_i(H) \neq 0\}$, где π_i – проекция группы G на прямое слагаемое G_i. Если $r(H) = |J(H)| - 1$, то подгруппа H имеет вид (I). Действительно, пусть $h_1, \ldots, h_t$ – максимальная независимая система элементов подгруппы H. Запишем разложение этих элементов в группе G:

$$(2)\qquad \begin{aligned} h_1 &= r_{11}g_1 + \ldots + r_{s1}g_s, \\ h_2 &= r_{12}g_1 + \ldots + r_{s2}g_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_t &= r_{1t}g_1 + \ldots + r_{st}g_s, \end{aligned}$$

где r_{ij} - целые числа. В матрице коэффициентов этих разложений число строк на единицу меньше числа столбцов. В таком случае, поскольку $H \cap G_i = 0$, $i \in J$, можно перейти к новому базису группы H так, что в каждой строке системы (2) было бы ровно два элемента. Взяв новый базис за максимальную независимую систему элементов в H, получаем, что подгруппа H имеет вид (I) (согласно определению). Предположим, что $r(H) < |J(H)|-1$. Тогда подгруппа H имеет максимально независимую систему элементов вида $h_i = r_{1i}g_1 + \ldots + r_{ti}g_t + g_{i+t}$, где $i = 1, \ldots, k$, $k = r(H)$, $t = |J(H)| - r(H) > 1$ и $0 \neq g_j \in G_j$, $j = 1, \ldots, t+k$. Пусть $H_1 = \langle h_i \mid i = 1, \ldots, k+1 \rangle_*$, где $h_{k+1} = p_1 g_1 + \ldots + p_t g_t$, числа $p_1, \ldots, p_t$ различны и $(p_s, r_{si}) = 1$, если $r_{is} \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, $s = 1, \ldots, t$. Допустим, что $H_1 \cap G_j \neq 0$. Тогда $mh_i - rh_{k+1} = g \in G_{i+t}$ для некоторого i. Отсюда следует $mr_{1i} - rp_1 = 0, mr_{2i} - rp_2 = 0, \ldots, mr_{ti} - rp_t = 0$. Так как m, r отличны от нуля, то из равенств $m(p_j r_{si} - p_s r_{ji}) = 0$ и $(p_s, r_{si}) = 1$ получаем $r_{si} = 0$, $s = 1, \ldots, t$. То есть $h_i = g_{i+t}$, что противоречит условию $H \cap G_{i+t} = 0$. Таким же образом построим H_2 для H_1 и так далее. В итоге получаем цепь включений $H \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ Эта цепь оборвется в силу конечности ранга группы G. То есть для некоторого μ имеем $r(H_\mu) = |J(H)|-1$, H_μ имеет вид (I) и содержит подгруппу H.

ТЕОРЕМА 9. Во вполне разложимой группе G без кручения конечного ранга всякая сервантная подгруппа почти вполне разложима тогда и только тогда, когда множество типов $T(G)$ удовлетворяет условию: для любого набора из k попарно несравнимых типов, принадлежащих $T(G)$, во множестве S их попарных пересечений не более ($k-1$) - го различных типов, максимальных в S.　(*)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Необходимость условия (*) дает теорема 7. б) Доста очность. Если $\tau(G)=2$, то любая сервантная подгруппа группы G почти вполне разложима. Допустим, что всякая сервантная подгруппа вполне разложимой группы G почти вполне разложима, если $\tau(G)<k$, и пусть $\tau(G)=k$. Если сервантная подгруппа H имеет ненулевое пересечение с некоторым прямым слагаемым G_i группы G, то по свойству прямых сумм [7, с. 50] имеем $H=G_i\oplus H'$ и $H'\subset\sum^{\oplus}_{j\neq i}G_j$. По индуктивному предположению H' почти вполне разложима. Пусть $H\cap G_i=0$ $i\in J$. Если $J(H)\neq J$, то $H\subset\sum^{\oplus}_{i\in J(H)}G_i\subset G$

и по индуктивному предположению почти вполне разложима. Пусть $J(H)=J$ и $H\cap G_i=0$ $i\in J$. Тогда по лемме 8 $H\subset H_1$, где H_1 имеет вид (I) и $\tau(H_1)=\tau(G)-1$. Следовательно, по лемме 6 H_1 почти вполне разложима. Пусть $B=\sum\limits_i^{\oplus}B_i$ - полное квазиразложение H_1. Тогда $H\dot{=}H\cap B\subset B$ и по индуктивному предположению сервантная подгруппа $H\cap B$ группы B почти вполне разложима, так как $T(B)$ удовлетворяет условию ($*$). Следовательно, сервантная подгруппа H группы G почти вполне разложима.

ТЕОРЕМА 10. Всякая сервантная подгруппа почти вполне разложимой группы G без кручения конечного ранга почти вполне разложима тогда и только тогда, когда $T(G)$ удовлетворяет условию:

для любого набора из k попарно несравнимых типов из $T(G)$
($*$) во множестве их попарных пересечений S не более ($k-1$)-го
различных типов, максимальных в S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H - сервантная подгруппа группы G и $B=\sum\limits_i^{\oplus}B_i$ - полное квазиразложение H. $H\dot{=}H\cap B$ сервантно в B и по теореме 9 $H\cap B$ почти вполне разложима, поэтому и H также почти вполне разложима. Если условие ($*$) не выполнено, то по теореме 7 группа B содержит не почти вполне разложимую сервантную подгруппу H. Из того, что сервантная оболочка H_* группы H в группе G квазиравна H, следует существование в группе G также не почти вполне разложимой сервантной подгруппы.

Литература

I. Коуровская тетрадь.-Новосибирск, 1976.- 98 с.

2. Bican L. Completely decomposable abelian groups any pure subgroups of which is completely decomposable.- Czeck Math. J., 1974, №24.

3. Кушнир М.И. О вполне разложимых группах - Изв.вузов. Матем. , 1974, № 8, 38-47.
4. Кожухов С.Ф. Сервантные подгруппы конечного ранга вполне разложимых абелевых групп без кручения. - В сб.: Группы и модули. Томск, 1976, 11-22.
5. Харари Ф. Теория графов.-М.: Мир, 1973.- 299 с.
6. Оре О. Теория графов.-М.: Наука, 1968.- 336 с.
7. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы,т.1.-М.: Мир, 1974.- 335 с.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т.2.-М.: Мир, 1977.-416 с.
9. Кожухов С.Ф. Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения.- В сб.:Абелевы группы и модули. Томск, 1980, 91-101.

СИЛЬНАЯ ПЛОСКОСТНОСТЬ И ПРОЕКТИВНОСТЬ СПЛЕТЕНИЯ ПОЛИГОНОВ

П.Э.Нормак

В алгебраической теории автоматов большую роль играет декомпозиция автоматов – представление данного автомата при помощи более простых автоматов. Если рассматривать автомат как полигон, то декомпозиции автомата соответствует представление полигона сплетением некоторых других полигонов. Это позволяет нам изучить алгебраические автоматы и их композиции чисто алгебраическими методами. Тем самым мы можем ввести, например, проективные автоматы: алгебраический автомат проективен, если соответствующий ему полигон проективен в категории полигонов над соответствующим моноидом. В настоящей работе выясняются необходимые и достаточные условия для сильной плоскостности и проективности сплетения полигонов.

Пусть S - моноид. Множество A называется левым S-полигоном, если для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$ определено произведение $sa \in A$, причем $(s_1 s_2)a = s_1(s_2 a)$ и $1a = a$ для всех $s_1, s_2 \in S$ и $a \in A$. Полигон с одним образующим называется циклическим. Копроизведение $\coprod_I A_i$ S-полигонов A_i, $i \in I$, где I - некоторое множество индексов, изоморфно объединению попарно непересекающихся полигонов A_i, $i \in I$. В работе [4] определяется сильно плоские (в терминологии работы [4] - слабо плоские) полигоны и показывается (теорема 5.3), что сильная плоскостность полигона A эквивалентна следующему:

УСЛОВИЕ СП. Если $s_1 a_1 = s_2 a_2$, где $s_1, s_2 \in S$, $a_1, a_2 \in A$, то существуют элементы $u_1, u_2 \in S$ и $a \in A$ такие, что $a_1 = u_1 a$, $a_2 = u_2 a$ и $s_1 u_1 = s_2 u_2$; кроме того, если $a_1 = a_2$, то u_1 и u_2 можно выбрать так, что $u_1 = u_2$.

Пусть S и T - моноиды и A - некоторый левый S-полигон. Обозначим через T^A множество всевозможных функций из A в T. Для $f \in T^A$ обозначим через ${}^s f$, $s \in S$, функцию из T^A, для которой ${}^s f(a) = f(sa)$ для всех элементов $a \in A$. Полагая $(fg)(a) = f(a)g(a)$, $f, g \in T^A$, $a \in A$, мы можем на декартовом произведении $S \times T^A$ определить умножение формулой $(s_1, f_1)(s_2, f_2) = (s_1 s_2, {}^{s_2}f_1 f_2)$. Легко проверяется, что эта операция превращает множество $S \times T^A$ в моноид. Полученный таким образом моноид называется A-сплетением моноидов S и T и обозначается через $(S \operatorname{wr} T|A)$. Если полигон A фиксирован, то говорим просто о сплетении моноидов S и T. Пусть A и B - левые S-полигон и T-полигон соответственно. Определим на декартовом произведении $A \times B$ структуру $(S \operatorname{wr} T|A)$-полигона, положив $(s, f)[a, b] = [sa, f(a)b]$. Полученный полигон называется сплетением полигонов A и B и обозначается через $A \operatorname{wr} B$. Если $A \leq C$ для некоторого левого S-полигона C, то $A \operatorname{wr} B$ можно, очевидно, рассматривать также как $(S \operatorname{wr} T|C)$-полигон. Обозначим через $\bar{t}$, $t \in T$ элемент из T^A такой, что $\bar{t}(a) = t$ для всех $a \in A$.

Все полигоны в дальнейшем подразумеваются левыми.

Не определяемые в работе понятия из теории полугрупп и теории категорий можно найти в книгах [1] и [2] соответственно.

ТЕОРЕМА I. Левый $(S \operatorname{wr} T|A)$-полигон $A \operatorname{wr} B$ сильно плоский тогда и только тогда, когда полигоны A и B сильно плоские и выполняется одно из следующих условий:

I) Для любых двух элементов $t_1, t_2 \in T$ существует элемент $t \in T$ такой, что $t_1 t = t_2 t$.

2) Для любых двух элементов $t_1, t_2 \in T$ существуют элементы $v_1, v_2 \in T$ такие, что $t_1 v_1 = t_2 v_2$, и из равенства $s_1 a_1 = s_2 a_1$, $a_1 \in A$, $s_1, s_2 \in S$ всегда следует существование элемента $s \in S$ такого, что $s_1 s = s_2 s$ и $sA = a_1$.

3) Из равенства $s_1 a_1 = s_2 a_2$ следует существование элементов $u_1, u_2 \in S$ таких, что $s_1 u_1 = s_2 u_2$ и $u_1 A = a_1$, $u_2 A = a_2$, причем если $a_1 = a_2$, то можно выбрать $u_1 = u_2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть в A выполняется равенство $s_1 a_1 = s_2 a_2$ и в B $- t_1 b_1 = t_2 b_2$. Имеем $(s_1, \bar{t}_1)[a_1, b_1] = [s_1 a_1, t_1 b_1] = [s_2 a_2, t_2 b_2] = (s_2, \bar{t}_2)[a_2, b_2]$. Тогда по условию СП существуют элементы $(p_1, f_1), (p_2, f_2) \in (S \operatorname{wr} T/A)$ и $[a_0, b_0] \in A \operatorname{wr} B$ такие, что $(s_1, \bar{t}_1)(p_1, f_1) = (s_2, \bar{t}_2)(p_2, f_2)$ и $(p_1, f_1)[a_0, b_0] = [a_1, b_1]$, $(p_2, f_2)[a_0, b_0] = [a_2, b_2]$, причем если $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$, то можно выбрать $(p_1, f_1) = (p_2, f_2)$. Из этих равенств мы получим равенства $p_1 a_0 = a_1$, $p_2 a_0 = a_2$, $s_1 p_1 = s_2 p_2$ и $f_1(a_0) b_0 = b_1$, $f_2(a_0) b_0 = b_2$, $t_1 f_1(a_0) = t_2 f_2(a_0)$, причем если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, то можно выбрать $p_1 = p_2$ и $f_1 = f_2$. Следовательно, по условию СП полигоны A и B являются сильно плоскими. Допустим теперь, что существуют элементы $t_1, t_2 \in T$ такие, что $t_1 T \cap t_2 T = \varnothing$, и пусть имеет место равенство $s_1 a_1 = s_2 a_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$, $a_1, a_2 \in A$. Рассмотрим элементы $f_1, f_2 \in T^A$ такие, что

$$f_1(a) = \begin{cases} t_1, & \text{если } a = a_1, \\ t_2, & \text{если } a \neq a_1, \end{cases} \qquad f_2(a) = \begin{cases} t_2, & \text{если } a = a_2, \\ t_1, & \text{если } a \neq a_2. \end{cases}$$

Тогда для любого элемента $b \in B$ имеем $(s_1, f_1)[a_1, b] = [s_1 a_1, f_1(a_1) b] = [s_2 a_2, t_1 b] = (s_2, \bar{t}_1)[a_2, b]$ и $(s_2, f_2)[a_2, b] = [s_2 a_2, t_2 b] = [s_1 a_1, t_2 b] = (s_1, \bar{t}_2)[a_1, b]$. По условию СП существуют элементы (p_1, g_1), $(p_2, g_2), (p_1', g_1'), (p_2', g_2') \in (S \operatorname{wr} T/A), [a_0, b_0], [a_0', b_0'] \in A \operatorname{wr} B$ такие, что $(s_1, f_1)(p_1, g_1) = (s_2, \bar{t}_1)(p_2, g_2), (p_i, g_i)[a_0, b_0] = [a_i, b], i = 1,2, (s_2, f_2)(p_1', g_1') = (s_1, \bar{t}_2)(p_2', g_2'),$ $(p_i', g_i')[a_0', b_0'] = [a_i, b_i], i = 1,2$, откуда получим равенства $p_2 a_0 = a_2, s_1 p_1 = s_2 p_2$, ${}^{p_1}f_1 g_1 = {}^{p_2}\bar{t}_1 g_2$ и ${}^{p_1'}f_2 g_1' = {}^{p_2'}\bar{t}_2 g_2'$, т.е. для любого элемента $a \in A$ имеет место $f_1(p_1 a) g_1(a) = \bar{t}_1(p_2 a) g_2(a) = t_1 g_2(a)$ и $f_2(p_1' a) g_1'(a) = \bar{t}_2(p_2' a) g_2'(a) = t_2 g_2'(a)$. Поскольку по предположению $t_1 T \cap t_2 T = \varnothing$, то из последних равенств следует, что $p_1 a = a_1$ и $p_1' a = a_2$ для любого элемента $a \in A$, т.е. $p_1 A = a_1$ и $p_1' A = a_2$. Поскольку $p_2 a_0 = a_2 = p_1' a_0$, то ввиду сильной плоскостности полигона A условие СП позволяет найти элементы $s \in S$ и $c \in A$ такие, что $p_2 s = p_1' s$, $sc = a_0$. Тогда имеем $s_1 p_1 s = s_2 p_2 s = s_2 p_1' s$ и $p_1 s A = a_1$, $p_1' s A = a_2$. Следовательно, мы нашли элементы $u_1 = p_1 s$ и $u_2 = p_1' s$ такие, что $s_1 u_1 = s_2 u_2$ и $u_1 A = a_1$, $u_2 A = a_2$. Пусть теперь в A имеет место равенство $s_1 a_1 = s_2 a_1$, но при любом $s \in S$ из равенства $s_1 s = s_2 s$ следует $sA \neq a_1$, и пусть t_1, t_2 — произвольные элементы из T. Имеем $(s_1, f)[a_1, b] = [s_1 a_1, f(a_1) b] = [s_1 a_1, t_1 b] = [s_2 a_1, \bar{t}_1(a_1) b] = (s_2, \bar{t}_1)[a_1, b]$, где

$$f(a) = \begin{cases} t_1, & a = a_1, \\ t_2, & a \neq a_1. \end{cases}$$

По условию СП существует элемент (s, g) такой, что $(s_1, f)(s, g) = (s_2, \bar{t}_1)(s, g)$, откуда ${}^{s}f g = {}^{s}\bar{t}_1 g$. Поскольку $sA \neq a_1$, то существует элемент $a_0 \in A$ такой, что $t_2 g(a_0) = f(sa_0) g(a_0) = t_1(sa_0) g(a_0) = t_1 g(a_0)$.

Достаточность. Пусть имеет место равенство $(s_1, f_1)[a_1, b_1] = (s_2, f_2)[a_2, b_2]$, т.е. $[s_1 a_1, f_1(a_1) b_1] = [s_2 a_2, f_2(a_2) b_2]$. Поскольку A и B – сильно плоские, то по условию СП существуют элементы $u_1, u_2 \in S$, $a_0 \in A$, $v_1, v_2 \in T$, $b_0 \in B$ такие, что $s_1 u_1 = s_2 u_2$, $u_1 a_0 = a_1$, $u_2 a_0 = a_2$, $f_1(a_1) v_1 = f_2(a_2) v_2$ и $v_1 b_0 = b_1$, $v_2 b_0 = b_2$. Если имеет место случай I) или 2), то определим элементы $g_1, g_2 \in T^A$ так, что $g_1(a_0) = v_1$, $g_2(a_0) = v_2$, и для всех элементов из $A \setminus \{a_0\}$ имеет место равенство $f_1(u_1 a) g_1(a) = f_2(u_2 a) g_2(a)$. Тогда имеем $(s_1, f_1)(u_1, g_1) = (s_1 u_1, {}^{u_1}f_1 g_1) = (s_2 u_2, {}^{u_2}f_2 g_2) = (s_2, f_2)(u_2, g_2)$ и $(u_1, g_1)[a_0, b_0] = [u_1 a_0, g_1(a_0) b_0] = [a_1, v_1 b_0] = [a_1, b_1]$, $(u_2, g_2)[a_0, b_0] = [u_2 a_0, g_2(a_0) b_0] = [a_2, v_2 b_0] = [a_2, b_2]$. Если выполняется условие 3) теоремы, т.е. $u_1 A = a_1$ и $u_2 A = a_2$, то возьмем $g_1 = \bar{v}_1$ и $g_2 = \bar{v}_2$. Тогда $f_1(u_1 a) g_1(a) = f_1(a_1) g_1(a) = f_1(a_1) v_1 = f_2(a_2) v_2 = f_2(u_2 a) g_2(a)$ для всех элементов $a \in A$ и, следовательно, мы имеем $(s_1, f_1)(u_1, g_1) = (s_1 u_1, {}^{u_1}f_1 g_1) = (s_2 u_2, {}^{u_2}f_2 g_2) = (s_2, f_2)(u_2, g_2)$, $(u_1, g_1)[a_0, b_0] = [u_1 a_0, g_1(a_0) b_0] = [a_1, v_1 b_0] = [a_1, b_1]$, $(u_2, g_2)[a_0, b_0] = [u_2 a_0, g_2(a_0) b_0] = [a_2, v_2 b_0] = [a_2, b_2]$. Пусть теперь имеет место равенство $(s_1, f_1)[a_1, b_1] = (s_2, f_2)[a_1, b_1]$. Тогда, поскольку полигоны A и B сильно плоские, по условию СП существуют элементы $s \in S$, $a_0 \in A$, $t \in T$, $b_0 \in B$ такие, что $s_1 s = s_2 s$, $s a_0 = a_1$, $f_1(a_1) t = f_2(a_1) t$, $t b_0 = b_1$. Если имеет место условие I) теоремы, то выбираем элемент $g \in T^A$ так, что $g(a_0) = t$ и $f_1(sa) g(a) = f_2(sa) g(a)$ для элементов $a \in A \setminus \{a_0\}$. Имеем $(s_1, f_1)(s, g) = (s_1 s, {}^{s}f_1 g) = (s_2 s, {}^{s}f_2 g) = (s_2, f_2)(s, g)$, $(s, g)[a_0, b_0] = [sa_0, g(a_0) b_0] = [a_1, t b_0] = [a_1, b_1]$. Если имеет место случай 2) или 3), то возьмем $g = \bar{t}$. Имеем $(s_1, f_1)(s, g) = (s_1 s, {}^{s}f_1 g) = (s_2 s, {}^{s}f_2 g) = (s_2, f_2)(s, g)$ и $(s, g)[a_0, b_0] = [sa_0, g(a_0) b_0] = [a_1, t b_0] = [a_1, b_1]$. Таким образом, по условию СП полигон $A \operatorname{wr} B$ является сильно плоским. Теорема доказана.

Поскольку каждый свободный полигон является, очевидно, сильно плоским и для левого S-полигона $A = S \sqcup S$ условия 2) и 3) теоремы I не выполняются, то мы получим следующее.

СЛЕДСТВИЕ I. Полигон $A \operatorname{wr} B$ является сильно плоским для любых сильно плоских S-полигона A и T-полигона B тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $t_1, t_2 \in T$ существует элемент $t \in T$ такой, что $t_1 t = t_2 t$.

ЛЕММА 1([3], предложение 3.3). Копроизведение $\coprod_I A_i$ левых S-полигонов A_i, $i\in I$ проективно тогда и только тогда, когда каждый A_i, $i\in I$ проективен.

ЛЕММА 2([3], следствие 3.8). Левый S-полигон A проективен тогда и только тогда, когда $A\cong \coprod_I Se_i$, где $e_i^2=e_i\in S$, $i\in I$.

ЛЕММА 3. Имеет место изоморфизм $(\coprod_I A_i)\,\mathrm{wr}\,B\cong\coprod_I(A_i\,\mathrm{wr}\,B)$ левых $(S\,\mathrm{wr}\,T/\coprod_I A_i)$-полигонов.

ЛЕММА 4. Имеет место изоморфизм $A\,\mathrm{wr}(\coprod_I B_i)\cong\coprod_I(A\,\mathrm{wr}\,B_i)$ левых $(S\,\mathrm{wr}\,T/A)$-полигонов.

ЛЕММА 5. Если задан гомоморфизм $\varphi: B\to X$ левых S-полигонов, то отображение $\bar\varphi: A\,\mathrm{wr}\,B\to A\,\mathrm{wr}\,X$, определенное формулой $\bar\varphi\{[a,b]\}=[a,\varphi(b)]$, является гомоморфизмом $(S\,\mathrm{wr}\,T/A)$-полигонов, причем если φ – мономорфизм (эпиморфизм), то $\bar\varphi$ также мономорфизм (эпиморфизм).

Доказательства лемм 3, 4 и 5 очевидны.

ТЕОРЕМА 2. Левый $(S\,\mathrm{wr}\,T/A)$-полигон $A\,\mathrm{wr}\,B$ проективен тогда и только тогда, когда B – проективен и либо моноид содержит правый нуль и A проективен, либо $A\cong Sv$, $v\in S$ и существует элемент $s\in S$ такой, что $v=sSv$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(S\,\mathrm{wr}\,T/A)$-полигон $A\,\mathrm{wr}\,B$ проективен. Покажем, что B проективен. Пусть нам заданы гомоморфизм $\varphi: B\to X$ и эпиморфизм $\pi: Y\to X$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & A\,\mathrm{wr}\,B \\ & & \downarrow{\scriptstyle\bar\varphi} \\ A\,\mathrm{wr}\,Y & \xrightarrow{\bar\pi} & A\,\mathrm{wr}\,X \end{array},$$

где отображения $\bar\varphi$, $\bar\pi$ определены формулами $\bar\varphi\{[a,b]\}=[a,\varphi(b)]$ и $\bar\pi\{[a,y]\}=[a,\pi(y)]$. По лемме 5 $\bar\varphi$ и $\bar\pi$ являются гомоморфизмами, причем $\bar\pi$ – эпиморфизм. Следовательно, существует гомоморфизм $\bar\chi: A\,\mathrm{wr}\,B\to A\,\mathrm{wr}\,Y$ такой, что $\bar\varphi=\bar\pi\bar\chi$. Пусть теперь a_0 – некоторый фиксированный элемент из A. Определим отображение $\chi: B\to Y$ формулой $\chi(b)=y$, где $[a_0,y]=\bar\chi\{[a_0,b]\}$. Тогда имеем $[a_0,\chi(tb)]=\bar\chi\{[a_0,tb]\}=\bar\chi\{(1,\bar t)[a_0,b]\}=(1,\bar t)\,\bar\chi\{[a_0,b]\}=$ $=(1,\bar t)[a_0,\chi(b)]=[a_0,\bar t(a_0)\chi(b)]=[a_0,t\chi(b)]$. Следовательно, χ – гомоморфизм T-полигонов, причем $\pi\chi=\varphi$, поскольку для любого элемента $b\in B$ мы имеем $[a_0,\pi\chi(b)]=\bar\pi\{[a_0,\chi(b)]\}=\bar\pi\bar\chi\{[a_0,b]\}=\bar\varphi\{[a_0,b]\}=$

$=[a_0, \varphi(b)]$. Тем самым доказана проективность полигона B. По лемме 2 полигон B является копроизведением циклических T-полигонов Tb_i, $i \in I$. По леммам 3 и I полигоны $A \operatorname{wr} Tb_i$, $i \in I$ проективны. Зафиксируем некоторый элемент $k \in I$. Пусть теперь заданы некоторый гомоморфизм $\varphi: A \to X$ и эпиморфизм $\pi: Y \to X$ S-полигонов. Рассмотрим полигоны A, X и Y как левые $(S \operatorname{wr} T/A)$-полигоны, положив $(s,f)a = sa$, $(s,f)x = x$, $(s,f)y = sy$. Определим отображение $\varkappa: A \operatorname{wr} Tb_k \to A$ формулой $\varkappa\{[a, tb_k]\} = a$. Ясно, что $\varkappa$ является гомоморфизмом $(S \operatorname{wr} T/A)$-полигонов. Следовательно, существует гомоморфизм $\tau: A \operatorname{wr} Tb_k \to Y$ такой, что $\varphi\varkappa = \pi\tau$. Определим отображение $\chi: A \to Y$ формулой $\chi(a) = \tau\{[a, b_k]\}$. Поскольку $\chi(sa) = \tau\{[sa, b_k]\} = \tau\{(s, \bar{1})[a, b_k]\} = (s, \bar{1})\tau\{[a, b_k]\} = s\chi(a)$, то χ – гомоморфизм S-полигонов, причем $\pi\chi(a) = \pi\tau\{[a, b_k]\} = \varphi\varkappa\{[a, b_k]\} = \varphi(a)$ для любого элемента $a \in A$, т.е. $\pi\chi = \varphi$. Таким образом, A – проективный S-полигон и, следовательно, по лемме 2 является копроизведением циклических полигонов Sa_j, $j \in J$. Если A нециклический, то зафиксируем некоторый элемент $\ell \in J$. По леммам 4 и I $(S \operatorname{wr} T/A)$-полигон $Sa_\ell \operatorname{wr} Tb_k$ является проективным и по лемме 2 имеет место изоморфизм $Sa_\ell \operatorname{wr} Tb_k \cong (S \operatorname{wr} T/A)(e, f_0)$, где $(e,f_0)^2 = (e, f_0) \in (S \operatorname{wr} T/A)$. Пусть $t_0 \in T$ – произвольный элемент и пусть элемент $f \in T^A$ является таким, что

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in Sa_\ell, \\ t_0, & \text{если } a \in A \setminus Sa_\ell. \end{cases}$$

Тогда имеем $(1,f)[sa_\ell, tb_k] = [sa_\ell, f(sa_\ell)tb_k] = [sa_\ell, tb_k]$. В частности, $(e, f_0) = (1, f)(e, f_0) = (e, {}^e\!f f_0)$. Следовательно, $f_0 = {}^e\!f f_0$, т.е. $f_0(a) = f(ea) f_0(a)$ для всех элементов $a \in A$. Если $a \in A \setminus Sa_\ell$, то $ea \in A \setminus Sa_\ell$. Отсюда $f_0(a) = t_0 f_0(a)$, т.е. элемент $f_0(a)$ является правым нулем моноида T. Пусть теперь A цикличен. По лемме 2 можно считать, что $A = Sv$, где $v^2 = v \in S$ и $\varphi: S \operatorname{wr} Tb_k \cong (S \operatorname{wr} T/A)(e, f_0)$ для некоторого идемпотента $(e, f_0) \in (S \operatorname{wr} T/A)$. Пусть $\varphi\{[v, b_k]\} = (s, f)(e, f_0)$, где $(s, f) \in (S \operatorname{wr} T/A)$, и пусть $(s', f_1)[v, b_k] = (s', f_2)[v, b_k]$ для некоторых элементов (s', f_1), $(s', f_2) \in (S \operatorname{wr} T/A)$. Тогда имеем $(s', f_1)(s, f)(e, f_0) = (s', f_1)\varphi\{[v, b_k]\} = \varphi\{(s', f_1)[v, b_k]\} = \varphi\{(s', f_2)[v, b_k]\} = (s', f_2)\varphi\{[v, b_k]\} = (s', f_2)(s, f)(e, f_0)$. Таким образом, поскольку $(s', f_i)[v, b_k] = [s'v, f_i(v) b_k]$, $i = 1, 2$, мы получим, что из равенства $f_1(v) = f_2(v)$ следует равенство $(s', f_1)(s, f)(e, f_0) = (s', f_2)(s, f)(e, f_0)$.

т.е. $f_1(sepv)f(epv)f_0(pv)=f_2(sepv)f(epv)f_0(pv)$ для всех элементов $pv\in A$. Если $sepv=v$ для всех $p\in S$, то имеем $seSv=v$, как и требовалось. Если же существует элемент $p_0\in S$ такой, что $sep_0v\neq v$ и $t\in T$ – некоторый элемент, то выбираем элементы $f_1,f_2\in T^A$ так, что $f_1(v)=f_2(v)$, $f_1(sep_0v)=1$, $f_2(sep_0v)=t$. Тогда имеем $f(ep_0v)f_0(p_0v)=f_1(sep_0v)f(ep_0v)f_0(p_0v)=f_2(sep_0v)f(ep_0v)f_0(p_0v)=tf(ep_0v)f_0(p_0v)$, т.е. элемент $f(ep_0v)f_0(p_0v)$ является правым нулем моноида T.

Достаточность. Пусть полигоны ${}_SA$ и ${}_TB$ проективны. По лемме 2 имеем $A\cong\coprod_I Sv_i$, $v_i^2=v_i\in S$, $i\in I$ и $B\cong\coprod_J Tu_j$, $u_j^2=u_j\in T$, $j\in J$. Ввиду лемм 3, 4 и 1 достаточно доказать, что каждый $Sv_i\operatorname{wr}Tu_j$ является проективным $(S\operatorname{wr}T/A)$-полигоном. Обозначим $v_\ell=v$ и $u_k=u$ и предположим, что моноид T содержит правый нуль 0. Обозначим через $f^t\in T^A$, $t\in T$, следующий элемент:

$$f^t(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\neq v,\\ t, & \text{если } a=v.\end{cases}$$

Определим отображение $\varphi: Sv\operatorname{wr}Tu\to(S\operatorname{wr}T/A)(v,f^u)$ формулой $\varphi\{(sv,tu)\}=(sv,f^{tu})$. Поскольку

$${}^v f^u f^u(a)=f^u(va)f^u(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\neq v,\\ u, & \text{если } a=v,\end{cases}$$

то $(v,f^u)(v,f^u)=(vv,{}^vf^uf^u)=(v,f^u)$, т.е. (v,f^u) является идемпотентом. Пусть теперь $(p,g)\in(S\operatorname{wr}T/A)$ – некоторый элемент. Тогда имеем, с одной стороны, $\varphi\{(p,g)[sv,tu]\}=\varphi\{[psv,g(sv)tu]\}=[psv,f^{g(sv)tu}]$, а с другой стороны, $(p,g)\varphi\{[sv,tu]\}=(p,g)(sv,f^{tu})=(psv,{}^{sv}gf^{tu})=(psv,f^{g(sv)tu})$, поскольку

$${}^{sv}gf^{tu}(a)=g(sva)f^{tu}(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\neq v,\\ g(sv), & \text{если } a=v.\end{cases}$$

Следовательно, φ – гомоморфизм. Легко проверить, что φ – изоморфизм. По лемме 2 $(S\operatorname{wr}T/A)$-полигон $Sv\operatorname{wr}Tu$ проективен. Пусть теперь $A=Sv$ и пусть $v=sSv$ для некоторого элемента $s\in S$. Определим отображение $\varphi: Sv\operatorname{wr}Tu\to(S\operatorname{wr}T/A)(v,\bar u)$ формулой $\varphi\{[s'v,tu]\}=(s'v,\overline{tu})$. Пусть $(p,g)\in(S\operatorname{wr}T/A)$. Поскольку ${}^{s'v}g(pv)=g(s'vpv)=g(s'(sSv)pv)=g(s'(s(S'vp)v))=g(s'v)$, то ${}^{s'v}g=\overline{g(s'v)}$ и, следовательно, $\varphi\{(p,g)[s'v,tu]\}=\varphi\{[ps'v,g(s'v)tu]\}=(ps'v,\overline{g(s'v)tu})=(ps'v,\overline{g(s'v)}\,\overline{tu})=(ps'v,{}^{s'v}g\cdot\overline{tu})=(p,g)(s'v,\overline{tu})=(p,g)\varphi\{[s'v,tu]\}$, т.е. φ – гомоморфизм. Поскольку φ – биекция, то φ – изоморфизм. Так как $(v,\bar u)(v,\bar u)=(vv,{}^v\bar u\bar u)=(v,\bar u)$, то из леммы 2 следует проективность полигона $Sv\operatorname{wr}Tu$.

Поскольку не всякий проективный полигон является циклическим, то мы получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Полигон $A \,\mathrm{wr}\, B$ является проективным для любых проективных S-полигона A и T-полигона B тогда и только тогда, когда моноид T содержит правый нуль.

Автор глубоко признателен профессору Л.А. Скорнякову за постановку проблем и помощь в работе.

Литература

I. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т.I, М., 1972. - 285 с.
2. Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. Основы теории категорий, М., 1974. - 256 с.
3. Knauer U. Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, Semigr. Forum 3(1973), 359-370.
4. Stenström B. Flatness and localization over monoids, Math. Nachr, 48(1971), 315-334.

КОЛЬЦА, ВСЕ ФАКТОРКОЛЬЦА КОТОРЫХ МАЛОИНЪЕКТИВНЫ СПРАВА

А.А.Туганбаев

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули - правыми и унитарными. Слова "нетерово кольцо" и т.п. означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева.

Модуль называется малоинъективным, если все эндоморфизмы его подмодулей продолжаются на весь модуль. Кольцо называется инвариантным справа (слева), если все его правые (левые) идеалы являются идеалами. Основным результатом работы является теорема I, описывающая инвариантные кольца, все факторкольца которых малоинъективны справа. Кроме того, затронуты кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны.

Через $E(M)$, $End\,M$, $Z(M)$ обозначим соответственно инъективную оболочку, кольцо эндоморфизмов и сингулярный подмодуль модуля M. Модуль называется равномерным, если любые его два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль называется цепным, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Модуль M называется квазинепрерывным, если для любых его двух подмодулей N_1, N_2 с нулевым пересечением найдется такое прямое разложение $M=M_1\oplus M_2$, что $N_i\subseteq M_i$ $(i=1,2)$. Модуль M называется строго малоинъективным, если он малоинъективен и $fM\subseteq M$ для любого $f\in End\,E(M)$, ядро которого существенно в $E(M)$. Модуль M называется малопроективным, если для любого эпиморфизма $h: M\to M_1$ и произвольного $f_1\in End\,M_1$ найдется такое $f\in End\,M$, что $hf=f_1h$. Кольцо называется одномерным, если любая возрастающая цепь его первичных идеалов состоит не более чем из двух членов. Кольцо называется бэровским, если любой его аннуляторный односторонний идеал порождается идемпотентом. Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется редуцированным. Область Оре R с телом частных Q называется вполне целозамкнутой справа, если R содержит любой элемент q из Q, для которого существует такой элемент $0 \neq r \in R$, что $q^n r \in R$, $\forall n \geqslant 1$. Кольцо называется антисингулярным справа, если $Z(R)=0$.

ЛЕММА I [I]. Малоинъективный модуль квазинепрерывен.

ЛЕММА 2. Пусть R-квазинепрерывное справа кольцо. Тогда: а) $R/Z(R)$ - бэровское (в частности, антисингулярное) кольцо и каждое множество ортогональных идемпотентов кольца $R/Z(R)$ поднимается до множества ортогональных идемпотентов кольца R;
б) если R-антисингулярное справа кольцо, то $R=R_1 \times R_2$, где R_1- самоинъективное справа регулярное кольцо; R_2- квазинепрерывное справа редуцированное кольцо; в) если кольцо $R/Z(R)$ не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов, то то же самое верно и для кольца R.

Доказательство. Пункт а) является частным случаем предложения 7.4 из [2]. Пункт б) доказан в следствии 4 из [3]. Пункт в) вытекает из пункта а) и того, что $Z(R)$ не может содержать ненулевых идемпотентов.

ЛЕММА 3. Пусть R-строго малоинъективное справа кольцо. Тогда: а) если $Z(R)$ - существенный правый идеал, то кольцо R самоинъективно справа; б) если каждый ненулевой правый идеал из R содержит ненулевой нильпотентный правый идеал, то кольцо R самоинъективно справа; в) если кольцо R равномерно справа, то R - либо самоинъективное справа локальное кольцо, либо область.

Доказательство. Пункты а) и в) доказаны в лемме I3 из [I]. Докажем пункт б). По пункту а) достаточно доказать, что $Z(R)$-существенный правый идеал. Если A - такой ненулевой правый идеал, что $A \cap Z(R) \neq 0$, то по условию найдется такой ненулевой нильпотентный правый идеал B, что $B \cap Z(R) \neq 0$. Тогда факторкольцо $R/Z(R)$ не является полупервичным, что противоречит тому, что по леммам I и 3 а) кольцо $R/Z(R)$ является бэровским.

ЛЕММА 4. Пусть все циклические модули над кольцом R квазинепрерывны. Тогда: а) R - прямое произведение полупростого артинова кольца и конечного числа равномерных справа колец; б) если кольцо R антисингулярно справа, то R - прямое произведение полупростого артинова кольца и конечного числа правых областей Оре; в) если кольцо R самоинъективно справа, то R - прямое произведение полупростого артинова кольца и конечного числа цепных справа колец; г) если кольцо R строго малоинъективно справа, то R - конечное прямое произведение полупростого артинова кольца, самоинъективных справа цепных справа колец и правых областей Оре.

Доказательство. Докажем пункт а). По лемме 9 из [I] достаточно доказать, что R не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов. По пунктам а), в) леммы 2 можно считать, что кольцо R антисингулярно справа. По пункту б) леммы 2 можно считать, что R - либо самоинъективное справа регулярное кольцо, либо редуцированное кольцо. В первом случае кольцо R артиново, что доказывается точно так же, как артиновость кольца, над которым все циклические модули инъективны [4]. Если же R - редуцированное кольцо, то все идемпотенты кольца R центральны и утверждение вытекает из того, что по лемме 2 из [5] кольцо R не может содержать бесконечного числа центральных ортогональных идемпотентов. Пункт б) вытекает из пункта а) и того, что антисингулярное справа равномерное справа кольцо является правой областью Оре. Докажем пункт в). Так как самоинъективное справа равномерное справа кольцо локально, то по пункту а) можно считать, что R - локальное кольцо. То, что при этих условиях кольцо R является цепным справа, доказано в предложении I из [I]. Докажем пункт г). По пункту а) можно считать, что кольцо R равномерно справа. Утверждение вытекает теперь из пунктов б), в) и леммы 3 в).

ЛЕММА 5. Равносильны условия: а) все циклические модули над кольцом R малоинъективны; б) R-малоинъективное справа кольцо с малоинъективными правыми идеалами; в) R - конечное прямое произведение полупростого артинова кольца и равномерных справа колец, над которыми все циклические модули малоинъективны; г) R - конечное прямое произведение полупростого артинова кольца и равномерных справа малоинъективных справа колец с малопроективными правыми идеалами.

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б), а также в) и г) является частным случаем теоремы 4 из [6]. Эквивалентность условий а) и в) вытекает из лемм I и 4.

ЛЕММА 6 [6]. Если R - область, то правая малоинъективность кольца R равносильна тому, что R - вполне целозамкнутая справа область Оре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть R - антисингулярное справа кольцо. Тогда малоинъективность всех циклических R-модулей равносильна тому, что $R = Q \times \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где Q - полупростое артиново кольцо, а все $\mathcal{D}_i$ - вполне целозамкнутые справа области Оре с малопроективными правыми идеалами. При этих условиях все области $\mathcal{D}_i$ полунаследственны.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из лемм I, 4 г), 5, 6. Второе утверждение доказано в [6].

ЛЕММА 7. Для кольца R равносильны условия: а) R - строго малоинъективное справа кольцо, над которым все циклические модули малоинъективны; б) $R = Q \times T_1 \times \ldots \times T_m \times \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где Q - полупростое артиново кольцо; все T_i - цепные справа самоинъективные справа кольца с малопроективными правыми идеалами, а все $\mathcal{D}_i$ - вполне целозамкнутые справа области Оре с малопроективными правыми идеалами.

Доказательство. Импликация а) $\Longrightarrow$ б) вытекает из лемм I, 5, 6 и 4 г). Импликация б) $\Longrightarrow$ а) вытекает из лемм 5, 6 и того, что как самоинъективное справа кольцо, так и малоинъективная справа область являются строго малоинъективными кольцами.

Из леммы 7 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть R-самоинъективное справа кольцо. Тогда малоинъективность всех циклических R-модулей равносильна тому, что R - конечное прямое произведение полупростого артинова кольца и конечного числа цепных справа колец с малопроективными правыми идеалами.

ЛЕММА 8. Если все подмодули малоинъективного модуля M вполне инвариантны в M, то M - строго малоинъективный модуль

В частности, малоинъективное справа инвариантное справа кольцо является строго малоинъективным справа.

Доказательство. Пусть $E=E(M)$, $f\in End\,E$, $Ker\,f$ - существенный подмодуль в E, N - наибольший подмодуль модуля M, переходящий в себя под действием f. Так как M - малоинъективный модуль, то найдется такое $g\in End\,M$, что $(f-g)N=0$. Пусть $b=(f-g)a\in N\cap(f-g)M$, $a\in M$. Так как aR- вполне инвариантный подмодуль в M, то $fa=ga+b\in aR+N$, откуда $f(aR+N)\subseteq aR+N$. Поскольку N-наибольший подмодуль в M, для которого $fN\subseteq N$, то $a\in N$ и, следовательно, $b=(f-g)a=0$, $N\cap(f-g)M=0$. Так как $N\supseteq M\cap Ker\,f$, то N-существенный подмодуль в E, причем $N\cap(f-g)M=0$. Тогда $(f-g)M=0$, $fM=gM\subseteq M$.

ЛЕММА 9. Пусть R - инвариантное кольцо, все факторкольца которого малоинъективны справа. Тогда: а) все циклические R-модули малоинъективны; б) если кольцо R самоинъективно справа, то R - конечное прямое произведение цепных одномерных колец.

Доказательство. Пункт а) проверяется непосредственно. По предложению 2 и пункту а) можно считать, что R - цепное инвариантное кольцо. То, что при этих условиях кольцо R одномерно, доказано в предложении I работы [5].

ЛЕММА 10. Пусть A - собственный идеал инвариантной слева области R. Тогда A содержит такой ненулевой идеал B, что в кольце R/B имеется существенный нильпотентный идеал.

Доказательство. Пусть $0\neq a\in A$, $B=Ra^2$, $\bar{R}=R/B$. Тогда $\bar{R}\bar{a}$ - нильпотентный идеал кольца $\bar{R}$. Докажем, что $\bar{R}\bar{a}$ - существенный правый идеал. Пусть $\bar{0}\neq\bar{x}=x+B\in\bar{R}$, $x\in R$. Надо доказать, что $\bar{x}\bar{R}\cap\bar{R}\bar{a}\neq\bar{0}$. Если $\bar{x}\in\bar{R}\bar{a}$, то все доказано. Пусть $\bar{x}\notin\bar{R}\bar{a}$. Тогда $\bar{x}\bar{a}=xa+B\in\bar{x}\bar{R}\cap\bar{R}\bar{a}$, причем $\bar{x}\bar{a}\neq\bar{0}$, так как в противном случае $xa=ya^2$ для некоторого $y\in R$ и $x=ya$, $\bar{x}\in\bar{R}\bar{a}$.

ЛЕММА II. Пусть R - инвариантная область, все собственные факторкольца которой малоинъективны справа. Тогда каждое собственное факторкольцо кольца R разлагается в конечное прямое произведение цепных инвариантных одномерных колец, являющихся либо самоинъективными справа кольцами, либо областями.

Доказательство. Пусть A - собственный идеал кольца R. По лемме 10 A содержит такой ненулевой идеал B, что кольцо R/B обладает существенным нильпотентным идеалом. Тогда по лемме 3 б) кольцо R/B самоинъективно справа. По лемме 9 б) кольцо R/B и, следовательно, его факторкольцо R/A являются конечными прямыми произведениями цепных инвариантных одномерных колец, каждое из которых по леммам 8 и 9 в) либо самоинъективно справа, либо является областью.

ТЕОРЕМА I. Пусть R – инвариантное (например, коммутативное) кольцо. Для того чтобы все факторкольца кольца R были малоинъективными справа необходимо и достаточно, чтобы $R = T_1 \times \ldots \times T_n \times \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_m$, где все T_i – самоинъективные справа цепные инвариантные одномерные кольца с малопроективными правыми идеалами, а все $\mathcal{D}_j$ – вполне целозамкнутые справа инвариантные области с малопроективными правыми идеалами. При этих условиях каждое кольцо $\mathcal{D}_j$ обязано быть полунаследственной областью, все собственные факторкольца которой разлагаются в конечные прямые произведения цепных одномерных колец, являющихся либо самоинъективными справа кольцами, либо областями.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из лемм 7, 8, 9. Второе утверждение вытекает из лемм II, 9 а) и предложения I.

ЛЕММА I2. Пусть M – цепной малоинъективный модуль с локальным кольцом эндоморфизмов, $E = E(M)$. Тогда: а) если f_1 – автоморфизм модуля E, действующий тождественно на некотором существенном подмодуле L модуля M, то $f_1 M = M$; б) M – строго малоинъективный модуль.

Доказательство. Докажем пункт а). Пусть $f_2 = f_1^{-1}$, $N_i = \{m \in M \mid f_i m \in M\}$ $(i=1,2)$. Так как M – цепной модуль, то либо $N_1 \subseteq N_2$, либо $N_2 \subseteq N_1$. Поскольку f_2 действует тождественно на L и равенство $f_1 M = M$ равносильно равенству $f_2 M = M$, то условия пункта а) симметричны для f_1 и f_2. Поэтому можно ограничиться тем случаем, когда $N_2 \subseteq N_1$. Так как $f_2(f_1 N_1) \subseteq M$, то $f_1 N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_1$. Положим $f = f_1$. Поскольку M-малоинъективный модуль и $f N_1 \subseteq N_1$, то найдется такое $g \in End M$, что $(f-g)N_1 = 0$. Пусть $b = (f-g)a \in M \cap (f-g)M$, $a \in M$. Тогда $fa = ga + b \in M$, откуда $a \in N_1$. Поэтому $b = (f-g)a = 0 = (f-g)N_1$. Тогда $M \cap (f-g)M = 0$, $(f-g)M = 0$, $fM = gM$. Пусть $h = g - 1$. Тогда $g = 1 + h$, причем $hL = 0$. Так как $End M$ – локальное кольцо и h не автоморфизм, то g автоморфизм. Тогда $fM=gM=M$. Докажем пункт б). Пусть $t\in End\,E$ и $T=Ker\,t$ - существенный подмодуль в E. Положим $f_1=1-t$. Так как $T\cap Ker f_1=0$, то $f_1E\simeq E$ и, следовательно, f_1E - прямое слагаемое в E. Поскольку $f_1E\supseteq f_1T=T$, то f_1 - автоморфизм модуля E. По пункту а) $f_1M=M$. Поэтому $tM\leq(1-t)M+M=M$ и M - строго малоинъективный модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если R - цепное справа кольцо, то правая малоинъективность кольца R равносильна тому, что R - либо самоинъективное справа кольцо, либо вполне целозамкнутая справа область Оре.

Доказательство. Утверждение вытекает из лемм 6, 12 и 3 в).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для полусовершенного кольца R равносильны условия: а) все циклические модули малоинъективны; б) R - конечное прямое произведение полупростого артинова кольца, самоинъективных справа цепных справа колец с малопроективными правыми идеалами и вполне целозамкнутых справа цепных справа областей Оре с малопроективными правыми идеалами.

Доказательство. По лемме 5 можно считать кольцо R локальным, а по предложению I из [I] - цепным справа. Утверждение вытекает теперь из предложения 3 и лемм 5, 6.

Пусть $r(a)$ $(l(a))$ обозначает правый (левый) аннулятор элемента a кольца R. Кольцо R называется риккартовым справа (слева), если $r(a)$ $(l(a))$ порождается идемпотентом для всех $a\in R$, что равносильно тому, что все главные правые (левые) идеалы кольца R проективны. Кольцо называется дистрибутивным справа (слева), если $A\cap(B+C)=A\cap B+A\cap C$ для любых его правых (левых) идеалов A, B, C. Подмодуль N модуля M называется замкнутым, если у N нет собственных существенных расширений в M.

ЛЕММА 13. Пусть R - малоинъективное справа кольцо. Тогда: а) если все правые аннуляторные идеалы кольца R являются идеалами, то кольцо R инвариантно слева; б) если R - редуцированное кольцо, то R - инвариантное слева кольцо.

Доказательство. Докажем только пункт а), так как все правые аннуляторные идеалы редуцированного кольца являются идеалами. Пусть $a, b\in R$. Так как по условию $r(a)$ - идеал, то $r(a)\leq r(ab)$ и, следовательно, существует эпиморфизм

$f: aR \to abR$, для которого $f(a)=ab$. Так как R - малоинъективное справа кольцо, то $f(x)=dx$ для некоторого $d\in R$ и всех $x\in aR$. Поэтому $ab=da$ и, следовательно, Ra - идеал.

ЛЕММА 14. Если все факторкольца кольца R квазинепрерывны справа, то $A\cap(B+C)=A\cap B+A\cap C$ для любых идеалов A, B, C кольца R.

Доказательство. По модулярному закону равенство $A\cap(B+C)=A\cap B+A\cap C$ равносильно равенству $hA\cap(hB+hC)=hA\cap hB+hA\cap hC$, где $h: R\to R/B\cap C$ - естественный эпиморфизм колец. Так как $hB\cap hC=0$, то без ограничения общности можно считать, что $B\cap C=0$. Так как кольцо R квазинепрерывно справа, то найдется такое $e=e^2\in R$, что $B\subseteq eR$, $C\subseteq(1-e)R$. Поскольку A - идеал, то $A=A_1\oplus A_2$, где $A_1=eA$, $A_2=(1-e)A$. Тогда $A\cap(B\oplus C)=(A_1\oplus A_2)\cap(B\oplus C)=A\cap B\oplus A\cap C$.

ЛЕММА 15. Для инвариантного слева дистрибутивного слева редуцированного кольца R равносильны условия: а) R - полунаследственно слева; б) R - риккартово слева; в) R обладает регулярным классическим кольцом частных.

Доказательство. Импликации в)$\Longrightarrow$а) и б)$\Longrightarrow$в) доказаны в работах [7] и [8] соответственно. Импликация а)$\Longrightarrow$б) тривиальна.

ЛЕММА 16. Если R - квазинепрерывное справа антисингулярное справа кольцо, то $R=R_1\times R_2$, где R_1 - самоинъективное справа регулярное кольцо, а R_2 - редуцированное риккартово справа и слева кольцо.

Доказательство. По лемме 2 б) можно считать, что R - редуцированное кольцо. Так как кольцо R антисингулярно справа, то $r(a)$ - замкнутый правый идеал для любого $a\in R$. Так как, кроме того, кольцо R квазинепрерывно справа, то все замкнутые правые идеалы порождаются идемпотентами, откуда R риккартово справа кольцо, являющееся редуцированным. Поэтому кольцо R риккартово.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть R - антисингулярное справа кольцо, все факторкольца которого малоинъективны справа. Тогда $R=R_1\times R_2$, где R_1 - самоинъективное справа регулярное кольцо, а R_2 - инвариантное слева полунаследственное слева кольцо.

В частности, R - полунаследственное слева кольцо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение вытекает из лемм I, I', 15 и 13 б).

Автор благодарен А.В.Михалёву за внимание к работе.

Литература

1. Туганбаев.А.А. Кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны. - Труды Семинара им. И.Г.Петровского,-М.: МГУ, 1980, вып. 6.
2. Jeremy L. Modules et anneax quasi-continus. - Can. Math. Bull., 1974, 17, N 2, 217-228.
3. Jeremy L. Sur les modules et anneaux quasi-continus.- C. r. Acad. Sci., 1971, 273, A80-A83.
4. Osofsky B.L. Noninjective cyclic modules. - Proc. Amer. Math. Soc., 1968, 19, N 6, 1383-1384.
5. Туганбаев А.А. Кольца, все факторкольца которых малоинъективны. - Успехи мат. наук, 1980, № 3, 223-224.
6. Говоров В.Е. Малоинъективные модули. - Алгебра и логика, 1963, 2, № 6, 21-49.
7. Туганбаев А.А. Дистрибутивные модули. - Успехи мат. наук, 1980, № 5, 245-246.
8. Latsis D. Localisation dans les anneaux duos. - C. r. Acad. Sci., 1976, 282, A1403-A1406.

О МАЛОИНЪЕКТИВНЫХ МОДУЛЯХ

А.А.Туганбаев

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули – правыми и унитарными. Модуль M называется малоинъективным (квазиинъективным), если любой гомоморфизм $f: N \to N$ $(f: N \to M)$, где N произвольный подмодуль модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M. Квазиинъективные модули малоинъективны, а кольцо целых чисел является малоинъективным, но не квазиинъективным модулем над собой.

В работе ряд результатов, известных для квазиинъективных модулей, переносится на малоинъективные модули, а также отмечается, что артиновость коммутативного нётерова кольца равносильна квазиинъективности всех малоинъективных модулей.

Модуль M называется однородным, если $N \cap L \neq 0$ для любых ненулевых подмодулей N, L модуля M. Подмодуль N модуля M называется замкнутым в M, если N не имеет собственных существенных расширений в M. Подмодуль N модуля M называется абсолютным прямым слагаемым модуля M, если $N \oplus L = M$ для любого подмодуля L модуля M, дополнительного к N в M (т.е. для любого подмодуля L модуля M, максимального относительно свойства $L \cap N = 0$). Через $sing\, M$ обозначим подмодуль модуля M над кольцом R, образованный всеми элементами, аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами кольца R. Если $sing\, M = 0$ $(sing\, M = M)$, то M называется несингулярным (сингулярным) модулем. Через $E(M)$ и $End M$ обозначим соответственно инъективную оболочку и кольцо эндоморфизмов модуля M. Модуль M называется малопроективным (квазипроективным), если для любого эпиморфизма $h: M \to \bar{M}$ и произвольного гомоморфизма $\bar{f}: \bar{M} \to \bar{M}$ ($\bar{f}: M \to \bar{M}$) найдётся такое $f \in End M$, что $\bar{f}h = hf$ ($\bar{f} = hf$). Квазипроективный модуль малопроективен, а квазициклическая абелева группа малопроективна, но не квазипроективна. Говорят, что прямое разложение $M = \oplus_A M_\alpha$ дополняет прямые слагаемые, если для любого прямого слагаемого N модуля M найдётся такое подмножество $B \subseteq A$, что $M = N \oplus (\oplus_B N_\beta)$. Два прямых разложения $M = \oplus_A M_\alpha = \oplus_B N_\beta$ называются эквивалентными, если существует такая биекция $f: A \to B$, что $M_\alpha \simeq N_{f(\alpha)}$ для всех $\alpha \in A$. В работе используются некоторые результаты и терминология из книг [I,2,3,4,5].

ЛЕММА I. Пусть M -малоинъективный модуль; E -существенное расширение модуля M.

а) Если $f \in End E$, $N = f^{-1}M = \{m \in M \mid fm \in M\}$ и $fN \subseteq N$, то $fM \subseteq M$;

б) если $f = f^2 \in End E$, то $fM \subseteq M$;

в) если $E = \oplus_A E_\alpha$, то $M \oplus_A (M \cap E_\alpha)$.

Доказательство. а) Так как $fN \subseteq N$ и M -малоинъективный модуль, то найдётся такое $g \in End M$, что $g|N = f|N$. Пусть $y = fm - gm \in M \cap (f-g)M$. Тогда $fm = y + gm$, откуда $m \in N$ и, следовательно, $0 = fm - gm = y$. Поэтому $M \cap (f-g)M = 0$ и $(f-g)M = 0$, поскольку M -существенный подмодуль модуля E. Тогда $fM = gM \subseteq M$. Докажем пункт б). В силу пункта а) достаточно отметить, что $fN \subseteq N$. Действительно, если $m \in N$, то $ffm = fm \in M$, откуда $fm \in N$. Пункт в) вытекает из того, что в силу пункта б) $f_\alpha M \subseteq M$ для любой естественной проекции $f_\alpha : E \to E_\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть M -малоинъективный модуль.

а) Если $N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \subseteq M$, то существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus L$, что M_i -существенное расширение N_i для всех i;

б) если $N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \subseteq M$ и все модули N_i замкнуты в M_i, то $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \oplus L$;

в) каждый замкнутый подмодуль в M является его абсолютным

прямым слагаемым и каждый подмодуль в M является существенным подмодулем некоторого абсолютного прямого слагаемого модуля M ;
г) если M -неразложимый модуль, то M -однородный модуль.
Доказательство. Докажем пункт а). Пусть $E=E(M)$, $E_i=E(N_i)\leq E$. Тогда $E=E_1\oplus\ldots\oplus E_n\oplus E_{n+1}$. Поэтому в силу леммы I в) $M=M_1\oplus\ldots\oplus M_n\oplus M_{n+1}$, где $M_i=M\cap E_i$ для всех i . Обозначив $M_{n+1}=L$, получим искомое прямое разложение. Пункт б) вытекает из пункта а). Так как каждый подмодуль модуля M является существенным подмодулем некоторого замкнутого подмодуля модуля M , то для доказательства пункта в) достаточно доказать, что если N - замкнутый подмодуль модуля M и L -подмодуль модуля M , дополнительный к N , то $M=N\oplus L$. Действительно, L -замкнутый подмодуль в M , $M=N\oplus L\oplus L_1$ в силу пункта б) и $L_1=0$, поскольку $N\oplus L$ -существенный подмодуль в M . Пункт г) вытекает из пункта а).

Следующая ниже теорема является обобщением теоремы, доказанной для квазиинъективных модулей на стр. I27 книги [2] .

ТЕОРЕМА I. Пусть M -малоинъективный модуль.
а) Если $S_2\geq S_1=\operatorname{sing}M$ и $S_2/S_1=\operatorname{sing}(M/S_1)$, то S_2 -прямое слагаемое модуля M ;
б) любой гомоморфизм $f: M\to N$, где N -несингулярный модуль, расщепляется.

Доказательство. Докажем пункт а). По предложению I в) $M=M_1\oplus M_2$, где S_1 -существенный подмодуль модуля M_1 . Тогда M_1/S_1 -сингулярный модуль, откуда $M_1\leq S_2$. Поэтому $S_2=M_1\oplus L$. Так как S_2/S_1 -сингулярный модуль и $L\cap S_1=0$, то L -сингулярный модуль. Но тогда $L\leq S_1$ и, следовательно, $L=L\cap S_1=0$. Поэтому $S_2=M_1$ -прямое слагаемое модуля M . Докажем пункт б). Пусть $K=\operatorname{Ker}f$. Тогда $\operatorname{sing}(M/K)=0$, откуда (см. [I, с. 481]) K -замкнутый подмодуль модуля M и K -прямое слагаемое в M по предложению I в).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M=\oplus_A M_\alpha$; M -малоинъективный модуль и все модули M_α неразложимы. Тогда
а) разложение $M=\oplus_A M_\alpha$ дополняет прямые слагаемые;
б) для любого прямого слагаемого N модуля M найдется

такое подмножество $B \subseteq A$, что $N \simeq \oplus_B M_\beta$;
в) любые два разложения модуля M в прямую сумму неразложимых модулей эквивалентны.

Доказательство. Пусть $M = N \oplus W$; D -подмножество в A , максимальное относительно свойства $N \cap (\oplus_D M_\alpha) = 0$, $L = \oplus_D M_\alpha$, $B = A \setminus D$. Если мы докажем, что $N \oplus L = M$, то отсюда будут следовать пункты а) и б), поскольку тогда $N \simeq M/L \simeq \oplus_B M_\beta$. Так как N и L -прямые слагаемые в M и $N \cap L = 0$, то в силу предложения I б) $N \oplus L$ -прямое слагаемое модуля M и, следовательно, достаточно доказать, что $N \oplus L$ -существенный подмодуль модуля M . Так как по предложению I г) все неразложимые малоинъективные модули M_α однородны, то для доказательства существенности подмодуля $N \oplus L$ достаточно доказать, что $(N \oplus L) \cap M_\alpha \neq 0$ для каждого M_α , поскольку тогда каждый модуль $(N \oplus L) \cap M_\alpha$ является существенным подмодулем модуля M_α и, следовательно, $N \oplus L$ -существенный подмодуль модуля $\oplus_A M_A = M$.

Если $\alpha \in D$, то $M_\alpha \cap (N \oplus L) = M_\alpha \neq 0$. Если $\alpha \in B$, то в силу выбора D получаем, что $N \cap (L \oplus M_\alpha) \neq 0$. Пусть $0 \neq n = \ell + m$, $n \in N$, $\ell \in L$, $m \in M_\alpha$. Тогда $m = n - \ell \in M_\alpha \cap (N \oplus L)$, причём $m \neq 0$, так как в противном случае $0 \neq n = \ell \in N \cap L$. Пункт в) вытекает из пункта а) и теоремы I2.4 из книги [4] , утверждающей, что если модуль обладает прямым разложением, дополняющим прямые слагаемые, то любые два его разложения в прямую сумму неразложимых модулей эквивалентны.

ТЕОРЕМА 3. Малоинъективный модуль над нётеровым справа кольцом разлагается в прямую сумму однородных модулей и это прямое разложение дополняет прямые слагаемые.

Доказательство. Если $E = E(M)$, то E -прямая сумма неразложимых модулей (см. [2, с.183]) , являющихся по предложению I г) однородными. Утверждение вытекает теперь из леммы I в) и теоремы 2.

ЛЕММА 2. Пусть R -коммутативная нётерова область с полем частных Q ; S -целое замыкание R в поле Q . Тогда S -малоинъективный R-модуль.

Доказательство. Пусть A -ненулевой подмодуль R-модуля S и $f \in End A$. В силу инъективности

R -модуля Q и того,что $End\, Q_R = Q$,найдётся такое $x \in Q$,что $xa = f(a)$ для всех $a \in A$.Достаточно доказать,что $x \in S$.Пусть $0 \neq d \in A$.Тогда $x^n d \in S$ для всех $n \geq 0$.Так как S -целое замыкание коммутативной нётеровой области R ,то по теореме Мори - Нагаты (см. [5,гл.I]) кольцо S является кольцом Крулля и, следовательно,вполне целозамкнуто в Q (см. [3,с.544]) . Тогда $x \in S$ (см. [3,с.355]) .

ЛЕММА 3. Пусть R -коммутативная область с полем частных Q , S -целое замыкание R в поле Q ,причём S -квазиинъективный R-модуль.Тогда R -поле.

Доказательство. Докажем сначала,что $S = Q$. Если $0 \neq a \in S$,то умножение на элемент a^{-1} является гомоморфизмом из модуля aR в модуль S_R .Тогда $a^{-1}S \subseteq S$ (см. [2,с.I04]) и,следовательно, $a^{-1} = a^{-1}1 \in S$,откуда $S = Q$.Остаётся доказать,что $R = Q$.Пусть $0 \neq b \in R$. Тогда $b^{-1} \in Q = S$ и,следовательно,найдутся такие $r_0, \ldots, r_{n+1} \in R$,что $(b^{-1})^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} r_i (b^{-1})^i$. Тогда $b^{-1} = (b^{-1})^{n+1} b^n = \sum_{i=0}^{n} r_i b^{n-i} \in R$. Поэтому R -поле.

ЛЕММА 4. Если M -модуль над полупримарным кольцом R ,то

а) малоинъективность модуля M равносильна его квазиинъективности;

б) малопроективность модуля M равносильна его квазипроективности.

Доказательство. Пункт а) вытекает из теоремы I [6]. Пункт б) вытекает из предложения I [7] .

ТЕОРЕМА 4. Для коммутативного нётерова кольца равносильны следующие условия:

а) R -артиново кольцо;

б) все малоинъективные R-модули квазиинъективны.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) вытекает из леммы 4.Докажем импликацию б) $\Rightarrow$ а) .Для этого достаточно доказать,что все простые идеалы кольца R максимальны (см. [3,с.32I]) .Так как условие б) наследуется всеми факторкольцами кольца R ,то можно считать,что R -область. Тогда нужно доказать,что R -поле.Пусть S -целое замыкание R в поле частных Q .Из леммы 2 и условия б) вытекает, что S -квазиинъективный R-модуль. По лемме 3 R - поле.

Автор благодарен А.В.Михалёву за внимание к работе.

Литература

I. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории I.-М.:Мир, 1977.-688с.

2. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории 2.-М.:Мир, 1979.-463с.

3. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра.-М.: Мир, 1971.- 707 с.

4. Anderson F.W., Fuller K.R. Rings and categories of modules. N.Y., Springer, 1974.

5. Fossum R.M. The divisor class group of a Krull domain. Berlin e.a., Springer, 1973.

6. Туганбаев А.А. Квазиинъективные и малоинъективные модули. -Вестник МГУ, Сер. математика, механика, 1977, №2, 61-64.

7. Туганбаев А.А. Характеризация колец, использующая малоинъективные и малопроективные модули.-Вестник МГУ, Сер. математика, механика, 1979, №3, 48-51.

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ КЛАССА ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫХ МОДУЛЕЙ

Л.В.Тюкавкин

В этой заметке будут получены необходимые и достаточные условия аксиоматизируемости класса всех вполне приводимых модулей над кольцом. Напомним, что модуль над кольцом называется вполне приводимым, если он распадается в прямую сумму неприводимых модулей.

Везде ниже "кольцо" означает ассоциативное кольцо с единицей $1 \neq 0$, а "модуль" означает левый унитарный модуль, если не оговорено противное.

Все определения, касающиеся аксиоматизируемости класса алгебраических систем, можно найти в книге А.И.Мальцева "Алгебраические системы" [I].

Через $J(R)$ будем обозначать радикал Джекобсона кольца R.

Т е о р е м а I. Класс всех вполне приводимых модулей над кольцом R аксиоматизируем тогда и только тогда, когда фактор-кольцо $R/J(R)$ вполне приводимо.

Доказательство. Пусть класс всех вполне приводимых модулей над кольцом R аксиоматизируем. Очевидно, что прямая сумма вполне приводимых модулей является вполне приводимым модулем. Известно, что прямая сумма и прямое произведение модулей над кольцом элементарно эквивалентны [3, с. 9II]. Поэтому класс всех вполне приводимых R-модулей в силу своей аксиоматизируемости должен быть замкнут относительно взятия прямых произведений или мультипликативно замкнут. Кроме того, класс всех вполне приводимых модулей над любым кольцом наследствен , то есть вместе с произвольным своим модулем содержит любой его подмодуль. Это следует из того, что подмодуль вполне приводимого модуля вполне приводим(см., например [2 , с. 99]).

Рассмотрим теперь фактор-кольцо $\bar{R} = R/J(R)$ как R-модуль. Выберем в нем все максимальные подмодули - они существуют, так как это просто максимальные левые идеалы в $\bar{R}$. При этом пересечение всех максимальных R-подмодулей модуля $\bar{R}$ равно нулю, так как кольцо $\bar{R}$ полупросто. Согласно теореме Биркгофа (см., например [2 , с. 52]), R-модуль $\bar{R}$ является подпрямым произведением неприводимых R-модулей. В силу мультипликативной замкнутости и наследственности класса всех вполне приводимых модулей получаем, что $\bar{R}$ является вполне приводимым R-модулем. Так как любой неприводимый (а значит, и вполне приводимый) модуль над кольцом R аннулируется радикалом $J(R)$, то его можно естественным образом рассматривать как неприводимый (соответственно вполне приводимый) модуль над $\bar{R}$. Следовательно, кольцо $\bar{R}$ вполне приводимо.

Пусть теперь кольцо $\bar{R} = R/J(R)$ вполне приводимо. Как отмечено выше, любой вполне приводимый R-модуль можно рассматривать как вполне приводимый модуль над $\bar{R}$. Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Но над $\bar{R}$ все модули являются вполне приводимыми [2 , с. 106]. Поэтому система формул

$$T = \{((\forall x)(\alpha x = 0)) \mid \alpha \in J(R)\}$$

аксиоматизирует класс всех вполне приводимых модулей над R. В самой деле, модуль M удовлетворяет системе формул T в том и только том случае, если M можно естественным образом рассматривать как $\bar{R}$-модуль. Теорема тем самым полностью доказана.

С л е д с т в и е 2. Класс всех вполне приводимых левых R-модулей аксиоматизируем тогда и только тогда, когда аксиоматизируем класс всех правых вполне приводимых R-модулей.

Справедливость этого следствия вытекает из симметричности условий теоремы.

Также непосредственно из теоремы I вытекает

С л е д с т в и е 3. Класс всех вполне приводимых модулей над кольцом аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он является многообразием.

Т е о р е м а 4. Класс всех вполне приводимых модулей над кольцом R конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда кольцо $R/\mathcal{J}(R)$ вполне приводимо и радикал $\mathcal{J}(R)$ конечно порожден как двусторонний идеал в R.

Доказательство. Если класс всех вполне приводимых модулей над R конечно аксиоматизируем, то из теоремы I следует, что фактор-кольцо $R/\mathcal{J}(R)$ вполне приводимо. Покажем, что $\mathcal{J}(R)$ - конечно порожденный идеал в кольце R. Поскольку кольцо $R/\mathcal{J}(R)$ вполне приводимо, то класс всех вполне приводимых модулей аксиоматизируем системой формул

$$T=\{((\forall x)(ax=0))\mid a\in\mathcal{J}(R)\}.$$

Поскольку данный класс конечно аксиоматизируем, то, в силу теоремы компактности для языка первой ступени [I, с. 207], этот класс аксиоматизируем некоторой конечной совокупностью формул $T_0\subset T$. Пусть

$$T_0=\{((\forall x)(a_i x=0))\mid i=1,\dots,n\}$$

и $\mathcal{J}\subset\mathcal{J}(R)$ - двусторонний идеал кольца R, порожденный элементами $a_1,\dots,a_n\in\mathcal{J}(R)$. Допустим $\mathcal{J}\neq\mathcal{J}(R)$. Тогда кольцо $\widetilde{R}=R/\mathcal{J}$ не является полупростым. С другой стороны, $\widetilde{R}$, рассматриваемое как R-модуль, удовлетворяет совокупности формул T_0, то есть является вполне приводимым R-модулем. Поскольку $\mathcal{J}\subset\mathcal{J}(R)$, то из этого вытекает полная приводимость кольца $\widetilde{R}$, что противоречит $\mathcal{J}(\widetilde{R})\neq 0$. Следовательно, $\mathcal{J}=\mathcal{J}(R)$, то есть радикал конечно порожден как идеал в R.

Обратно, пусть кольцо $R/\mathcal{J}(R)$ вполне приводимо и $\mathcal{J}(R)$ порождается элементами $a_1,\dots,a_n$ как идеал в R. Из теоремы I вытекает, что в этом случае класс всех вполне приводимых модулей аксиоматизируем системой формул

$$T=\{((\forall x)(ax=0))\mid a\in\mathcal{J}(R)\}.$$

Поскольку $\mathcal{J}(R)$ порожден элементами $a_1,\dots,a_n$, то произвольный R-модуль M удовлетворяет системе формул T тогда и только тогда, когда он удовлетворяет конечной системе формул

$$T_0=\{((\forall x)(a_i x=0))\mid i=1,\dots,n\}.$$

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е 5. Если кольцо R артиново, то класс всех вполне приводимых модулей над R конечно аксиоматизируем.

Доказательство. В самом деле, в этом случае фактор-кольцо $R/J(R)$ вполне приводимо (см., например [2, с. 112]). Кроме того, из артиновости кольца R следует его нетеровость [2, с. 114]. Поэтому $J(R)$ конечно порожден как левый, а поэтому и как двусторонний идеал кольца R. Следовательно, выполняются условия теоремы 4.

Из симметричности условий теоремы 4 вытекает

С л е д с т в и е 6. Класс всех вполне приводимых левых модулей над кольцом R конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда конечно аксиоматизируем класс всех вполне приводимых правых R-модулей.

В заключение автор приносит свою благодарность профессору Л.А.Скорнякову, под руководством которого была написана эта работа.

Литература

1. А.И.Мальцев. Алгебраические системы.-М.: Наука,1970.-392с.
2. И.Ламбек. Кольца и модули.-М.: Мир, 1971. - 279 с.
3. G. Sabbagh. Aspects logiques de la pureté dans les modules.-C.r. Acad. Sci., 1970, 271, N 19, 909-912.

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ КЛАССА НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЕЙ

Л.В.Тюкавкин

Аксиоматизируемость некоторых классов модулей над кольцом впервые изучалась П.Эклофом и Г.Саббаґом. Ими получены критерии аксиоматизируемости всех важнейших гомологических классов модулей над кольцом [8, 9]. В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия аксиоматизируемости класса неприводимых модулей.

Все определения, касающиеся логических аспектов изложения, можно найти в книге А.И.Мальцева "Алгебраические системы" [I]. Все рассматриваемые формулы являются предложениями обычного языка первой ступени теории модулей над кольцом. Единственными нелогическими символами этого языка являются символ равенства, константа 0 и следующие функциональные символы: символ $+$ бинарной операции сложения и символ f_r унарной операции для каждого элемента r основного кольца. Мы условимся писать rx вместо $f_r(x)$, $-x$ вместо $(-1)\cdot x$ и знак неравенства вместо отрицания равенства.

Везде ниже под "кольцом" понимается ассоциативное кольцо с $1 \neq 0$, а "модуль" означает унитарный и, если не оговорено противное, левый модуль над кольцом. Через $J(R)$ обозначается радикал Джекобсона кольца R. Класс, состоящий из всех левых (правых) неприводимых модулей над кольцом и нулевого модуля, будем обозначать $\mathfrak{M}_\ell(R)$ (соответственно $\mathfrak{M}_r(R)$). Очевидно, что класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда аксиоматизируем класс всех левых неприводимых (ненулевых) R-модулей.

Автор пользуется случаем выразить признательность профессору Л.А.Скорнякову за постановку задачи и общее руководство, а также Д.В.Тюкавкину за полезные обсуждения.

§ I. Критерий аксиоматизируемости класса $\mathfrak{M}_\ell(R)$

Обозначим через $\mathfrak{N}_\ell(R)$ класс, дополнительный к классу $\mathfrak{M}_\ell(R)$.

ЛЕММА I.I. Класс $\mathfrak{N}_\ell(R)$ ультразамкнут.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное множество $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ модулей из этого класса и рассмотрим некоторое ультрапроизведение $M = \prod_{\alpha \in I} M_\alpha / \mathcal{D}$. По определению класса $\mathfrak{N}_\ell(R)$ в каждом модуле M_α можно найти ненулевой собственный подмодуль N_α. Непосредственно из определения ультрапроизведений вытекает, что модуль $N = \prod_{\alpha \in I} N_\alpha / \mathcal{D}$ является ненулевым собственным подмодулем в M.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Следующие условия на кольцо эквивалентны:

(I) класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем;

(2) класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ конечно аксиоматизируем;

(3) класс $\mathfrak{N}_\ell(R)$ конечно аксиоматизируем.

Д о к а з а т е л ь т в о. Импликация (2)$\Longrightarrow$(I) очевидна. Покажем, что (I) влечет (2). Пусть класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем системой формул $T = \{\Phi_\alpha \mid \alpha \in I\}$, но не аксиоматизируем никакой конечной подсистемой из T. Это означает, что в дополнительном классе $\mathfrak{N}_\ell(R)$ выполняется каждая конечная подсистема из T. В силу леммы I.I и локальной теоремы Мальцева[I, с. 207] вся система T выполнима в этом классе. Полученное противоречие показывает справедливость импликации (I)$\Longrightarrow$(2). Далее, если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем конечной совокупностью формул, то он аксиоматизируем формулой, являющейся конъюнкцией всех формул этой совокупности. При этом класс $\mathfrak{N}_\ell(R)$ аксиоматизируем отрицанием этой формулы, то есть справедлива импликация (2)$\Longrightarrow$(3). Полностью аналогично доказывается, что (3) влечет (2). Предложение тем самым полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду предложения I.2 мы всюду ниже будем считать, что аксиоматизируемость класса $\mathfrak{M}_e(R)$ означает, что он аксиоматизируем одной формулой Φ. Более того, из [I, с 210. следствие 4] вытекает, что мы можем считать формулу Φ универсальной.

ЛЕММА I.3. Если класс $\mathfrak{M}_e(A)$ аксиоматизируем и $f: A \to B$ - гомоморфное наложение колец, то класс $\mathfrak{M}_e(B)$ также аксиоматизируем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть класс $\mathfrak{M}_e(A)$ аксиоматизируем универсальной формулой Φ. Заменим в Φ каждое вхождение какого-либо символа $r \in A$ на вхождение символа $f(r) \in B$ и получим некоторое высказывание Φ^* на B-модулях. Если M - некоторый B-модуль, то он неприводим тогда и только тогда, когда он неприводим как естественным образом рассматриваемый модуль над A. При этом формула Φ истинна на $_A M$ тогда и только тогда, когда формула Φ^* истинна на $_B M$, то класс $\mathfrak{M}_e(B)$ аксиоматизируем формулой Φ^*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.4. Класс $\mathfrak{M}_e(R)$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда аксиоматизируем класс $\mathfrak{M}_e(R/J(R))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одну сторону предложение следует из леммы I.3. Пусть, обратно, $\bar{R} = R/J(R)$ и класс $\mathfrak{M}_e(\bar{R})$ аксиоматизируем формулой Φ. Для каждого элемента $r \in \bar{R}$ фиксируем произвольным образом один его прообраз при естественном наложении $R \to \bar{R}$. Далее, каждое вхождение какого-либо элемента $r \in \bar{R}$ в формулу Φ заменим на вхождение выбранного прообраза из R и получим высказывание Φ^* на R-модулях. Рассмотрим совокупность формул

$$T_0 = \{((\forall x)(ax = 0)) \mid a \in J(R)\}.$$

Нетрудно увидеть, что совокупность формул $T = T_0 \cup \{\Phi^*\}$ аксиоматизирует класс $\mathfrak{M}_e(R)$, что и доказывает предложение.

Заметим, что если класс $\mathfrak{M}_e(R)$ аксиоматизируем, то, в силу предложения I.4, мы можем охарактеризовать кольцо R лишь "по модулю" радикала $J(R)$. Поэтому в основных теоремах условия будут налагаться лишь на факторкольцо $R/J(R)$, что не означает ограничения общности.

ЛЕММА I.5. Если класс $\mathfrak{M}_e(R)$ аксиоматизируем, то существует натуральное число n такое, что любой неприводимый левый R-модуль имеет не более чем n элементов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что любой неприводимый модуль над R имеет мощность не большую, чем мощность кольца R. Поэтому если условие леммы не выполняется, то из теорем [1, с. 223, теорема 5] и [1, с. 220, теорема 3] вытекает, что класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ не может быть ультразамкнутым, а тем более аксиоматизируемым.

ЛЕММА 1.6. Если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то существует натуральное число n такое, что для любого примитивного слева идеала I кольца R факторкольцо R/I содержит не более n элементов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{R} = R/I$, а M - неприводимый точный $\bar{R}$-модуль. Хорошо известно, что R изоморфно подкольцу кольца всех групповых эндоморфизмов модуля M (например, [7], с. 12). Отсюда и из предыдущей леммы получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то идеал I кольца R примитивен слева тогда и только тогда, когда он является максимальным двусторонним идеалом в R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Максимальный двусторонний идеал, очевидно, примитивен. Обратно, пусть идеал I примитивен слева. В силу леммы 1.6 кольцо R/I конечно, в частности, артиново. Поэтому из примитивности кольца R/I вытекает его простота (например, [2], с. 64, теорема 1). Следовательно, I - максимальный двусторонний идеал.

Из следствия 1.7 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.8. Если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то радикал $J(R)$ равен пересечению всех максимальных двусторонних идеалов кольца R.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем. Тогда факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно подпрямому произведению полных матричных колец над конечными полями, причем среди этих колец лишь конечное число попарно неизоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{I_\alpha \mid \alpha \in S\}$ - множество всех максимальных двусторонних идеалов кольца R. Из следствия 1.8 и [5, с. 210] вытекает, что $R/J(R)$ изоморфно подпрямому произведению колец $\{R/I_\alpha \mid \alpha \in S\}$. Каждое из этих подпрямых сомножителей содержит в силу леммы 1.6 ограниченное сверху число элементов. Отсюда вытекает справедливость условий предложения о строении подпрямых сомножителей и существовании среди них лишь конечного числа попарно неизоморфных.

Непосредственно из предложения вытекает

СЛЕДСТВИЕ I.10. Если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то характеристика факторкольца $R/J(R)$ конечна и свободна от квадратов.

Ряд следующих простых лемм понадобится нам для доказательства предложения I.15.

ЛЕММА I.11. Пусть R - конечное кольцо. Тогда существует натуральное число n такое, что x^n является идемпотентом для всякого $x \in R$.

Доказательство. Пусть $x \in R$ и P - мультипликативная подгруппа, порожденная x . Так как P конечна, то в ней есть идемпотент, то есть $x^{n(x)}$ является идемпотентом для некоторого натурального числа $n(x)$. Произведение n чисел $n(x)$ для всех $x \in R$, очевидно, удовлетворяет условию леммы.

ЛЕММА I.12. Пусть класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем. Тогда существует натуральное число n такое, что факторкольцо $R/J(R)$ удовлетворяет тождеству $x^{2n} = x^n$.

Доказательство. В силу предложения I.9 мы можем представить кольцо $R/J(R)$ как подпрямое произведение конечных колец, среди которых лишь конечное число попарно неизоморфны . Пусть $R_1, \dots, R_m$ - максимальная совокупность попарно неизоморфных подпрямых сомножителей $R/J(R)$, и пусть n_i - натуральное число для кольца R_i , удовлетворяющее условию леммы I.II. Понятно, что произведение n всех чисел n_i , $i = 1, \dots, m$, удовлетворяет условию леммы.

ЛЕММА I.13. Пусть кольцо R имеет конечную свободную от квадратов характеристику. Тогда R изоморфно конечной прямой сумме колец, каждое из которых имеет простую характеристику.

Доказательство. Из известной теоремы теории абелевых групп следует, что аддитивная группа кольца R распадается в прямую сумму подгрупп простых характеристик (например [4], с. 62, теорема 6). Легко видеть, что в условиях леммы все эти прямые слагаемые аддитивной группы кольца R являются идеалами в R .

Из следствия I.10 и леммы I.13 вытекает

СЛЕДСТВИЕ I.14. Если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то кольцо $R/J(R)$ разлагается в конечную прямую сумму колец простых характеристик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.15. Если класс $\mathfrak{N}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то кольцо $\bar{R}=R/J(R)$ локально конечно.

Доказательство. В силу следствия I.14 мы можем считать, что $\bar{R}$ имеет простую характеристику p. Поэтому кольцо $\bar{R}$ можно рассматривать как алгебру над простым полем из p элементов. Из леммы I.12 вытекает, что $\bar{R}$ алгебраично над этим полем. Поэтому из леммы I.12 и [7, с. 159, теорема 6,4.3] следует локальная конечность кольца $\bar{R}$.

ТЕОРЕМА I.16. Если класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем, то он аксиоматизируем одной формулой вида

$$((\forall x,y)(x=0 \vee r_1 x = y \vee \ldots \vee r_n x = y)) ,$$

где $r_1,\ldots,r_n$ - некоторые элементы кольца R.

Доказательство. Сначала докажем лемму.

ЛЕММА I.17. Пусть все неприводимые левые модули над кольцом R конечны. Тогда класс $\mathfrak{N}_\ell(R)$ аксиоматизируем совокупностью формул

$$T=\{((\exists x,y)(x\neq 0 \,\&\, r_1 x \neq y \,\&\, \ldots \,\&\, r_m x \neq y)) \mid (r_1,\ldots r_m)\in S\},$$

где S - множество всех конечных последовательностей элементов из R.

Доказательство леммы. Пусть модуль M принадлежит классу $\mathfrak{N}_\ell(R)$. Тогда он содержит ненулевой собственный подмодуль N. Если мы возьмем $0\neq x\in N$ и $y\in M\setminus N$, то $rx\neq y$ ни для какого элемента r кольца R. Поэтому M удовлетворяет системе формул T. Обратно, пусть M является неприводимым R-модулем. Тогда найдется, в силу конечности M, такой конечный набор $r_1,\ldots,r_n$ элементов кольца R, что для всяких $x,y\in M$ из $x\neq 0$ вытекает равенство $r_i x = y$ для некоторого i, $1\le i\le m$. Поэтому формула

$$\Psi=((\exists x,y)(x\neq 0 \,\&\, r_1 x\neq y \,\&\, \ldots \,\&\, r_n x\neq y))$$

из совокупности T ложна на M, что и доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы. Из леммы I.5 следует, что в условиях теоремы всякий неприводимый модуль конечен.

Поэтому, как вытекает из леммы I.17, класс $\mathfrak{N}_e(R)$ аксиоматизируем системой формул T. Далее, в силу предложения I.2 класс $\mathfrak{N}_e(R)$ конечно аксиоматизируем. Как вытекает из локальной теоремы Мальцева [I, с. 207], он в этом случае может быть аксиоматизируем конечной подсистемой формул из T. Пусть это будут формулы $\Psi_1, \dots, \Psi_t$. Каждая из них имеет вид

$$\Psi_i = ((\exists x, y)(x \neq 0 \,\&\, r_{i1}x \neq y \,\&\, \dots \,\&\, r_{im_i}x \neq y)) ,$$

где $r_{i1}, \dots, r_{im_i}$ - некоторые элементы кольца R. Пусть $\{r_1, \dots, r_n\}$ - объединение всех подмножеств $\{r_{i1}, \dots, r_{im_i}\}$, $i = 1, \dots, t$. Тогда нетрудно заметить, что формула

$$\Psi = ((\exists x, y)(x \neq 0 \,\&\, r_1 x \neq y \,\&\, \dots \,\&\, r_n x \neq y))$$

аксиоматизирует класс $\mathfrak{N}_e(R)$. Поэтому класс $\mathfrak{M}_e(R)$ аксиоматизируем формулой

$$((\forall x, y)(x = 0 \vee r_1 x = y \vee \dots \vee r_n x = y)) ,$$

равносильной формуле $(\neg \Psi)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА I.18. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

(I) класс $\mathfrak{M}_e(R)$ элементарно замкнут;

(2) класс $\mathfrak{N}_e(R)$ аксиоматизируем;

(3) все неприводимые R-модули конечны.

Доказательство. Если класс $\mathfrak{M}_e(R)$ элементарно замкнут, то он, очевидно, замкнут относительно ультрастепеней. Поэтому из теоремы [I, с.223, теорема 5] следует конечность любого неприводимого R-модуля. Импликация (3) $\Longrightarrow$ (2) доказана в лемме I.17. Наконец, если класс $\mathfrak{N}_e(R)$ аксиоматизируем, то он, в частности, элементарно замкнут. Поэтому элементарно замкнут и дополнительный к нему класс, что и заканчивает доказательство теоремы.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА I.19. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

(I) класс $\mathfrak{M}_e(R)$ аксиоматизируем;

(2) существует конечное подкольцо A факторкольца $R/J(R)$ такое, что $A + I = R/J(R)$ для любого максимального левого идеала I кольца $R/J(R)$;

(3) существует конечное подкольцо A факторкольца

$R/J(R)$ такое, что любой неприводимый левый R-модуль неприводим как естественным образом рассматриваемый левый модуль над A.

Доказательство. В силу предложения I.4 нам достаточно провести доказательство для случая полупростых колец. Итак, пусть кольцо R полупросто. Покажем сначала, что условие (I) влечет условие (3). Поскольку класс $\mathfrak{M}_e(R)$ аксиоматизируем, то согласно теореме I.16 он может быть аксиоматизируем одной формулой вида

$$\Phi=((\forall x,y)(x=0\vee \tau_1 x=y\vee\ldots\vee \tau_n x=y)).$$

Пусть A - подкольцо кольца R, порожденное элементами $\tau_1,\ldots,\tau_n$ и единицей кольца R. Из предложения I.15 вытекает конечность кольца A. Если теперь M - неприводимый R-модуль, то он удовлетворяет формуле Φ, то есть неприводим и как A-модуль, что и надо было доказать. Покажем справедливость импликации (3)$\Longrightarrow$(2). Пусть конечное подкольцо A кольца R удовлетворяет условию (3). Поскольку A, являясь подкольцом кольца R, содержит единицу кольца R, то $A+I\neq I$ для любого максимального идеала I кольца R. Следовательно, $A+I=R$, иначе $(A+I)/I$ являлся бы ненулевым собственным A-подмодулем неприводимого над A модуля R/I. Таким образом, (3) влечет (2). Докажем, наконец, что верна импликация (2)$\Longrightarrow$(I). Пусть $\tau_1,\ldots,\tau_m$ - все элементы подкольца A. Утверждаем, что формула

$$\Phi=((\forall x,y)(x=0\,\&\,\tau_1 x=y\,\&\ldots\&\,\tau_m x=y))$$

аксиоматизирует класс $\mathfrak{M}_e(R)$. В самом деле, очевидно, что Φ истинна только на модулях из этого класса. Обратно, если M - неприводимый R-модуль, x и y - элементы модуля M и $x\neq 0$, то найдется такой максимальный левый идеал I кольца R, что $M\cong R/I$, причем $x=f(1)$, где $f: R\to M$ - естественный эпиморфизм R-модулей, определенный идеалом I. Поскольку $f(A)=f(R)$ в силу условия (2), то найдется $\tau\in A$ такой, что $f(\tau)=y$. Следовательно, имеет место соотношение $\tau x=y$, где $\tau\in A$. Тем самым теорема полностью доказана.

§ 2. Равносильность аксиоматизируемости классов $\mathfrak{M}_\ell(R)$ и $\mathfrak{M}_r(R)$

В этом параграфе с помощью критерия, полученного в теореме I.19, доказывается, что классы всех правых и всех левых неприводимых модулей над кольцом аксиоматизируемы одновременно.

Всюду в этом параграфе через R_n будет обозначаться полное кольцо $(n \times n)$-матриц над кольцом R.

ЛЕММА 2.I. Пусть R - примитивное справа кольцо и класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем. Тогда R - простое кольцо.

Доказательство. В силу [7, с. 47, теорема 2.I.4] либо R простое кольцо, либо найдется тело D такое, что для любого натурального m существует подкольцо $S^{(m)}$ кольца R и наложение колец $S^{(m)} \to D_m$. Согласно лемме I.I2 найдется натуральное число n такое, что R удовлетворяет тождеству $x^{2n} = x^n$. С другой стороны, для любого тела D найдется натуральное число m такое, что D_m не удовлетворяет этому тождеству [7, с. I47, лемма 6.2.I]. Поэтому вторая возможность не может иметь места, то есть кольцо R просто.

ЛЕММА 2.2. Пусть класс $\mathfrak{M}_\ell(R)$ аксиоматизируем. Тогда идеал I кольца R примитивен справа тогда и только тогда, когда он максимален как двусторонний идеал.

Доказательство. Максимальный двусторонний идеал, очевидно, примитивен. Обратно, если I примитивен справа в кольце R, то из леммы I.3 и леммы 2.I следует простота кольца R/I. Поэтому идеал I максимален.

Пусть R - кольцо и A -подкольцо в R. Для удобства дальнейшего изложения введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Скажем, что подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева (справа), если каждый неприводимый левый (соответственно правый) R-модуль неприводим как модуль над A.

ЛЕММА 2.3. Пусть подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева. Тогда если J - максимальный левый идеал кольца R, то $J_0 = A \cap J$ - максимальный левый идеал кольца A, а A-модули A/J_0 и R/J изоморфны.

Доказательство. Очевидно, что J_0 - левый идеал кольца A . Пусть $f: R \to R/J$ - естественный эпиморфизм R-модулей. Тогда $f(R)=f(A)$, поскольку иначе $f(A)$ был бы ненулевым собственным подмодулем неприводимого по условию A-модуля R/J . Теперь имеет место изоморфизм A-модулей $R/J \cong f(A) \cong A/(A\cap J)=A/J_0$ и, следовательно, J_0 - максимальный левый идеал кольца A .

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть R - полупростое кольцо и подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева. Тогда кольцо A полупросто.

Доказательство легко вытекает из леммы 2.3 и того факта, что радикал Джекобсона равен пересечению всех максимальных левых идеалов кольца.

ЛЕММА 2.5. Пусть R - конечное полупростое кольцо и подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева. Тогда любой максимальный левый идеал J_0 кольца A имеет вид $J_0=A\cap J$, где J - максимальный левый идеал кольца R .

Доказательство. Поскольку кольцо A артиново в силу конечности и полупросто в силу следствия 2.4, то оно регулярно [3, с. 112, предложение 2]. Так как кольцо A конечно, то любой левый идеал в A представим как сумма главных левых идеалов, а поэтому в силу [6, с. 18, теорема 1], порождается идемпотентом. В частности, если J_0 - максимальный левый идеал в A , то $J_0=Ae$, где $e^2=e$. Если теперь J - максимальный левый идеал кольца R , содержащий Re , то $J_0=A\cap J$.

ЛЕММА 2.6. Пусть R - простое конечное кольцо и подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева. Тогда A также простое кольцо.

Доказательство. Пусть I - произвольный двусторонний собственный идеал кольца A . Он содержится в некотором максимальном левом идеале J_0 кольца A . Из леммы 2.5 следует, что $J_0=A\cap J$, где J - максимальный левый идеал кольца R . Ввиду леммы 2.3 A-модули A/J_0 и R/J изоморфны. Но R-модуль R/J , будучи неприводимым, изоморфен как R-модуль (а тем более как A-модуль) минимальному левому идеалу K кольца R . Это вытекает из того, что кольцо R является простым и в силу конечности артиновым, а любой неприводимый модуль над простым артиновым кольцом изоморфен минимальному левому идеалу этого кольца (например [2], с. 75, теорема 2). Далее, $I \subseteq ann_A(A/J_0) = ann_A(K)$, то есть $I \cdot K = 0$. Так как простое кольцо первично [7, с. 48, теорема 2.1.2], то отсюда $I = 0$. Значит, A - простое кольцо, что доказывает лемму.

Пусть R - конечное простое кольцо. В частности, R будет артиновым и поэтому изоморфно полному матричному кольцу над конечным полем. Следовательно, любые два левых (правых) неприводимых R-модуля имеют одно и то же число элементов. Более того, любые два неприводимых R-модуля (один может быть левым, а другой правым) имеют одно и то же число элементов. Поэтому корректно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть R - конечное простое кольцо. Обозначим через $m(R)$ число элементов неприводимого R-модуля.

ЛЕММА 2.7. Пусть R - конечное простое кольцо и подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева. Тогда $m(A) = m(R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2.6 вытекает, что кольцо A простое, то есть запись $m(A)$ имеет смысл. Пусть M - произвольный неприводимый левый A-модуль, $M \cong A/J_0$, где J_0 - максимальный левый идеал в A. Как утверждает лемма 2.5, найдется такой максимальный левый идеал J кольца R, что $J_0 = A \cap J$. При этом в силу леммы 2.3 A-модули R/J и A/J_0 изоморфны. Поскольку R-модуль R/J неприводим, то отсюда и получается утверждение леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть R - конечное простое кольцо и подкольцо A наследует неприводимость кольца R слева. Тогда A наследует неприводимость кольца R и справа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M - неприводимый правый модуль над R, $M \cong R/J$, где J - максимальный правый идеал кольца R. Очевидно, $J_0 = A \cap J$ - правый идеал в кольце A, а A/J_0 можно рассматривать как подмодуль A-модуля R/J. Этот модуль содержит $m(R)$ элементов, то есть в силу леммы 2.7 A-модуль A/J_0 содержит не более чем $m(A)$ элементов. Поскольку $A/J_0 \neq 0$, то A/J_0 содержит ровно $m(A)$ элементов и является неприводимым правым A-модулем. Поэтому A-модули R/J и A/J_0 изоморфны, то есть M неприводим как правый модуль над A. Предложение тем самым полностью доказано.

ТЕОРЕМА 2.9. Классы $\mathfrak{M}_l(R)$ и $\mathfrak{M}_r(R)$ аксиоматизируемы одновременно.

Доказательство. В силу предложения I.4 достаточно доказать теорему для случая полупростого кольца R. Итак, пусть класс $\mathfrak{M}_l(R)$ аксиоматизируем и кольцо R полупросто. Из теоремы I.19 вытекает существование в кольце R конечного подкольца A, наследующего неприводимость R слева. Покажем, что в этом случае подкольцо A наследует неприводимость кольца R справа. Пусть M – произвольный неприводимый правый R-модуль. Согласно лемме 2.2 примитивный справа идеал $I=ann_R(M)$ примитивен и слева. Поэтому, как утверждает лемма I.6, фактор-кольцо $\bar{R}=R/I$ конечно. Пусть $\bar{A}$ – образ подкольца A при естественном гомоморфизме колец $R \to \bar{R}$. Очевидно, что подкольцо $\bar{A}$ наследует неприводимость кольца $\bar{R}$ слева. Поскольку выполняются все условия предложения 2.8, так как в силу леммы 2.2 идеал I максимален, то подкольцо $\bar{A}$ наследует неприводимость кольца $\bar{R}$ и справа. В частности, модуль M неприводим как правый модуль над $\bar{A}$. Следовательно, M неприводим как правый A-модуль. В силу произвольности неприводимого правого модуля M получаем, что подкольцо A наследует неприводимость кольца R и справа. Применяя правосторонний аналог теоремы I.19, получаем аксиоматизируемость класса $\mathfrak{M}_r(R)$. Тот факт, что аксиоматизируемость класса $\mathfrak{M}_r(R)$ влечет аксиоматизируемость класса $\mathfrak{M}_l(R)$, доказывается полностью аналогично. Теорема тем самым полностью доказана.

Литература

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. - М.: Наука, 1970.- 392 с.
2. Джекобсон Н. Строение колец. - М.: ИЛ, 1961.- 287 с.
3. Ламбек И. Кольца и модули. - М.: Мир, 1971.- 279 с.
4. Ленг С. Алгебра. - М.: Мир, 1968. - 564 с.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. - М.: Наука, 1973. -399с.
6. Скорняков Л.А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. - М.: Изд-во физ-мат. лит-ры, 1961. - 198 с.
7. Херстейн И. Некоммутативные кольца. - М.: Мир, 1972.- 190 с.
8. Eklof P., Sabbagh G. Model-completion and modules. Ann. Math. Log., 1971, v 2, N3, 251-295.

9. Sabbagh G., Eklof P. Definability problems for modules and rings. J. Symbolic Log., v. 36, N 4, 623-649.

О СЛОЖНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТОВ

М.Я. Финкельштейн

Данная работа является продолжением [I] и в ней используются понятия, введенные там.

Из теоремы I [I] возникает вопрос, какое количество простейших пар [I, определение 8] надо взять, чтобы их треугольное произведение [I, определение 3] делилось на данную пару [I, определение 2]? Ответ на него оказывается несколько неожиданным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. I) Пусть (R, M) – конечная пара и $\operatorname{char} R = p^n$, тогда найдется конечная простейшая пара (S, N) такая, что $(R, M) \mid (S, N)$.

2) Пусть (R, M) – конечная пара, тогда найдется бесконечная простейшая пара (S, N) и согласованная пара наложений $\varphi : S \to R$ и $\psi : N \to M$.

3) Пусть (R, M) пара и M – свободная абелева группа с конечным числом образующих. Тогда найдется бесконечная простейшая пара (S, N) такая, что (R, M) является ее подпарой.

4) Для каждой пары (R, M), где M – конечнопорожденная абелева группа, найдется бесконечная простейшая пара (S, N) такая, что $(R, M) \mid (S, N)$.

Доказательство. I) Пусть $M = \sum_{i=1}^{k} {}^{\oplus} Z/Zp^{n_i}$ как абелева группа. Положим $N = \sum_{i=1}^{k} {}^{\oplus} Z/Zp^{n}$ и $S = End_Z(N)$. Тогда (S, N) – простейшая пара. Если $\{m_i\}$ – система свободных образующих Z/Zp^n-модуля N, положим $m_i' = p^{(n-n_i)} m_i$. В этом случае абелева группа M', натянутая на m_i', изоморфна группе M и можно считать, что $R \subseteq End_Z(M')$. Кроме того, если $\alpha \in End_Z(M')$ и $\alpha(m_i') = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} m_j$, где $\alpha_{ij} \in Z/Zp^n$, то $p^{n_i} \alpha(m_i') =$

$=0$ и, следовательно, $p^{n_i}\alpha_{ij} m_j = 0$, а значит, $\alpha_{ij} = p^{n-n_i}\alpha'_{ij}$. Положив $\alpha'(n_i) = \sum_{j=1} \alpha'_{ij} m_j$, можно заметить, что $\alpha' \in End_Z(N)$ и ограничение $\alpha'|_{M'} = \alpha$. Пусть теперь $S' = \{S \in S \mid$ существует $r \in R$ такой, что $S|_{M'} = r\}$. Итак, по вышеизложенному, имеет место изоморфизм пар $(R,M) \cong (S'/(0:M'), M')$, что и требовалось доказать.

2) Пусть (R, M) - конечная пара. Заметим, что $M = \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} M_i$, $R = \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} R_i$, $char\, R_i = p_i^{n_i}$ и $R_i M_j = 0$ при $i \neq j$. Легко проверить, что пара (S', N'), где $N' = \sum_{i=1}^{\ell}{}^{\oplus} Z/Zp^n$, $S' = End_Z(N')$, является гомоморфным образом пары (S'', N''), где N'' - абелева группа с ℓ свободными образующими, а S'' - ее кольцо эндоморфизмов. По предыдущему пункту пара (R_i, M_i) для каждого i оказывается образом пары (S'_i, N'_i), являющейся подпарой простейшей конечной пары (S_i, N_i). Но как указано выше, существует гомоморфное наложение $(\varphi_i, \psi_i) : (S''_i, N''_i) \to (S_i, N_i)$, где (S''_i, N''_i) - бесконечная простейшая пара. Пусть $K_i = Ker\, \psi_i$, N'''_i - полный прообраз группы N'_i при отображении ψ_i, а S'''_i - ограничение на N'''_i полного прообраза кольца S'_i при отображении φ_i. Положим $N = \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} N'''_i$ и обозначим через S подкольцо кольца $End_Z(N)$, натянутое на объединение $(\sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} S'''_i) \cup (K:N)$, где $K = \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} K_i$. Поскольку группа N_i конечна, абелевы группы K_i и N'''_i свободны и имеют один и тот же ранг. Значит, один и тот же ранг имеют группы K и N, а поэтому найдется число m такое, что $mN \leq K$ и, следовательно, $m\, End_Z(N) \leq S$. Отсюда вытекает, что пара (S, N) простейшая. Кроме того, по построению $(S/(K:N), N/K) \cong (\sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} S'_i, \sum_{i=1}^{k}{}^{\oplus} N'_i)$ и, таким образом, пара (R, M) является гомоморфным образом простейшей пары (S, N).

3) Для доказательства этого пункта достаточно заметить, что $R \leq End_Z(M)$ и пара $(End_Z(M), M)$ является простейшей.

4) Если группа M свободна или конечна, то утверждение уже доказано в предыдущих пунктах. Если же M - смешанная группа, то при доказательстве теоремы I [I] пара (R, M) разлагалась в треугольное произведение пар $(R_1, M_1) \Delta (R_2, M_2)$, где группа M_1 свободна и группа M_2 конечна. Из п.3 и леммы 6 [I]

$$(R_1, M_1) \Delta (R_2, M_2) \mid (End_Z(M_1), M_1) \Delta (R_2, M_2).$$

По п.2 найдется простейшая бесконечная пара (S_2, N_2) и согласованная пара наложений $\varphi : S_2 \to R_2$, $\psi : N_2 \to M_2$. Так как M_1 - свободная абелева группа, то для любого $\alpha \in Hom_Z(M_1, M_2)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[dl, dashed, "\alpha'"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ N_2 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

дополняется гомоморфизмом α' до коммутативной. Поэтому отображения $\psi_1 = 1_{M_1} + \psi$ и $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1_{End_Z(M_1)} & 0 \\ Hom_Z(1_{M_1}, \psi) & \varphi \end{pmatrix}$ задают наложение пары $(End_Z(M_1), M_1) \Delta (S_2, N_2)$ на пару $(End_Z(M_1), M_1) \Delta (R_2, M_2)$. Используя это и лемму 6 [I] получаем

$$(R,M) \mid (End_Z(M_1), M_1) \Delta (S_2, N_2) \mid$$
$$\mid (End_Z(M_1), M_1) \Delta (End_Z(N_2), N_2) \mid (End_Z(M_1 \oplus N_2), M_1 \oplus N_2),$$

что и требовалось доказать.

Это предложение отражает тот факт, что и в "очень хорошем" кольце есть "плохие" подкольца. Однако ситуация резко меняется, если рассматривать только достаточно богатые подкольца треугольного произведения. Это приводит нас к понятию сложности, аналогичному понятиям из гл.6 [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть (R, M) - пара и M - свободная (конечная) абелева группа. Ее сложностью $C_R(M)$ назовем минимальное число k такое, что для подходящих (конечных) простейших пар (S_i, N_i) найдется подпара (S, N) треугольного произведения $\overset{k}{\underset{i=1}{\Delta}} (S_i, N_i)$ такая, что:

I) для каждого $s_i \in S_i$ и для подходящих $s_j \in S_j$, $h_{ij} \in Hom_Z(N_i, N_j)$ элемент $\begin{pmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ h_{1k} & \dots & s_k \end{pmatrix}$ лежит в S;

2) имеется гомоморфное наложение пар $(\varphi, \psi) : (S, N) \to (M, R)$

Пусть (R, M) - пара и M_t - периодическая часть M. Сложностью пары (R, M) назовем число $C_R(M) = C_{R/(0:M_t)}(M_t) + C_{R/(M_t:M)}(M/M_t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (R, M) - пара и M - свободная (конечная) абелева группа. Сложностью R-модуля M называется минимальное число k такое, что существует ряд подмодулей $0 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_k = M$, для которого пары $(R/(M_{i-1} : M_i), M_i / M_{i-1})$ являются простейшими.

ЛЕММА I. Пусть (R, M) - пара; M - свободная абелева группа с конечным числом образующих; k - сложность R-модуля M и

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_k = M \qquad (I)$$

ряд, о котором говорится в определении 2. Тогда факторгруппы M_i / M_{i-1} бесконечны для каждого i, а для любого ряда R-подмодулей модуля M

$$0 = M_0^* \leq M_1^* \leq \dots \leq M_t^* = M$$

такого, что для всех i пары $(R/(M_{i-1}^* : M_i^*), M_i^* / M_{i-1}^*)$ простейшие бесконечные, выполняется равенство $t = k$.

Доказательство. При доказательстве теоремы I [I] в M был построен ряд подмодулей

$$0=M_0'\subseteq M_1'\subseteq\ldots\subseteq M_e'=M \qquad (2)$$

такой, что $(R/(M_{j-1}':M_j'), M_j'/M_{j-1}')$ - простейшие бесконечные пары. По условию $e\geqslant k$. Эти два ряда обладают уплотнениями с изоморфными факторами. Но по определению бесконечной простейшей пары, для любого уплотнения ряда (2) на отрезке $[M_{j-1}':M_j']$ имеется один и только один бесконечный фактор. Поэтому для него соответствующая пара $(R/(M_{i-1}:M_i), M_i/M_{i-1})$ из ряда (I) являестся бесконечной простейшей, следовательно, два таких фактора не могут принадлежать уплотнению одного отрезка ряда (I). Если в ряду (I) есть конечные факторы, то $k>e$, что противоречит условию. Из доказательства непосредственно вытекает и второе утверждение леммы.

ТЕОРЕМА I. Пусть (R, M) - пара, где M - свободная или конечная абелева группа. Тогда сложность пары (R, M) равна сложности R-модуля M, а пары (S_i, N_i), упоминаемые в определении I, могут быть выбраны среди делителей пары (R, M).

Доказательство. Пусть M - конечная (свободная) группа; k есть сложность R-модуля M, и $0=M_0\subseteq M_1\subseteq\ldots\subseteq M_k=M$ - ряд подмодулей, обладающий указанными в определении 2 свойствами. Тогда по лемме I пары $(R/(M_{i-1}:M_i), M_i/M_{i-1})$ - простейшие конечные (бесконечные). Если M - свободная группа, то, как показано при доказательстве теоремы I [I], $(R,M)\,|\,\overset{k}{\underset{i=1}{\Delta}}(R/(M_{i-1}:M_i), M_i/M_{i-1})$, причем эта делимость удовлетворяет требованиям, налагаемым в определении I. Если же M - конечная группа, то по лемме 4 [I] найдутся подгруппы $M_i'\subseteq M_i$ и подкольца S_i такие, что пары $(S_i/(0:M_i'), M_i')$ - простейшие, $S_i/(M_{i-1}:M_i)=R/(M_{i-1}:M_i)$ и $M_{i-1}+M_i'=M_i$. Следовательно, аналогично § 15 [3] можно показать, что $M_i=M_i'\cdot M_i''$, где подгруппа M_i'' может быть выбрана в M_{i-1}. Поэтому если $p^s(M_i)=\{m\in M_i\,|\,p^s m=0\}$, то $p^s(M_i)=p^s(M_i')+p^s(M_{i-1})=\sum_{j=1}^{i}p^s(M_j')$ для любых чисел p и s. По лемме I [I]

$$(R,M)\,|\,(S_k,M_k')\,\Delta\,(R/(0:M_{k-1}), M_{k-1}),$$

и из соображений индукции можно считать, что

$$(R/(0:M_{k-1}), M_{k-1})\,|\,\overset{1}{\underset{i=k-1}{\Delta}}(S_i/(0:M_i'), M_i').$$

Если аддитивный порядок модуля M_k равен p^s, то из приведенных выше соображений и из того, что M_k - свободный Z/Zp^s-модуль, следует, что $(R,M)\,|\,\overset{1}{\underset{i=k}{\Delta}}(S_i/(0:M_i'), M_i')$ и эта делимость удовлетворяет требованиям, входящим в определение I. Следовательно, $C_R(M)\leq k$, то есть сложность пары не больше сложности k -

модуля M.

Пусть теперь $C_R(M)=k$. Тогда $(R,M)\mid \overset{k}{\underset{i=1}{\Delta}}(S_i,N_i)$, где пары (S_i, N_i) – простейшие и делимость удовлетворяет требованиям, входящим в определение I. Пусть (R', M') подпара треугольног произведения и (φ, ψ) осуществляют ее наложение на пару (R, M). Пусть $M''=M'\cap N_k$ и $\bar{M}=\psi(M'')$. Поскольку M'' – R'-подмодуль, то $\bar{M}$ – R-подмодуль. Кроме того, из $r\in R'$ и $rM''=0$ следует, что $\varphi(r)\bar{M}=0$. Установив теперь равенство $(0:M')+S_k=R'$, следующее из определения треугольного произведения и требований определения I, заключаем, что существует наложение пар $(\bar{\varphi},\bar{\psi}):(S_k,M'')\to(R/(0:\bar{M}),\bar{M})$. Следовательно, если (S_k, N_k) – простейшая конечная пара, то по ее определению пара $(R/(0:M_1),M_1)$ – также простейшая. Если же пара (S_k,N_k) – простейшая бесконечная, то ее эпиморфный образ либо конечен, либо является простейшей бесконечной парой. Рассмотрим теперь естественный гомоморфизм пар $(\alpha,\beta):(R,M)\longrightarrow(R/(\bar{M}:M), M/\bar{M})$, заметим, что $\beta\psi(M'\cap N_k)=0$ и, следовательно, по лемме 2 [I] $(R/(\bar{M}:M), M/\bar{M})\mid \overset{k-1}{\underset{i=1}{\Delta}}(S_i,N_i)$; причем делимость удовлетворяет требованиям, входящим в определение I. По индукции в $M/\bar{M}$ можно построить ряд $0=M_1'\subseteq M_2'\subseteq\ldots\subseteq M_k'=M/\bar{M}$ такой, что соответствующие пары либо все оказываются конечными простейшими, либо среди них встречаются бесконечные простейшие пары, а остальные пары конечны. Таким образом, для конечной пары первая часть теоремы доказана, а для бесконечной она следует из леммы I.

Последнее из утверждений теоремы доказано при построении пар в начале рассуждения.

Заметим, что в лемме мы указали явный способ вычисления сложности пары (R, M), если M – свободная абелева группа. Поэтому далее можно предполагать, что пара (R, M) конечна.

Пусть (R, M) – простейшая пара и M_1 подмодуль модуля M. Легко заметить, что пары $(R/(0:M_1), M_1)$ и $(R/(M_1:M), M/M_1)$ также являются простейшими. Поэтому из определения 2 непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{N}$ множество подмодулей модуля M, а $\mathfrak{M}$ – множество подмодулей модуля M таких, что пара $(R/(0:N),N)$ простейшая. Тогда

$$C_R(M)=\min_{N\in\mathfrak{N}}\{C_{R/(0:N)}(N)+C_{R/(N:M)}(M/N)\}=\min_{N\in\mathfrak{M}}\{1+C_{R/(N:M)}(M/N)\}.$$

Для обыкновенных (нелинейных) автоматов в главе 6 [2] показано, что сложность делящего автомата меньше сложности делимого. Из предложения I вытекает, что для линейных автоматов это неверно. Поэтому интересно выявить те случаи, когда при переходе к делящей паре сложность возрастает, и те случаи, когда она убывает.

Для дальнейшего нам понадобится установить некоторые факты о конечных кольцах.

В теореме XIX.5 [4] доказано, что в любом конечном кольце с единицей R содержится подкольцо T, называемое кольцом коэффициентов, такое, что:

а) $R=T\oplus N$, где N подгруппа радикала Джекобсона $J(R)$;

б) T – прямая сумма матричных колец над кольцами Галуа.

ЛЕММА 2. Пусть R – конечное кольцо характеристики p^n с единицей и кольцом коэффициентов $T=\sum_{i=1}^{\oplus}\Lambda_i$ и пусть $\varphi: R\to S$ эпиморфизм кольца R на кольцо матриц над кольцом Галуа. Тогда существует единственный номер i такой, что $\varphi(\Lambda_i)\neq 0$. При этом $\varphi(\Lambda_i)=S$.

Доказательство. Пусть $\psi: S\longrightarrow S/pS$ – естественный гомоморфизм. Так как $J(\psi\varphi(R))=0$ и $R=T+J(R)$, то $\psi\varphi(R)=$ $=\psi\varphi(T)$. Пусть e_i – единица кольца Λ_i, тогда $\{e_i\}$ -ортогональная система центральных в T идемпотентов. Однако в $\psi\varphi(R)$ нет нетривиальных центральных идемпотентов, следовательно, существует единственный номер i такой, что $\psi\varphi(e_i)\neq 0$. Поэтому для всех $j\neq i$ $\psi\varphi(\Lambda_j)=0$ и, таким образом, $\psi\varphi(\Lambda_i)=\psi\varphi(R)$. Итак, $S=\varphi(\Lambda_i)+pS=\varphi(\Lambda_i)+J(S)$, а $\varphi(\Lambda_j)=0$, так как $\varphi(e_j)$ идемпотенты. Теперь последнее утверждение леммы следует из леммы Накаямы.

Унитарным подкольцом кольца R будем называть подкольцо, содержащее единицу кольца R.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – конечное кольцо с единицей и $\operatorname{char} R=$ $=p^n$. Если Λ – унитарное подкольцо кольца R, являющееся прямой суммой колец матриц над кольцами Галуа, то в R найдется кольцо коэффициентов S такое, что $\Lambda\leq S$.

Доказательство. В доказательстве используются идеи параграфа 72 [5]. Проведем его последовательно для трех случаев.

I) Пусть $\operatorname{char} R=p$ и $J^2(R)=0$. Из определения кольца Галуа легко заметить, что в этом случае Λ является классически полупростым кольцом, следовательно, $\Lambda\cap J(R)=0$. Пусть $\varphi: R\longrightarrow R/J(R)$ – естественный гомоморфизм. Так как $\Lambda\cong\varphi(\Lambda)$, то можно рассматривать R и $\varphi(R)$ как левые Λ-модули. Поскольку Λ классически полупросто, все модули над ним вполне приводимы, поэтому $R=\Lambda\oplus R'$, где $R'\geq J(R)$, а следовательно, $\varphi(R)=\varphi(\Lambda)\oplus\varphi(R')$. Отождествим Λ и $\varphi(\Lambda)$. Найдется гомоморфизм Λ-модулей $\psi:\varphi(R)\to R^\circ$ такой, что $\psi\varphi(\lambda)=\lambda$ для каждого $\lambda\in\Lambda$, $\psi\varphi(R')\subseteq R'$ и $\varphi\psi=1$. Рассмотрим функцию $f:\varphi(R)\times\varphi(R)\to J(R)$, определенную в 72.II [5]. Так как $f(a,b)=\psi(a\cdot b)-\psi(a)\psi(b)$, то $f(a,b)=0$ при $a\in\varphi(\Lambda)$. Таким образом, линейное отображение $F:\varphi(R)\to J(R)$, которое строится в теореме 72.I6 [5], будет удовлетворять условию $F(\varphi(\Lambda))=0$, а следовательно, функция $\psi':\varphi(R)\to R$, определенная как $\psi'=\psi+F$ и являющаяся кольцевым гомоморфизмом [5, лемма 72.I5], будет удовлетворять условию $\psi'\varphi(\lambda)=\psi\varphi(\lambda)=\lambda$ для любого $\lambda\in\Lambda$. Так как $\psi'\varphi(R)$ является кольцом коэффициентов кольца R и $\psi'\varphi(R)\geq\Lambda$, то для этого случая теорема доказана.

2) Пусть теперь $\operatorname{char} R=p$. Проведем индукцию по мощности кольца R. Допустим, что теорема уже доказана для всех колец, чья мощность меньше $n=|R|$. Пусть $\varphi:R\to R/J^2(R)$ - естественный гомоморфизм. По первой части доказательства $R/J^2(R)=J(R)/J^2(R)\oplus\bar{S}$, где $\bar{S}$ - кольцо коэффициентов кольца $R/J^2(R)$ и $\bar{S}\geq\varphi(\Lambda)$. Перейдя к полным прообразам, получим $R=J(R)+S$, $S\geq\Lambda$ и $S\cap J(R)=J^2(R)$. Так как $J(R)\neq J^2(R)$, то $S\subsetneq R$. Кроме того, $J(S)=J^2(R)$, ибо $\varphi(S)$ - классически полупросто. Итак, применив к S индуктивное предположение, получим $S=S'\oplus J^2(R)$ и $S'\geq\Lambda$, откуда вытекает $R=S'\oplus J^2(R)$, что и требовалось доказать.

3) Перейдем к случаю произвольного кольца R. Доказательство снова будем вести индукцией по мощности R и будем предполагать, что теорема верна для всех колец, чья мощность меньше $|R|$. Пусть $\varphi:R\to R/pR$ - естественный гомоморфизм. По предыдущей части $\varphi(R)=\varphi(J(R))\oplus\bar{S}$, где $\bar{S}\geq\varphi(\Lambda)$. Так как $pR\subseteq J(R)$, то, перейдя к полным прообразам, получим $R=J(R)+S$, $J(R)\cap S=pR$ и $S\geq\Lambda$. Если $pR\subsetneq J(R)$, то $S\subsetneq R$, к S применимо предположение индукции, откуда и вытекает требуемый результат. Пусть теперь $J(R)=pR$. В этом случае кольцо R является суммой колец матриц над кольцами Галуа. Покажем это. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_k$ - максимальная система ортогональных идемпотентов кольца R, центральных по модулю радикала, и предположим, что $e_iRe_j\neq 0$ для некоторых $i\neq j$. Пусть a - элемент этого множества, имеющий максимальную аддитивную экспоненту. Так как $\varphi(a)=0$, то $a\in J(R)$, следовательно, $a=pa_1$. Очевидно, что a_1 может быть выбран в e_iRe_j, что противоречит выбору a. Итак, $\{e_i\}$ - централь-

ные идемпотенты кольца R. Следовательно, $R=\sum^{\oplus} e_i R$, где $e_i R$ – примарные кольца. Таким образом, для каждого i $e_i R$ оказывается кольцом матриц над локальным кольцом, удовлетворяющим условию $J(A)=pA$ и, следовательно, являющимся кольцом Галуа.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть S – унитарное подкольцо конечного кольца R. Если Λ – некоторое кольцо коэффициентов кольца S, то в R найдется кольцо коэффициентов A такое, что $A \geq \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть (R, M) – конечная пара и $e^2=e\in R$. Тогда $C_R(M) \geqslant C_{eRe}(eM)$.

Доказательство. Пусть $\varphi: R \to R/J(R)$ – естественный гомоморфизм, а $\{\bar f_i\}$ – максимальная система центральных ортогональных идемпотентов в $\varphi(R)$. Положив $\bar f_i' = \varphi(e)\bar f_i$, $\bar f_i'' = \varphi(1-e)\bar f_i$ и подняв ортогональные системы идемпотентов $\{\bar f_i'\}$ и $\{\bar f_i''\}$ в кольца eRe и $(1-e)R(1-e)$ соответственно, получим системы $\{f_i'\}$ и $\{f_i''\}$. Пусть $f_i = f_i' + f_i''$, тогда $\varphi(f_i)=\bar f_i$. Таким образом, кольцо $f_i R f_i$ примарно, и по теореме XIX.4 [4] его кольцо коэффициентов Λ_i является кольцом матриц над кольцом Галуа. Из теоремы XIX.5 [4] следует, что $\sum^{\oplus}\Lambda_i$ – кольцо коэффициентов кольца R.

Доказательство предложения будем вести индукцией по $C_R(M)$. По предложению 2 найдется подмодуль $M' \leq M$ такой, что $(R/(0:M'), M')$ – простейшая пара и $C_{R/(M':M)}(M/M') = C_R(M)-1$. Покажем, что пара $(eRe/(0:eM'), eM')$ также простейшая. В самом деле, поскольку $R/(0:M')$ – кольцо матриц над кольцом Галуа, то по лемме 2 найдется единственный номер i такой, что $0\neq\psi(\Lambda_i)=R/(0:M')$, где $\psi: R\to R/(0:M')$ – естественный гомоморфизм. Тогда $\Lambda_i+(0:M')=R$ и, следовательно, $e\Lambda_i e + e(0:M')e = eRe$, откуда $f_i'\Lambda_i f_i' + (0:eM') = eRe$, причем аннулятор в последнем равенстве берется в кольце eRe. Пусть g – примитивный идемпотент в кольце $f_i\Lambda_i f_i'$. Так как $M' \cong \Lambda_i g$, то пара $(eRe/(0:eM'), eM') \cong (f_i'\Lambda_i f_i'/(0:eM'), f_i'\Lambda_i f_i' g)$ простейшая, и по предложению 2 $C_{eRe}(eM) \leq 1 + C_{eRe/(eM':eM)}(eM/eM')$. Следовательно, по предположению индукции $C_R(M) = 1 + C_{R/(M':M)}(M/M') \geqslant 1 + C_{eRe/(eM':eM)}(eM/eM') \geqslant C_{eRe}(eM)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если S – подкольцо кольца R, и $(S+J(R))/J(R) = R/J(R)$, то $C_R(M) \geqslant C_S(M)$.

Доказательство. Пусть T – кольцо коэффициентов кольца S. Так как $R=S+J(R)$ и $J(S)\leq J(R)$, то T является кольцом коэффициентов кольца R. По предложению 2 существует подмодуль M'

модуля M такой, что пара $(R/(0:M'), M')$ – простейшая и $C_{R/(M':M)}(M/M')=C_R(M)-1$. По лемме 2 существует прямое слагаемое Λ кольца T, для которого $R/(0:M')=(\Lambda_i+(0:M'))/(0:M')$. Так как $\Lambda_i\leq S\leq R$, то пара $(S/((0:M')\cap S), M')\cong((S+(0:M'))/(0:M'), M')=$ $=(R/(0:M'), M')$-простейшая. Теперь, используя индукцию, запишем $C_R(M)=C_{R/(M':M)}(M/M')+1\geqslant C_{S/(M':M)}(M/M')+1\geqslant C_S(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{E}=\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ – система идемпотентов кольца R, центральных по модулю радикала, а S – унитарное подкольцо кольца R, причем R как кольцо порождается объединением $S\cup\mathcal{E}$. Тогда для всякого R-модуля M $C_R(M)\geqslant C_S(M)$.

Доказательство. Пусть $\varphi: R\to R/J(R)$ – естественный гомоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что система $\mathcal{E}$ содержит $(1-e)$ вместе с каждым e. Пусть $\mathcal{J}=\{\bar g_1, \ldots, \bar g_\kappa\}$ – минимальные элементы подструктуры структуры центральных идемпотентов кольца $R/J(R)$, порожденной множеством $\varphi(\mathcal{E})$. Тогда $\sum_{i=1}^{n}\bar g_i=$ $=\varphi(1)$ и $\mathcal{J}$ ортогональная система центральных идемпотентов кольца $R/J(R)$. Так как $\varphi(S)\cup\varphi(\mathcal{E})$ порождает кольцо $\varphi(R)$, то $\varphi(R)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(S)\bar g_i$ и, следовательно, $\varphi(R)\bar g_i=\varphi(S)\bar g_i$.

Пусть Λ – кольцо коэффициентов кольца S. По следствию в R найдется кольцо коэффициентов A такое, что $A\geqslant\Lambda$. Пусть $f=$ $=\{f_1,\ldots,f_e\}$ – минимальные центральные идемпотенты кольца A. Так как $\varphi(f_i)$ – минимальные центральные идемпотенты в $\varphi(R)$ и $\varphi(1)=$ $=\sum\bar g_j$, то для каждого i существует j такой, что $\varphi(f_i)\leq g_j$. Поэтому $\varphi(Rf_i)=\varphi(Sf_i)$. Поскольку $S=J(S)+\Lambda$, то $\varphi(Rf_i)=\varphi(\Lambda f_i)+J(\varphi(S))f_i$, откуда следует $\varphi(Rf_i)=\varphi(\Lambda f_i)$ по лемме Накаямы. Значит, для каждого $a\in A$ найдется $\lambda\in\Lambda$ такой, что $(a-\lambda)f_i\in Af_i\cap J(R)=pAf_i$. Тогда по лемме 3 [I] $(a-\lambda)f_i=pa_1f_i$, где $a_1\in A$. Аналогично выберем элемент λ_1 для a_1. Продолжая этот процесс, мы покажем, что $Af_i=\Lambda f_i$. Если $\{h_1,\ldots,h_t\}$ – множество минимальных центральных идемпотентов кольца Λ, то отсюда следует, что для каждого i найдется j, для которого $h_i\geqslant f_j$.

Пусть теперь M' – подмодуль модуля M такой, что пара $(R/(0:M'), M')$ – простейшая и $C_{R/(M':M)}(M/M')=C_R(M)-1$. Покажем, что пара $(S/(0:M'), M')$ также простейшая. По лемме 2 найдется f_i такой, что $R=(0:M')+Af_i$. Пусть g – примитивный идемпотент кольца Λ, для которого $f_ig\neq 0$, а g' – примитивный идемпотент кольца A и $g'\leq f_ig$. По определению простейшей пары $M'=Ag'm'$ для некоторого элемента $m'\in M'$. Для каждого $s\in S$ найдется $a\in A$ такой, что $(s-af_i)M'=0$.

Но $Af_i = \Lambda f_i$ и $M' = f_i M'$, поэтому в кольце Λ найдутся элемент λ и минимальный центральный идемпотент $h_j \geq f_i$ такие, что $(S - \lambda h_j)M' = 0$. Итак, $S = (0:M')_S + \Lambda h_j$ и $M' = Ag'm' = A(g'm') = Af_i g(g'm') = \Lambda g f_i (g'm') = \Lambda h_j g(g'm')$, откуда и следует, что рассматриваемая пара простейшая. Как и ранее, доказательство завершается индукцией по сложности.

Выше сложность делящей пары была меньше сложности делимой. Перейдем к случаю, когда имеет место обратное соотношение.

Введем следующие обозначения. Пусть S - унитарное подкольцо кольца R и $J(R) \subseteq S$. Пусть M является R-модулем и цепочка S-модулей

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$$

такова, что пары $(S/(M_{i-1}:M_i), M_i/M_{i-1})$ простейшие. Обозначим через N_i наибольший R-подмодуль S-модуля M_i. Тогда имеется цепочка R-подмодулей

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_n = M.$$

Пусть, наконец, Λ - кольцо коэффициентов кольца S и A - содержащее его кольцо коэффициентов кольца R.

ЛЕММА 3. Существует система $\{m_1, \ldots, m_n\}$ элементов из M такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$, $M_i = \Lambda m_i + M_{i-1}$, $\varphi_i(M_i) = \varphi_i(N_i) \oplus \sum^{\oplus}_{j \leq i,\, m_j \notin N_i} \varphi_i(\Lambda m_j)$, где $\varphi_i : M \to M/pM_i$ - естественный гомоморфизм. При этом $N_i = \ker \varphi_i + \sum_{m_j \in N_i} \Lambda m_j$.

Доказательство. По определению простейшей пары найдутся элементы $m'_1, \ldots, m'_n$ из M такие, что $M_i = \Lambda m'_i + M_{i-1}$.

Заметим, что $Rp \subseteq J(R) \subseteq S$ и, следовательно, $RpM_i \subseteq N_i$, $\exp(M_i/N_i) \leq p$ и $\ker \varphi_i \leq N_i$.

По индукции можно считать, что для всех $t < i$ выбраны элементы m_t, для которых $M_t = \Lambda m_t + M_{t-1}$ и сумма

$$H_{t\ell} = \varphi_\ell(N_\ell) \oplus \sum^{\oplus}_{j \leq t,\, m_j \notin N_\ell} \varphi_\ell(\Lambda m_j) \tag{3}$$

является прямой для всех $t \leq \ell \leq n$.

Для $\ell = i, \ldots, n$ рассмотрим суммы $H'_\ell = H_{(i-1)\ell} + H''_\ell$, где

$$H''_\ell = \begin{cases} 0, & \text{если } m_i \in N_\ell, \\ \varphi_\ell(\Lambda m'_i), & \text{если } m_i \notin N_\ell. \end{cases}$$

Если все эти суммы прямые, то положим $m_i = m'_i$ и $H_{i\ell} = H'_\ell$, что обеспечивает соотношение (3). В противном случае обозначим через k наименьший среди таких номеров, что $i \leq k \leq n$, $m'_i \notin N_k$, но $\varphi_k(\Lambda m'_i) \cap H_{(i-1)k} \neq 0$. Тогда $\varphi_k(\Lambda m'_i) \subseteq H_{(i-1)k}$, поскольку $\varphi_k(\Lambda m'_i)$ - неприводимый Λ-модуль. При этом $\varphi_k(m'_i) = \varphi_k(n_k) + \sum_{j<i} \varphi_k(\lambda_j m_j)$, где $n_k \in N_k$. Приняв

$m_i = m_i' - \sum_{j<i} \lambda_j m_j \in N_k$, получим равенство $\Lambda m_i + M_{i-1} = M_i$. Положим

$$H_{ie} = \begin{cases} H_{(i-1)e}, & \text{если } m_i \in N_e, \\ H_{(i-1)e} + \varphi_e(\Lambda m_i), & \text{если } m_i \notin N_e. \end{cases}$$

Если $\ell \geq k$, то $m_i \in N_e$ и H_{ie} имеет вид, описанный формулой (3). То же самое имеет место и в случае, когда $i \leq \ell < k$, но $m_i \in N_e$. Если же $i \leq \ell < k$ и $m_i \in N_e$, то нижняя сумма является прямой по выбору номера k и H_{ie} снова удовлетворяет соотношению (3).

Так как $M_i = \sum_{j \leq i} \Lambda m_j$, то

$$\varphi_i(M_i) = H_{ii} = \varphi_i(N_i) \oplus \sum^{\oplus}_{j \leq i, m_j \notin N_i} \varphi_i(\Lambda m_j).$$

Поскольку $\ker \varphi_i \leq N_i$, отсюда вытекает и последнее утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi: M \to M/M_{i-1}$ и $\psi: M \to M/N_{i-1}$ - естественные гомоморфизмы. Если $m \in M_i$ и $\exp(\varphi(m)) = p^{e} > 1$, то $\exp(\psi(m)) = p^e$ и $\exp(\psi(\mathcal{J}(R)m)) = p^{e-1}$.

Доказательство. Так как $\exp(\varphi(p^{e-1}Sm)) = p$ и $\varphi(p^{e-1}Sm) \leq \varphi(M_i)$, то из определения простейшей пары следует, что модуль $\varphi(p^{e-1}Sm)$ неприводим. Поэтому $M_{i-1} \geq \mathcal{J}(S)p^{e-1}m \geq \mathcal{J}(R)p^{e-1}m \ni p^e m$. Но $\mathcal{J}(R)p^{e-1}m \leq N_{i-1}$, откуда $\exp(\psi(m)) = p^e$ и $\exp(\psi(\mathcal{J}(R)m)) = p^{e-1}$. Если же $p^k \mathcal{J}(R) m \leq N_{i-1}$, где $k < e-1$, то $p^{k+1} m \in N_{i-1}$, что противоречит условию.

ЛЕММА 5. Пусть $\Lambda = GR(p^e, t)$, $A = M_k(GR(p^e, r))$, $t = rk$, $k \neq 1$ и $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(S)$. Тогда $\exp(M_i/N_{i-1}) \leq p^2$.

Доказательство. Будем проводить наши рассуждения в R-фактормодуле M/N_{i-1}. Будем считать, что $\exp(M_i) > p$. По определению простейшей пары $S = \Lambda + (M_{i-1} : M_i)$. Пусть $r \in R$. Поскольку $pR \leq S$, то $pr = \lambda + \varphi$, где $\lambda \in \Lambda$, $\varphi \in (M_{i-1} : M_i)$. Так как $\exp(prM_i) < \exp(M_i)$ и $\exp(\varphi M_i) \leq \exp(M_{i-1}) \leq p < \exp(M_i)$, то $\exp(\lambda M_i) < \exp(M_i)$. Следовательно, λ необратим, $\lambda \in \mathcal{J}(\Lambda)$ и $\lambda = p\lambda'$, где $\lambda' \in \Lambda$, ибо Λ - кольцо Галуа. Итак, для каждого $r \in R$ найдется $\lambda' \in \Lambda$ такой, что $p(r - \lambda')M_i \leq M_{i-1}$. Поскольку $pM_{i-1} = 0$, то $(r - \lambda')p^2 M_i = 0$. Если $p^2 M_i \neq 0$, то этот R-модуль оказывается точным $(A/\exp(p^2 M_i)A)$-модулем. Следовательно, $A = \Lambda + \exp(p^2 M_i)A \leq S$, что противоречит условию. Итак, $p^2 M_i \leq N_{i-1}$.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия леммы 5, m_i такой же, как в лемме 3, и $Sm_i \in N_{i-1}$. Тогда $S\Lambda m_i \leq N_{i-1}$.

Доказательство. Будем проводить рассуждения в R-фактормодуле M/N_{i-1}. Так как $S=\Lambda+(M_{i-1}:M_i)$, то $s+\lambda+s'$, где $\lambda\in\Lambda$ и $s'\in(M_{i-1}:M_i)$. Поскольку Λ - кольцо Галуа, из леммы 4 следует, что $M_i=\Lambda m_i\oplus M_{i-1}$. Следовательно, $\lambda m_i=0$ и $s'm_i=0$. Поэтому $\lambda\Lambda m_i=0$, ибо кольцо Λ коммутативно. Отсюда вытекает, что $s\in(M_{i-1}:M_i)$, если $sm_i=0$.

Так как S - локальное кольцо, то $(M_{i-1}:M_i)\leq J(S)=J(R)$. Пусть $sm'\neq 0$, где $m'\in M_i$. Тогда $rsm_i=0$ для каждого $r\in R$, и поскольку $s\in J(R)$, то $rs\in J(R)\leq S$. Поэтому $Rs\leq(M_{i-1}:M_i)$. Следовательно, $0\neq sm'\in RsM_i\leq M_{i-1}$, что противоречит определению N_{i-1}.

ЛЕММА 7. Пусть S и R такие же как в лемме 5, m_j - те же элементы, что и в лемме 3, и $exp(M_i/N_{i-1})=p^c$. Если

$$m_i^*=e\lambda m_i+\sum_{j=1}^{i-1}r_j m_j,$$

где $\lambda\in\Lambda\setminus p\Lambda$, $r_j\in R$ и e - примитивный идемпотент в A, то найдется собственный R-подмодуль $M_i^*\leq J(R)m_i^*$, такой, что

$$J(R)m_i^*/(J(R)m_i^*\cap N_{i-1})= \\ =Apm_i^*/(Apm_i^*\cap N_{i-1})\oplus M_i^*/(M_i^*\cap N_{i-1}) \tag{I}$$

и

$$J(R)=pA+(M_i^*:Am_i^*). \tag{2}$$

Доказательство. Будем вести наши рассуждения в R-фактормодуле M/N_{i-1}. Если будет построен модуль M_i^*, удовлетворяющий условию (I), то включение в левую сторону в равенстве (2) будет следовать из локальности кольца S и того, что $J(R)=J(S)$, так как $Am_i^*\nsubseteq J(R)m_i^*\supseteq M_i^*$. Поскольку $J(R)M_{i-1}\leq N_{i-1}=0$, то $J(R)m_i^*=J(R)e\lambda m_i$. Поэтому далее мы можем считать, что $m_i^*=e\lambda m_i$ и вести рассуждения в фактор-кольце $R/(N_{i-1}:Rm_i)$ и в R-подмодуле R-фактормодуля $(N_{i-1}+Rm_i)/N_{i-1}$.

Пусть $A'=R/J(R)\cong M_k(GF(p^r))$. Так как по лемме 4 $J^2(R)m_i=0$, то $J(R)$ является A'-бимодулем.

Из утверждения 5 [6] построим такую систему $\mathcal{H}=\{h_1,\ldots,h_n\}\leq J(R)$, что $h_1=pe$. $A'h_jA'$ - неприводимый A'-бимодуль для каждого j и

$$J(R)=\sum^{\oplus}A'h_jA'.$$

При этом, очевидно, можно считать, что $h_j=e_jh_je$, где e_j -

примитивный идемпотент в A'. Так как $A'h_j$ – неприводимый левый A' модуль для каждого j, то по индукции легко построить подсистему $\mathcal{H}'$ системы $\mathcal{H}$ такую, что $h_1 \in \mathcal{H}'$ и

$$\mathcal{J}(R)m_i^* = \sum_{h_j \in \mathcal{H}'}^{\oplus} A'h_j m_i^*.$$

Заметим теперь, что из построения элементов h_j и утверждения 5 [6] вытекает, что $A'h_j A'e = A'h_j$, то есть $A'h_j A'm_i^* = A'h_j m_i^*$. Положим

$$M_i^* = \sum_{h_j \in \mathcal{H}',\, j \neq 1}^{\oplus} A'h_j m_i^*$$

и $H_j = A'h_j A'$. Тогда $\mathcal{J}(R)m_i^* = pAm_i^* \oplus M_i^*$, что равносильно равенству (I).

Допустим теперь, что найдется

$$h \in \mathcal{J}(R) \setminus \Big(\sum_{h_j \in \mathcal{H}'}^{\oplus} H_j\Big).$$

Можно считать, что $h = hg$, где g – примитивный идемпотент из A'. Поскольку A' – кольцо матриц над полем Галуа, а $\mathcal{J}(R)$ и H_j – A'-бимодули, то, домножая, если необходимо, h справа на обратимую в A' матрицу, можно считать, что $g = e$. Тогда по построению подсистемы $\mathcal{H}'$ получим

$$hm_i^* = \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j' m_i^*,$$

где $h_j' \in H_j$ и $h_j' = h_j'e$. Так как

$$0 = \Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j'\Big)m_i^* = \Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j'\Big)e\lambda m_i,$$

по лемме 6

$$0 = \Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j\Big)e\lambda\Lambda m_i = \Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j'\Big)e\Lambda m_i.$$

Так как eA и $e\Lambda$ неразложимые A и Λ-модули соответственно, то в них одинаковое число элементов по утверждению 5 [6]. Таким образом, $e\Lambda = eA$, следовательно

$$\Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j'\Big)eAm_i = 0.$$

Но $R = A + \mathcal{J}(R)$ и $\mathcal{J}^2(R) = 0$. Поэтому

$$\Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j'\Big)eRm_i = 0,$$

откуда

$$\Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j\Big) = \Big(h - \sum_{h_j \in \mathcal{H}'} h_j'\Big)e \in (0 : Rm_i) = 0,$$

что противоречит предположению.

Завершая доказательство, заметим, что $H_1 = pA$ и $H_j A m_i^* \subseteq M_i^*$ при $j>1$, $h_j \in \mathcal{H}'$, откуда вытекает включение левой части (2) в правую.

ЛЕММА 8. Пусть R и S такие же, как в лемме 5, и элементы $\{m_1, \dots, m_n\}$ выбраны, как и в лемме 3. Тогда найдутся элементы $m_1', m_2', \dots, m_n' \in M$ и последовательность R-модулей $0 = M_0' \subseteq M_1' \subseteq \dots \subseteq M_n' = M$, удовлетворяющих следующим условиям:

I. Существует примитивный идемпотент $e_i \in A$, такой, что

$$m_i = e_i(\lambda_i m_i + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} m_j)$$

для некоторых $r_{ij} \in R$, $\lambda_i \in \Lambda \setminus p\Lambda$.

2. $M_i' = M_{i-1}' + \Lambda m_i'$.

3. $M_i' \geq N_i$.

4. Если $m_i \in N_\alpha$ для некоторого α, то $m_i' \in N_\alpha$.

5. $\exp(M_i'/M_{i-1}') = \exp(M_i/M_{i-1})$.

6. $(R/(M_{i-1}' : M_i'), M_i'/M_{i-1}')$ - простейшая пара.

Доказательство. Пусть $\psi_s : M \to M/N_{s-1}$ - естественный гомоморфизм. Из леммы 4 вытекает, что

$$\psi_s(M_s) = \psi_s(\Lambda m_s) \oplus \psi_s(M_{s-1}).$$

Так как $pM_{s-1} \subseteq J(S)M_{s-1} \subseteq N_{s-1}$, то отсюда по лемме 3 получаем

$$\psi_s(M_s) = \psi_s(\Lambda m_s) \oplus \sum^{\oplus}_{m_j \in M_{s-1} \setminus N_{s-1}} \psi_s(\Lambda m_j) = \sum^{\oplus}_{j:\, m_j \in M_s \setminus N_{s-1}} \psi_s(\Lambda m_j).$$

Теперь, вспомнив, что

$$pM_s = p\Lambda m_s + pM_{s-1} \subseteq p\Lambda m_s + N_{s-1},$$

и воспользовавшись последним утверждением леммы 3, заключаем, что

$$\psi_s(N_s) = H_s \oplus \sum^{\oplus}_{m_j \in N_s \setminus N_{s-1}} \psi_s(\Lambda m_j), \tag{3}$$

где $H_s = \psi_s(p\Lambda m_s)$ при $m_s \notin N_s$ и 0 в противном случае.

Скажем, что m_i является элементом первого рода, если $\exp(N_i/N_{i-1}) = p^2$. В противном случае назовем m_i элементом второго рода. Введем на множестве $\{m_1, \dots, m_n\}$ порядок. Положим, что $m_i \preccurlyeq m_j$, если:

а/ m_i - элемент первого рода, m_j - элемент второго рода;

б/ m_i, m_j - элементы первого рода и $i \leq j$;

в/ m_i, m_j - элементы второго рода, $m_i \notin N_s$, $m_j \in N_s$ для некоторого s;

г/ m_i, m_j - элементы второго рода $m_i, m_j \in N_s \setminus N_{s-1}$ для некоторого s и $i \neq j$.

Пусть m_i - элемент первого рода. Так как $\exp \psi_i(\mathring{M}_{i-1}) \leq p$, то при $j < i$ имеем $\exp \psi_i(\Lambda m_j) \leq p$. По лемме 5 $\exp(H_i) \leq p$. Следовательно, из равенства (3) вытекает

$$p^2 = \exp(\psi_i(N_i)) = \max\{\exp(H_i), \max_{m_j \in N_i \setminus N_{i-1}} \exp(\psi_i(\Lambda m_j))\} \leq$$

$$\leq \max\left(p, \begin{cases} 0 & \text{при } m_i \in N_i \setminus N_{i-1}, \\ \exp \psi_i(\Lambda m_i) & \text{при } m_i \in N_i \setminus N_{i-1}. \end{cases}\right)$$

Но это неравенство несовместимо с $m_i \notin N_i$. Итак, $m_i \in N_i \setminus N_{i-1}$ для каждого элемента первого рода m_i.

Пусть теперь m_i - элемент второго рода и $m_i \in N_\alpha \setminus N_{\alpha-1}$ для некоторого номера α. Тогда если $\exp(M_\alpha / M_{\alpha-1}) = p^2$, то

$$m_\alpha < m_i. \tag{4}$$

В самом деле, все доказано, если m_α - элемент первого рода или если $m_\alpha \notin N_\alpha$. Пусть $m_\alpha \in N_\alpha$. Тогда, учитывая лемму 5, имеем

$$p^2 = \exp(M_\alpha / M_{\alpha-1}) = \exp((\Lambda m_\alpha + M_{\alpha-1}) / M_{\alpha-1}) = \exp((m_\alpha + M_{\alpha-1}) / M_{\alpha-1}) \leq \exp(\psi_\alpha(m_\alpha)) \leq \exp \psi_\alpha(N_\alpha),$$

чего не может быть, поскольку m_α - элемент второго рода.

Введенный выше порядок позволяет нам рассматривать подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

причем $m_{i_k} \leq m_{i_\ell}$ тогда и только тогда, когда $k \leq \ell$.

Будем строить элементы m_k^*, удовлетворяющие следующим пяти условиям:

Найдутся примитивный идемпотент $e_k \in A$ и элементы $\lambda_k \in \Lambda \setminus p\Lambda$, $r_{kj} \in R$, где $j < i_k$ такие, что

$$m_k^* = e_k(\lambda_k m_{i_k} + \sum_{j < i_k} r_{kj} m_j). \tag{5}$$

Если $m_{i_k} \in N_\alpha$ для некоторого номера α, то $m_k^* \in N_\alpha$. (6)

Если m_{i_k} - элемент первого рода, то

$$\exp(\psi_{i_k}(m_k^*)) = p^2. \tag{7}$$

Для всех $t \leq n$ сумма

$$H_{kt} = \sum_{j < k,\, m_{i_j} \in N_{i_t} \setminus N_{i_t - 1}} \psi_{i_t}(\Lambda m_j^*) \tag{8}$$

является прямой.

Если $t \leq k$, $\exp(\psi_{i_t}(M_{i_t})) = p^2$, M_t^* - подмодуль R-

модуля $\mathcal{J}(R)m_t^*$, построенный в лемме 7, и

$$H'_{kt}=\sum\nolimits^{\oplus}_{j\le k,\, j\ne t,\, m_j\in N_{i_t}\setminus N_{i_t-1}} \psi_{i_t}(\Lambda m_j^*),$$

то

$$\psi_{i_t}(\mathcal{J}(R)m_t^*)\cap H'_{kt}\subseteq \psi_{i_t}(M_t^*). \qquad (9)$$

Заметим, что при $m_{i_k}\notin N_{i_t}\setminus N_{i_t-1}$ из определения следует, что $H_{kt}=H_{(k-1)t}$ и $H'_{kt}=H'_{(k-1)t}$, если эти множества определены. Если же $k=1$, то можно принять $H_{(k-1)t}=H'_{(k-1)t}=0$.

Перейдем теперь к построению m_k^*. Если $k>1$, то элементы $m_1^*,\dots,m_{k-1}^*$ предполагаем построенными. Сначала проведем построение, полагая, что m_{i_k} – элемент первого рода. При этом, как показано выше, $m_{i_k}\in N_{i_k}$. Пусть $N_k^*=\{m\in N_{i_k}\mid pm\in N_{i_k-1}\}$. Тогда $N_{i_k}\cap M_{i_k-1}\subseteq N_k^*$ и $\exp(N_{i_k}/N_k^*)=p$. Поскольку пара $(S/(M_{i_k-1}:M_{i_k}),\, M_{i_k}/M_{i_k-1})$ является простейшей, то

$$S/(M_{i_k-1}:M_{i_k})\cong\Lambda/((M_{i_k-1}:M_{i_k})\cap\Lambda)$$

и Λ-модуль M_{i_k}/M_{i_k-1} неразложим. Поэтому фактормодуль его подмодуля N_{i_k}/N_k^*, имеющий экспоненту p, также неразложим [6, утверждение 5] и, таким образом, является неприводимым Λ-модулем, а следовательно, и неприводимым A-модулем. Отсюда вытекает, что существует примитивный идемпотент $e_k\in A$ такой, что $A(1-e_k)\lambda_k m_{i_k}\subseteq N_k^*$, где $\lambda_k\in\Lambda\setminus p\Lambda$. Положим $m_k^*=e_k\lambda_k m_{i_k}$. По построению условия (5) – (7) выполнены. Поскольку $m_{i_k}\in N_{i_k}$, то, как указывалось выше, $H_{kt}=H_{(k-1)t}$ и $H'_{kt}=H'_{(k-1)t}$ при всех $t\ne k$. Следовательно, условия (8), (9) следует проверять лишь при $t=k$. Из $m_j\in N_{i_k}\setminus N_{i_k-1}$ и $j\ne i$ вытекает, что m_j – элемент второго рода, поскольку было показано, что $m_j\in N_j\setminus N_{j-1}$, если m_j – элемент первого рода. Поэтому $m_j\succ m_{i_k}$ и, следовательно, сумма H'_{kk} является нулевой, а сумма H_{kk} состоит из одного слагаемого $\psi_{i_k}(\Lambda m_k^*)$. Таким образом, условия (8), (9) выполняются.

Перейдем теперь к случаю, когда m_{i_k} – элемент второго рода, и пусть $m_{i_k}\in N_\alpha\setminus N_{\alpha-1}$ для некоторого номера α. Тогда $i_k\le\alpha$, а если $\exp\psi_\alpha(M_\alpha)=p^2$, то $i_k<\alpha$ из неравенства (4). Отсюда в любом случае вытекает, что $\exp\psi_\alpha(Am_j)\le p$ при $j\le i_k$. Обозначим через Λ' поле Галуа $\Lambda/p\Lambda\cong S/\mathcal{J}(S)$, тогда $\psi_\alpha(Am_j)$ является векторным пространством над ним при $j\le i_k$. Пусть $\mathcal{H}$ – некоторое множество элементов

m_j таких, что $m_j \in N_\alpha \setminus N_{\alpha-1}$ и $j \leq i_k$, и пусть $|\mathcal{K}| = s$. Тогда

$$\dim_{\Lambda'} \sum_{m_j \in \mathcal{K}} \psi_\alpha(Am_j) \geq s, \tag{10}$$

причем это строгое неравенство, если $exp(\psi_\alpha(M_\alpha)) = p^2$. В самом деле, неравенство имеет место потому, что сумма

$$\sum_{m_j \in \mathcal{K}} \psi_\alpha(\Lambda m_j)$$

является прямой по соотношению (3). При наличии равенства и $exp\, \psi_\alpha(M_\alpha) = p^2$ заметим, что

$$T = \sum_{m_j \in \mathcal{K}} \psi_\alpha(\Lambda m_j) = \sum_{m_j \in \mathcal{K}} \psi_\alpha(Am_j) = \sum_{m_j \in \mathcal{K}} \psi_\alpha(Rm_j),$$

поскольку $\psi_\alpha(\mathcal{I}(R)M_{\alpha-1}) = 0$ и $j < \alpha$. Но T - ненулевой R-подмодуль в $\psi_\alpha(M_{\alpha-1})$, а это противоречит определению подмодуля $N_{\alpha-1}$.

Из неравенства (10) следует, что

$$\dim_{\Lambda'} \psi_\alpha(Am_{i_k}) \geq 1, \quad \dim_{\Lambda'} \Big(\sum_{j \leq i_k,\, m_j \in N_\alpha \setminus N_{\alpha-1}} \psi_\alpha(Am_j)\Big) \geq s,$$

где s - количество элементов m_j таких, что $j \leq i_k$ и $m_j \in N_\alpha \setminus N_{\alpha-1}$, и эти неравенства строгие, если $exp\, \psi_\alpha(M_\alpha) = p^2$. Заметим, что $m_j < m_{i_k}$, если $j < i_k$ и $m_j \in N_\alpha \setminus N_{\alpha-1}$. Пусть $\mathfrak{A} = \{j \mid m_{i_j} \in N_\alpha \setminus N_{\alpha-1},\, i_j < i_k\}$. Если

$$\psi_\alpha(Am_{i_k}) \cap \sum_{j \in \mathfrak{A}} \psi_\alpha(Am_{i_j}) = 0,$$

положим

$$M^* = \sum_{j \in \mathfrak{A}} \Lambda m_j^* + Am_{i_k}.$$

Тогда если $\alpha = i_\beta$, то $\psi_\alpha(M^*) = \psi_\alpha(Am_{i_k}) \oplus H'_{(k-1)\beta}$ при $exp\, \psi_\alpha(M_\alpha) = p^2$, и $\psi_\alpha(M^*) = \psi_\alpha(Am_{i_k}) \oplus H_{(k-1)\beta}$ в противном случае. Если же

$$\psi_\alpha(Am_{i_k}) \cap \sum_{j \in \mathfrak{A}} \psi_\alpha(Am_j) \neq 0,$$

положим

$$M^* = Am_{i_k} + \sum_{j \in \mathfrak{A}} Am_j.$$

При любом определении M^* из неравенства (10) имеем

$$\dim_{\Lambda'} (\psi_\alpha(M^*)) \geq s, \tag{11}$$

и это неравенство строгое если $exp(\psi_\alpha(M_\alpha)) = p^2$.

Если $exp\,\psi_\alpha(M_\alpha) = p^2$, то $\beta < \kappa$ и положим $N'_\beta = J(R) m^*_\beta$.
При $exp\,\psi_\alpha(M_\alpha) = p$ положим $N'_\beta = M^*_\beta = 0$ и $H'_{(\kappa-1)\beta} = H_{(\kappa-1)\beta}$.
Если далее

$$\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(M^*_\beta) \not\subseteq H'_{(\kappa-1)\beta},$$

то пусть $m^*_\kappa = e_\kappa m^*_\kappa \in M^*$ такой элемент, что e_κ - примитивный идемпотент из A и

$$\psi_\alpha(m^*_\kappa) \in (\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(M^*_\beta)) \setminus H'_{(\kappa-1)\beta}.$$

Если же

$$\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(M^*_\beta) \subseteq H'_{(\kappa-1)\beta},$$

то поскольку $M^*_\beta \leq N_\beta$ и по лемме 7

$$dim_{\Lambda'}\,\psi_\alpha(N'_\beta) \leq 1 + dim_{\Lambda'}\,\psi_\alpha(M^*_\beta),$$

то

$$dim_{\Lambda'}(\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(N'_\beta)) \leq 1 + dim_{\Lambda'}(\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(M^*_\beta))$$

значит

$$dim_{\Lambda'}((\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(N'_\beta)) + H'_{(\kappa-1)\beta}) \leq 1 + dim_{\Lambda'}((\psi_\alpha(M^*) \cap$$

$$\cap\, \psi_\alpha(M^*_\beta)) + H'_{(\kappa-1)\beta}) = 1 + dim_{\Lambda'} H'_{(\kappa-1)\beta} = s \leq dim_{\Lambda'}\psi_\alpha(M^*).$$

Если $exp\,\psi_\alpha(M_\alpha) = p$, то первое неравенство является строгим по определению N'_β и M^*_β, а если $exp\,\psi_\alpha(M_\alpha) = p^2$, то строгим является последнее неравенство по (II). Следовательно, в любом случае найдется элемент $m^*_\kappa = e_\kappa m^*_\kappa \in M^*$ такой, что e_κ - примитивный идемпотент из A и

$$\psi_\alpha(m^*_\kappa) \in \psi_\alpha(M^*) \setminus ((\psi_\alpha(M^*) \cap \psi_\alpha(N'_\beta)) + H'_{(\kappa-1)\beta}.$$

Выше говорилось, что

$$M^* = \sum_{j \in \mathfrak{N}} \Lambda m^*_j + A m_{i_\kappa}$$

при

$$\psi_\alpha(A m_{i_\kappa}) \cap \sum_{j \in \mathfrak{N}} \psi_\alpha(A m_{i_j}) = 0.$$

Так как e_κ -примитивный идемпотент, $e_\kappa A = e_\kappa \Lambda$. Поскольку $\psi(m^*_\kappa) \notin H'_{(\kappa-1)\beta}$ по определению, то m^*_κ в этом случае удовлетворяет условию (5). Если же

$$\psi_\alpha(A m_{i_\kappa}) \cap \sum_{j \in \mathfrak{N}} \psi_\alpha(A m_{i_j}) \quad \text{и} \quad m^*_\kappa \in \sum_{j \in \mathfrak{N}} A m_{i_j},$$

то, добавив к нему элемент $0 \neq e_\kappa \bar{m} = \bar{m} \in A m_{i_\kappa}$ и вычтя элемент $0 \neq e_\kappa \tilde{m} = \tilde{m} \in \sum_{j \in \mathfrak{N}} A m_{i_j}$ такие, что $\psi_\alpha(\bar{m}) = \psi_\alpha(\tilde{m})$, снова получим элемент, удовлетворяющий условию (5). Из построения следует, что условие (6) также выполняется. Так как $H_{kt}=H_{(k-1)t}$ и $H'_{kt}=H'_{(k-1)t}$ при $t\neq\beta$, нам необходимо проверить выполнение условий (8), (9) лишь при $t=\beta$.

Поскольку $\exp\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\leq p$, то $\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)$ -неприводимый Λ'-модуль. Кроме того, $\psi_\alpha(m_k^*)\notin H'_{(k-1)\beta}$ и, таким образом, сумма

$$H'_{k\beta}=\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)+H'_{(k-1)\beta}$$

является прямой. Если $\exp\psi_\alpha(M_\alpha)=p$, то по определению $H'_{(k-1)\beta}=H_{(k-1)\beta}$ и

$$H_{k\beta}=\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\oplus H^*_{(k-1)\beta},$$

откуда следует условие (8). Если же $\exp\psi_\alpha(M_\alpha)=p^2$, то

$$H'_{k\beta}=\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\oplus H'_{(k-1)\beta}.$$

Проверим условие (9). Если $\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\subseteq\psi_\alpha(M_\beta^*)$, то из выполнения (9) для $t=k-1$ следует

$$\psi_\alpha(N'_\beta)\cap H'_{k\beta}=\psi_\alpha(N'_\beta)\cap(\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\oplus H_{(k-1)\beta})\subseteq$$

$$\subseteq\psi_\alpha(M_\beta^*)+(\psi_\alpha(N'_\beta)+H_{(k-1)\beta})\subseteq\psi_\alpha(M_\beta^*).$$

В противном случае

$$\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\in\psi_\alpha(M^*)\setminus((\psi_\alpha(M^*)\cap\psi_\alpha(N'_\beta))+H'_{(k-1)\beta})$$

по построению, таким образом

$$\psi_\alpha(N'_\beta)\cap H'_{k\beta}=\psi_\alpha(N'_\beta)\cap(\psi_\alpha(\Lambda m_k^*)\oplus H'_{(k-1)\beta})\subseteq$$

$$\subseteq\psi_\alpha(N'_\beta)\cap((\psi_\alpha(M^*)\setminus((\psi_\alpha(M^*)\cap\psi_\alpha(N'_\beta))+H'_{(k-1)\beta}))\cup$$

$$\cup H'_{(k-1)\beta})=H'_{(k-1)\beta}\cap\psi_\alpha(N'_\beta)\subseteq\psi_\alpha(M_\beta^*),$$

то есть условие (9) снова выполнено. Условие (8) следует из выполнения условия (9) и леммы 7.

Пусть все элементы m_k^* уже построены. Положим $m'_j=m_k^*$, если $j=i_k$. Заметим, что элементы m'_j удовлетворяют условиям I) и 4) леммы, поскольку элементы m_k^* удовлетворяют условиям (5), (6). Построив элементы m'_j, мы тем самым построили и цепочку Λ-подмодулей M'_j, удовлетворяющих условию 2) леммы. Заметим теперь, что по построению элементов m_k^* и из выполнения для них условия (7) следует, что $|\psi_\alpha(\Lambda m_j)|=|\psi_\alpha(\Lambda m'_j)|$, если $m_j\in N_\alpha\setminus N_{\alpha-1}$. Отсюда и из условия (9) вытекает выполнение требования 5) леммы. Так как при этом $\psi_\alpha(\Lambda m'_i)\subseteq\psi_\alpha(N_\alpha)$, то, сравнивая равенство (3) с равенством (8) и (9) для различных t и $k=n$, получаем по лемме 7

$$\psi_t(N_t) = K_t \oplus \sum^{\oplus}_{m_j' \in N_t \setminus N_{t-1}} \psi_t(\Lambda m_j'), \qquad (12).$$

где $K_t' = \psi_t(p\Lambda m_t')$ при $m_t \notin N_t$ и 0 в противном случае. Равенство (12) влечет выполнение условия 3) леммы. Если $exp(M_j'/M_{j-1}') = p$, то из выполнения условий 5) и 1) леммы и леммы 4 имеем $J(R)M_j' \leq N_{j-1} \leq M_{j-1}'$, откуда по построению модуля M_j' вытекает, что M_j'/M_{j-1}' является неприводимым R-модулем и пара $(R/(M_{j-1}' : M_j'), M_j'/M_{j-1}')$ – простейшая. Если же $exp(M_j'/M_{j-1}') = p^2$, то по лемме 7 $J(R) = pA + (M_k^* : Am_j')$, где $j = i_k$, и $M_k^* \leq M_{j-1}'$ по соотношениям (9) и (12) для $t = k$. Следовательно, M_j'/M_{j-1}' снова является R-модулем и пара $(R/(M_{j-1}' : M_j'), M_j'/M_{j-1}')$ оказывается простейшей. Итак, лемма полностью доказана.

ЛЕММА 9. Пусть S – унитарное подкольцо кольца R, $J(R) = J(S)$, $A = M_n(GR(p^e, r))$, $\Lambda = M_g(GR(p^e, t))$, где $tg = rn$, и пусть m_i выбраны, как в лемме 3. В этом случае выполняется утверждение леммы 8.

Доказательство. Так как $S/J(S) \cong M_g(GF(p^t))$, то $S \cong M_g(S')$, где S' – локальное кольцо. Пусть e_{ij} – матричные единицы кольца S. Легко заметить, что $e_{ii}Re_{ii} \cong e_{jj}Re_{jj}$. Поскольку $e_{ii}Re_{ii}/e_{ii}J(R)e_{ii} \cong M_{n_i}(GF(p^r))$ и $\sum n_i = n$, то $n_i = k = n/g$ и $R = M_g(R')$, где $R'/J(R') \cong \mathcal{T}_k^{(r)}(GF(p^r))$.

Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между S-подмодулями модуля M и $e_{11}Se_{11}$-подмодулями модуля $e_{11}M$. При этом N является R-подмодулем модуля M тогда и только тогда, когда $e_{11}N$ является $e_{11}Re_{11}$-подмодулем в $e_{11}M$. Поэтому лемму достаточно доказать для колец $e_{11}Re_{11}$ и $e_{11}Se_{11}$ и модуля $e_{11}M$. Но в этом случае $J(e_{11}Re_{11}) = e_{11}J(R)e_{11} = e_{11}J(S)e_{11} = J(e_{11}Se_{11})$, а кольца коэффициентов колец $e_{11}Re_{11}$ и $e_{11}Se_{11}$ изоморфны $M_k(GR(p^e, r))$ и $GR(p^e, t)$ соответственно, где $t = rk$, и лемма 9 следует из леммы 8.

ТЕОРЕМА 3. Пусть S – унитарное подкольцо кольца R, содержащее $J(R)$, и такое, что в $S/J(R)$ лежат все центральные идемпотенты кольца $R/J(R)$. Тогда $C_R(M) \leq C_S(M)$ для любого R-модуля M.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – максимальная система центральных ортогональных идемпотентов кольца A. Если φ:

$R \to R/\mathcal{J}(R)$ и $\psi: S/\mathcal{J}(R) \to S/\mathcal{J}(S)$ – естественные гомоморфизмы, то $\bar{\mathcal{E}} = \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$ и $\tilde{\mathcal{E}} = \{\psi\varphi(e_1), \ldots, \psi\varphi(e_n)\}$ являются системами ненулевых, центральных, ортогональных идемпотентов соответственно в кольцах $R/\mathcal{J}(R)$ и $S/\mathcal{J}(S) \cong \Lambda/p\Lambda$. Можно выбрать ортогональную систему $\mathcal{E}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ центральных идемпотентов кольца Λ, состоящую из прообразов системы $\mathcal{E}$. Тогда $e_i, e_i' \geq e_i e_i'$ и $\psi\varphi(e_i - e_i e_i') = \psi\varphi(e_i' - e_i e_i') = 0$. Таким образом, $\varphi(e_i - e_i e_i'), \varphi(e_i' - e_i e_i') \in \mathcal{J}(S)/\mathcal{J}(R)$ и поэтому $\varphi(e_i - e_i e_i') = \varphi(e_i' - e_i e_i') = 0$, откуда $e_i = e_i e_i' = e_i'$. Итак, в Λ лежат все центральные идемпотенты кольца A.

Пусть $f_i = \sum_{j=1}^{i} e_j$, а $R_i = S + f_i A$. Тогда $R_0 = S$, а $R_n = R$, и из соображений индукции можно считать, что $(1-e)A = (1-e)\Lambda$ для некоторого идемпотента e из $\mathcal{E}$. Рассмотрим отдельно случай, когда $\mathcal{J}(eRe) = \mathcal{J}(eSe)$, $eRe \neq eSe$, $e\Lambda e = M_q(GR(p^c, t))$, $eAe = M_n(GR(p^c, \tau))$ и $tq = \tau n$.

По теореме I в M найдется цепочка S-подмодулей $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k = M$ такая, что $k = C_S(M)$ и пары $(S/(M_{i-1} : M_i), M_i/M_{i-1})$ – простейшие. Тогда $M_i = \Lambda m_i + M_{i-1}$, причем m_i можно выбрать так, что $m_i = f_i m_i$ для некоторого идемпотента $f_i \in \mathcal{E}$. Пусть $I = \{i \mid em_i = m_i\}$. Положим $\tilde{M}_i = \sum_{j \in I, j \leq i} \Lambda m_j$. Так как $M_i = \sum_{j \leq i} \Lambda m_i$, то $eSe\tilde{M}_i \subseteq eM_i = \tilde{M}_i$. Будем рассматривать только несовпадающие модули $\tilde{M}_i$. При этом цепочка eSe-модулей $0 = \tilde{M}_0 \subseteq \tilde{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \tilde{M}_d = eM$ такова, что пары $(eSe/(\tilde{M}_{i-1} : \tilde{M}_i)), \tilde{M}_i/\tilde{M}_{i-1})$ – простейшие. Поэтому применима лемма 9. Положим $m_i^* = m_i'$, если $i \in I$ и $m_i^* = m_i$ в противном случае. Пусть $M_i' = \sum_{j \leq i} \Lambda m_j^*$. Если $i \in I$, то пара $(eRe/(M_{i-1}' : M_i'), M_i'/M_{i-1}')$ является простейшей по лемме 9, если же $i \notin I$, то пара $((1-e)R(1-e)/(M_{i-1}' : M_i'), M_i'/M_{i-1}')$ является простейшей, так как $(1-e)R(1-e) = (1-e)S(1-e)$. Кроме того, $(1-e)Re, eR(1-e) \subseteq \mathcal{J}(R) \subseteq S$ и если $i \in I$, то

$$(1-e)ReM_i' = (1-e)\mathcal{J}(R)eM_i' = (1-e)\mathcal{J}(R)e\sum_{j=1}^{i} \Lambda m_j^* \subseteq$$

$$\subseteq \sum_{j=1}^{i} (1-e)\mathcal{J}(R)m_j \subseteq (1-e)M_i \subseteq \sum_{i \notin I, j \leq i} \Lambda m_j \subseteq M_{i-1}' .$$

Если же $i \notin I$, то

$$eR(1-e)M_i' = eR(1-e)\sum_{i \notin I, j \leq i} \Lambda m_j^* \subseteq e\mathcal{J}(R)M_i \subseteq$$

$\leq \mathcal{J}(R) M_i \cap \sum_{j\in I, j\leq i} \Lambda m_j$.
Заметим, что это пересечение является eRe-подмодуле в $\sum_{j\in I, j\leq i} \Lambda m_j = \tilde{M}_i$ и по условию 3) леммы 9 оно лежит в $\sum_{j\in I, j\leq i} \Lambda m_j^*$, следовательно, $eR(1-e)M_i' \leq \sum_{j\in I, j\leq i} \Lambda m_j^* \leq M_{i-1}'$. Итак, пара $(R/(M_{i-1}' : M_i'), M_i'/M_{i-1}')$ является простейшей для любого i , и для этого случая теорема доказана.

Перейдем теперь к противному случаю. Будем вести индукцию по $C_S(M)$. Пусть факторы M_j/M_{j-1} являются неприводимыми S-модулями для всех $j < i$. Из всех рядов длины k выберем такой, для которого i является минимальным. Пусть m_i выбраны как в лемме 3. Тогда $M_i = Sm_i$. В самом деле, если $Sm_i \not\subseteq M_{i-1}$, то ряд $0 \leq M_{i-1} \cap Sm_i$ обладает уплотнением длины меньшей, чем $i-1$, и пара $(S/((M_{i-1} \cap Sm_i) : Sm_i), Sm_i/(Sm_i \cap M_{i-1}))$ – простейшая, поэтому можно сконструировать ряд, в котором фактор, не являющийся неприводимым, появляется ранее чем на i [м] месте.

Если M_{i-1} содержит ненулевой R-подмодуль N , то ряд $0 \leq N \leq M_{i-1}$ имеет уплотнение с факторами, изоморфными факторам исходного ряда, следовательно, $C_S(M) = C_{S/(0:N)}(N) + C_{S/(N:M)}(M/N)$, а к модулям N и M/N применимо предположение индукции.

Пусть теперь $N_{i-1} = 0$ и пусть $h \in \mathcal{E}$ такой, что $m_i = hm_i$. Поскольку $(1-h)Sm_i \subseteq M_i$ для любого $s \in S$, то $(1-h)sm_i = \lambda hm_i + m'$, где $\lambda \in \Lambda$ и $m' \in M_{i-1}$. Следовательно, $(1-h)Sm_i \subseteq M_{i-1}$, ибо h централен в A . Докажем, что это R-подмодуль. В самом деле, из $h \in \mathcal{E}$ следует $(1-h)Rh \leq \mathcal{J}(R)$. Так как $R = A + \mathcal{J}(R)$ и $N_{i-1} = 0$, то $\mathcal{J}(R)M_{i-1} = 0$ и $R(1-h)Sm_i = \mathcal{J}(R)(1-h)Sm_i + A(1-h)Sm_i \leq \mathcal{J}(R)M_{i-1} + A(1-h)Sm_i \leq A(1-h)Shm_i \leq (1-h)\mathcal{J}(R)hm_i \leq (1-h)Sm_i$. Итак, $(1-h)Sm_i = 0$, а поскольку $(1-h)Rh \leq \mathcal{J}(R) \leq S$, то $((1-h)Rh + R(1-h)) \leq (0 : Sm_i)$, и мы можем считать, что $R = hRh$, $S = hSh$ и $h = e$.

Положим $M_i' = \{m \in M_i \mid pm = 0\}$. Так как $N_{i-1} = 0$, из леммы 4 вытекает, что $M_i' = M_{i-1} \oplus \Lambda p^{\ell-1} m_i$, где $p^{\ell} = exp(m_i)$, и $\mathcal{J}(R)M_i' = 0$. Пусть f – примитивный идемпотент кольца R такой, что $f \leq e$ и $p^{\ell-1} f m_i \neq 0$. Поскольку $\ell > 1$ и $pR \leq S$, то $Afp^{\ell-1}m_i \leq M'$ и, следовательно, $Afp^{\ell-1}m_i$ – ненулевой R- подмодуль. Поэтому $Afp^{\ell-1}m_i \leq M_{i-1}$, а так как

M_i'/M_{i-1} - неприводимый Λ-модуль, то $A\{p^{e-1}m_i+M_{i-1}=$ $=M_i'$. Если $A\{p^{e-1}m_i\cap M_{i-1}\neq 0$, то ряд $A\{p^{e-1}m_i\leq M_i'$ можно уплотнить рядом длины, не превосходящей $i-2$, а тогда, воспользовавшись предположением индукции и тем, что $A\{p^{e-1}m_i$ - неприводимый R-модуль, имеем

$$C_S(M)\geqslant 1+C_S(M/A\{p^{e-1}m_i)\geqslant 1+$$

$$+C_R(M/A\{p^{e-1}m_i)\geqslant C_R(M),$$

что и требовалось доказать. Если же $A\{p^{e-1}m_i\cap M_{i-1}=0$, то отсюда следует, что в неприводимом R-модуле столько же элементов, сколько их в неприводимом S-модуле.

Рассмотрим точный $(A\cap S)-GR(p^e,r)$ бимодуль $M_n(GR(p^e,r))e_{11}$. Проводя для него аналогичные лемме 3 [7] рассуждения, получим, что при соответствующем базисе $A\cap S$ состоит из нижнеблочнотреугольных, а $J(S)\cap A$ - из строго нижнеблочнотреугольных по модулю p матриц из $M_n(GR(p^e,r))$. При этом легко заметить, что если имеется более одного блока, то мощность неприводимого Λ-модуля строго меньше мощности неприводимого A-модуля. Итак, в нашем случае $J(S)\cap A\leq pA$, поэтому $J(S)=$ $=J(R)$. Кроме того, $S=M_g(S')$, где S' - локальное кольцо, и $\Lambda=M_g(GR(p^e,k))$. Так как $A\supsetneqq\Lambda$ и эти два кольца обладают неприводимыми модулями с одинаковым числом элементов, то $p^{kg}=$ $=p^{rn}$ и, значит, $kg=rn$, но этот случай мы уже разобрали. Следовательно, теорема полностью доказана.

Пусть $(S,N)|(R,M)$ и имеется наложение подпары (R',M') пары (R,M) на пару (S,N). Пусть e - единица кольца R'; Λ - кольцо коэффициентов кольца R'; A - кольцо коэффициентов кольца eRe и $\Lambda\leq A$. Пусть, наконец, $\mathcal{E}$ - множество центральных идемпотентов кольца A. Тогда имеет место следующая последовательность пар:

$$(S,N),(R',M'),(R',eM),(R_1,eM),(R_2,eM),(eRe,eM),(R,M),$$

где R_1 - порождено кольцом R и множеством $\mathcal{E}$, а кольцо R_2 порождено кольцом R_1 и $J(eRe)$. Каждая из этих пар делит последующую. Заметим теперь, что:

1. $C_S(N)\leq C_{R'}(M)\leq C_{R'}(eM)$ по предложению 2.
2. $C_{R'}(eM)\leq C_{R_1}(eM)$ по предложению 5.
3. $C_{R_1}(eM)\leq C_{R_2}(eM)$ по предложению 4.

4. $C_{R_2}(eM) \geqslant C_{eRe}(eM)$ по теореме 3.

5. $C_{eRe}(eM) \leq C_R(M)$ по предложению 3.

В некоторых случаях, например, если кольцо A порождается объединением $\Lambda \cup E$, эти построения позволяют нам определить соотношение сложностей делящей и делимой пар.

Автор приносит глубокую благодарность Л.А. Скорнякову, руководившему этой работой.

Литература

I. Финкельштейн М.Я. Декомпозиция линейных автоматов. - В сб.: Абелевы группы и модули. Томск, 1980, 109-125.
2. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп /Ред. М.А. Арбиба.-М.: Статистика, 1975. - 335 с.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т.I.-М.: Мир, 1974.-335 с.
4. McDonald B.R. Finite rings with identity, New York. Dekker, 1974.
5. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.-М.: Наука, 1969.- 667 с.
6. Wilson R.S. On the structure of finite rings II, Pac. J. Math., v.51 (1974), №1, p.317-325.
7. Финкельштейн М.Я. Представление конечных колец с единицей.- -Вестник МГУ. Сер. матем., мех., 1980, №4.

Z-АДИЧЕСКОЕ ПОПОЛНЕНИЕ И ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

А.А.Фомин

Обозначения:

Z - кольцо целых чисел;

P - множество простых чисел;

Q_p^* - кольцо целых p-адических чисел;

J_p - аддитивная группа кольца Q_p^*;

$Z^* = \prod_{p \in P} Q_p^*$ - кольцо универсальных чисел (Z-адическое пополнение кольца Z).

Если A - абелева группа, а $\aleph$ - некоторое кардинальное число, то

$\prod_{\aleph} A$, $\sum_{\aleph} A$, $S_{\aleph} A$ - соответственно прямое произведение, прямая сумма и регулярная [1, 2] прямая сумма $\aleph$ экземпляров группы A.

$r_p(A)$ - p-ранг A.

$\pi(A)$ - множество простых чисел p, для которых A не является p-делимой группой; $A^\wedge$ и $A_p^\wedge$ - соответственно Z- адическое и p-адическое пополнения группы A.

Под словом "пополнение" мы будем понимать как группу $A^\wedge$, так и естественное отображение $\mu: A \to A^\wedge$;

м.л.н.с. - максимальная линейно независимая система.

Все группы в этой статье абелевы. Мы часто будем говорить, что A является подгруппой кольца (модуля) B, имея в виду, что A - подгруппа аддитивной группы B.

За всеми определениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к монографии Л.Фукса [3].

§ I. Введение

Группу без кручения A по модулю делимой части можно рассматривать как сервантную подгруппу ее Z-адического пополнения $A^\wedge$. При фиксации в группе $A^\wedge$ некоторой "системы координат" элементы группы $A^\wedge$, следовательно, и группы A по модулю делимой части представляются наборами целых p-адических чисел по одному и разным простым $p \in P$. Тензорное умножение при этом сводится к умножению p-адических чисел (теорема 2). Такой подход позволяет полностью описать тензорное произведение алгебраически компактных групп без кручения (теорема 3).

Также изучается тензорное умножение в классе $\mathcal{E}$-групп (групп без кручения, у которых p-ранги не превосходят единицы для всякого простого числа p). Показывается, что эти группы можно рассматривать как сервантные подгруппы кольца универсальных чисел Z^*, и их тензорное произведение с точностью до делимой части совпадает с их произведением в кольце Z^* (теорема 5).

И, наконец, в последнем параграфе описывается делимая часть тензорных степеней $\mathcal{E}$-групп.

§ 2. Z-адическое пополнение групп без кручения

Z-адическое пополнение произвольных абелевых групп описано Л.Я.Куликовым в [I , 2]. Мы применяем это описание для случая групп без кручения.

Определение регулярной суммы

Рассмотрим некоторое множество колец целых p-адических чисел, где p - фиксированное простое число;

$\{ {}_iQ_p^* \mid i \in \mathcal{N} \}$. Пусть $(\alpha_i)_{i \in \mathcal{N}}$ - элемент Q_p^*-модуля $\prod_{\mathcal{N}} Q_p^*$. Назовем набор $(\alpha_i)_{i \in \mathcal{N}}$ регулярным, если для всякого целого положительного n лишь конечное число элементов набора не делится на p^n. Множество регулярных наборов образует Q_p^*-подмодуль модуля $\prod_{n} Q_p^*$, который называется регулярной прямой суммой $\mathfrak{n}$ экземпляров Q_p^* и обозначается $\underset{\mathfrak{n}}{S} Q_p^*$.

p-адическое пополнение $A_p^\wedge$ любой группы A имеет структуру Q_p^*-модуля, а Z-адическое пополнение - структуру модуля над кольцом универсальных чисел Z^* [3, с. 197].

Определение канонической системы

Пусть A - группа без кручения. Для каждого простого числа p фиксируем какой-либо p-базис группы A $\{x_i \mid i \in \mathfrak{m}_p\}$. Полученную совокупность p-базисов будем называть канонической системой и обозначать $\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}_p)_{p \in P}$.

Теорема I [1, 2]

Пусть A - группа без кручения с фиксированной канонической системой $\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}_p)_{p \in P}$. Тогда существует Z^*-модульный изоморфизм

$$\varphi : A^\wedge \longrightarrow \prod_{p \in P} \underset{\mathfrak{m}_p}{S} Q_p^*$$

со следующими свойствами:

1. Если $\mu : A \to A^\wedge$ Z-адическое пополнение, а $\pi_p : \prod_{p \in P} \underset{\mathfrak{m}_p}{S} Q_p^* \to \underset{\mathfrak{m}_p}{S} Q_p^*$ - проекция на p- ю координату, то композиция $\pi_p \varphi \mu : A \to \underset{\mathfrak{m}_p}{S} Q_p^*$ является p-адическим пополнением группы A.

2. Элемент x_i p-базиса (p-компоненты канонической системы) переводится отображением $\pi_p \varphi \mu$ в набор, у которого на i- м месте стоит единица, а на остальных нули.

В дальнейшем, если у нас фиксирована какая-нибудь каноническая система $\mathfrak{M}$, то мы будем производить отождествление по изоморфизму φ и гомоморфизм $\varphi \mu : A \to \prod_{p \in P} \underset{\mathfrak{m}_p}{S} Q_p^*$ будем называть Z-адическим пополнением вдоль канонической системы $\mathfrak{M}$.

Как известно, ядром Z-адического пополнения $\mu : A \to A^\wedge$ является делимая часть группы A, а образом служит сервантная подгруппа группы $A^\wedge$. Поэтому теорема I позволяет представлять элементы группы без кручения A по модулю делимой части в виде $a=(a_p)_{p\in P}$, где $a_p=(\alpha_i)_{i\in \mathfrak{M}_p}$ - регулярные наборы целых p-адических чисел. При этом фиксация канонической системы играет роль выбора "системы координат".

§ 3. $\mathbb{Z}$-адическое пополнение тензорного произведения двух групп без кручения

Пусть A и B - группы без кручения с фиксированными каноническими системами $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_p)_{p\in P}$ и $\mathfrak{N}=(\mathfrak{N}_p)_{p\in P}$ соответственно. Пусть $\{x_i \mid i\in \mathfrak{M}_p\}$ и $\{y_j \mid j\in \mathfrak{N}_p\}$ p-базисы (p-компоненты канонических систем) групп A и B соответственно.

Определение произведения канонических систем $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$

Произведением p-базисов назовем подмножество $\{x_i\otimes y_j \mid (i,j)\in \mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p\}$ группы $A\otimes B$. Здесь $\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p$ - декартово произведение множеств $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{N}_p$.

Произведением канонических систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ назовем систему $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}=(\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p)_{p\in P}$, p- компоненты которой являются произведениями p-компонент канонических систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Поскольку произведение p-базисов групп A и B является p-базисом группы $A\otimes B$ [3 , с.305], то произведение канонических систем групп A и B будет канонической системой группы $A\otimes B$.

Согласно теореме I рассмотрим $\mathbb{Z}$-адическое пополнение групп A и B вдоль канонических систем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно;

$$\mu: A \to \prod_{p\in P} \sum_{\mathfrak{M}_p} Q_p^* ,$$
$$\nu: B \to \prod_{p\in P} \sum_{\mathfrak{N}_p} Q_p^* .$$

Пусть $a\in A$, $b\in B$. Тогда $\mu(a)=(a_p)_{p\in P}$, где $a_p=(\alpha_i)_{i\in\mathfrak{M}_p}$ - регулярные наборы целых p-адических чисел; аналогично $\nu(b)==(b_p)_{p\in P}$, где $b_p=(\beta_j)_{j\in\mathfrak{N}_p}$.

Определение отображения η.

Рассмотрим отображение $\Theta: A\times B \to \prod_{p\in P}\prod_{\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p} Q_p^*$

которое определяется следующим образом: $\Theta(a,b)=(a_p\cdot b_p)_{p\in P}$, где $a_p \cdot b_p = (\alpha_i \cdot \beta_j)_{(i,j) \in \mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_p}$. Здесь $\alpha_i \cdot \beta_j$ - произведение в кольце Q_p^*. Очевидно, что $a_p \cdot b_p$ - регулярный набор в $\prod\limits_{\mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_p} Q_p^*$ и что Θ - билинейное отображение.

Поэтому Θ индуцирует гомоморфизм

$$\eta : A \otimes B \to \prod_{p \in P} \mathop{S}_{\mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_p} Q_p^* .$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B - группы без кручения с фиксированными каноническими системами $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_p)_{p \in P}$ и $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_p)_{p \in P}$ соответственно. Тогда гомоморфизм $\eta : A \otimes B \to \prod\limits_{p \in P} \mathop{S}\limits_{\mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_p} Q_p^*$ является Z-адическим пополнением группы $A \otimes B$ вдоль канонической системы $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma : A \otimes B \to \prod\limits_{p \in P} \mathop{S}\limits_{\mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_p} Q_p^*$ Z-адическое пополнение вдоль канонической системы $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Покажем, что

$$\pi_p \gamma = \pi_p \eta \qquad , \qquad (1)$$

где π_p - проекция на p- ю координату. Пусть $\{x_i \mid i \in \mathfrak{M}_p\}$ и $\{y_j \mid j \in \mathfrak{N}_p\}$ — p-базисы (p-компоненты канонических систем) групп A и B соответственно, а $a \in A$, $b \in B$ -произвольные элементы. По свойствам p-базиса для всякого целого положительного n в A имеет место равенство

$$a = \sum_{i \in \mathfrak{M}_p} c_{in} x_i + p^n a_n \qquad , \qquad (2)$$

где c_{in} - целые, почти все равные нулю, $a_n \in A$. Применим к равенству (2) p-адическое пополнение вдоль канонической системы $\mathfrak{M}$:

$$\pi_p \mu(a) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_p} c_{in} \pi_p \mu(x_i) + p^n \pi_p \mu(a_n). \qquad (3)$$

Согласно теореме 1 $\pi_p \mu(a) = (\alpha_i)_{i \in \mathfrak{M}_p}$ - некоторый регулярный набор целых p-адических чисел, а $\pi_p \mu(x_i)$ - регулярный набор, у которого на i-м месте стоит единица, а на остальных нули. Из равенства (3) следует, что элемент $(\alpha_i - c_{in})_{i \in \mathfrak{M}_p}$ делится на p^n в $\mathop{S}\limits_{\mathfrak{M}_p} Q_p^*$, отсюда следует $\lim\limits_{n \to \infty} c_{in} = \alpha_i$ для всякого $i \in \mathfrak{M}_p$.

Аналогично

$$b = \sum_{j \in \mathfrak{N}_p} d_{jn} y_j + p^n b_n \qquad . \qquad (4)$$

Причем $\lim\limits_{n \to \infty} d_{jn} = \beta_j$, где $\pi_p \nu(b) = (\beta_j)_{j \in \mathfrak{N}_p}$ - регулярный набор целых p-адических чисел. Тензорно перемножив равенства (2) и (4), получим, что элемент

$$a \otimes b - \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_p} c_{in} d_{jn} x_i \otimes y_j$$

делится в $A\otimes B$ на p^n. Применив гомоморфизм p-адического пополнения вдоль канонической системы $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$, получим, что элемент $\pi_p\gamma(a\otimes b) - (c_{in}\alpha_{jn})_{(i,j)\in\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p}$ делится на p^n в $\underset{\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p}{S} Q_p^*$. Переходя к пределу при n, стремящемся к бесконечности, получаем, что $\pi_p\gamma(a\otimes b) = (\alpha_i\beta_j)_{(i,j)\in\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p}$. Таким образом, равенство (I) доказано, а поскольку оно имеет место при всех $p\in P$, то $\gamma=\eta$. Теорема доказана.

Предыдущая теорема позволяет вычислять редуцированную часть группы $A\otimes B$, если группы A и B заданы как подгруппы своих Z-адических пополнений $A^\wedge$ и $B^\wedge$. Сохраняя все обозначения и предположения, сформулируем следствие теоремы 2, которое поможет нам вычислять делимую часть группы $A\otimes B$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $c=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\otimes b_k$ – элемент группы $A\otimes B$, причем $\pi_p\mu(a_k)=(\alpha_{kpi})_{i\in\mathfrak{M}_p}$, $\pi_p\nu(b_k) = (\beta_{kpj})_{j\in\mathfrak{N}_p}$. Элемент c лежит в делимой части группы $A\otimes B$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kpi}\cdot\beta_{kpj}=0 \qquad \text{для всех } p,\ i,\ j.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элемент c лежит в делимой части группы $A\otimes B$ тогда и только тогда, когда $\gamma(c)=0$. Однако по теореме 2

$$\gamma(c)=\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kpi}\,\beta_{kpj}\Big)_{(i,j)\in\mathfrak{M}_p\times\mathfrak{N}_p}\Big)_{p\in P}.$$

Следствие доказано.

Следующие три параграфа посвящены приложениям теоремы 2.

§ 4. Тензорное произведение алгебраически компактных групп без кручения

Описывая тензорное произведение алгебраически компактных групп без кручения, можно, не уменьшая общности, ограничиться редуцированными алгебраически компактными группами, которые в точности являются Z-адически полными группами без кручения [3, с.196]. При этом набор p-рангов по всем простым p

составляет полную систему инвариантов редуцированной алгебраически компактной группы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A и B - ненулевые редуцированные алгебраически компактные группы без кручения, $(k_p)_{p\in P}$ и $(\ell_p)_{p\in P}$ - наборы p-рангов A и B соответственно.
Тогда:

1. Делимая часть группы $A\otimes B$ равномощна всей группе и имеет мощность не меньше континуума.

2. Редуцированная часть группы $A\otimes B$ есть алгебраически компактная группа, которая определяется набором p-рангов $(k_p\cdot \ell_p)_{p\in P}$, где $k_p\cdot \ell_p$ - произведение кардинальных чисел.

Доказательство. Группы A и B совпадают со своими Z-адическими пополнениями. Из теоремы 1 следует, что A имеет подгруппу, изоморфную аддитивной группе кольца целых p-адических чисел J_p. Аналогично B содержит подгруппу, изоморфную J_q. Если p и q - различные простые числа, то $J_p\otimes J_q$ - континуальная делимая группа. Если же $p=q$, то, как следует из теоремы 2 в статье [4], $J_p\otimes J_q$ содержит континуальную делимую подгруппу. Во всяком случае ранг делимой части $A\otimes B$ не меньше континуума.

Предположим, что мощность группы A больше либо равна мощности группы B и больше континуума. Тогда, как видно из теоремы 1, мощность группы A совпадает с максимальным p-рангом k_p, и группа A содержит подгруппу $\sum_{k_p} J_p$, равномощную группе A, а также группе $A\otimes B$. Группа B содержит хотя бы подгруппу J_q, но тогда $A\otimes B$ содержит подгруппу $\sum_{k_p} J_p\otimes J_q$, которая, независимо от того, равны p и q или нет, содержит делимую подгруппу мощности k_p, равной мощности всей группы $A\otimes B$. Тем самым доказано первое утверждение теоремы, а второе является прямым следствием теоремы 2, так как редуцированная часть $A\otimes B$ изоморфна Z-адическому пополнению $(A\otimes B)^\wedge$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Класс алгебраически компактных групп без кручения замкнут относительно тензорного умножения.

§ 5. Тензорное произведение $\mathcal{E}$-групп

С.Е.Мурлей [5] изучал очень интересный класс $\mathcal{E}$-групп (групп без кручения, p-ранги которых не превосходят единицы для всякого простого p). Класс $\mathcal{E}$-групп является ближайшим обобщением класса групп без кручения ранга I. Если тензорное произведение групп без кручения ранга I совпадает с их произведением в кольце рациональных чисел Q , то тензорное произведение $\mathcal{E}$-групп с точностью до делимой части совпадает, как мы скоро увидим, с их произведением в кольце универсальных чисел, которое является Z-адическим пополнением кольца целых чисел.

Как и в предыдущем параграфе, не уменьшая общности, мы можем ограничиться редуцированными $\mathcal{E}$-группами.

Определение типа $\mathcal{E}$-группы

Набор p-рангов $\mathcal{E}$-группы A по всем простым p $\{r_p(A)\}_{p\in P}$, состоящий из нулей и единиц, назовем типом $\mathcal{E}$-группы A и обозначим $\tau(A)$.

Заметим, что тип $\tau(A)$ можно рассматривать как элемент кольца универсальных чисел $Z^* = \prod_{p\in P} Q_p^*$, в этом случае $\tau(A)$ является идемпотентом в Z^*.

Через $\pi(A)$ обозначим множество простых чисел p , для которых p-ранг группы A равен единице.

Пусть A -редуцированная $\mathcal{E}$-группа с фиксированной канонической системой $\mathfrak{M}$. Z-адическое пополнение вдоль этой системы

$$A \longrightarrow \prod_{p\in\pi(A)} Q_p^*$$

является в этом случае мономорфизмом. Мы можем произвести по нему отождествление группы A с подгруппой в $\prod_{p\in\pi(A)} Q_p^*$.

Заметим при этом, что $A^\wedge = \prod_{p\in\pi(A)} Q_p^*$ является циклическим Z^*-модулем, который мы можем рассматривать как идеал в Z^*, порожденный типом $\tau(A)$. Сформулируем предыдущие рассуждения в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Редуцированные $\mathcal{E}$-группы - это в точности сервантные подгруппы кольца универсальных чисел Z^*. Z-адическое пополнение редуцированной $\mathcal{E}$-группы A совпадает с идеалом в Z^*, порожденным множеством A ; $A^\wedge = A\,Z^* =$

$= \tau(A) \cdot Z^*$.

Гомоморфизм η (см. § 2) в случае $\mathcal{E}$-групп индуцируется обычным умножением в кольце универсальных чисел. В применении к $\mathcal{E}$-группам теорема 2 дает простое описание тензорного умножения. Прежде чем сформулировать его, договоримся понимать под произведением $A \cdot B$ двух подгрупп A и B некоторого кольца подгруппу аддитивной группы этого кольца, порожденную всевозможными произведениями ab, $a \in A$, $b \in B$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A и B - редуцированные $\mathcal{E}$-группы с фиксированными каноническими системами, т.е. мы их рассматриваем как подгруппы Z^*. Тогда:

I. Отображение $\eta \cdot A \otimes B \to Z^*$, для которого $\eta(a \otimes b) = a \cdot b$ является композицией Z-адического пополнения вдоль произведения исходных канонических систем и естественного вложения $(A \otimes B)^\wedge \subset Z^*$.

2. $A \otimes B \cong A \cdot B \oplus \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ - делимая часть $A \otimes B$.

Заметим, что используя следствие I, можно вычислять ранг делимой части тензорного произведения $\mathcal{E}$-групп аналогично той схеме, по которой вычислялся ранг p-делимой части тензорного произведения групп p-ранга I в статье [6]. Однако здесь мы не будем этим заниматься, ограничившись описанием в следующем параграфе делимой части тензорных степеней $\mathcal{E}$-групп.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A - сервантная подгруппа ранга n кольца Z^*, замкнутая относительно умножения в Z^*. Тогда $A \otimes A \cong A \oplus \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ -делимая ранга n, если n - бесконечное кардинальное число, или ранга $n^2 - n$, если n -конечно.

В частности:

I. $J_p \otimes J_p \cong J_p \oplus \mathcal{D}$;

2. $\prod\limits_{p \in P} J_p \otimes \prod\limits_{p \in P} J_p \cong \prod\limits_{p \in P} J_p \oplus \mathcal{D}$.

В обоих случаях $\mathcal{D}$ - континуальная делимая группа.

Для счетного подкольца R кольца целых p-адических чисел Q_p^* можно построить алгебраически независимое над R множество целых p-адических чисел любой мощности вплоть до континуума. На этом наблюдении основано следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть A - счетная редуцированная $\mathcal{E}$-группа. Тогда для любого кардинального числа n, не превосходящего континуум, найдется редуцированная $\mathcal{E}$-группа B ранга n

такая, что $A\otimes B$ также редуцированная $\mathcal{E}$-группа.

Предположение о счетности в следствии 4 существенно.

§ 6. Тензорные степени $\mathcal{E}$-групп

В этом параграфе мы изучаем делимую часть тензорных степеней редуцированных $\mathcal{E}$-групп. Пусть A - редуцированная $\mathcal{E}$-группа с фиксированной канонической системой $\mathfrak{M}$. Z-адическое пополнение группы A будет рассматриваться вдоль $\mathfrak{M}$, а группы $\overset{n}{\otimes} A$ - вдоль канонической системы

$$\mathfrak{M}^n = \mathfrak{M}\times\ldots\times\mathfrak{M}.$$

Фиксируем в A какую-нибудь максимальную линейно независимую систему $\{x_i \mid i\in J\}$, множество J нам удобно считать вполне упорядоченным $J=\{1,2,\ldots\}$. Тогда множество $\{x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_n} \mid i_k\in J\}$ образует, как известно, м.л.н.с. в группе $\overset{n}{\otimes} A$. Подгруппу в $\overset{n}{\otimes} A$, порожденную этим множеством, обозначим через $\mathcal{U}^n(A)$. Очевидно, что $\overset{n}{\otimes} A/\mathcal{U}^n(A)$ - периодическая группа и что $\mathcal{U}^n(A)$ изоморфна группе однородных некоммутативных многочленов над кольцом целых чисел степени n с множеством независимых переменных $x_1, x_2,\ldots$. Нам удобно считать, что $\mathcal{U}^n(A)=Z[x_1,x_2,\ldots]\cap\overset{n}{\otimes} A$, где $Z[x_1,x_2,\ldots]$ - кольцо некоммутативных многочленов.

Z-адическое пополнение группы A вдоль $\mathfrak{M}$ переводит элементы м.л.н.с. x_i в универсальные числа ε_i. В свою очередь соответствие $x_i\mapsto\varepsilon_i$ определяет гомоморфизм колец:
$\varphi: Z[x_1,x_2,\ldots]\to Z^*$. Обозначим

$$V^n(A)=\overset{n}{\otimes} A\cap \operatorname{Ker}\varphi.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть A -редуцированная $\mathcal{E}$-группа с фиксированными канонической системой и м.л.н.с. Тогда для всякого целого положительного n делимая часть группы $\overset{n}{\otimes} A$ совпадает с сервантной оболочкой подгруппы $V^n(A)$.

Доказательство. Любой элемент $c\in\overset{n}{\otimes} A$, домноженный на некоторое целое число k, попадает в группу $\mathcal{U}^n(A)$, т.е. превращается в однородный многочлен $f(x_1,\ldots)$. Согласно теореме 2 пополнение η вдоль канонической системы $\mathfrak{M}^n$ действует следующим образом:

$$\eta(f(x_1,\ldots))=\varphi(f(x_1,\ldots))=f(\varepsilon_1,\ldots).$$

Элемент c лежит в делимой части группы $\overset{n}{\otimes} A$ тогда и только тогда, когда $\eta(c)=0$, т.е. когда $f \in \operatorname{Ker} \varphi$, или c лежит в сервантной оболочке подгруппы $V^n(A)$. Теорема доказана.

Литература

I. Куликов Л.Я. Универсально полные абелевы группы.- Труды Ш Всесоюзного математического съезда, т.1.-М., 1956, с.26-28.

2. Куликов Л.Я. Группы расширения абелевых групп: Труды IУ Всесоюзного математического съезда, т.2.-Л., 1961, с. 9-II.

3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.I.-М.:Мир, 1974.-335 с.

4. Фомин А.А. Тензорное произведение абелевых групп без кручения.-Сиб. мат. ж., т.ХУI, № 5, 1975, с. 1071-1080.

5. Murley C.E. The classification of certain classes of torsion free abelian groups. Pacif. J. Math. 40(1972), 647-665.

6. Фомин А.А. Тензорные произведения групп без кручения p-ранга I. Деп. в ВИНИТИ 4 янв. 1976, № 5-76, 9с.

fi-ИЗОМОРФНО ПРОСТЫЕ АБЕЛЕВЫ p-ГРУППЫ

Л.Х.Цыбикова

В [I] исследованы группы, обладающие изоморфными им (истинными)подгруппами, сервантными подгруппами или прямыми слагаемыми. С другой стороны, в работах [2], [3], [4] были построены некоторые примеры примарных групп без собственных изоморфных себе подгрупп. Естественно ставить вопрос об описании классов абелевых групп, не содержащих собственных изоморфных себе подгрупп специального вида (например, сервантных, вполне характеристических и т.п.)

Абелеву группу назовем fi-изоморфно простой, если она не содержит собственных изоморфных себе вполне характеристических подгрупп.

В настоящей работе дано полное описание fi-изоморфно простых групп, являющихся прямыми суммами циклических p-групп (теоремы 2, 3 и 4). Установлено, что периодически полная p-группа является fi-изоморфно простой тогда и только тогда, когда её базисная подгруппа fi-изоморфно проста (теорема 7). Для произвольных сепарабельных p-групп приведено достаточное условие fi-изоморфной простоты (теорема 6).

Пусть N – множество всех натуральных чисел; N_0 – множество всех неотрицательных целых чисел; $p \geqslant 2$ – некоторое простое число. Прямая сумма групп G_i записывается как $\oplus G_i$, $C(p^k)$ означает циклическую группу порядка p^k. Через $f_B(k)$ обозначен k-й инвариант Ульма – Капланского группы B. В целом обозначения и терминология соответствуют [5] и [6].

В [7] дано такое описание вполне характеристических подгрупп прямой суммы циклических p-групп:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B=\bigoplus_{k\in N} B_k$, где каждое $B_k=\oplus C(p^k)$. Подгруппа L вполне характеристична в группе B тогда и только тогда, когда $L=\bigoplus_{k\in N} p^{n_k}B_k$, где:

1) $n_k\leq k$ для всех $k\in N$;

2) $n_k\leq n_{k+\tau}\leq n_k+\tau$ для всех $k\in N$, $\tau\in N$.

Напомним, что если группа B является прямой суммой циклических p-групп, т.е. $B=\bigoplus_{k\in N} B_k$, где $B_k=\bigoplus_{m_k} C(p^k)$, то $f_B(i)=m_{i+1}$ для любого $i\in N_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа B является прямой суммой циклических p-групп и пусть все её инварианты Ульма-Капланского конечны. Группа B $f.i.$- изоморфно проста тогда и только тогда, когда для всех $k\in N_0$ система равенств вида $f_B(k)=\sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$, где $\tau_k<\tau_{k+1}$, справедлива лишь при $\tau_k=k$ (здесь под суммой $\sum_{\alpha}^{\beta} f_B(i)$ при $\beta=\alpha$ понимаем вырожденную сумму, состоящую лишь из одного слагаемого).

Доказательство. а) Пусть группа B $f.i.$- изоморфно проста. Допустим, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots$ отличная от последовательности $0<1<2<\ldots$ такая, что для всех $k\in N_0$ выполняется система равенств $f_B(k)=\sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$. В силу конечности инвариантов Ульма-Капланского $\tau_0\neq 0$. Построим подгруппу L следующим образом:

$$L=pB_1\oplus p^2B_2\oplus\cdots\oplus p^{\tau_0}B_{\tau_0}\oplus p^{\tau_0}B_{\tau_0+1}\oplus\cdots\oplus p^{\tau_1-1}B_{\tau_1}\oplus$$
$$\oplus p^{\tau_1-1}B_{\tau_1+1}\oplus\cdots=\oplus p^{n_k}B_k.$$

Используя теорему 1, получаем, что L - вполне характеристическая подгруппа группы B. Более того, $L\cong B$ ввиду равенства соответствующих инвариантов Ульма Капланского, а это противоречит тому, что B - $f.i.$- изоморфно простая группа. б) Пусть для всех $k\in N_0$ система $f_B(k)=\sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$ справедлива только при $\tau_k=k$ и пусть группа B содержит собственную вполне характеристическую подгруппу L такую, что $L\cong B$. По теореме I имеем, что

$L=\bigoplus_{k\in N} p^{n_k}B_k$, где: 1) $n_k\leq k$, $n_k\leq n_{k+\tau}$;

2) $n_k\leq n_{k+\tau}\leq n_k+\tau$. Выражая инварианты Ульма-Капланского подгруппы L через инварианты группы B, получаем, что для

всех $k \in N_0$ $f_L(k)=\sum\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$. Учтем теперь, что $L \cong B$. Тогда имеем $f_B(k)=\sum\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$ для всех $k \in N_0$.

Из конечности всех инвариантов Ульма-Капланского группы B и из того, что L - собственная подгруппа, вытекает $\tau_0 > 0$. Значит, $\tau_k > k$ для всех $k \in N_0$. Противоречие. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если группа B является прямой суммой циклических p-групп и для каждого $k \in N_0$ существует $t > k$ такое, что $f_B(k) < f_B(t)$, то она $f.i.$-изоморфно проста.

Доказательство. Допустим противное. Пусть L - собственная вполне характеристическая подгруппа группы B, причем $L \cong B$. Тогда по теореме I $L=\bigoplus\limits_{k \in N} p^{n_k} B_k$, где: I) $n_k \le k$; 2) $n_k \le n_{k+1} \le n_k+1$. Поэтому существует $j \in N_0$ такое, что $n_j=0$, $n_{j+1}=1$, т.е.

$$L=B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_j \oplus pB_{j+1} \oplus \ldots \oplus p^{\tau_j-j} B_{\tau_j} \oplus$$
$$\oplus p^{\tau_j-j} B_{\tau_j+1} \oplus \ldots \oplus p^{\tau_{j+1}-j-1} B_{\tau_j+1} \oplus \ldots .$$

Это означает, что в терминах инвариантов Ульма-Капланского справедлива следующая система равенств:

$$\begin{cases} f_L(j-1)=f_B(j-1)+f_B(j)+\ldots+f_B(\tau_j-1), \\ f_L(j)=f_B(\tau_j)+f_B(\tau_j+1)+\ldots+f_B(\tau_{j+1}-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Учитывая изоморфизм групп L и B, получаем

$$\begin{cases} f_B(j-1)=f_B(j-1)+f_B(j)+\ldots+f_B(\tau_j-1), \\ f_B(j)=f_L(\tau_j)+f_B(\tau_j+1)+\ldots+f_B(\tau_{j+1}-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad (1)$$

Первое равенство из этой системы выполняется лишь в двух случаях: I) $j=0$; 2) $j \in N_0$ и $f_B(j-1) \geq \aleph_0$.

Случай I. Пусть $0 \le \alpha \le \tau_0$ и $f_B(\alpha) \geq f_B(i)$ для всех $i \in N_0$ таких, что $i \le \tau_0$. По условию теоремы для этого α существует минимальное $k \in N_0$ такое, что $f_B(\alpha) < f_B(k)$. Ясно, что $f_B(k) > f_B(i)$ для всех $0 \le i < k$. Так как $k > \tau_0$, то существует $s \in N_0 (0 \le s < k)$, для которого в системе (I) справедливо равенство

$$f_B(S) = f_B(\tau_s) + \ldots + f_B(k) + \ldots + f_B(\tau_{s+1} - 1).$$

Это противоречит тому, что $f_B(S) < f_B(k)$.

Случай 2. Пусть $j \in N$ такое, что $f_B(j-1) \geq \aleph_0$. По условию для данного $j-1 \in N_0$ существует $k > j-1$, для которого $f_B(j-1) < f_B(k)$.

Учитывая равенства системы (I), начиная со второго, можно теперь первое равенство для некоторого $S > k$ представить в виде

$$f_B(j-1) = f_B(j-1) + f_B(j) + \ldots + f_B(\tau_{j-1}) = f_B(j-1) +$$
$$+ f_B(\tau_j) + f_B(\tau_j + 1) + \ldots + f_B(\tau_{j+1} - 1) + \ldots + f_B(\tau_{\tau_{j-1}+1} - 1) =$$
$$= \ldots = f_B(j-1) + f_B(j) + \ldots + f_B(\tau_j - 1) + f_C(\tau_j) +$$
$$+ f_B(\tau_j + 1) + \ldots + f_B(k) + \ldots + f_B(S).$$

Это противоречит тому, что $f_B(j-1) < f_B(k)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть группа B является прямой суммой циклических p-групп и существует $t \in N_0$ такое, что $f_B(t) \geq \aleph_0$, причем $f_B(t) \geq f_B(k)$ для любого $k > t$. Тогда для того, чтобы группа B была $f.i.$-изоморфно простой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $k > t$ система равенств вида

$$f_B(k) = \sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$$, где $\tau_k \in N_0$ и $\tau_k < \tau_{k+1}$, имела место лишь при $\tau_k = k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\tau_{t+1} < \tau_{t+2} < \ldots$ $(\tau_{t+1} > t+1)$ такая, что система равенств

$$f_B(k) = \sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$$ справедлива для всех $k > t$, то построим собственную подгруппу L группы B следующим образом:

$$L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_{t+1} \oplus pB_{t+2} \oplus \ldots \oplus p^{\tau_{t+1}-t-1} B_{\tau_{t+1}} \oplus$$

$$\oplus p^{\tau_{t+1}-t-1} B_{\tau_{t+1}+1} \oplus \ldots \oplus p^{\tau_{t+2}-t-2} B_{\tau_{t+2}} \oplus \ldots = \bigoplus_{k \in N} p^{n_k} B_k.$$

Очевидно, что все n_k удовлетворяют условиям теоремы I, т.е. L – вполне характеристическая подгруппа группы B. Изоморфизм групп L и B следует из равенств соответствующих инвариантов Ульма-Капланского. Получили противоречие с $f.i.$-изоморфной простотой группы B.

б) Пусть L – собственная вполне характеристическая подгруппа группы B, причем $L \cong B$. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3, получаем

$$\begin{cases} f_B(j-1) = f_B(j-1) + f_B(j) + \ldots + f_B(\tau_j - 1), \\ f_B(j) = f_B(\tau_j) + f_B(\tau_j + 1) + \ldots + f_B(\tau_{j+1} - 1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Заметим, что j может принять значения, равные нулю, либо $t+1$, где $t \in N_0$ такое, что $f_B(t) \geq \aleph_0$, и для любого $k > t$ $f_B(t) \geq f_B(k)$. В обоих случаях получаем, что существует последовательность $\tau_{t+1} < \tau_{t+2} < \ldots$ $(\tau_{t+1} > t+1)$, для которой система $f_B(k) = \sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_B(i)$ справедлива для всех $k > t$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Из теорем 2 и 4 легко можно вывести следующее:

СЛЕДСТВИЕ 5. Любая ограниченная группа является $f.i.$-изоморфно простой.

Итак, теоремы 2, 3 и 4 дают полное описание $f.i.$-изоморфно простых групп, являющихся прямыми суммами циклических p-групп.

Рассмотрим теперь произвольные абелевы p-группы. Если G некоторая p-группа, то $B(G)$ обозначает её базисную подгруппу.

Пусть S – множество строго возрастающих последовательностей, определенных на N_0 и имеющих значения в $N_0 \cup \{\infty\}$. Множество S частично упорядочено: $\sigma \leq \rho$ тогда и только тогда, когда $\sigma(k) \leq \rho(k)$ для любого $k \in N_0$. Для каждого элемента $g \in G$ $H_G(g) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$, где $\alpha_k = h_G(p^k g)$ – это высотная последовательность элемента g в группе G. Высотная последовательность $H_G(A)$ для некоторой подгруппы A группы G есть покоординатный inf в S множества $\{H_G(g), g \in A\}$. Последовательность $\sigma \in S$ называется G-последовательностью, если $\sigma = H_G(A)$ для некоторой подгруппы A группы G. Через $\mathcal{F}(G)$ обозначим структуру всех вполне характеристических подгрупп группы G. Множество всех G-последовательностей обозначим через $S(G)$.

В [8] показано, что для любой сепарабельной p-группы G существует структурный антиизоморфизм (если G редуцирована)

$$\mathcal{F}(G) \cong S(G) \qquad (2)$$

ставящий в соответствие каждой G-последовательности σ единственную вполне характеристическую подгруппу $G(\sigma)$, и, наоборот, для каждой вполне характеристической подгруппы L группы G существует G-последовательность τ такая, что $L = G(\tau)$.

Там же доказано, что если L - вполне характеристическая подгруппа группы G, то

$$H_G(L)=H_G(B(G)\cap L) \quad \text{и} \qquad (3)$$

$$L\cap B(G) \text{ вполне характеристична в } B(G). \quad (4)$$

Известно также, что если L - широкая подгруппа группы G, то $L\cap B(G)=B(L)$ является базисной подгруппой группы L [3].

Теперь можем получить следующее достаточное условие $f.i.$-изоморфной простоты произвольной сепарабельной абелевой p-группы.

ТЕОРЕМА 6. Сепарабельная p-группа G является $f.i.$-изоморфно простой, если её базисная подгруппа $B(G)$ $f.i.$-изоморфно проста.

Доказательство. Так как ограниченные p-группы всегда $f.i.$-изоморфно просты, то здесь рассматриваются неограниченные сепарабельные p-группы.

Если L - собственная вполне характеристическая подгруппа группы G и $L\cong G$, то $B(G)\cap L$ является базисной подгруппой группы L [6, с. 21].

Возможны следующие случаи:

а) $B(L)=B(G)\cap L=0$, тогда L и G - делимые группы, и так как $L\cong G$, то $L=G$. Противоречие.

б) $B(L)=B(G)\cap L=B(G)$, т.е. L содержит базисную подгруппу $B(G)$ группы G. Используя (3), имеем

$$H_G(L)=H_G(B(G)\cap L)=H_G(B(G))=H_{B(G)}(B(G))=H_G(G).$$

Учитывая неограниченность G и применяя поэтому (2), имеем $L=G$. Так как рассматриваемая подгруппа L являлась собственной, то получено противоречие.

в) $B(L)=B(G)\cap L$ - собственная подгруппа группы $B(G)$. Тогда ввиду изоморфизма групп L и G имеем $B(L)\cong B(G)$, а из (4) следует, что $B(L)$ вполне характеристична в $B(G)$. Данное противоречие с условием теоремы и завершает доказательство.

Для периодически полных p-групп полученное условие является и необходимым.

ТЕОРЕМА 7. Для того чтобы периодически полная p-группа G являлась $f.i.$-изоморфно простой, необходимо и достаточно, чтобы её базисная подгруппа $B(G)$ была $f.i.$-изоморфно простой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу справедливости теоремы 6 осталось показать только необходимость такого утверждения. Допустим противное, пусть $B(G)$ содержит собственную изоморфную себе вполне характеристическую подгруппу, обозначим её через $\mathcal{F}$. Тогда известно [7], что существует вполне характеристическая подгруппа L группы G, которая является даже широкой в G, причем $B(L)=\mathcal{F}$, а L как широкая подгруппа периодически полной группы является периодически полной [9]. Из изоморфизма $B(L)$ и $B(G)$ следуют равенства соответствующих инвариантов Ульма-Капланского групп L и G, отсюда $L \cong G$. Получено противоречие.

Литература

1. Beaumont R.A., Pierce R.S. Isomorphic direct summands of Abelian groups. – Math. Ann., 1964, 153, 21-37.
2. Pierce R.S. Homomorphisms of primary Abelian groups. – Topics in Abelian groups. Chicago, Illinois, 1963, 215-310.
3. Hill P., Megibben C. On primary groups with countable basic subgroups. – Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 124, N: 1, 49-59.
4. Crawley P. An infinite primary abelian groups without proper isomorphic su.gro-ups. – Bull. Amer. Math. Soc., 1962, 68, 462-467.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.I.–М.; Мир, 1974.– 335 с.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.2.–М.; Мир, 1977.– 416 с.
7. Benabdallah K.M., Eisenstadt B.J., Irwin J.M., Poluianov E.W. The structure of large subgroups of primary Abelian groups. – Acta Math., 1970, N:3-4, 421-435.
8. Moore D.J., Hewett E.J. On fully invariant subgroups of Abelian p-groups. – Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1972, N2, 97-106.
9. Гриншпон С.Я. О некоторых классах примарных абелевых групп, почти изоморфных по вполне характрисическим подгруппам. – Изв.вузов. Матем., 1976, № 2, 23-30.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ СЛАГАЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

А.Р.Чехлов

В данной заметке рассматривается вопрос, когда подгруппа G p-группы A является пересечением прямых слагаемых группы A. Здесь даётся ответ на этот вопрос для замкнутых (в p-адической топологии) подгрупп исходной группы A (теорема 3) и для произвольных подгрупп сепарабельной p-группы, т.е. группы, у которой редуцированная часть - группа без элементов бесконечной высоты (теорема 5). Показывается, что в p-группе A замыкание сервантной подгруппы является пересечением прямых слагаемых группы A (предложение 6).

Заметим, что задачи, подобные рассматриваемым в заметке, сформулированы в виде проблем ([1], проблемы 9 и 13; [2], проблема 2).

Отметим, что Кхаббаз [3] и Шарль [4] установили как необходимые, так и достаточные условия представимости подгруппы A делимой группы D в виде пересечения делимых подгрупп группы D. Подобные задачи рассматривались также в [5 - 8].

Терминология и обозначения, если специально не оговорено, будут соответствовать [1].

Автор выражает благодарность С.Я.Гриншпону за руководство и постоянное внимание к данной работе.

Сначала приведем лемму Меджиббена, представляющую и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. [6]. Пусть A - p-группа и D - ненулевое абсолютное прямое слагаемое группы A. Тогда если H - подгруппа группы A такая, что $H \cap D = 0$, то H есть пересечение всех дополнительных слагаемых к D, которые содержат H.

ЛЕММА 2. Пусть подгруппа H p- группы A является пересечением прямых слагаемых группы A. Тогда если существует целое число $k \geqslant 0$ такое, что для любого целого $m \geqslant k$ следует

$$p^m A[p] \leq H + p^{m+1} A,$$

то либо $p^k A \leq H$, либо $(D \cap H)[p] \neq D[p]$, где D - делимая часть группы A.

Доказательство. Пусть существует разложение группы $A = G \oplus C$ и $H \leq G$. Тогда $p^m A[p] = p^m G[p] \oplus p^m C[p] \leq G \oplus p^{m+1} C$. Следовательно, $p^m C[p] \leq p^{m+1} C$ для каждого целого $m \geqslant k$.

Имеем две возможности:

1. $p^k C[p] = 0$. Следовательно, $p^k C = 0$ и $p^k A \leq G$. Если это имеет место для каждого разложения $A = G \oplus C$ такого, что $H \leq G$, то $p^k A \leq H$.

2. Если $p^k C[p] \neq 0$, то для каждого $x \in p^k C[p]$ следует, что $x \in p^{k+n} C[p]$ для произвольного целого $n > 0$. Значит, каждый элемент цоколя подгруппы $p^k C$ имеет бесконечную высоту в $p^k C$. Следовательно, $p^k C$ - делимая подгруппа группы A. Отсюда $(D \cap H)[p] \neq D[p]$.

Следующая теорема дает ответ на поставленный вопрос для подгрупп $H \leq A$, замкнутых в p-адической топологии группы A.

ТЕОРЕМА 3. Пусть H - замкнутая в p-адической топологии подгруппа p-группы A. Тогда H является пересечением прямых слагаемых группы A тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если существует целое число $k \geqslant 0$ такое, что для любого целого $m \geqslant k$

$$p^m A[p] \leq H + p^{m+1} A \quad , \text{ то } p^k A \leq H.$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2.

Достаточность. Если существует целое число $k \geqslant 0$ такое, что для любого целого $m \geqslant k$ следует $p^m A[p] \leq H + p^{m+1} A$, то можно предположить, что $k > 0$ и $p^{k-1} A[p] \nleq H + p^k A$. Тогда существует элемент $a \in A$ порядка $o(a) = p^k$ такой, что

$\langle a\rangle\cap(H+p^kA)=0$. Следовательно, $\langle a+p^kA\rangle$ есть абсолютное прямое слагаемое в группе A/p^kA. Тогда по лемме I подгруппа $(H+p^kA)/p^kA$ есть пересечение прямых слагаемых K_i/p^kA $(i\in J)$ в группе A/p^kA. Ясно, что $H+p^kA=\bigcap_{i\in J}K_i$ и, кроме того, подгруппы $K_i\,(i\in J)$ являются сервантными в группе A. Так как A/K_i – ограниченная группа для каждого $i\in J$, то все подгруппы K_i являются прямыми слагаемыми группы A.

Предположим далее, что не существует целого числа $k\geqslant 0$ такого, что для любого целого $m\geqslant k$ $p^mA[p]\subseteq H+p^{m+1}A$. Тогда имеем возрастающую последовательность целых чисел

$$0<m_1<m_2<\dots<m_n<\dots \qquad (\mathrm{I})$$

такую, что для каждого m_i из последовательности (I) существует целое $n_i\geqslant 0$, что $p^{m_i+n_i}A\nsubseteq H+p^{m_i+n_i+1}A$. По доказанному выше получаем, что подгруппа $H+p^{m_i+n_i}A$ является пересечением прямых слагаемых группы A. Следовательно, подгруппа $H=\bigcap_{n=1}^{\infty}(H+p^nA)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(H+p^{m_i+n_i}A)$ является пересечением прямых слагаемых группы A. Теорема доказана.

Как следствие отметим такое свойство.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если подгруппа H является пересечением прямых слагаемых редуцированной p-группы A, то ее замыкание H^- в p-адической топологии группы A также является пересечением прямых слагаемых группы A.

Доказательство. Предположим, что $p^mA[p]\subseteq H^-+p^{m+1}A$ для некоторого целого числа $m\geqslant 0$. Тогда каждый элемент $a\in p^mA[p]$ можно представить в виде $a=h'+p^{m+1}a'$, где $h'\in H^-=\bigcap_{n=1}^{\infty}(H+p^nA)$ и $a'\in A$. Для любого целого $s\geqslant 0$ имеем $h'=h+p^sa''$, где $h\in H$ и $a''\in A$. Если $s\geqslant m+1$, то имеем $a=h+p^sa''+p^{m+1}a'=h+p^{m+1}(a'+p^{s-m-1}a'')\in$ $\in H+p^{m+1}A$. Таким образом, $p^mA[p]\subseteq H+p^{m+1}A$. Теперь, если существует целое число $k\geqslant 0$ такое, что для любого $m\geqslant k$ следует $p^mA[p]\subseteq H^-+p^{m+1}A$, то из доказанного выше получаем, что $p^mA[p]\subseteq H+p^{m+1}A$. По лемме 2 $p^kA\subseteq H$, тогда и подавно

$p^k A \subseteq H^-$.

Для сепарабельных p-групп справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть D - делимая часть сепарабельной p-группы A. Подгруппа H группы A является пересечением прямых слагаемых группы A тогда и только тогда, когда справедливы следующие импликации:

I) если существует $k \geq 0$ такое, что для любого $m \geq k$ следует $p^m A[p] \subseteq H + p^{m+1} A$,

то либо $p^k A \subseteq H$, либо $(D \cap H)[p] \neq D[p]$;

2) если $(D \cap H)[p] = D[p]$, то $D \subseteq H$ и H замкнута в p-адической топологии группы A.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует разложение $A = G \oplus C$ и $H \subseteq G$. Тогда $D = (G \cap D) \oplus (C \cap D)$. Следовательно, $D[p] = (G \cap D)[p] \oplus (C \cap D)[p]$. Если $(C \cap D)[p] = 0$, то $D \subseteq G$ и прямое слагаемое G замкнуто в A. Таким образом, $D \subseteq H$ и подгруппа H как пересечение замкнутых слагаемых замкнута в A.

Достаточность. Если $(D \cap H)[p] \neq D[p]$, то в D существует делимая подгруппа, не пересекающаяся с H. Так как делимые группы являются абсолютными прямыми слагаемыми, то по лемме I H есть пересечение прямых слагаемых группы A. Если теперь $(D \cap H)[p] = D[p]$, то достаточно применить теорему 3. В силу следствия 4 в p-группе A первая ульмовская подгруппа $0^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A = A^1$ является пересечением прямых слагаемых группы A. Естественно возникает вопрос, существуют ли в A еще какие-нибудь "хорошие" подгруппы H такие, что их замыкания H^- являются пересечениями прямых слагаемых группы A?

В этой связи отметим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Замыкание H^- в p-адической топологии p-группы A ее сервантной подгруппы H является пересечением прямых слагаемых группы A.

Доказательство. Предположим, что существует $k \geq 0$ такое, что для любого $m \geq k$ $p^m A[p] \subseteq H^- + p^{m+1} A$.

Отсюда $p^m A[p] \subseteq H + p^{m+1} A$.

Имеем

$$p^k (A/H)[p] = ((p^k A + H)/H)[p] = (p^k A[p] + H)/H =$$

$=(p^{k+1}A[p]+H)/H = p^{k+1}(A/H)[p] = \ldots = p^{k+n}(A/H)[p]$.
Следовательно, $p^k(A/H)$ – делимая группа. Таким образом, $p^kA \leq H^-$. Простая ссылка на теорему 3 заканчивает доказатольство.

Литература

I. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.I.–М.:Мир,1974.–335 с.

2. Fuchs L. Abelian Groups.- Publishing House of the Academy of Sciences, Budapest, 1958.

3. Khabbaz S. A. The subgroups of a divisible group G which can be represented as intersections of divisible subgroups of G.- Pacific J. Math., 1961, v. 11, p. 267-273.

4. Charles B. Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles.- C. R. Acad. Sci. Paris, 1960, v. 250, p. 256-257.

5. Rangaswamy K. M. Characterisation of intersections of neat subgroups of abelian groups. - J. Indian Math. Soc., 1965, v. 29, p. 31-36.

6. Megibben C. On subgroups of primary abelian groups. - Publ. Math. Debrecen, 1965, v. 12., p. 293-294.

7. Кэмалов Ф.Ф. Пересечение прямых слагаемых абелевых групп. – Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1977, № 5, с. 45–56.

8. Мановцев А.А. Слабо сервантные оболочки в абелевых группах. – В сб.:Мат. исследования, т. 8, вып. 2 (28). Кишинёв: Штиинца, 1973, с. 93–101.

Рефераты на опубликованные статьи

УДК 512.55

Эпиморфизмы обобщенных однорядных колец и вторые централизаторы периодических модулей над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. Агапитов К.В. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с.3-19.

Изучаются эпиморфизмы в категории колец с единицей. Доказано, что если R - обобщенное однорядное кольцо, то гомоморфизм $f: R \to R'$ является эпиморфизмом в категории колец с единицей тогда и только тогда, когда выполнены такие условия: 1) $R' = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$; 2) $f = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i$; $f_i : R \to R_i$; 3) $f_i(R) \subseteq R_i \subseteq Q_{max}(f_i(R))$; 4) $R_i \otimes_R R_j = 0$ для $i \neq j$.

Если R - ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, P - максимальный обратимый идеал кольца R , n - число неизоморфных простых правых P - примарных модулей, X_R - точный P-примарный модуль, то $Biend X_R$ - подпрямое произведение колец $B_1, \ldots, B_k$, где $k \leq n$; B_1 - ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо; $B_2, \ldots, B_k$ - обобщенные однорядные кольца, а модули $\hat{R}_P(Biend X_R)$ и $(Biend X_R)_{\hat{R}_P}$ - нётеровы.

Библ. 16.

УДК 512.541

Первые группы когомологий над межпрямыми суммами $\mathfrak{M}$-сепарабельных типа P^+ групп. Беккер И.Х. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 20-33.

Рассматриваются свойства групп скрещенных гомоморфизмов $Z^1(\Phi, G)$, первых групп когомологий $H^1(\Phi, G)$ над межпрямыми суммами G $\mathfrak{m}_\alpha$-сепарабельных типа P^+ групп G_α (Φ - группа автоморфизмов группы G ; $\mathfrak{m}_\alpha$ - любой бесконечный кардинал, α пробегает произвольное множество индексов $\mathfrak{A}$). Развиваемый при этом подход к вычислению групп $H^1(\Phi, G)$ позволяет установить для них как необходимые, так и достаточные признаки равенства нулю.

Библ.4.

УДК 512.541.

О прямых произведениях абелевых групп без кручения конечного ранга. Беккер И.Х. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 34-45.

Пусть S - полужесткая система абелевых групп без кручения конечного ранга. Прямое произведение групп, изоморфных группам из S , называется S^*-группой. Рассматриваются свойства S^*-групп, устанавливаются критерий изоморфизма S^*-группы A группе $Hom(A,B)$ (B - S^*-группа) и критерий определяемости S^*-группы своими относительными голоморфами.

Библ.10.

УДК 512.552

Дифференцирования групповых колец. Бурков В.Д. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с.46-55.

Пусть G -периодическая группа; K -коммутативное кольцо, в котором обратимы порядки всех элементов группы G ; KG - групповая алгебра; $\overline{KG}$ $-(KG,KG)$ -бимодуль всех функций из G в K . Дифференцирование D алгебры KG называется обобщенным внутренним, если $D(x)=xa-ax$, где $a\in KG$. Доказывается, что все дифференцирования KG являются обобщенными внутренними. Пусть $\mathcal{P}_K = \{G \mid$ все дифференцирования KG -обобщенные внутренние$\}$. Доказано, что $G\times H\in\mathcal{P}_K$, если $G\in\mathcal{P}_K$ и $H\in\mathcal{P}_K$. Наконец, описываются дифференцирования группового кольца KG в том случае, когда K -произвольное кольцо.

Библ. 5.

УДК 512.541

О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения. Гриншпон С.Я. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 56-92.

Предлагается подход к изучению вполне характеристических подгрупп и связей их строения со строением самой группы для достаточно широких классов абелевых групп без кручения. С помощью этого подхода найдены связи между инвариантами рассматриваемых групп и соответствующими инвариантами их вполне характеристических подгрупп. Получены также некоторые свойства решетки вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения.

Библ. 13.

УДК 512.541

Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием. Иванов А.В. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 93-109.

Описываются абелевы группы с самоинъективными слева или справа кольцами эндоморфизмов. Абелева группа G имеет самоинъективное справа кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда $G = \mathfrak{D} \oplus R$, где $\mathfrak{D}$ - делимая группа без кручения; R - редуцированная группа, являющаяся вполне инвариантной сервантной подгруппой в $\sum\limits_{p}^{*} T_p(R)$, где $T_p(R)$ - прямые суммы циклических p-групп одного порядка p^k , где k может зависеть от p , причем если $\mathfrak{D} \neq 0$, то R - периодическая группа. Для самоинъективности слева необходимо дополнительно потребовать, чтобы делимая часть группы G имела конечный ранг, а все p-компоненты периодической части G были конечны. Кроме того, описываются группы, кольца эндоморфизмов которых обладают аннуляторным условием для конечно порожденных левых идеалов.

Библ. 5.

УДК 512.55

О полунаследственности полуструктурных сумм колец.
Игнатов В.В. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 110-116.

Пусть L - полуструктура, $\{R_\alpha\}_{\alpha \in L}$ - семейство колец, причем при $\alpha \geqslant \beta$ задан гомоморфизм $\varphi_\beta^\alpha : R_\alpha \to R_\beta$, и $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ влечет $\varphi_\gamma^\beta \varphi_\beta^\alpha = \varphi_\gamma^\alpha$, $\varphi_\alpha^\alpha = 1$. Тогда $R = \langle R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle_{\alpha \in L}$ - строгая полуструктурная сумма колец R_α , если $R^+ = \sum R_\alpha^+$, а на образующих $r \in R_\alpha, r' \in R_\beta, \alpha\beta = \gamma$ умножение задаётся так: $rr' = \varphi_\gamma^\alpha(r)\varphi_\gamma^\beta(r')$.
Если a столбец над кольцом R , то $^{\perp}a = \{r \mid r \in M_1(R), ra = 0\}$.
Гомоморфизм колец $\varphi : R \to S$ наследственен, если $^{\perp}a = \langle e \rangle$, $e^2 = e \Rightarrow {}^{\perp}\varphi a = \langle \varphi e \rangle$. В статье доказано, что если почти все φ_β^α наследственны, то $R = \langle R_\alpha, \varphi_\beta^\alpha \rangle$ полунаследственно $\Leftrightarrow$ R_α полунаследственно для всякого $\alpha \in L$. Как следствие получено, что полугрупповое кольцо RL над полуструктурой L полунаследственно $\Leftrightarrow$ R полунаследственно.

Библ. 2.

УДК 512.541

Продолжение автоморфизмов в почти вполне разложимых абелевых группах без кручения. Кожухов С.Ф. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 117-127.

Изучаются почти вполне разложимые абелевы группы без кручения, то есть те абелевы группы без кручения, которые содержат в себе квазиравные вполне разложимые подгруппы, называемые полными квазиразложениями данной группы. Дается полное описание почти вполне разложимых групп, у которых всякий автоморфизм любого полного квазиразложения продолжается до автоморфизма самой группы.

Библ. 4.

УДК 512.541+512.552

Подкольца конечномерных рациональных алгебр и их аддитивные группы. Крылов П.А. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 128-140.

Рассматриваются различные свойства подколец конечномерных рациональных алгебр, связанные с радикалом Джекобсона. Дается описание радикала таких колец, находятся условия его нильпотентности и равенства нулю. Затем, используя эти результаты, описываются аддитивные группы полупервичных и полупростых подколец конечномерных рациональных алгебр.

Библ. 12.

УДК 512.553

О кополупростых классах модулей. Марков В.Т. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 141-144.

Работа посвящена изучению классов кополупростых относительно некоторого кручения модулей. Даётся описание классов модулей, совпадающих с классом всех τ-кополупростых модулей для некоторого джансова кручения τ.

Библ. 8.

УДК 512.541

Сервантные подгруппы абелевых групп без кручения конечного ранга. Никифоров В.А. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 145-157.

Описываются на языке типов групп ранга I почти вполне разложимые абелевы группы без кручения, в которых всякая сервантная подгруппа почти вполне разложима. При доказательстве вспомогательных результатов используется аппарат теории графов. Граф определяется на множестве типов квазислагаемых ранга I почти вполне разложимой группы и отражает некоторые зависимости между этими типами.

Библ. 9.

УДК 512.553

Сильная плоскостность и проективность сплетения полигонов. Нормак П.Э. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 158-165.

Рассматриваются алгебраические автоматы как полигоны над соответствующими моноидами. Это позволяет изучать алгебраические автоматы и их сплетения чисто алгебраическими методами. Найдены условия сильной плоскостности и проективности сплетения полигонов. Например, сплетение $A \operatorname{wr} B$ левых S-полигона A и T-полигона B проективно тогда и только тогда, когда B проективен и либо моноид T содержит правый нуль и A проективен, либо $A \cong Sv$, $v \in S$, и существует элемент $s \in S$ такой, что $v = sSv$.

Библ. 4.

УДК 512.55

Кольца, все факторкольца которых малоинъективны справа. Туганбаев А.А. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 166-174.

Работа посвящена гомологической классификации колец. Дается описание инвариантных колец, все факторкольца которых малоинъективны справа. Более точно, показано, что если R - инвариантное (например, коммутативное) кольцо, то все факторкольца кольца R малоинъективны справа тогда и только тогда, когда $R = T_1 \times \dots \times T_n \times \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_m$, где T_i - самоинъективные справа цепные инвариантные одномерные кольца с малоинъективными правыми идеалами, а $\mathcal{D}_j$ - вполне целозамкнутые справа инвариантные области с малопроективными правыми идеалами. Установлен также ряд фактов для колец, над которыми все циклические модули малопроективны.

Библ. 8.

УДК 512.553

О малоинъективных модулях. Туганбаев А.А. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с.175-180.

Доказывается, что прямое разложение малоинъективного модуля в прямую сумму неразложимых модулей дополняет прямые слагаемые. Артиновость коммутативного нётерова кольца равносильна квазиинъективности всех малоинъективных модулей.

Библ. 7.

УДК 512.553

Аксиоматизируемость класса вполне приводимых модулей. Тюкавкин Л.В. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 181-184.

Найдены необходимые и достаточные условия аксиоматизируемости и конечной аксиоматизируемости класса всех вполне приводимых модулей над кольцом.

Библ. 3.

УДК 512.553

Аксиоматизируемость класса неприводимых модулей. Тюкавкин Л.В. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 185-197.

Рассматривается вопрос аксиоматизируемости класса неприводимых модулей. Даётся описание колец, класс неприводимых модулей над которыми аксиоматизируем. Если $\mathfrak{M}_\ell(R)$ - класс всех левых неприводимых модулей над кольцом R, включая и нулевой модуль, то этот класс аксиоматизируем тогда и только тогда, когда существует такое конечное подкольцо A факторкольца $R/\mathcal{J}(R)$, что $A+I=R/\mathcal{J}(R)$ для некоторого максимального левого идеала I кольца $R/\mathcal{J}(R)$ ($\mathcal{J}(R)$- радикал Джекобсона кольца R). Кроме того, показано, что если $\mathfrak{M}_r(R)$- класс всех правых неприводимых R-модулей (включая и нулевой модуль), то классы $\mathfrak{M}_e(R)$ и $\mathfrak{M}_\tau(R)$ аксиоматизируемы одновременно.

Библ. 9.

УДК 512.553

О сложности линейных автоматов. Финкельштейн М.Я. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 198-221.

В работе вводится понятие сложности пары, соответствующей линейному автомату. Оно аналогично понятию сложности конечного автомата. Исследуются соотношения между сложностью и делимостью пар.

Библ. 7.

УДК 512.541

$\hat{Z}$-адическое пополнение и тензорное произведение абелевых групп без кручения. Фомин А.А. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 222-232.

Дается описание тензорного произведения алгебраически компактных групп без кручения. Так как всякая редуцированная абелева группа без кручения вкладывается в качестве сервантной подгруппы в алгебраически компактную, то этот результат позволяет описывать тензорное умножение также в других классах абелевых групп без кручения. В статье показывается, что тензорное умножение в классе групп без кручения, у которых p-ранги не превосходят единицы для всякого простого числа p, с точностью до делимой части совпадает с умножением в кольце универсальных чисел ($\hat{Z}$-адическом пополнении кольца целых чисел Z).

Описывается также делимая часть тензорных степеней вышеуказанных групп.

Библ. 8.

УДК 512.541

fi-изоморфно простые абелевы p-группы. Цыбикова Л.Х. Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 233-239.

Абелева группа G называется fi-изоморфно простой, если она не содержит собственной себе изоморфной вполне характеристической подгруппы. Полностью описаны fi-изоморфно простые группы, являющиеся прямыми суммами циклических p-групп. Критериями fi-изоморфной простоты служат определенные ограничения на инварианты Ульма-Капланского. Показано, что если базисная подгруппа произвольной сепарабельной p-группы является fi-изоморфно простой, то сама группа также fi-изоморфно проста. Это же условие будет необходимым и достаточным для fi-изоморфной простоты периодически полной p-группы. fi-изоморфно простые периодически полные p-группы полностью описаны в терминах инвариантов Ульма-Капланского.

Библ. 9.

УДК 512.541

Пересечение прямых слагаемых абелевых p-групп. Чехлов А.Р. Абелевы группы и модули. Томск. Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 240-244.

Рассматривается вопрос, когда подгруппа G p-группы A является пересечением прямых слагаемых группы A. Дается ответ на этот вопрос для замкнутых (в p-адической топологии) подгрупп исходной группы A и для произвольных подгрупп сепарабельной p-группы. Показывается, что в p-группе A замыкание сервантной подгруппы является пересечением прямых слагаемых группы A .

Библ. 8.

Содержание

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Редактор Е.С.Юзефович

Подписано к печати 12/2 - 1981 КЗ06036
Формат 60х84 1/16. Бумага типографская № 3.
П.л. 16,125; уч.-изд.л. 13,5; усл.п.л. 14,9.
Тираж 500 экз. Заказ 675 Цена 2р. ИБ 730

Издательство ТГУ, 634029 Томск, ул.Никитина, 17.
Ротапринт ТГУ, 634029, Томск, ул.Никитина, 17.