

**АБЕЛЕВЫ
ГРУППЫ
И МОДУЛИ**

АВБЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Издательство Томского университета
Томск - 1979

В межвузовском тематическом сборнике "Абелевы группы и модули" рассматриваются вопросы теории абелевых групп, а также теории модулей и категорий. Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов, студентов, интересующихся проблемами современной алгебры.

Редактор - доцент И.Х. Беккер

2-2-3

© Издательство Томского университета, 1979 г.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАСЩЕПЛЯЕМОСТЬ И СЛАБО ЖЕСТКИЕ СИСТЕМЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

И.Х.Беккер, С.К.Росошак

На абелевой группе G без кручения введем естественным образом структуру $Z[x]$ -модуля ${}^{\alpha}G$, где α - фиксированный эндоморфизм группы G . Если для любого эндоморфизма φ группы G $Z[x]$ -модуль ${}^{\varphi}G$ периодичен, то G назовем полиномиально периодической (G совпадает со своей полиномиально периодической частью $\text{Tot } G$). Если $\text{Tot } G$ выделяется в G прямым слагаемым, то G назовем полиномиально расщепляемой.

В данной работе выделяем классы полиномиально периодических и полиномиально расщепляемых групп без кручения. В частности, всякая абелева группа без кручения конечного ранга (или группа, кольцо эндоморфизмов которой без кручения и конечного ранга) полиномиально периодична. Для прямых сумм групп без кручения конечного ранга, почти изоморфных группам полужесткой (слабо жесткой) системы, устанавливаем критерий их полиномиальной периодичности (теорема 6). Указывается, что такие прямые суммы групп являются полиномиально расщепляемыми. Теорема 9 дает описание полиномиально периодических частей прямых произведений групп, почти изоморфных группам полужесткой (слабо жесткой) системы. Такие прямые произведения групп не могут быть полиномиально периодическими и не всегда являются полиномиально расщепляемыми. В работе под словом "группа" понимаем "абелеву группу без кручения".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G - группа, α - ее эндоморфизм, α -модулем ${}^{\alpha}G$ на группе G назовем модуль над кольцом целочисленных полиномов $Z[x]$ с аддитивной группой G и модульным умножением

$$f(x)g = f(\alpha)g, f(x) \in Z[x], g \in G.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\alpha, \beta \in E(G)$. Модули ${}^{\alpha}G$ и ${}^{\beta}G$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует такой автоморфизм φ группы G , что $\varphi^{-1}\beta\varphi = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\varphi: {}^{\alpha}G \rightarrow {}^{\beta}G$, тогда φ - автоморфизм группы G . Так как $\varphi(xg) = x\varphi(g)$, то $\varphi(\alpha g) = \beta(\varphi g)$ и $\varphi(\alpha)g = (\beta\varphi)g$. Отсюда $\varphi\alpha = \beta\varphi$, $\alpha = \varphi^{-1}\beta\varphi$.

б) Пусть φ - такой автоморфизм группы G , что $\varphi^{-1}\beta\varphi = \alpha$. Убедимся, что φ есть изоморфизм модулей ${}^{\alpha}G$ и ${}^{\beta}G$. Достаточно показать, что для $f(x) \in Z[x]$ справедливо $\varphi f(\alpha) = f(\beta)\varphi$.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in Z$. Имеем $\varphi(a_ng) = (a_n\varphi)g$, $g \in G$, а по условию $\varphi(a_k\alpha) = (a_k\beta)\varphi$ и $\varphi\alpha^k = \beta^k\varphi$, $k = 0, 1, \dots, n$. Отсюда $\varphi(a_0\alpha^n + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n) = (a_0\beta^n + \dots + a_{n-1}\beta + a_n)\varphi$. Следовательно, для $g \in G$ всегда $\varphi[f(\alpha)g] = f(\beta)(\varphi g)$, т.е. $\varphi: {}^{\alpha}G \rightarrow {}^{\beta}G$.

Таким образом, если $E(G)$ кольцо коммутативное, то любые ${}^{\alpha}G$, ${}^{\beta}G$ модули изоморфны. Если эндоморфизм α группы G есть умножение на рациональное число $\frac{r}{s}$, т.е. $\alpha g = \frac{r}{s}g$ для любого $g \in G$, то ${}^{\alpha}G$ есть периодический и даже ограниченный модуль. Действительно, пусть J - идеал кольца $Z[x]$, порожденный $f(x) = sx - r$. Тогда $J({}^{\alpha}G) = 0$. Следовательно, для жесткой группы G [1, с. 148] всякий модуль ${}^{\alpha}G$, $\alpha \in E(G)$ есть ограниченный модуль.

Назовем полиномиально периодической частью модуля ${}^{\alpha}G$, $\alpha \in E(G)$ множество всех его элементов $g \in {}^{\alpha}G$, для каждого из которых существует хотя бы один такой ненулевой многочлен $f(x) \in Z[x]$, что $f(\alpha)g = 0$. Обозначим такое множество элементов через $\text{tor } {}^{\alpha}G$. Нетрудно проверить, что $\text{tor } {}^{\alpha}G$ - сервантный и инвариантный подмодуль модуля ${}^{\alpha}G$. Пересечение всех $\text{tor } {}^{\alpha}G$, $\alpha \in E(G)$ назовем полиномиально периодической частью группы G . Обозначим ее через $\text{Tor } G$, т.е. $\text{Tor } G = \bigcap_{\alpha \in E(G)} \text{tor } ({}^{\alpha}G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группу G назовем полиномиально периодической, если $\text{Tor } G = G$, и полиномиально расщепляемой, если $\text{Tor } G$ выделяется прямым слагаемым в G .

ЛЕММА 4. Если $A = \sum_{i \in I} {}^{\oplus} A_i$ - такое прямое разложение группы A , что $\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$ для любых $i \neq j$, то $\text{Tor } A = \sum_{i \in I} {}^{\oplus} \text{Tor } A_i$.

Действительно, поскольку каждая A_i вполне характеристична в A , то $\text{tor}({}^{\varphi}A_i) \subseteq \text{tor}({}^{\varphi}A)$ для любого эндоморфизма $\varphi \in E(A)$ (φ_i - эндоморфизм группы A_i , индуцированный φ). Отсюда следует

$$\text{Tor } A_i \subseteq \text{Tor } A \quad (i \in J) \quad \text{и} \quad \sum_{i \in J} {}^{\oplus} \text{Tor } A_i \subseteq \text{Tor } A.$$

Наоборот, пусть $a \in \text{Tor } A$, $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}$, $a_{i_k} \in A_{i_k}$ ($k=1, 2, \dots, m$). Если $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) \neq 0$ и $f(\varphi)a = 0$ для $\varphi \in E(A)$, то $f(\varphi)a_{i_k} = f(\varphi_{i_k})a_{i_k} = 0$. Следовательно, $a_{i_k} \in \text{tor}({}^{\varphi_{i_k}}A_{i_k})$ и $a_{i_k} \in \text{Tor}(A_{i_k})$. Отсюда следует $a \in \sum_{i \in J} {}^{\oplus} \text{Tor } A_i$, $\text{Tor } A \subseteq \sum_{i \in J} {}^{\oplus} \text{Tor } A_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если группа G без кручения имеет конечный ранг или $E(G)$ - кольцо без кручения конечного ранга, то G - группа полиномиально периодическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если G имеет конечный ранг, то для любых $\varphi \in E(G)$ и $0 \neq g \in G$ множество $\{g, \varphi g, \dots, \varphi^n g, \dots\}$ - линейно зависимо. Следовательно, существуют такие целые числа $k_0^{(g)}, k_1^{(g)}, \dots, k_m^{(g)}$, не все равные нулю и зависящие от g , что $k_0^{(g)}g + k_1^{(g)}\varphi g + \dots + k_m^{(g)}\varphi^m g = 0$. Очевидно, что хотя бы одно из чисел $k_1^{(g)}, \dots, k_m^{(g)}$ отлично от нуля. Тогда ненулевой многочлен $f_g(x) = k_0^{(g)} + k_1^{(g)}x + \dots + k_m^{(g)}x^m$ аннулирует g в ${}^{\varphi}G$, $f_g(x)g = 0$. Следовательно, для любого $\varphi \in E(G)$ ${}^{\varphi}G$ - периодический $\mathbb{Z}[x]$ -модуль, т.е. $\text{tor}({}^{\varphi}G) = G$ и $\text{Tor } G = G$.

б) Пусть $E(G)$ - кольцо без кручения конечного ранга, $\varphi \in E(G)$. Поскольку $\{\varphi^0, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n, \dots\}$ - множество линейно зависимо, то $s_0\varphi^0 + s_1\varphi + \dots + s_r\varphi^r = 0$, где $s_0, s_1, \dots, s_r \in \mathbb{Z}$ - числа, не все равные нулю. Следовательно, ненулевой многочлен $S(x) = s_0 + s_1x + \dots + s_rx^r$ аннулирует каждый элемент из G . Значит, ${}^{\varphi}G$ - ограниченный $\mathbb{Z}[x]$ -модуль, $\text{tor}({}^{\varphi}G) = G$ и $\text{Tor } G = G$.

Таким образом, класс полиномиально периодических групп содержит не только все группы без кручения конечного ранга. Очевидно, всякая жесткая группа будет также полиномиально периодической. Выделим ниже и другие классы групп без кручения бесконечного ранга, являющихся полиномиально периодическими.

Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ - полужесткая система групп [3]. Следовательно, на $\mathcal{A}$ задан такой частичный порядок $\leq$, что $\alpha \leq \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathcal{A}$) тогда и только тогда, когда $\text{Hom}(G_\alpha, G_\beta) \neq 0$. Будем далее рассматривать такие полужесткие системы $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ групп G_α без кручения конечного ранга, что всякий раз

$\alpha \leq \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathcal{O}$) влечет точность строки $0 \rightarrow G_\alpha \xrightarrow{\alpha} G_\beta$ для некоторого $\gamma \in \text{Hom}(G_\alpha, G_\beta)$ (будем называть такие полужесткие системы групп слабо жесткими). Если $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$, то пишем $\alpha < \beta$.

Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$ - слабо жесткая система групп без кручения G_α конечного ранга. назовем S^* -группой (PS^* -группой) прямую сумму (прямое произведение) групп, почти изоморфных группам из S . Пусть $A = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} A^{(\alpha)}$ ($A = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} \bar{A}^{(\alpha)}$) - каноническое S^* -разложение S^* -группы (PS^* -группы) A , т.е. каждая $A^{(\alpha)} \neq 0$ ($\bar{A}^{(\alpha)} \neq 0$) есть прямая сумма (прямое произведение) группы $A_i^{(\alpha)}$, почти изоморфных G_α ($A_i^{(\alpha)}$ изоморфна некоторой подгруппе G_α и G_α изоморфна некоторой подгруппе $A_i^{(\alpha)}$), $A^{(\alpha)} = \sum_{i \in I_\alpha}^{\oplus} A_i^{(\alpha)}$ ($\bar{A}^{(\alpha)} = \prod_{i \in I_\alpha} \bar{A}_i^{(\alpha)}$). Введем теперь понятие типа

относительно слабо жесткой системы S . Будем говорить, что группа B имеет тип S_α , если B почти изоморфна группе $G_\alpha \in S$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{O}$. На множество типов $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$ естественным образом вводится частичный порядок. А именно, будем говорить, что $S_\alpha \leq S_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathcal{O}$). Таким образом, S^* -группа (PS^* -группа) есть прямая сумма (прямое произведение) S_α -однородных компонент $A^{(\alpha)}$ ($\bar{A}^{(\alpha)}$). Будем говорить, что элемент a из S^* -группы $A = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} A^{(\alpha)}$

(PS^* -группы $A = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} \bar{A}^{(\alpha)}$) имеет тип S_α , если $a \in A^{(\alpha)}$ ($a \in \bar{A}^{(\alpha)}$) для некоторого $\alpha \in \mathcal{O}$. Заметим, что тип S_α элемента $a \in A^{(\alpha)}$ не зависит от выбора канонического разложения группы A относительно S . (Действительно, если $A = \sum_{\beta \in \mathcal{O}}^{\oplus} B^{(\beta)}$

($A = \prod_{\beta \in \mathcal{O}} \bar{B}^{(\beta)}$) - другое каноническое разложение группы A относительно системы S , то из $a \in B^{(\beta)}$ следует, что существуют ненулевые гомоморфизмы $A^{(\alpha)} \rightarrow B^{(\beta)}$ и $B^{(\beta)} \rightarrow A^{(\alpha)}$. По определению S_α -однородной компоненты и слабо жесткой системы S отсюда получается, что существуют изоморфизмы $G_\alpha \rightarrow G_\beta$ и $G_\beta \rightarrow G_\alpha$, т.е. $\alpha = \beta$). Очевидно, что любой эндоморфизм S^* -группы (PS^* -группы) A не понижает типы компонент элементов группы A относительно канонического S^* -разложения (PS^* -разложения) группы A .

Пусть $(*)$ $A = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} A^{(\alpha)}$ - фиксированное каноническое S^* -разложение S^* -группы A относительно слабо жесткой системы $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$ групп без кручения конечного ранга. Обозначим

через $A_S(\alpha) = \sum_{\beta > \alpha}^{\oplus} A^{(\beta)}$ и $A_S^*(\alpha) = \sum_{\beta > \alpha}^{\oplus} A^{(\beta)}$.

ТЕОРЕМА 6. S^* -группа A является полиномиально периодической тогда и только тогда, когда

- i) $\mathcal{O}$ удовлетворяет условию максимальности;
- ii) $A^{(\alpha)}$ есть прямая сумма конечного числа групп типа S_{α} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть S^* -группа A полиномиально периодическая, т.е. $\text{Tor } A = A$ и $\mathcal{O}$ содержит бесконечную строго возрастающую последовательность элементов $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots$ ($\alpha_k \in \mathcal{O}$, $k=1,2,\dots$). Выберем в каждой группе $A^{(\alpha_k)}$ прямое слагаемое $A_{i_k}^{(\alpha_k)}$ типа S_{α_k} , $k=1,2,\dots$. Имеем $S_{\alpha_1} < S_{\alpha_2} < \dots < S_{\alpha_k} < \dots$. Это означает, что существуют мономорфизмы

$f_k: A_{i_k}^{(\alpha_k)} \rightarrow A_{i_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})}$ для любого $k=1,2,\dots$. Тогда группа A имеет эндоморфизм φ вида $\varphi = f_k$ на $A_{i_k}^{(\alpha_k)}$, $k=1,2,\dots$ и $\varphi=0$ на A' , где $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_{i_k}^{(\alpha_k)} \oplus A'$. Если $0 \neq a \in A_{i_1}^{(\alpha_1)}$, то

$a, \varphi a, \dots, \varphi^n a, \dots$ есть линейно независимое множество. Отсюда следует, что $a \notin \text{tor}(\varphi A)$. Следовательно, $\text{tor}(\varphi A) \neq A$ и $\text{Tor } A \neq A$. Противоречие. К такому же выводу приходим, если допустить, что для некоторого α группа $A^{(\alpha)}$ есть прямая сумма бесконечного числа групп типа S_{α} . В этом случае $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(\alpha)} \oplus A''$, где $A_i^{(\alpha)}$ -группы типа S_{α} . Тогда существуют мономорфизмы $\varphi_i: A_i^{(\alpha)} \rightarrow A_{i+1}^{(\alpha)}$ для любого $i=1,2,\dots$.

Задавая эндоморфизм φ группы A так, что $\varphi = \varphi_i$ на $A_i^{(\alpha)}$, $i=1,2,\dots$ и $\varphi=0$ на A'' , получаем $\text{tor}(\varphi A) \neq A$ и $\text{Tor } A \neq A$.

Достаточность. Пусть S^* -группа A удовлетворяет условиям i) и ii). Покажем, что $\text{Tor } A = A$. Допустим противное. Пусть

$\text{Tor } A \neq A$ и φ -такой эндоморфизм группы A , что $\text{tor}(\varphi A) \neq A$.

Заметим, что если $0 \neq a \in A$, $a \notin \text{tor}(\varphi A)$, то $\varphi^k(a) \notin \text{tor}(\varphi A)$ ($k \geq 1$). Действительно, если $\varphi^k(a) \in \text{tor}(\varphi A)$, то существует $0 \neq h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $h(x)\varphi^k(a) = 0$. Тогда $0 \neq h(x)x^k$ аннулирует $a \notin \text{tor}(\varphi A)$, что невозможно. Обозначим теперь через

$\mathcal{O}'$ подмножество всех таких элементов α из $\mathcal{O}$, для каждого из которых существует в группе A хотя бы один элемент $a_{\alpha} \in A^{(\alpha)}$, что $a_{\alpha} \notin \text{tor}(\varphi A)$. Очевидно, $\text{tor}(\varphi A) \neq A$ влечет $\mathcal{O}' \neq \emptyset$.

Согласно (i) $\mathcal{O}'$ удовлетворяет условию максимальности. Пусть α' - максимальный элемент из $\mathcal{O}'$. Тогда в группе A существует такой $a_{\alpha'} \in A^{(\alpha')}$, что $a_{\alpha'} \notin \text{tor}(\varphi A)$. Поскольку эндоморфизм φ не понижает S_{α} -типы компонент элементов, то $\varphi^m(a_{\alpha'}) \in A_S(\alpha') = \sum_{\beta > \alpha'}^{\oplus} A^{(\beta)}$, $m=0,1,2,\dots$.

Убедимся, что $A_S^*(\alpha') \subseteq \text{tor}(\varphi A)$. Пусть $b \in A_S^*(\alpha') = \sum_{j \in \alpha'} A^{(j)}$, $b = b_{j_1} + \dots + b_{j_k}$, где $j_i > \alpha'$, и $b \notin \text{tor}(\varphi A)$. Тогда хотя бы одна из b_{j_i} , например, $b_{j_1} \notin \text{tor}(\varphi A)$. Отсюда $j_1 \in \alpha'$ и $j_1 > \alpha'$, что противоречит максимальности α' в α . Следовательно, $A_S^*(\alpha') \subseteq \text{tor}(\varphi A)$.

Согласно $i i$), $A_S(\alpha')/A_S^*(\alpha')$ есть группа конечного ранга. Т.к. $\varphi^m(a_{\alpha'}) \in A_S(\alpha')$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то $\{a_{\alpha'} + A_S^*(\alpha'), \varphi(a_{\alpha'}) + A_S^*(\alpha'), \dots, \varphi^m(a_{\alpha'}) + A_S^*(\alpha'), \dots\}$

есть линейно зависимое множество элементов из $A_S(\alpha')/A_S^*(\alpha')$. Существуют такие целые числа $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_n$, не все равные нулю, что

$\kappa_0(a_{\alpha'} + A_S^*(\alpha')) + \kappa_1(\varphi(a_{\alpha'}) + A_S^*(\alpha')) + \dots + \kappa_n(\varphi^n(a_{\alpha'}) + A_S^*(\alpha')) \in A_S^*(\alpha')$. Отсюда следует, что $\kappa_0 a_{\alpha'} + \kappa_1 \varphi(a_{\alpha'}) + \dots + \kappa_n \varphi^n(a_{\alpha'}) \in A_S^*(\alpha')$, $A_S^*(\alpha') \subseteq \text{tor}(\varphi A)$.

Пусть $f_1(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x + \dots + \kappa_n x^n$, тогда $f_1(x) a_{\alpha'} \in \text{tor}(\varphi A)$. Если $f_1(x) a_{\alpha'} = 0$, то $a_{\alpha'} \in \text{tor}(\varphi A)$ - противоречие.

Если $f_1(x) a_{\alpha'} \neq 0$, то существует $0 \neq f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ такой, что $f_2(x) [f_1(x) a_{\alpha'}] = 0$. Тогда для $0 \neq f(x) = f_2(x) f_1(x)$ имеем $f(x) a_{\alpha'} = 0$ и $a_{\alpha'} \in \text{tor}(\varphi A)$ - противоречие. Следовательно, при выполнении условий i) и ii) S^* -группа A является полиномиально периодической.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \alpha}$ - слабо жесткая система групп без кручения конечного ранга. Всякая S^* -группа полиномиально расщепляема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(*) A = \sum_{\alpha \in \alpha} A^{(\alpha)}$ - S^* -группа, где $A^{(\alpha)} = \sum_{i \in \beta_\alpha} A_i^{(\alpha)}$ - S_α -однородная компонента группы A , $\alpha \in \alpha$.

Покажем, что $\text{Tor} A = \sum_{\beta \in \alpha'} A^{(\beta)}$, где α' есть множество всех тех $\beta \in \alpha$, что: 1) любая строго возрастающая цепочка элементов из α , начинающаяся с β , обрывается через конечное число шагов и 2) $A^{(\beta')}$ есть пр. сумма конечного числа групп типа S_β для любого $\beta' \in \alpha'$ такого, что $\beta \leq \beta'$. Обозначим через $A' = \sum_{\beta \in \alpha'} A^{(\beta)}$.

Пусть $a \in A'$, φ - произвольный эндоморфизм группы A . Тогда, очевидно, $a, \varphi(a), \dots, \varphi^n(a), \dots$ принадлежат A' (если $\beta \in \alpha'$ и $\beta \leq \beta'$, то $\beta' \in \alpha'$). В частности, A' есть вполне характеристическая подгруппа группы A . Пусть $\varphi' = \varphi|_{A'}$ есть ограничение эндоморфизма φ , тогда φ' - эндоморфизм группы A' . По теореме 6 группа A' - полиномиально периодическая. От-

сюда $a, \psi(a), \dots, \psi^n(a), \dots$ есть линейно зависимое множество, и, следовательно, $a, \psi(a) = \psi(a), \dots, \psi^n(a) = \psi^n(a), \dots$ есть также линейно зависимое множество, т.е. $a \in \text{tor}(\mathcal{A})$ для произвольного эндоморфизма ψ группы A . Таким образом, $A' \in \text{Tor} A$.

Для доказательства $\text{Tor} A \subseteq A' = \sum_{\beta \in \mathcal{O}} \oplus A^{(\beta)}$ достаточно установить, что для любого $a \in A$, $a \notin \sum_{\beta \in \mathcal{O}} \oplus A^{(\beta)}$ существует $\psi \in E(A)$ такой, что $a \notin \text{tor}(\mathcal{A})$. Если $a = a_{i_1}^{(\alpha_1)} + \dots + a_{i_k}^{(\alpha_k)}, a_{i_\tau}^{(\alpha_\tau)} \in A_{i_\tau}^{(\alpha_\tau)}, \tau = 1, \dots, k$, и $a \notin A'$, то хотя бы для одного α_τ , например, α_1 , имеем $a_{i_1}^{(\alpha_1)} \notin A'$. По определению A' , это означает, что либо существует строго возрастающая цепочка в $\mathcal{O}$ $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots$, либо S_γ - однородная компонента $A^{(\beta)}$ содержит бесконечное число слагаемых типа S_γ для некоторого $\gamma > \alpha_1$. Объединяя оба эти случая, имеем, что существует прямое разложение $A = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n^{(\beta_n)} \oplus B$, где $S_{\alpha_1} = S_{\beta_1} \leq S_{\beta_2} \leq \dots \leq S_{\beta_n} \leq \dots$, $A_n^{(\beta_n)}$ - прямое слагаемое типа S_{β_n} из разложения S_{β_n} -однородной компоненты $A^{(\beta_n)}$ в $(*)$, $n = 1, 2, \dots$. Причем можем предполагать, что все компоненты элемента $a = a_{i_1}^{(\alpha_1)} + a_{i_2}^{(\alpha_2)} + \dots + a_{i_n}^{(\alpha_n)}$, кроме $a_{i_1}^{(\alpha_1)}$, не принадлежат $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n^{(\beta_n)}$, а компонента $a_{i_1}^{(\alpha_1)} \in A_{i_1}^{(\beta_1)}$ (в противном случае отбросим конечное число групп, содержащих $a_{i_2}^{(\alpha_2)}, \dots, a_{i_n}^{(\alpha_n)}$ из бесконечной последовательности $A_{i_1}^{(\beta_1)}, \dots, A_{i_n}^{(\beta_n)}, \dots$). Построим эндоморфизм ψ группы A следующим образом: на $A_{i_1}^{(\beta_1)}$ ψ действует как мономорфизм $f_1: A_{i_1}^{(\beta_1)} \rightarrow A_{i_2}^{(\beta_2)}$, $\dots$, на $A_n^{(\beta_n)}$ ψ действует как мономорфизм $f_n: A_n^{(\beta_n)} \rightarrow A_{n+1}^{(\beta_{n+1})}$ и $\psi(B) = 0$ (мономорфизмы f_n существуют по определению слабо жесткой системы и $S_{\beta_1} \leq S_{\beta_2} \leq \dots \leq S_{\beta_n} \leq \dots$). По заданию эндоморфизма ψ имеем $a = a_{i_1}^{(\alpha_1)} + b$, $a_{i_1}^{(\alpha_1)} \in A_{i_1}^{(\beta_1)}$, $b = a_{i_2}^{(\alpha_2)} + \dots + a_{i_k}^{(\alpha_k)} \in B$, $\psi(a) = \psi(a_{i_1}^{(\alpha_1)}) = f_1(a_{i_1}^{(\alpha_1)}) \in A_{i_2}^{(\beta_2)}, \dots, \psi^n(a) = f_n \dots f_1(a_{i_1}^{(\alpha_1)}) \in A_{n+1}^{(\beta_{n+1})}$. Тогда $a, \psi(a), \dots, \psi^n(a), \dots$ есть линейно независимое множество, т.е. $a \notin \text{tor}(\mathcal{A})$. Следовательно, $\text{Tor} A = A'$ и поскольку A' - прямое слагаемое группы A , то A - полиномиально расщепляемая группа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из доказательства теоремы 7, подгруппа $\text{Tor} A$ в S^* -группе A есть вполне характеристическое прямое слагаемое группы A .

Рассмотрим теперь полиномиально расщепляемые PS^* -группы. Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$ - слабо жесткая система групп без кручения

конечного ранга и A есть PS^* -группа, $A = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} \bar{A}^{(\alpha)} = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I}_\alpha} A_{i\alpha}^{(\alpha)}$, где $A_{i\alpha}^{(\alpha)}$ - группа типа S_α , т.е. $A_{i\alpha}^{(\alpha)}$ почти изоморфна G_α , $\alpha \in \mathcal{O}$. Используя обычную терминологию, будем называть группы $A_{i\alpha}^{(\alpha)}$ компонентами группы A , $i \in \mathcal{I}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{O}$. Для любого элемента $a \in A$, $(\dots, a_{i\alpha}^{(\alpha)}, \dots)$, $a_{i\alpha}^{(\alpha)} \in A_{i\alpha}^{(\alpha)}$.

ЛЕММА 8. Пусть $\{H_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ - множество произвольных групп без кручения. Если $H = \prod_{i \in \mathcal{I}} H_i$, то $\text{tor } H \subseteq \sum_{i \in \mathcal{I}} {}^\oplus H_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что, если $h \in H$ и $h \notin \sum_{i \in \mathcal{I}} {}^\oplus H_i$, то существует такой эндоморфизм ψ группы H , что $h \notin \text{tor}(\psi H)$. Пусть $h = (\dots, h_i, \dots) (i \in \mathcal{I})$ и $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_n}, \dots$ - отличные от нуля координаты элемента h . $H = \prod_{n=1}^\infty H_{i_n} \oplus H'$ и $h = h_0 + h'$, где $h_0 = (h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_n}, \dots)$ и $h' \in H'$. Обозначим через φ эндоморфизм группы $\prod_{n=1}^\infty H_{i_n}$ вида $\varphi(x_{i_n}) = n x_{i_n}$, $x_{i_n} \in H_{i_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим множество $h_0, \varphi(h_0), \dots, \varphi^m(h_0)$. Имеем $\varphi(h_0) = (h_{i_1}, 2h_{i_2}, \dots, nh_{i_n}, \dots)$, $\dots$, $\varphi^m(h_0) = (h_{i_1}, 2^m h_{i_2}, \dots, n^m h_{i_n}, \dots)$, $\dots$.

Пусть это множество линейно зависимо. Тогда существуют такие целые числа $S_0, S_1, \dots, S_K, \dots$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что $S_0 h_0 + S_1 \varphi(h_0) + \dots + S_K \varphi^K(h_0) = 0$.

Отсюда следует $S_0 + S_1 + \dots + S_K = 0$,

$$S_0 + 2S_1 + \dots + 2^K S_K = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_0 + (n-1)S_1 + \dots + (n-1)^K S_K = 0,$$

$$S_0 + nS_1 + \dots + n^K S_K = 0$$

и $S_0, S_1, \dots, S_K$ можно рассматривать как ненулевое решение однородной системы из $K+1$ линейных уравнений с $K+1$ неизвестными.

Но определитель такой системы отличен от нуля. Следовательно, $S_0 = S_1 = \dots = S_K = 0$. Полученное противоречие дает, что $h_0, \varphi(h_0), \dots, \varphi^m(h_0), \dots$ - линейное независимое множество, т.е.

$g_0 \notin \text{tor}(\prod_{n=1}^\infty H_{i_n})$. Продолжим теперь φ до эндоморфизма ψ группы H вида $\psi = \varphi$ на $\prod_{n=1}^\infty H_{i_n}$ и $\psi(H') = 0$. Тогда $h_0 \notin \text{tor}(\psi H)$, $h' \in \text{tor}(\psi H)$, откуда $h = h_0 + h' \notin \text{tor}(\psi H)$.

Лемма доказана.

Приведем пример полиномиально нерастепляемой группы. Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$ - такая слабо жесткая система, что для любых $\alpha \neq \beta \in \mathcal{O}$ $\text{Hom}(G_\alpha, G_\beta) = 0$ и $\text{Hom}(G_\beta, G_\alpha) = 0$, причем $|\mathcal{O}| \geq 4$.

Тогда для ΠS^* -группы $G = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} G_\alpha$ имеем $\text{Tor } G = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$. Действительно, по лемме 8 $\text{Tor } G \subseteq \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$. Пусть $g \in \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$, $g = g_{\alpha_1} + \dots + g_{\alpha_k}$, $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$, $(i=1, 2, \dots, k)$. Для любого эндоморфизма φ группы G имеем $\varphi g \in \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_{\alpha_i}$ и $\sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$ вполне характеристична в G . Согласно теореме 6, $\text{Tor}(\sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$. Следовательно, $g \in \text{tor}(\bar{\varphi}(\sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha))$, где $\bar{\varphi}$ - ограничение φ на $\sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$. Отсюда следует, что $g \in \text{tor}(\varphi G)$ для любого $\varphi \in E(G)$, т.е. $g \in \text{Tor } G$. Таким образом, $\text{Tor } G = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}}^{\oplus} G_\alpha$. В то же время $\text{Tor } G$ не является прямым слагаемым группы G [2, с. 102].

ТЕОРЕМА 9. Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$ - слабо жесткая система групп без кручения конечного ранга и $(*) G = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} G^{(\alpha)} = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} \prod_{i \in \mathcal{I}_\alpha} G_{i\alpha}$ - ΠS^* -группа. $\text{Tor } G$ имеет следующий вид:

$$\text{Tor } G = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I}_\alpha}^{\oplus} G_{i\alpha},$$

где $\{G_{i\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I}_\alpha}$ - множество всех тех прямых слагаемых типа S_α из $(*)$, для которых:

1. Существует не более конечного числа таких $\beta \in \mathcal{O}$, что $\alpha \preccurlyeq \beta$;
2. для любого $\beta \succcurlyeq \alpha$ $G^{(\beta)} = \prod_{i \in \mathcal{I}_\beta} G_{i\beta}$, где $|\mathcal{I}_\beta| < \aleph_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8, $\text{Tor } G \subseteq \sum_{\alpha \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I}_\alpha}^{\oplus} G_{i\alpha} = H$.

Покажем, что $\text{Tor } G \subseteq \sum_{\alpha \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I}_\alpha}^{\oplus} G_{i\alpha} = H'$. Пусть существует $h \in \text{Tor } G$ такой, что $h \notin H'$. Тогда среди ненулевых компонент элемента $h = h_{i_1}^{(\alpha_1)} + \dots + h_{i_k}^{(\alpha_k)}$, где α_n ($n=1, 2, \dots, k$), не обязательно различные элементы из $\mathcal{O}$, существует компонента, скажем, $h_{i_1}^{(\alpha_1)} \in G_{\alpha_1}$, для которой $\alpha_1 \notin \mathcal{B}$. По определению $\mathcal{B}$ это означает, что для компоненты G_{α_1} существует бесконечное множество Γ компонент G_{β_n} , $n=1, 2, \dots$, S_α -типы которых образуют неубывающую цепь $S_{\alpha_1} = S_{\beta_1} \leq S_{\beta_2} \leq \dots \leq S_{\beta_n} \leq \dots$. Причем можем предполагать, что компоненты $G_{\alpha_1} \ni h_{i_1}^{(\alpha_1)}, \dots, G_{\alpha_k} \ni h_{i_k}^{(\alpha_k)}$ не входят в это множество Γ . (В противном случае отбросим конечное множество компонент $G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_k}$ и перенумеруем компоненты). Рассмотрим прямое разложение группы G вида

$$G = G_{\alpha_1} \oplus \prod_{n=1}^{\infty} G_{\beta_n} \oplus G'.$$

Построим эндоморфизм φ группы G вида: для любого $g \in G$, $g = g_1 + g_2 + g_3$, где $g_1 \in G_{\alpha_1}$, $g_2 \in \prod_{n=1}^{\infty} G_{\beta_n}$, $g_3 \in G'$, $\varphi(g_1) = (\mu_1(g_1), \dots, \mu_k(g_1), \dots)$, $\mu_n: G_{\alpha_1} \rightarrow G_{\beta_n}$ -

мономорфизмы, $n = 1, 2, \dots$, $S_{\alpha_1} \leq S_{\beta_n}$, $\varphi g_2 = g_2$, $\varphi g_3 = 0$.

Построим также эндоморфизм ψ группы G вида $\psi g_1 = 0$ для $g_1 \in G_{\alpha_1}$, $\psi(g_2) = (g^{(\beta_1)}, 2g^{(\beta_2)}, \dots, ng^{(\beta_n)}, \dots)$, если $g_2 \in \prod_{n=1}^{\infty} G_{\beta_n}$ и $\psi g_3 = 0$ для $g_3 \in G'$. Обозначим через

$\chi = \psi\varphi$. Тогда $h, \chi(h), \dots, \chi^m(h), \dots$ есть линейно независимое множество элементов. Действительно:

$$\chi(h) = \psi(\varphi(h)) = \psi(\varphi(h_{i_1}^{(\alpha_1)})) = (\mu_1 h_{i_1}^{(\alpha_1)}, 2\mu_2 h_{i_2}^{(\alpha_1)}, \dots, n\mu_n h_{i_n}^{(\alpha_1)}, \dots),$$

$$\chi^2(h) = (\mu_1 h_{i_1}^{(\alpha_1)}, 4\mu_2 h_{i_2}^{(\alpha_1)}, \dots, n^2\mu_n h_{i_n}^{(\alpha_1)}, \dots),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\chi^m(h) = (\mu_1 h_{i_1}^{(\alpha_1)}, 2^m \mu_2 h_{i_2}^{(\alpha_1)}, \dots, n^m \mu_n h_{i_n}^{(\alpha_1)}, \dots),$$

$$\dots \dots \dots$$

* Точно так же, как в лемме 8, убеждаемся, что

$$\varphi(h) = (\mu_1 h_{i_1}^{(\alpha_1)}, \dots, \mu_n h_{i_n}^{(\alpha_1)}, \dots), \chi(h), \dots, \chi^m(h), \dots$$

есть линейно независимое множество. Поскольку множество элементов $\chi(h), \dots, \chi^m(h), \dots$ содержится в группе $\prod_{n=1}^{\infty} G_{\beta_n}$, а

$h \in G_{\alpha_1} \oplus G'$, то и $h, \chi(h), \dots, \chi^m(h), \dots$ линейно независимо. Отсюда следует, что $h \notin \text{Tor}(G)$, что противоречит

$h \in \text{Tor } G$. Таким образом, $\text{Tor } G \subseteq \sum_{\beta \in \mathcal{B}} G^{(\beta)} = H'$.

Покажем теперь, что $H' \in \text{Tor } G$. Заметим, что H' есть вполне характеристическая подгруппа группы G . Это следует по определению $\mathcal{B}$ и из того, что $\beta \leq \gamma$, $\beta \in \mathcal{B}$, $\gamma \in \mathcal{B}$.

Пусть $h \in H'$, покажем, что $h \in \text{Tor } G$. Достаточно показать, что для любого эндоморфизма φ группы G имеем $h, \varphi(h), \dots,$

$\varphi^n(h), \dots$ есть линейно зависимое множество. Рассмотрим ограничение

$\varphi|_{H'}$ эндоморфизма φ на подгруппе H' . Поскольку H' — вполне характеристическая подгруппа группы G , то $\varphi' = \varphi|_{H'}$ — эндоморфизм группы H' .

Так как H' есть $\bar{S}$ -группа относительно слабо жесткой системы $\bar{S} = \{G_{\beta}\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, то по теореме 6 H' — полиномиально периодическая группа. Тогда $h, \varphi'(h), \dots, \varphi^n(h), \dots$ линейно зависимо. Поскольку $\varphi'(h) = \varphi(h)$ для любого $h \in H'$, то $h, \varphi(h), \dots, \varphi^n(h), \dots$ есть линейно зависимое множество для любого $h \in H'$ и любого $\varphi \in E(G)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G^{(\alpha)}$ — $\prod S^*$ -группа, $S = \{G_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ —

слабо жесткая система групп без кручения конечного ранга, $H' =$

$= \sum_{\beta \in \mathcal{L}} G^{(\beta)}$ (см. теорему 9). Следующие утверждения эквивалентны:

- а) G - полиномиально расщепляемая группа;
- б) $\text{Tor } G$ есть группа конечного ранга;
- в) $\mathcal{L}$ - конечное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б). По теореме 9 $\text{Tor } G = H'$. Если G - полиномиально расщепляемая группа, то $\text{Tor } G$ есть прямое слагаемое группы G . Следовательно, по [2, с. 102] группа $\text{Tor } G$ есть прямая сумма делимой группы без кручения и конечного числа компонент $G^{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{L}$. По определению $\mathcal{L}$, учитывая, что группа, почти изоморфная делимой группе конечного ранга, является также делимой группой конечного ранга, получаем, $\text{Tor } G$ есть группа конечного ранга.

(б) $\implies$ (а) очевидно.

(б) $\iff$ (в) следует из теоремы 9.

СЛЕДСТВИЕ 11. $\prod S^*$ -группа $G = \prod_{\alpha \in \Omega} G^{(\alpha)}$, где S - слабо жесткая система групп без кручения конечного ранга, есть полиномиально периодическая группа тогда и только тогда, когда ранг группы G конечен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.2. М., "Мир", 1977.
2. Граев М.И. К теории полных прямых произведений групп. - "Матем. сб.", 1975, 17, 85-104.
3. Arnold D., Murley C. Abelian groups A , such that $\text{Hom}(A, -)$ preserves direct sums of copies of A . - "Pacific J. Math.", 1976, 56, №1, 7-20.

Поступило

10 ноября 1977г.

ЛОКАЛИЗАЦИИ В КАТЕГОРИИ ФУНКТОРОВ

А.Г.Григорян

В настоящей работе теория колец и модулей частных в смысле Габриеля переносится на случай малой предаdditивной категории $\mathcal{K}$ и категории $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$ ковариантных аддитивных функторов из $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{A}b$ абелевых групп. В § 1 определяется радикальный фильтр на категории $\mathcal{K}$. Отмечается, что существует взаимно однозначное соответствие между 1) радикальными фильтрами на $\mathcal{K}$, 2) периодическими классами в $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$ и 3) кручениями в $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$. В § 2 для любого радикального фильтра $\mathcal{F}$ на $\mathcal{K}$ и любого функтора $M \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$ строится функтор частных $M_{\mathcal{F}}$ относительно $\mathcal{F}$. В частности, категория частных $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$. Далее, в § 3 изучается категория частных $\mathcal{K}_D$ относительно радикального фильтра D плоских правых идеалов категории $\mathcal{K}$. Приводятся необходимые и достаточные условия для регулярности (в смысле фон Неймана) (соответственно классической полупростоты) категории $\mathcal{K}_D$. Отсюда в частном случае однообъектной категории $\mathcal{K}$ как следствие получаются известные результаты Джонсона о регулярности и Сандомирского о классической полупростоте полного кольца частных.

§ 0. Преаддитивные категории

Если $\mathcal{C}$ - некоторая категория, то условимся обозначать через $|\mathcal{C}|$ класс ее объектов, через $\mathcal{C}(p, q)$ - множество морфизмов из p в q , где $p, q \in |\mathcal{C}|$, а через $\mathcal{C}^*$ - категорию, двойственную к $\mathcal{C}$. Категория $\mathcal{C}$ называется предаdditивной, если $\mathcal{C}(p, q)$ - абелева группа для любых $p, q \in |\mathcal{C}|$, а композиция морфизмов билинейна. В дальнейшем под $\mathcal{K}$ всюду будет пониматься

малая предаддитивная категория. Всякое кольцо (ассоциативное, с единицей) можно рассматривать как предаддитивную категорию с одним объектом. Категорию ковариантных аддитивных функторов из $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{A}$: абелевых групп будем обозначать через $\mathcal{A}\mathcal{B}^{\mathcal{K}}$. Объекты категории $\mathcal{A}\mathcal{B}^{\mathcal{K}}$ будем называть $\mathcal{K}$ -модулями, морфизмы - $\mathcal{K}$ -гомоморфизмами. Заметим, что $\mathcal{A}\mathcal{B}^{\mathcal{K}}$ -категория Гротендика [1, предложение 14.6.9]. Нетрудно показать, что категория правых унитарных модулей над кольцом Λ изоморфна категории $\mathcal{A}\mathcal{B}^{\Lambda}$. Далее,

$\mathcal{K}$ -подмодули (соответственно $\mathcal{K}^*$ - $\mathcal{K}$ -подбимодули), $\mathcal{K}$ -модуль $\mathcal{K}(\rho, -)$ (соответственно $\mathcal{K}^*$ - $\mathcal{K}$ -бимодуль $\mathcal{K}(-, -)$) будем называть правыми идеалами (соответственно идеалами) категории $\mathcal{K}$. Запись $I_{\rho} \leq_{\mathcal{K}} \mathcal{K}(\rho, -)$ (соответственно $I \leq \mathcal{K}$) будет означать, что I_{ρ} - правый идеал (соответственно I - идеал) категории $\mathcal{K}$. Если $I_{\rho} \leq_{\mathcal{K}} \mathcal{K}(\rho, -)$, $\alpha \in \mathcal{K}(\rho, \varrho)$, $M \in \mathcal{A}\mathcal{B}^{\mathcal{K}}$, $x \in M(\rho)$, $\rho, \varrho, \kappa \in |\mathcal{K}|$, то положим

$$\begin{aligned} x\alpha &= M(\alpha)(x); \\ (xI_{\rho})(\varrho) &= xI_{\rho}(\varrho) = \{x\beta \mid \beta \in I_{\rho}(\varrho)\}; \\ (I_{\rho}:\alpha)(\kappa) &= \{\beta \in \mathcal{K}(\varrho, \kappa) \mid \alpha\beta \in I_{\rho}(\kappa)\}; \\ (0:x)(\varrho) &= \{\beta \in \mathcal{K}(\rho, \varrho) \mid x\beta = 0\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ -подмодуль N $\mathcal{K}$ -модуля M называется существенным, если $N \cap K \neq 0$ для любого $\mathcal{K}$ -подмодуля $K \neq 0$ в M . Можно показать, что $\mathcal{K}$ -подмодуль N существен в M тогда и только тогда, когда для любого $\rho \in |\mathcal{K}|$ и всякого $0 \neq x \in M(\rho)$ существуют такое $\varrho \in |\mathcal{K}|$ и такое $\alpha \in \mathcal{K}(\rho, \varrho)$, что $0 \neq x\alpha \in N(\varrho)$. Инъективную оболочку $\mathcal{K}$ -модуля M будем обозначать через $E(M)$. Другие, используемые нами определения и факты, касающиеся категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}^{\mathcal{K}}$, можно найти в [2].

§ 1. Радикальные фильтры и кручения

Определения различных понятий, связанных с радикальными фильтрами и кручениями, могут быть найдены в [3, 4, 5].

Пусть для каждого $\rho \in |\mathcal{K}|$ задано непустое множество $\mathcal{F}_{\rho} = \{I_{\rho} \mid I_{\rho} \leq_{\mathcal{K}} \mathcal{K}(\rho, -)\}$. Положим $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\rho} \mid \rho \in |\mathcal{K}|\}$. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ - правый радикальный фильтр (или просто радикальный фильтр) на категории $\mathcal{K}$, если для любого $\rho \in |\mathcal{K}|$ выполнены следующие условия:

T1. Если $I_{\rho} \in \mathcal{F}_{\rho}$, то $(I_{\rho}:\alpha) \in \mathcal{F}_{\varrho}$ для всякого $\varrho \in |\mathcal{K}|$ и любого $\alpha \in \mathcal{K}(\rho, \varrho)$.

T2. Если $I_p \leq_{\kappa} \mathcal{F}_p$, $J_p \in \mathcal{F}_p$ и $(I_p: \alpha) \in \mathcal{F}_q$ для всякого $q \in |\mathcal{K}|$ и любого $\alpha \in J_p(q)$, то $I_p \in \mathcal{F}_p$.

Заметим, что для любого $p \in |\mathcal{K}|$, поскольку $\mathcal{F}_p \neq \emptyset$, то $\mathcal{K}(p, -) \in \mathcal{F}_p$ в силу T1.

Для удобства ссылки отметим следующую лемму:

ЛЕММА 1.1. [1, теорема 20.1.7]. Радикальный фильтр $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

T3. Если $J_p \in \mathcal{F}_p$ и $J_p \subseteq I_p \leq_{\kappa} \mathcal{K}(p, -)$, то $I_p \in \mathcal{F}_p$.

T4. Если $I_p \in \mathcal{F}_p$ и $J_p \in \mathcal{F}_p$, то $I_p \cap J_p \in \mathcal{F}_p$.

Если $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_p \neq \emptyset \mid p \in |\mathcal{K}|\}$ удовлетворяет условиям T1, T3 и T4, то $\mathcal{F}$ называется (правильным) радикальным предфильтром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Существует взаимно однозначное соответствие между

1. Радикальными фильтрами на $\mathcal{K}$;
2. Периодическими классами в $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$;
3. Кручениями в $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование взаимно однозначного соответствия между 1 и 2 установлено в [1, теорема 20.3.10], а между 2 и 3 следует из теоремы 2.8 работы [5].

Напомним здесь, как строится соответствие между 1 и 3 в предложении 1.2, поскольку в дальнейшем мы будем этим пользоваться. Если $\mathcal{F}$ - радикальный фильтр на $\mathcal{K}$, то соответствующее кручение t определяется условием:

$$t(M)(p) = \{x \in M(p) \mid (0:x) \in \mathcal{F}_p\}$$

для любого $M \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$ и всякого $p \in |\mathcal{K}|$.

Если же t - кручение в $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$, то соответствующий радикальный фильтр $\mathcal{F}$ на $\mathcal{K}$ определяется условием

$$\mathcal{F}_p = \{I_p \leq_{\kappa} \mathcal{K}(p, -) \mid t(\mathcal{K}(p, -)/I_p) = \mathcal{K}(p, -)/I_p\}$$

для любого $p \in |\mathcal{K}|$.

Радикальный класс, порожденный множеством

$$\{E(\mathcal{K}(p, -)) \mid p \in |\mathcal{K}|\}$$

инъективных оболочек $\mathcal{K}$ -модулей $\mathcal{K}(p, -)$, будем называть радикальным классом Ламбека. Этот класс является периодическим, поскольку справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. $\mathcal{K}$ -модуль M радикален в смысле Ламбека тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(L, \mathcal{K}(p, -)) = 0$ для любого $\mathcal{K}$ -подмодуля L в M и всякого $p \in |\mathcal{K}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если L - $\mathcal{K}$ -подмодуль в M и $0 \neq f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(L, \mathcal{K}(p, -))$ для некоторого $p \in |\mathcal{K}|$, то f может быть продолжен до $0 \neq f' \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(M, E(\mathcal{K}(p, -)))$. Следовательно-

но, любой радикальный в смысле Ламбека $\mathcal{K}$ -модуль обладает указанным свойством.

Обратное следует из того факта, что если $0 \neq f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(M, E(\mathcal{K}(p, -)))$, то $Im f \cap \mathcal{K}(p, -) \neq 0$, и, следовательно, $f^{-1}(\mathcal{K}(p, -)) \rightarrow \mathcal{K}(p, -)$ - ненулевой $\mathcal{K}$ -гомоморфизм.

Правые идеалы радикального фильтра, соответствующего в силу предложения 1.2 периодическому классу Ламбека, будем называть плотными. Обозначим этот радикальный фильтр через D . Из предложения 1.3 легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. D - наибольший радикальный фильтр, для которого все $\mathcal{K}$ -модули $\mathcal{K}(p, -)$, где $p \in |\mathcal{K}|$, полупросты.

Характеризацию плотных идеалов дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Правый идеал $I_p \leq_{\mathcal{K}} \mathcal{K}(p, -)$ плотен тогда и только тогда, когда для любого $q \in |\mathcal{K}|$ и всякого $\alpha \in \mathcal{K}(p, q)$ левый аннулятор правого идеала $(I_p : \alpha)$ равен нулю.

(Другая полезная переформулировка: для любых $q, \alpha \in |\mathcal{K}|$, $\alpha \in \mathcal{K}(p, q)$, $0 \neq \beta \in \mathcal{K}(\alpha, q)$ существуют $s \in |\mathcal{K}|$ и $y \in \mathcal{K}(q, s)$ так, что $\alpha y \in I_p(s)$ и $\beta y \neq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим I_p - плотный правый идеал и пусть существуют такие $q, \alpha \in |\mathcal{K}|$, $\alpha \in \mathcal{K}(p, q)$ и $\beta \in \mathcal{K}(\alpha, q)$, что $\beta(I_p : \alpha) = 0$. Тогда получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(q, -)/(I_p : \alpha) & \xrightarrow{f} & \mathcal{K}(q, -) \\ g \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}(p, -)/I_p & \xrightarrow{h} & E(\mathcal{K}(q, -)), \end{array}$$

где $f_s(\bar{y}) = \beta y$, $g_s(\bar{y}) = \alpha y$ для любых $s \in |\mathcal{K}|$ и $y \in \mathcal{K}(q, s)$ и h существует в силу инъективности $E(\mathcal{K}(q, -))$. Поскольку I_p плотен, то $h = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$.

Предположим теперь, что $(I_p : \alpha)$ имеет нулевой левый аннулятор для любого $q \in |\mathcal{K}|$ и всякого $\alpha \in \mathcal{K}(p, q)$. Если существует $0 \neq f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(p, -)/I_p, E(\mathcal{K}(q, -)))$, то, положив $x = f_p(I_p)$, легко убедиться, что $0 \neq x \in (E(\mathcal{K}(q, -)))(p)$ и $x I_p = 0$. Далее существуют такие $\alpha \in |\mathcal{K}|$ и $\alpha \in \mathcal{K}(p, \alpha)$,

что $0 \neq x\alpha \in \mathcal{K}(q, \alpha)$. Покажем, что $x\alpha$ лежит в левом аннуляторе правого идеала $(I_p : \alpha)$. В самом деле, для любого $s \in \mathcal{K}$ и всякого $\beta \in (I_p : \alpha)(s)$ имеем $\alpha\beta \in I_p(s)$ и, следовательно, $x\alpha\beta = 0$, поскольку $xI_p = 0$. Получили противоречие с предположением. Предложение доказано.

Обозначим для любого $p \in \mathcal{K}$ через $\mathcal{E}_p$ множество всех существенных правых идеалов $I_p \leq \mathcal{K}(p, -)$. Ясно, что $I_p \in \mathcal{E}_p$ тогда и только тогда, когда для любых $q \in \mathcal{K}$ и $0 \neq \alpha \in \mathcal{K}(p, q)$ найдутся такие $\alpha \in \mathcal{K}$ и $\beta \in \mathcal{K}(q, \alpha)$, что $0 \neq \alpha\beta \in I_p(\alpha)$. Из предложения 1.5 нетрудно вывести, что всякий плотный правый идеал существует, т.е. $D_p \in \mathcal{E}_p$ для любого $p \in \mathcal{K}$. Стандартным образом проверяется, что $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_p / p \in \mathcal{K}\}$ - радикальный предфильтр.

Пусть M - $\mathcal{K}$ -модуль. Положим

$$Z(M)(p) = \{x \in M(p) \mid (0 : x) \in \mathcal{E}_p\}$$

для любого $p \in \mathcal{K}$. Обычным образом убеждаемся, что $Z(M)$ - $\mathcal{K}$ -подмодуль в M . $Z(M)$ будем называть сингулярным $\mathcal{K}$ -подмодулем $\mathcal{K}$ -модуля M . Положим далее

$$(Z\mathcal{K})(p, q) = (Z(\mathcal{K}(p, -)))(q) = \{\alpha \in \mathcal{K}(p, q) \mid (0 : \alpha) \in \mathcal{E}_q\}$$

для любых $p, q \in \mathcal{K}$. Стандартным образом можно проверить, что $Z\mathcal{K}$ - идеал в $\mathcal{K}$. Этот идеал будем называть сингулярным идеалом категории $\mathcal{K}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. $Z\mathcal{K} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E} = D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z\mathcal{K} = 0$ и пусть $I_p \in \mathcal{E}_p$, $\alpha \in \mathcal{K}(p, q)$, $\beta \in \mathcal{K}(\alpha, q)$ и $\beta(I_p : \alpha) = 0$. Тогда $(I_p : \alpha) \in \mathcal{E}_q$ в силу 1.1 и, следовательно, $\beta = 0$, поскольку $Z\mathcal{K} = 0$. Значит, $I_p \in D$ в силу предложения 1.5.

Обратная импликация следует из предложения 1.4.

Пусть $\mathcal{F}$ - произвольный радикальный предфильтр на $\mathcal{K}$. Будем говорить, что $\mathcal{K}$ -модуль M - $\mathcal{F}$ -инъективен, если для любого $p \in \mathcal{K}$ и всякого $I_p \in \mathcal{F}$ любое $f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M)$ можно продолжить до $f' \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(p, -), M)$. Заметим, что всякий инъективный $\mathcal{K}$ -модуль $\mathcal{F}$ -инъективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Для радикального предфильтра $\mathcal{E}$ существенных правых идеалов понятия $\mathcal{E}$ -инъективности и инъективности совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}$ -модуль M - $\mathcal{E}$ -инъективен. Рассмотрим $f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M)$, где $I_p \leq \mathcal{K}(p, -)$. В силу предложения 1.5.3, 1.6.3 и 1.6.4 из [3] существует $J_p \leq \mathcal{K}(p, -)$

так что $I_p \oplus J_p \in \mathcal{E}_p$. Тогда f тривиальным образом продолжается до $f' \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p \oplus J_p, M)$. Далее, поскольку $I_p \oplus J_p \in \mathcal{E}_p$, то f' продолжается до $f'' \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(p, -), M)$.

§ 2. Категории и модули частных

Пусть $\mathcal{F}$ - правый радикальный фильтр на $\mathcal{K}$. Для любого $\mathcal{K}$ -модуля M мы построим его модуль частных относительно $\mathcal{F}$. Это будет сделано в два этапа. На первом этапе для всякого $p \in |\mathcal{K}|$ мы положим ¹⁾

$$M_{(\mathcal{F})}(p) = \varinjlim_{I_p \in \mathcal{F}_p} \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M).$$

Далее положим $|\mathcal{K}_{(\mathcal{F})}| = |\mathcal{K}|$ и

$$\mathcal{K}_{(\mathcal{F})}(p, q) = \mathcal{K}(p, -)_{(\mathcal{F})}(q) = \varinjlim_{I_q \in \mathcal{F}_q} \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_q, \mathcal{K}(p, -))$$

для любого $q \in |\mathcal{K}_{(\mathcal{F})}|$. Мы хотим показать, что $\mathcal{K}_{(\mathcal{F})}$ - предаддитивная категория, а $M_{(\mathcal{F})}$ - $\mathcal{K}_{(\mathcal{F})}$ -модуль. Для этого нам понадобится

ЛЕММА 2.1. Если $I_q \in \mathcal{F}_q$, $J_p \in \mathcal{F}_p$, $f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_q, \mathcal{K}(p, -))$, то тогда $f^{-1}(J_p) \in \mathcal{F}_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\alpha, s \in |\mathcal{K}|$, $\beta \in \mathcal{K}(\alpha, s)$ и всякого $\alpha \in I_q(\alpha)$ из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} I_q(\alpha) & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathcal{K}(p, \alpha) \\ I_q(\beta) \downarrow & & \downarrow \mathcal{K}(p, \beta) \\ I_q(s) & \xrightarrow{f_s} & \mathcal{K}(p, s) \end{array}$$

имеем $f_s(\alpha\beta) = f_s I_q(\beta)(\alpha) = \mathcal{K}(p, \beta) f_\alpha(\alpha) = f_\alpha(\alpha)\beta$.

Далее, получаем $(f^{-1}(J_p) : \alpha)(s) = \{\beta \in \mathcal{K}(\alpha, s) \mid f_s(\alpha\beta) \in J_p(s)\} = (J_p : f_\alpha(\alpha))(s)$. Следовательно, $(f^{-1}(J_p) : \alpha) = (J_p : f_\alpha(\alpha)) \in \mathcal{F}_\alpha$ в силу T1. Значит, $f^{-1}(J_p) \in \mathcal{F}_q$ в силу T2.

Пусть теперь $f \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_q, \mathcal{K}(p, -))$ (соответственно $g \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(J_p, M)$) - представитель смежного класса $\alpha \in \mathcal{K}_{(\mathcal{F})}(p, q)$ (соответственно $x \in M_{(\mathcal{F})}(p)$). Тогда положим $x\alpha$ равным смежному классу, представленному сквозным отобра-

1) Определение и элементарные свойства прямого предела абелевых групп имеются в книге Фукса [6].

жением

$$f^{-1}(J_p) \xrightarrow{f} J_p \xrightarrow{g} M,$$

причем $f^{-1}(J_p) \in \mathcal{F}_p$ в силу леммы 2.1.

Легко проверить корректность (т.е. независимость от выбора f и g) и биаддитивность определенного умножения. Это превращает $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ в предаддитивную категорию, а $M(\mathcal{F})$ - в $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ -модуль. Для любого $\mathcal{K}$ -модуля M и всякого $p \in |\mathcal{K}|$ существует канонический гомоморфизм абелевых групп

$$(\varphi_M)_p : M(p) \cong \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(p, -), M) \rightarrow \varinjlim_{I_p \in \mathcal{F}_p} \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M) = M(\mathcal{F})(p).$$

В частности, $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{F})$ - гомоморфизм предаддитивных категорий. Отсюда следует, что $M(\mathcal{F})$ можно рассматривать как $\mathcal{K}$ -модуль. Тогда $\varphi_M \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(M, M(\mathcal{F}))$. Сопоставление $M \rightarrow M(\mathcal{F})$ индуцирует функтор $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathcal{K}(\mathcal{F})}$, который точен слева, так как $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(-, -)$ точен слева и $\varinjlim$ точен в $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$. Обозначим через $\iota : \mathcal{A}b^{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathcal{K}(\mathcal{F})}$ композицию этого функтора с забывающим функтором $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}(\mathcal{F})} \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}$. Пусть далее ι - кручение, соответствующее $\mathcal{F}$ в силу предложения 1.2.

ЛЕММА 2.2. $\text{Ker}(M \xrightarrow{\varphi_M} M(\mathcal{F})) = \iota(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(\varphi_M)_p(x) = 0$, то x переходит в нуль уже в каком-то $\mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M)$, где $I_p \in \mathcal{F}_p$. Это означает, что отображение $\mathcal{K}(p, q) \ni a \mapsto xa \in M(q)$ нулевое на $I_p(q)$ для всякого $q \in |\mathcal{K}|$, т.е. $xI_p = 0$ и, следовательно, $x \in (\iota(M))_p$. Эти рассуждения могут быть обращены.

ЛЕММА 2.3. M - периодический $\mathcal{K}$ -модуль тогда и только тогда, когда $M(\mathcal{F}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M(\mathcal{F}) = 0$, то $\iota(M) = \text{Ker } \varphi_M = M$ в силу леммы 2.2.

Обратно, пусть $\iota(M) = M$ и пусть $x \in M(\mathcal{F})(p)$ представлен элементом

$$g \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M).$$

$\mathcal{K}$ -модуль $I_p / \text{Ker } g$ периодичен как $\mathcal{K}$ -подмодуль периодического $\mathcal{K}$ -модуля M . Далее рассмотрим точную последовательность $\mathcal{K}$ -модулей

$$0 \rightarrow I_p / \text{Ker } g \rightarrow \mathcal{K}(p, -) / \text{Ker } g \rightarrow \mathcal{K}(p, -) / I_p \rightarrow 0.$$

Из периодичности крайних членов следует периодичность среднего члена, а это равносильно тому, что $\text{Ker } g \in \mathcal{F}_p$. Из коммута-

тивности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}b^{\mathcal{F}}(I_p, M) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A}b^{\mathcal{F}}(\text{Ker } g, M) \\ \downarrow & \nearrow & \\ M_{(\mathcal{F})}(p) & & \end{array}$$

вытекает, что $x=0$ и, следовательно, что $M_{(\mathcal{F})}=0$.

ЛЕММА 2.4. Если $x \in M_{(\mathcal{F})}(p)$ представлен элементом $g \in \mathcal{A}b^{\mathcal{F}}(I_p, M)$, где $I_p \in \mathcal{F}_p$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I_p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(p, -) \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{\varphi_M} & M_{(\mathcal{F})} \end{array}$$

коммутативна, где $h_g(x) = xg$ для любого $g \in |\mathcal{K}|$ и любого $x \in \mathcal{K}(p, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in I_p(q)$, то xg представим композицией $\mathcal{K}(q, -) = (I_p : x) \rightarrow I_p \rightarrow M$, где

$$\mathcal{K}(q, x) \ni \beta \rightarrow g_x(x\beta) = g_q(x)\beta.$$

Следовательно, $xg = (\varphi_M)_q g_q(x)$.

Отсюда сразу следует

ЛЕММА 2.5. $\text{Coker } \varphi_M$ - периодический $\mathcal{K}$ -модуль.

На втором этапе нашего построения модуля частных применим функтор L еще раз к $M_{(\mathcal{F})}$. Это приводит к преаддитивной категории $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -модулю $M_{\mathcal{F}}$, которые называются категорией и модулем частных соответственно.

ЛЕММА 2.6. L переводит мономорфизм $M/t(M) \hookrightarrow M_{(\mathcal{F})}$ в изоморфизм $(M/t(M))_{(\mathcal{F})} \cong M_{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим точный слева функтор L к точной последовательности

$$0 \rightarrow M/t(M) \rightarrow M_{(\mathcal{F})} \rightarrow \text{Coker } \varphi_M \rightarrow 0$$

и воспользуемся леммами 2.5 и 2.3.

Итак, мы доказали, что

$$M_{\mathcal{F}}(p) = \varinjlim_{I_p \in \mathcal{F}_p} \mathcal{A}b^{\mathcal{F}}(I_p, M/t(M))$$

для любого $\mathcal{K}$ -модуля M и любого $\rho \in |\mathcal{K}|$.

можно проверить, что структуры предаддитивной категории на $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -модуля на $M_{\mathcal{F}}$ задаются так: пусть $x \in M_{\mathcal{F}}(\rho)$ (соответственно $\alpha \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}(\rho, q)$), представим элементом $q \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(J_{\rho}, M/t(M))$ (соответственно $\xi \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_q, \mathcal{K}(\rho, -)/t(\mathcal{K}(\rho, -)))$).

Тогда g индуцирует $\mathcal{K}$ -гомоморфизм $J_{\rho}/t(J_{\rho}) \rightarrow M/t(M)$ и мы имеем $\mathcal{K}$ -гомоморфизм $J_{\rho}/t(J_{\rho}) \hookrightarrow \mathcal{K}(\rho, -)/t(\mathcal{K}(\rho, -))$ в силу левой точности t ; $x\alpha \in M_{\mathcal{F}}(q)$ представим композицией

$$f^{-1}(J_{\rho}/t(J_{\rho})) \longrightarrow J_{\rho}/t(J_{\rho}) \longrightarrow M/t(M).$$

Для любого $\mathcal{K}$ -гомоморфизма $h: M \rightarrow N$ получаем $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -гомоморфизм $h_{\mathcal{F}}: M_{\mathcal{F}} \rightarrow N_{\mathcal{F}}$. Таким образом, имеем функтор $Q: \mathcal{A}b^{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}}$. Для любого $\mathcal{K}$ -модуля M существует канонический $\mathcal{K}$ -гомоморфизм $\psi_M: M \rightarrow M_{\mathcal{F}}$, в частности, $\psi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -гомоморфизм предаддитивных категорий. Для любого $h \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(M, N)$ получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \psi_M \downarrow & & \downarrow \psi_N \\ M_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{h_{\mathcal{F}}} & N_{\mathcal{F}} \end{array}$$

Заметим, что $\ker \psi_M = t(M)$ и $\operatorname{Coker} \psi_M$ периодичен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Если теория кручения стабильна, то

$M_{\mathcal{F}}(\rho) = \varinjlim_{I_{\rho} \in \mathcal{I}_{\rho}} \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_{\rho}, M)$ для любого $\mathcal{K}$ -модуля M и всякого $\rho \in |\mathcal{K}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varinjlim$ - точный функтор, то последовательность

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/t(M) \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \varinjlim \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_{\rho}, t(M)) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_{\rho}, M) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \varinjlim \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_{\rho}, M/t(M)) \longrightarrow \varinjlim \operatorname{Ext}^1(I_{\rho}, t(M)). \end{aligned}$$

Первый член этой последовательности равен нулю в силу леммы 2.3. Если E - инъективная оболочка $\mathcal{K}$ -модуля $t(M)$, то E - периодичен по условию. Последовательность $0 \rightarrow t(M) \rightarrow E \rightarrow E/t(M) \rightarrow 0$

индуцирует точную последовательность

$$\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, E/t(M)) \rightarrow \lim_{\leftarrow} \text{Ext}^i(I_p, t(M)) \rightarrow 0,$$

где первый член равен нулю опять в силу леммы 2.3. Отсюда следует, что последний член длинной точной последовательности равен нулю. Предложение доказано.

Мы хотим исследовать категории - образ функтора Q . Для этой цели введем в рассмотрение $\mathcal{F}$ -замкнутые $\mathcal{K}$ -модули.

Назовем $\mathcal{K}$ -модуль M $\mathcal{F}$ -замкнутым, если канонические отображения

$$M(p) \cong \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(p, -), M) \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M)$$

являются изоморфизмами для любого $p \in |\mathcal{K}|$ и всякого $I_p \in \mathcal{F}_p$.

Таким образом, $\mathcal{K}$ -модуль M - $\mathcal{F}$ -замкнут, если и только если он $\mathcal{F}$ -инъективен и $t(M) = 0$.

Далее ясно, что для любого $\mathcal{F}$ -замкнутого $\mathcal{K}$ -модуля M имеем изоморфизм $\psi_M: M \xrightarrow{\cong} M_{\mathcal{F}}$. Верно и обратное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Для любого $\mathcal{K}$ -модуля M $\mathcal{K}$ -модуль $M_{\mathcal{F}}$ - $\mathcal{F}$ -замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для полупростоты $M_{\mathcal{F}}$ достаточно доказать, что если $t(M) = 0$, то и $t(M_{\mathcal{F}}) = 0$. Пусть $x \in M_{\mathcal{F}}(p)$ и $xJ_p = 0$ для некоторого $J_p \in \mathcal{F}_p$. Пусть далее x представлен элементом $g \in \mathcal{A}b^{\mathcal{K}}(I_p, M)$, где $I_p \in \mathcal{F}_p$. По лемме 2.4 имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I_p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(p, -) \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{\varphi_M} & M_{\mathcal{F}}(p) \end{array}$$

где $h_g(\alpha) = x\alpha$ для любого $g \in |\mathcal{K}|$ и всякого $\alpha \in \mathcal{K}(p, q)$. Следовательно, $\varphi_M g|_{I_p \cap J_p} = 0$. Но φ_M - мономорфизм, следовательно, $g|_{I_p \cap J_p} = 0$ и $x = 0$.

Покажем теперь, что $\mathcal{K}$ -модуль $M_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$ -инъективен. Предположим, что задан $\mathcal{K}$ -гомоморфизм $f: I_p \rightarrow M_{\mathcal{F}}$, где $I_p \in \mathcal{F}_p$. Рассмотрим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} J_p & \xrightarrow{\quad} & I_p \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ M/t(M) & \xrightarrow{\bar{v}} & M_{\mathcal{F}} \end{array},$$

где $J_p \leq \mathcal{K}(p, -)$. В силу предложения, дуального к предложению 1.19 из [7], имеем:

$$I_p/J_p \cong \text{Coker } \psi = \text{Coker } \psi_M,$$

который периодичен в силу леммы 2.5. Следовательно, $J_p \in \mathcal{F}_p$ в силу T2 и предложения 1.2. Лемма 2.4 позволяет продолжить g до $\mathcal{K}$ -гомоморфизма $h: \mathcal{K}(p, -) \rightarrow M_{\mathcal{F}}$. Но h является также продолжением f , так как $h|_{I_p}$ и f совпадают на J_p . Поэтому можно определить $(h-f) \in \mathcal{AB}^{\mathcal{K}}(I_p/J_p, M_{\mathcal{F}})$. Поскольку I_p/J_p периодичен и $t(M_{\mathcal{F}}) = 0$, то $h|_{I_p} = f$.

ЛЕММА 2.9. Пусть M — $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -модуль. Если M инъективен как $\mathcal{K}$ -модуль и $t(M) = 0$, то M — инъективен и как $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N' \hookrightarrow N$ — произвольный $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ -мономорфизм и $f \in \mathcal{AB}^{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}}(N, M)$.

Тогда по условию f может быть продолжен до $g \in \mathcal{AB}^{\mathcal{K}}(N, M)$.

Мы хотим доказать, что для любого $g \in |\mathcal{K}_{\mathcal{F}}|$ и всякого $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}(p, q)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N(p) & \xrightarrow{N(a)} & N(q) \\ \downarrow g_p & & \downarrow g_q \\ M(p) & \xrightarrow{E(a)} & M(q) \end{array}$$

коммутативна, т.е. $g_q(xa) = g_p(x)a$ для любого $x \in N(p)$. Рассмотрим два отображения

$$\mathcal{K}_{\mathcal{F}}(p, -) \xrightleftharpoons[g'']{g'} M,$$

где $g'_q(a) = g_q(xa)$ и $g''_q(a) = g_p(x)a$ для всякого $a \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}(p, q)$. Легко видеть, что $g', g'' \in \mathcal{AB}^{\mathcal{K}}(\mathcal{K}_{\mathcal{F}}(p, -), M)$ и $g'|_{\mathcal{K}(p, -)} = g''|_{\mathcal{K}(p, -)}$. Отсюда следует, что $g' - g''$ можно пропустить через $\text{Coker } \psi_{\mathcal{K}(p, -)} \rightarrow M$. Но $\text{Coker } \psi_{\mathcal{K}(p, -)}$ периодичен в силу леммы 2.5, а $t(M) = 0$. Значит, $g' = g''$ и, следовательно, $g \in \mathcal{AB}^{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}}(N, M)$.

§ 3. Регулярность и классическая полупростота полной категории частных

В этом параграфе будем рассматривать локализацию относительно радикального фильтра $\mathcal{D}$ плотных правых идеалов. В этом случае $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$

будем называть полной категорией частных категории $\mathcal{K}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $Z\mathcal{K} = 0$. Тогда $M_D = E(M)$ для любого полупростого в смысле Ламбека $\mathcal{K}$ -модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $D = \mathcal{E}$ в силу предложения 1.6. Далее ясно, что M - $\mathcal{K}$ -подмодуль в M_D в силу леммы 2.2, причем существенный, в силу леммы 2.5. С другой стороны, M_D - инъективный $\mathcal{K}$ -модуль ввиду предложения 2.8 и 1.7. Следовательно, $M_D = E(M)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Для малой предаддитивной категории $\mathcal{K}$ следующие условия равносильны:

1. $Z\mathcal{K} = 0$;
2. $\mathcal{K}_D$ - регулярная (в смысле фон Неймана) категория;
3. $\mathcal{K}_D$ - регулярная категория и $\mathcal{K}_D(\rho, -)$ - инъективный $\mathcal{K}_D$ -модуль для любого $\rho \in |\mathcal{K}_D|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (3). Пусть $Z\mathcal{K} = 0$. Тогда $D = \mathcal{E}$ в силу предложения 1.6.

Покажем сначала, что категория $\mathcal{K}_D$ регулярна. Для этого в силу предложения 3 из [8] достаточно показать, что всякий ее главный правый идеал $\mathcal{A}\mathcal{K}_D(q, -)$, где $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_D(\rho, q)$, порожден идемпотентом. Положим $(f_{\mathcal{A}})_{\mathcal{K}}(\beta) = \mathcal{A}\beta$ для каждого $\mathcal{K} \in |\mathcal{K}_D|$ и любого $\beta \in \mathcal{K}_D(q, \mathcal{K})$. Ясно, что $f_{\mathcal{A}} \in \text{Ab}^{\mathcal{K}_D}(\mathcal{K}_D(q, -), \mathcal{K}_D(\rho, -))$. Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{K}_D(q, -) & \longrightarrow & \mathcal{K}_D(\rho, -) \\ & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_3 \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Ker } f_{\mathcal{A}})_D & \longrightarrow & (\mathcal{K}_D(q, -))_D & \longrightarrow & (\mathcal{K}_D(\rho, -))_D \end{array},$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 - канонические $\mathcal{K}$ -гомоморфизмы. В силу предложения 2.8 ψ_2 и ψ_3 - изоморфизмы. Тогда и ψ_1 - изоморфизм ввиду леммы о 5 гомоморфизмах (см., например, [1, предложение 13.5.5]). Итак, $\text{Ker } f_{\mathcal{A}}$ - D -замкнут, в частности, инъективен, поскольку $\mathcal{E}$ -инъективность равносильна инъективности в силу предложения 1.7. Следовательно, $\text{Ker } f_{\mathcal{A}}$ выделяется прямым слагаемым в $\mathcal{K}_D(q, -)$

$$\mathcal{K}_D(q, -) = \text{Ker } f_{\mathcal{A}} \oplus M,$$

где $M \in \text{Ab}^{\mathcal{K}}$. Ясно, что M - инъективен и $f_{\mathcal{A}}$ индуцирует изо-

морфизм $\mathcal{K}$ -модуля M на прямое слагаемое $\text{Im } f_\alpha$ $\mathcal{K}$ -модуля $\mathcal{K}_D(p, -)$. Замечая, что $\text{Im } f_\alpha = \alpha \mathcal{K}_D(q, -)$, получаем, что $\alpha \mathcal{K}_D(q, -) = \varepsilon \mathcal{K}_D(q, -)$, где $\varepsilon = \varepsilon^2 \in \mathcal{K}_D(p, p)$. Тем самым регулярность категории $\mathcal{K}_D$ доказана.

Далее из предположений 2.8 и 1.7 следует, что $\mathcal{K}$ -модуль $\mathcal{K}_D(p, -)$ полупрост (в смысле Ламбека) и инъективен для любого $p \in |\mathcal{K}_D|$. Отсюда в силу леммы 2.9 вытекает инъективность $\mathcal{K}_D$ -модуля $\mathcal{K}_D(p, -)$.

(3) $\implies$ (2). Очевидно.

(2) $\implies$ (1). Пусть $\mathcal{K}_D$ регулярна. Покажем, что $Z\mathcal{K} = 0$. Предположим, что $\alpha I_q = 0$, где $0 \neq \alpha \in \mathcal{K}(p, q)$, $I_q \in \mathcal{E}_q$, $p, q \in |\mathcal{K}|$. В силу регулярности $\mathcal{K}_D$ существует такое $\beta \in \mathcal{K}_D(q, p)$, что $\alpha = \alpha \beta \alpha$. Поскольку $\beta \alpha \neq 0$ и $I_q \in \mathcal{E}_q$, то найдутся такие $\gamma \in |\mathcal{K}|$ и $\delta \in \mathcal{K}(q, \gamma)$, что $0 \neq \beta \alpha \gamma \in I_q(\gamma)$. Но тогда $\alpha \gamma = \alpha \beta \alpha \gamma \in \alpha I_q(\gamma) = 0$, что противоречит тому, что $\alpha \beta \gamma \neq 0$.

Доказанная нами теорема 3.2 обобщает известную теорему Джонсона (см., например, [9, предложение 4.5.2]).

Следуя Митчеллу [2], будем называть малую предаддитивную категорию $\mathcal{K}$ классически полупростой, если $\mathcal{K}$ -модуль $\mathcal{K}(p, -)$ есть конечная прямая сумма минимальных правых идеалов для каждого $p \in |\mathcal{K}|$ (причем число прямых слагаемых будем называть длиной $\mathcal{K}(p, -)$). Будем говорить, что $\mathcal{K}$ -модуль M имеет конечную размерность Голди, и писать $\dim M < \infty$, если любая прямая сумма его $\mathcal{K}$ -подмодулей имеет только конечное число ненулевых слагаемых.

ТЕОРЕМА 3.3. Для малой предаддитивной категории $\mathcal{K}$ следующие условия равносильны:

1. $\mathcal{K}_D$ классически полупроста;

2. $Z\mathcal{K} = 0$ и $\dim \mathcal{K}(p, -) < \infty$ для любого $p \in |\mathcal{K}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (2). Пусть категория $\mathcal{K}_D$ классически полупроста. Тогда она регулярна в силу предложения 1.2 из [10] и, следовательно, $Z\mathcal{K} = 0$ в силу теоремы 3.2. Докажем теперь, что $\dim \mathcal{K}(p, -) < \infty$ для любого $p \in |\mathcal{K}|$. Пусть n -длина $\mathcal{K}_D$ -модуля $\mathcal{K}_D(p, -)$ и пусть $\{I_s^{(p)} \leq \mathcal{K}(p, -) \mid s = 1, 2, \dots, n\}$ — произвольное конечное семейство правых идеалов, сумма которых прямая. Учитывая лемму 3.1 и то, что инъективная оболочка коммутирует с конечной прямой суммой (см., например, [3, предложение У.2.6]), получаем

$$\left(\bigoplus_{s=1}^m I_p^{(s)}\right)_D = E\left(\bigoplus_{s=1}^m I_p^{(s)}\right) = \bigoplus_{s=1}^m E(I_p^{(s)}) = \bigoplus_{s=1}^m (I_p^{(s)})_D.$$

Отсюда следует, что $m \leq n$.

(2) $\implies$ (1). Пусть $ZK=0$ и $\dim K(p, -) < \infty$ для любого $p \in |K|$. Тогда $D = \mathcal{E}$ в силу предложения 1.6. Далее легко показать, что для любого $p \in |K|$ существует максимальное конечное семейство $\{I_p^{(s)} \leq K(p, -) \mid s=1, 2, \dots, n\}$ правых идеалов такое, что их сумма $\sum_{s=1}^n I_p^{(s)}$ прямая и существенна в $K(p, -)$. Нетрудно видеть, что все идеалы $I_p^{(s)}$, где $s = 1, 2, \dots, n$, однородны¹⁾. Далее из предложения У.2.3 из [3], учитывая лемму 3.1, получаем, что правые идеалы $(I_p^{(s)})_D \leq K_D(p, -)$ неразложимы. Кроме того, их сумма прямая и равна $K_D(p, -)$, причем $K_D(p, -)$ — инъективный K_D -модуль в силу теоремы 3.2. Покажем, что каждый правый идеал $(I_p^{(s)})_D$, где $s = 1, 2, \dots, n$, минимален. Действительно, поскольку категория K_D регулярна, то для всякого $0 \neq \alpha \in (I_p^{(s)})_D(q)$ главный правый идеал $\alpha K_D(q, -)$ выделяется прямым слагаемым в $K_D(p, -)$ в силу предложения 3 из [8] и, следовательно, инъективен, как K_D -модуль. Но тогда $\alpha K_D(q, -)$ выделяется прямым слагаемым и в $(I_p^{(s)})_D$. Но, поскольку $(I_p^{(s)})_D$ однороден, то $\alpha K_D(q, -) = (I_p^{(s)})_D$ и, значит, $(I_p^{(s)})_D$ минимален. Следовательно, категория K_D классически полупроста.

Доказанная теорема 3.3 обобщает теорему Сандомирского [11, теорема 1.6].

В заключение автор благодарит профессора Л.А.Скорнякова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schubert H. *Kategorien*, I, II, Berlin, „Akademie verlag“, 1970.
2. Mitchell B. *Rings with several objects*. — „Adv. Math.“, 1972, 8, №1, 1-161.
3. Stenström B. *Rings of quotients*, Berlin - Heidelberg - New York „Springer Verlag“, 1975.

1) K -модуль M называется однородным, если любые два его ненулевых K -подмодуля имеют ненулевое пересечение.

4. Миллина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., "Наука", 1969.
5. Dickson S.E. A torsion theory for abelian categories. —, Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 121, 223-235.
6. Фуks Л. Восконечные абелевы группы. Т.1. М., "Мир", 1974.
7. Цаленко М.М., Шульгейфер Е.Г. Основы теории категорий. М., "Наука", 1974.
8. Григорян А.Г. Плоские функторы и регулярные категории. — ДАН Арм.ССР, 1976, 62, 2, 65-71.
9. Ламбек И. Кольца и модули. М., "Мир", 1971.
10. Simson D. On pure global dimension of locally finitely presented Grothendieck categories. —, Fund. Math., 1977, 96, N 2, 91-116.
11. Sandomierski F.L. Semisimple maximal quotient rings. —, Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 128, 112-120.

Поступило

12 ноября 1977 г.

ПРИМАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПО ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОДГРУППАМ

С.А. Гриншпон

Две группы G и G' будем называть эквивалентными по вполне характеристическим подгруппам, если каждая из них изоморфна вполне характеристической подгруппе другой группы. В работе [1] получено описание вполне характеристических подгрупп вполне транзитивных примарных абелевых групп в терминах так называемых $\mathcal{U}$ -последовательностей. Всякая вполне характеристическая подгруппа вполне транзитивной примарной группы G имеет вид $G\{\alpha_i\}$, где $\{\alpha_i\}$ — $\mathcal{U}$ -последовательность, $G\{\alpha_i\} = \{g \in G \mid h(p^n g) \geq \alpha_n\}$. Если две вполне транзитивные группы G и G' эквивалентны по вполне характеристическим подгруппам, то существует такая пара $\mathcal{U}$ -последовательностей $(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\})$, что $G \cong G'\{\alpha_i\}$, $G' \cong G\{\beta_i\}$. Будем говорить, что пара $(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\})$ задает эквивалентность примарных групп G и G' по вполне характеристическим подгруппам.

Рассмотрим множество монотонно возрастающих последовательностей, состоящих из целых неотрицательных чисел и символов ∞ . (Если $\{\alpha_i\}$ такая последовательность и $\alpha_n = \infty$, $\alpha_{n-1} \neq \infty$, то $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$, $\alpha_k = \infty$ для всех $k > n$).

Возникает вопрос: всякая ли пара таких последовательностей задает эквивалентность по вполне характеристическим подгруппам некоторых примарных абелевых групп и будет ли следовать из этой эквивалентности изоморфизм самих групп?

В настоящей работе дается ответ на поставленный вопрос для последовательностей определенного вида в классе примарных абеле-

ных групп с конечными ульмовскими инвариантами, разложимых в прямую сумму циклических групп.

Прежде чем доказывать основную теорему, сформулируем и докажем несколько лемм.

Пусть α - некоторое бинарное отношение, заданное на множестве M . Упорядоченное подмножество $M' = \{x_1, x_2, \dots\}$ (M' - счетно или конечно) множества M будем называть α -цепью, если выполняются следующие условия:

- 1) не существует элемента $x \in M$, удовлетворяющего отношению $x \alpha x_1$;
- 2) $x_i \alpha x_{i+1}$ истинно для всякого $i = 1, 2, \dots$;
- 3) если существует элемент $y \in M$, удовлетворяющий отношению $x_k \alpha y$, то $|M'| \geq k+1$.

ЛЕММА 1. Если бинарное отношение α , заданное на множестве M , является взаимно однозначным отображением множества M на $N(N \in M)$, то всякие две α -цепи либо не пересекаются, либо совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент x_n α -цепи будем называть n -м звеном этой цепи. Пусть x ($x \in M$) t -е звено α -цепи M' и l -е звено α -цепи M'' . Ясно, что если первые звенья α -цепей M' и M'' совпадают, то и сами α -цепи совпадают. Пусть $t = l$ ($l > 1$). Так как α - взаимно однозначное отображение, то совпадают $(t-1)$ -е звено M' и $(l-1)$ -е звено M'' и далее по индукции получим, что первые звенья M' и M'' совпадают. Следовательно, $M' = M''$.

- Пусть $t \neq l$. Положим для определенности $t > l$. Если элемент y является $(t-l-1)$ -м звеном α -цепи M' , то y есть первое звено α -цепи M'' . Это невозможно, так как $t-l-1 > 1$ и существует $x \in M$, что $x \alpha y$ истинно. Но тогда по условию 1 M'' не является α -цепью.

ЛЕММА 2. Пусть $M_1 = \{x_0, x_1, \dots\}$, $M_2 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots\}$, $M = M_1 \cup M_2$, $\alpha = \{(x_i, \bar{x}_{n_i}), (\bar{x}_j, x_{m_j}), i, j = 0, 1, 2, \dots\}$.

Тогда: 1) если α - взаимно однозначное отображение множества M на $N(N \in M)$ и $n_i > i$, $m_j > j$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$), то все множество M разбивается на непересекающиеся α -цепи;

2) если $n_i - i = k$ для всех i и $m_j - j = \kappa$ для всех j , то множество M разбивается на $k + \kappa$ α -цепей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 леммы 2 следует непосредственно из определения α -цепи и леммы 1. Докажем утверждение 2. Рассмотрим α -цепи $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots, M^{(k+\kappa-1)}$, первые звенья которых соответственно $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\kappa-1}$. По лемме 1

эти $\mathcal{L}$ -цепи не пересекаются. Покажем, что всякий элемент множества M принадлежит некоторой $\mathcal{L}$ -цепи $M^{(t)}$, $t=0, 1, 2, \dots, k+r-1$. Для всякого i имеем $i = m(k+r) + d$, $d \leq k+r$. Тогда, если $d \leq r-1$, то x_i является $(2m+1)$ -м звеном $\mathcal{L}$ -цепи $M^{(d)}$. Если же $d > r-1$, то x_i является $(2m+2)$ -м звеном $\mathcal{L}$ -цепи $M^{(d)}$. Аналогично для всякого элемента $\bar{x}_i$.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j} x_j ; & (1) \\ x_2 = \sum_{j=1}^{m_2} a_{2j} x_j ; & (2) \\ \dots \dots \dots \\ x_\ell = \sum_{j=1}^{m_\ell} a_{\ell j} x_j . & (\ell) \end{cases}$$

Обозначим через $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\ell}$ (1) те неизвестные, при которых стоят первые ненулевые коэффициенты соответственно в уравнениях (1), (2), ..., (ℓ), т.е. $a_{sj_s} \neq 0$, но $a_{si} = 0$ для всех $i < j_s$, где $s = 1, 2, \dots, \ell$.

ЛЕММА 3. Пусть в системе линейных уравнений (*)

а) a_{ij} принимает значения 0 или 1 и $a_{ij}a_{i'j} = 0$, когда $i \neq i'$;

б) если $x_k = \sum_{j=1}^{m_k} \gamma_{kj} x_j$ - уравнение, получаемое из k -го уравнения системы (*) ($k = 1, 2, \dots, \ell$) с помощью последовательных подстановок вместо неизвестных x_i ($i \leq \ell, i \neq k$) правых частей уравнений системы (*), то $\gamma_{kk} = 0$, ($a_{kk} = 0$). Тогда для всякого натурального числа S система линейных уравнений (*) имеет целочисленные неотрицательные решения такие, что $x_{j_1} \geq S, x_{j_2} \geq S, \dots, x_{j_\ell} \geq S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого k ($1 \leq k \leq \ell$) рассмотрим всевозможные уравнения вида (**) $x_k = \sum_{j=1}^{m_k} \gamma_{kj} x_j$, получаемые из (k) с помощью последовательных подстановок вместо неизвестных x_i ($i \leq \ell, i \neq k$) правых частей уравнений системы (*). Пусть m_k - максимальное число неизвестных из (1), которые входят в правые части уравнений (**). Теперь полагаем $x_1 = m_1 S$, $x_2 = m_2 S, \dots, x_\ell = m_\ell S$. (II)

Неизвестные из (1), которые не попали в формулы (II), полагаем равными S , остальные - нулю. Нетрудно проверить, что таким

образом получили решение системы (*).

Пусть $\mathcal{O}$ - множество монотонно возрастающих последовательностей целых положительных чисел, в которых с некоторого места могут следовать символы ∞ . Будем говорить, что последовательность $\{\alpha_i\}$ имеет скачок в точке α_{k+1} , если $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+1}$. Последовательность $\{\beta_i\}$ будем называть существенно возрастающей, если $\beta_i < \infty$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\} \in \mathcal{O}$ и $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ имеют не более конечного числа скачков.

1. Пара $(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\})$ задает эквивалентность примарных абелевых групп по вполне характеристическим подгруппам тогда и только тогда, когда эти последовательности существенно возрастают.

2. Если $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ - существенно возрастающие последовательности, то существуют такие неизоморфные группы G и G' с конечными ульмовскими инвариантами и разложимые в прямые суммы циклических групп, что $G \cong G'\{\alpha_i\}$, $G' \cong G\{\beta_i\}$, где $G'\{\alpha_i\}$ и $G\{\beta_i\}$ - вполне характеристические подгруппы в G' и G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \cong G'\{\alpha_i\}$, $G' \cong G\{\beta_i\}$ и $\{\beta_i\}$ - несущественно возрастающая последовательность. Тогда $G\{\beta_i\}$ и G' - ограниченные группы. Обозначим через s и t соответственно максимум экспонент элементов групп G и G' . Из изоморфизма $G \cong G'\{\alpha_i\}$ следует $s < t$, а из $G' \cong G\{\beta_i\}$ следует $t < s$. Значит, пара $(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\})$ не может задавать эквивалентность по вполне характеристическим подгруппам примарных абелевых групп.

Пусть G - примарная группа, разложимая в прямую сумму циклических групп. Обозначим через $f_G(i)$ и $f_{G'}(i)$ - количество прямых слагаемых порядка p^{i+1} групп G и $G\{\beta_i\}$ соответственно.

Случай 1. Последовательность $\{\beta_i\}$ не имеет скачков. Тогда группа $G\{\beta_i\}$ имеет вид $p^{\beta_0}G$. Имеем

$$f_G(i) = f_G(\beta_0 + i), \quad i = 0, 1, \dots \quad (III)$$

Случай 2. Последовательность $\{\beta_i\}$ имеет конечное число скачков в точках $\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \dots, \beta_{k_n}$. Рассмотрим отрезок последовательности $\{\beta_i\}$ от β_0 до β_{k_1} . $G = \sum_{j \in M}^{\oplus} \{a_j\}$. Следующие элементы принадлежат $G\{\beta_i\}$ для подходящих $j \in M$: элементы вида $p^{\beta_0}a_j$ порядка p^{m_i} , $1 \leq m_i \leq k_1$; элементы вида $p^{\beta_i}a_j$ порядка p^{k_i} , $\beta_0 + 1 \leq \beta_i \leq \beta_{k_1} - k_1$.

Заметим, что если подгруппа H группы G содержит все элементы вида $p^{\beta}a_j$ порядков $p, p^2, \dots, p^k$, где $\beta_0 \leq \beta < \sigma$, то

она содержит и все элементы вида $p^s a_j$ порядков $p, p^2, \dots, p^{n-1}$. В самом деле, пусть порядок элемента $p^s a_j$ равен p^i , $i \leq n-1$. Тогда элемент $p^{s-1} a_j$ имеет порядок $p^{i-1} \leq p^{n-1}$. Следовательно, $p^{s-1} a_j \in H$, отсюда $p^s a_j \in H$.

Аналогично, рассматривая произвольный отрезок последовательности $\{\beta_i\}$ от β_{k_i} до $\beta_{k_{i+1}}$, $i \leq n-1$, получаем, что элементы такого вида принадлежат $G\{\beta_i\}$ для подходящих $j \in \mathbb{N}$: $p^{\beta_{k_i} - k_i} a_j$ порядка p^m , $k_i + 1 \leq m \leq k_{i+1}$; $p^s a_j$ порядка $p^{k_{i+1}}$, $\beta_{k_i} - k_i + 1 \leq \beta \leq \beta_{k_{i+1}} - k_{i+1}$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть высотные последовательности этих элементов.

Кроме того, $p^{\beta_{k_n} - k_n} G \in G\{\beta_i\}$, так как для всякого элемента $g = p^{\beta_{k_n} - k_n} g'$ имеем $h(g) > \beta_0$, $h(pg) > \beta_1, \dots$, $h(p^{k_n} g) > \beta_{k_n}$. Следовательно, все элементы вида $p^{\beta_{k_n} - k_n} a_j \in G\{\beta_i\}$, $j \in \mathbb{N}$. Учитывая это, получаем, что в $G\{\beta_i\}$, наряду с элементами вида $p^{\beta_{k_n} - k_n} a_j$ порядка k_n , входят и все элементы вида $p^{\beta_{k_n} - k_n} a_j$ порядка p^θ , где $\theta > k_n$. Беря прямую сумму циклических групп, образующими которых служат указанные в каждом отрезке элементы и элементы вида $p^{\beta_{k_n} - k_n} a_j$ порядка θ , $\theta > k_n$, получим группу $\bar{G}$.

Докажем, что $\bar{G} = G\{\beta_i\}$. По построению $\bar{G} \subseteq G\{\beta_i\}$. Предположим, что $G\{\beta_i\} \not\subseteq \bar{G}$. Тогда существует элемент $g \in G\{\beta_i\}$, $g \notin \bar{G}$, $g = p^{k_1} a_{j_1} + p^{k_2} a_{j_2} + \dots + p^{k_\kappa} a_{j_\kappa}$. Так как $g \notin \bar{G}$, то существует j ($1 \leq j \leq \kappa$) такое, что $\beta_{k_i} - k_i \leq k_j \leq \beta_{k_{i+1}} - k_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-1$), $0(p^{k_i} a_{j_i}) > p^{k_{i+1}}$ ($k_0 = 0$). Тогда $h(p^{k_{i+1}}(p^{k_i} a_{j_i})) < \beta_{k_{i+1}}$ и, следовательно, $h(p^{k_{i+1}} g) < \beta_{k_{i+1}}$. Получаем противоречие, так как $g \in G\{\beta_i\}$. Значит, $\bar{G} = G\{\beta_i\}$. Исходя из построения группы $\bar{G}$, получаем, что строение подгруппы $G\{\beta_i\}$ задается следующей системой равенств (k_0 полагаем равным нулю):

$$\begin{cases} f_a(k_i + j) = f_a(\beta_{k_i} + j), & i = 0, 1, \dots, n-1, 0 \leq j < k_{i+1} - k_i - 1; \\ f_a(k_{i+1} - 1) = f_a(\beta_{k_i} - k_i + k_{i+1} - 1) + f_a(\beta_{k_i} - k_i + k_{i+1}) + \dots \\ \quad \dots + f_a(\beta_{k_{i+1}} - 1), & i = 0, 1, \dots, n-1; \\ f_a(0) = f_a(\beta_{k_n} - k_n + \theta), & \theta > k_n. \end{cases} \quad (IV)$$

Заметим, во-первых, что аргументы левой части каждого равенства системы (IV) (аргументы, стоящие под знаком f_a) меньше аргу-

ментов правой части (аргументы, стоящие под знаком f_a).

Во-вторых, если A и B - два различных равенства системы (1Y) и если через $\pi(A)$ и $\pi(B)$ обозначить соответственно множества аргументов правых частей равенств A и B , то $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$.

Возможны такие случаи:

- 1) $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ не имеют скачков;
- 2) хотя бы одна из последовательностей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ имеет скачки.

В каждом случае мы найдем такие примарные группы G и G' с конечными ульмовскими инвариантами, разложимые в прямые суммы циклических групп, что $G \cong G' \{\alpha_i\}$, $G' \cong G \{\beta_i\}$ ($G \{\beta_i\}$, $G' \{\alpha_i\}$ - вполне характеристические подгруппы соответственно групп G и G'), но G не изоморфна группе G' .

1. В первом случае имеем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_a(i) = f_{a'}(\alpha_0 + i), & i = 0, 1, 2, \dots; \\ f_{a'}(j) = f_a(\beta_0 + j), & j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (Y)$$

Множество неизвестных M этой системы разбивается на два подмножества $M_1 = \{f_a(0), f_a(1), \dots\}$ и $M_2 = \{f_{a'}(0), f_{a'}(1), \dots\}$. Рассмотрим бинарное отношение δ на множестве M .

$(f_a(k), f_{a'}(l)) \in \delta$, если $f_a(k) = f_{a'}(l)$ есть уравнение системы (Y) и $(f_{a'}(s), f_a(t)) \in \delta$, если $f_{a'}(s) = f_a(t)$ есть также уравнение системы (Y). Выполняется условие 2 леммы 2. Следовательно, все множество неизвестных разбивается на $\alpha_0 + \beta_0$ δ -цепей:

$M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(\alpha_0)}, \dots, M^{(\alpha_0 + \beta_0)}$, причем $f_a(0) \in M^{(1)}$, $f_{a'}(0) \in M^{(\beta_0 + 1)}$. Зададим последовательность целых положительных чисел: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\alpha_0 + \beta_0}$ такую, что $\alpha_1 \neq \alpha_{\beta_0 + 1}$. Ставя в соответствие каждой δ -цепи $M^{(i)}$ число α_i , которое будет являться значением неизвестных этой δ -цепи, получаем решение системы (Y). Так как $\alpha_1 = f_a(0) \neq f_{a'}(0) = \alpha_{\beta_0 + 1}$, то $G \not\cong G'$.

2. Пусть $\{\alpha_i\}$ имеет конечное число скачков в точках $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}$, а $\{\beta_i\}$ в точках $\beta_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \beta_{s_m}$. Для того чтобы $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ были $\mathcal{U}$ -последовательностями групп G' и G , соответственно, необходимо, чтобы $f_{a'}(\alpha_{k_j} - 1) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ и $f_a(\beta_{s_t} - 1) \neq 0$, $t = 1, 2, \dots, m$ [1]. Имеем такую систему уравнений, связывающих ульмовские инварианты групп G и G' :

$$\begin{cases} f_a(k_{\ell} + j) = f_a'(d_{k_{\ell}} + j), & \ell = 0, 1, \dots, n-1, \quad 0 \leq j < k_{\ell+1} - k_{\ell} - 1; \\ f_a(k_{\ell+1} - 1) = f_a'(d_{k_{\ell}} - k_{\ell} + k_{\ell+1} - 1) + \dots + f_a'(d_{k_{\ell+1}} - 1), & \ell = 0, 1, \dots, n-1; \\ f_a(0) = f_a'(d_{k_n} - k_n + 0), \quad 0 \geq k_n; \\ f_a'(s_{\ell} + j) = f_a(\beta_{s_{\ell}} + j), & \ell = 0, 1, \dots, m-1, \quad 0 \leq j < s_{\ell+1} - s_{\ell} - 1; \\ f_a'(s_{\ell+1} - 1) = f_a(\beta_{s_{\ell}} - s_{\ell} + s_{\ell+1} - 1) + \dots + f_a(\beta_{s_{\ell+1}} - 1), & \ell = 0, 1, \dots, m-1; (V1) \\ f_a'(0) = f_a(\beta_{s_m} - s_m + 0), \quad 0 \geq s_m. \end{cases}$$

Если последовательность $\{\beta_i\}$ не имеет скачков, то в системе (V1) будут отсутствовать уравнения вида

$$f_a(k_{\ell+1} - 1) = f_a'(d_{k_{\ell}} - k_{\ell} + k_{\ell+1} - 1) + \dots + f_a'(d_{k_{\ell+1}} - 1), \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если же последовательность $\{d_i\}$ не имеет скачков, то в системе (V1) не будет уравнений вида

$$f_a'(s_{\ell+1} - 1) = f_a(\beta_{s_{\ell}} - s_{\ell} + s_{\ell+1} - 1) + \dots + f_a(\beta_{s_{\ell+1}} - 1), \quad \ell = 0, 1, \dots, m-1.$$

Заметим, что $d_{k_{\ell}} - k_{\ell} + k_{\ell+1} - 1 = d_{k_{\ell+1}} - 1$, $\beta_{s_{\ell}} - s_{\ell} + s_{\ell+1} - 1 = \beta_{s_{\ell+1}} - 1$.

Итак, нам надо получить целочисленные неотрицательные решения системы (V1), причем такие, чтобы $f_a'(d_{k_{\ell}} - k_{\ell} + k_{\ell+1} - 1) > 0$, $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ и $f_a(\beta_{s_{\ell}} - s_{\ell} + s_{\ell+1} - 1) > 0$, $\ell = 0, 1, \dots, m-1$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} f_a(k_{\ell+1} - 1) = f_a'(d_{k_{\ell}} - k_{\ell} + k_{\ell+1} - 1) + \dots + f_a'(d_{k_{\ell+1}} - 1), & \ell = 0, 1, \dots, n-1; \\ f_a'(s_{\ell+1} - 1) = f_a(\beta_{s_{\ell}} - s_{\ell} + s_{\ell+1} - 1) + \dots + f_a(\beta_{s_{\ell+1}} - 1), & \ell = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (УП)$$

Эта система удовлетворяет условиям леммы 3. Зафиксируем натуральное число S . Найдем целочисленное неотрицательное решение этой системы такое, что

$$\begin{cases} f_a'(d_{k_{\ell}} - k_{\ell} + k_{\ell+1} - 1) \geq S, & \ell = 0, 1, \dots, n-1; \\ f_a(\beta_{s_{\ell}} - s_{\ell} + s_{\ell+1} - 1) \geq S, & \ell = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (***)$$

Далее разобьем все множество неизвестных на δ -цепи, аналогично случаю 1. Здесь появятся уже конечные δ -цепи с последними звеньями $f_a(k_{\ell+1} - 1)$ и $f_a'(s_{\ell+1} - 1)$. По лемме 2 эти δ -цепи не пересекаются. Обозначим через M и N δ -цепи, содержащие $f_a(0)$ и $f_a'(0)$ соответственно. Ясно, что $M \cap N = \emptyset$. Поставим в соответствие δ -цепям, содержащим неизвестные системы (УП) числа, являющиеся значениями этих неизвестных (каждая δ -цепь может содержать не более одного такого неизвестного). Остальным δ -цепям, отличным от M и N , ставим в соответствие произвольные целые неотрицательные числа. Если δ -цепи M и N бесконечны, то поставим им в соответствие различные целые неотрицательные числа.

Пусть теперь $|M| = \aleph_0$, $|N| < \aleph_0$. Тогда N содержит неизвест-

ные из системы (УП) с найденным значением a . Ставим в соответствие δ -цепи M целое число $b \neq a$. Аналогично поступаем в случае, когда $|M| < H_0$, $|N| = H_0$.

Пусть M и N - конечные δ -цепи, которым соответствуют одинаковые числа. $f_a(0)$ можно представить в виде $f_a(0) = \sum_{j=1}^n f_a(\kappa_j)$

($n \geq 2$, κ_j - целые положительные числа). Причем существует такое j_0 ($1 \leq j_0 \leq n$), что $f_a(\kappa_{j_0}) = 0$. Рассмотрим систему уравнений (УШ), полученную из системы (УП) добавлением к ней уравнения $f_a(\kappa_{j_0}) = f_a(t)$ из (У1). Найдем целые неотрицательные решения системы (УШ), удовлетворяющие условиям (***) и условию $f_a(t) \geq 5$. Исходя из решений системы (УШ), ставим в соответствие δ -цепям числа указанным выше способом. Теперь δ -цепям M и N будут соответствовать различные числа. Значениями неизвестных, входящих в каждую δ -цепь, и будут числа, соответствующие этой δ -цепи. Так как $f_a(0) \neq f_a'(0)$, то группы G и G' неизоморфны. Доказательство теоремы закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассматривали последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ такие, что $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Если отказаться от этого требования, то можно построить последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, для которых утверждение теоремы о группах G и G' не будет иметь места.

Пример. Пусть $\{\alpha_i\} = \{0, 1, 2, 5, 7, 8, 9, \dots\}$,
 $\{\beta_i\} = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

Имеем

$$\begin{aligned} f_a(0) &= f_a'(0), & f_a'(0) &= f_a(0), \\ f_a(1) &= f_a'(1), & f_a'(1) &= f_a(1), \\ f_a(2) &= f_a'(2) + f_a'(3) + f_a'(4), & f_a'(2) &= f_a(2) + f_a(3) + f_a(4), \\ f_a(3) &= f_a'(5) + f_a'(6), & f_a'(3) &= f_a(5), \\ f_a(4) &= f_a'(7), & f_a'(4) &= f_a(6), \end{aligned}$$

$$0 \quad \text{Отсюда } f_a'(2) = f_a(2) + f_a(3) + f_a(4) = f_a'(2) + f_a'(5) + f_a'(3) + f_a'(6) + f_a'(4) + f_a'(7)$$

Так как $\{\alpha_i\}$ должна быть $\mathbb{N}$ -последовательностью, то $f_a(2) \geq 1$, $f_a(5) \geq 1$, чего быть не может. Следовательно, не существует таких примарных групп G и G' с конечными ульмовскими инвариантами, разложимых в прямые суммы циклических групп, что

$G \cong G' \{ \alpha_i \}$, $G' \cong G \{ \beta_i \}$, где $G \{ \beta_i \}$ и $G' \{ \alpha_i \}$ - вполне характеристические подгруппы соответственно групп G и G' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. Infinite abelian groups, Ann Arbor, 1954.

Поступило

10 ноября 1977 г.

О ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С. Я. Гриншпон

В настоящей статье дается полное описание вполне характеристических подгрупп вполне разложимых абелевых групп в терминах типов прямых слагаемых (теорема 2). Это описание удастся получить с помощью понятия гомоморфной оболочки подгруппы A' группы A в группе B (определение 1). Попутно отмечаются некоторые свойства гомоморфных оболочек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A и B — две абелевы группы и A' — подгруппа группы A . Гомоморфной оболочкой подгруппы A' в группе B (обозначение — $\tilde{A}'_B$) будем называть подгруппу группы B , порожденную всеми элементами вида $\eta\alpha'$, где $\eta \in \text{Hom}(A, B)$, $\alpha' \in A'$. Другими словами, $\tilde{A}'_B = \sum_{\eta \in \text{Hom}(A, B)} A'^{\eta}$.

Пусть $G = \sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A_{\alpha}$ и G' — вполне характеристическая подгруппа группы G . Известно, что $G' = \sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A'_{\alpha}$, где A'_{α} — вполне характеристическая подгруппа группы A_{α} ($\alpha \in U$), причем $A'_{\alpha} = G' \cap A_{\alpha}$ [3, с. 72]. Если же A'_{α} — вполне характеристическая подгруппа группы A_{α} для каждого $\alpha \in U$, то $\sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A'_{\alpha}$ не обязательно вполне характеристична в $\sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A_{\alpha}$. Следующая лемма дает ответ на вопрос: в каком случае подгруппа $G' = \sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A'_{\alpha}$, где A'_{α} — вполне характеристична в A_{α} ($\alpha \in U$), будет вполне характеристической подгруппой группы $G = \sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A_{\alpha}$.

ЛЕММА 1. Пусть $G = \sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A_{\alpha}$, $G' = \sum_{\alpha \in U}^{\oplus} A'_{\alpha}$, где A'_{α} — вполне характеристическая подгруппа группы A_{α} ($\alpha \in U$). G' — вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда для всякой упорядоченной пары индексов (γ, β) , где $\gamma \in U$ и $\beta \in U$, гомоморфная оболочка подгруппы A'_{γ} в A_{β} содержится

в A'_ρ , то есть $(\tilde{A}'_\rho)_{A_\rho} \subseteq A'_\rho$ (1)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Необходимость. Пусть G' - вполне характеристическая подгруппа группы G . Покажем, что выполняется условие (I). Рассмотрим произвольную пару подгрупп A_ρ и A_γ ($\rho \in \mathcal{U}, \gamma \in \mathcal{U}$) группы G . Пусть $\alpha'_\gamma \in A'_\gamma$, $\eta \in \text{Hom}(A_\gamma, A_\rho)$. Каждому эндоморфизму ω группы G соответствует построчно сходящаяся матрица $(\omega_{\delta\sigma})$, где $\omega_{\delta\sigma} \in \text{Hom}(A_\delta, A_\sigma)$ [3, с. 212]. Рассмотрим следующий эндоморфизм $\tilde{\eta} \in E(G)$, представляемый матрицей $(\tilde{\eta}_{\delta\sigma})$, где $\tilde{\eta}_{\delta\sigma} = 0$, если $(\delta, \sigma) \neq (\gamma, \rho)$ и $\tilde{\eta}_{\delta\sigma} = \eta$, если $(\delta, \sigma) = (\gamma, \rho)$.

Имеем $\tilde{\eta}\alpha'_\gamma \in G'$. Следовательно, $\eta\alpha'_\gamma \in A'_\rho$ и в силу произвольного выбора элемента $\alpha'_\gamma \in A'_\gamma$ и гомоморфизма $\eta \in \text{Hom}(A_\gamma, A_\rho)$ получаем $(\tilde{A}'_\rho)_{A_\rho} \subseteq A'_\rho$.

б) Достаточность. Пусть выполняется условие (I). Покажем, что G' - вполне характеристическая подгруппа группы G . Пусть

λ - произвольный эндоморфизм группы G и $g \in G'$, $g = \sum_{i=1}^n \alpha_{\alpha_i}$, $\alpha_{\alpha_i} \in A'_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathcal{U}$. Имеем $\lambda = (\lambda_{\rho\gamma})$, где $\lambda_{\rho\gamma} \in \text{Hom}(A_\rho, A_\gamma)$ и $\lambda g = \sum_{i=1}^n \sum_{\delta \in \mathcal{U}} \lambda_{\delta\gamma} \alpha_{\delta\alpha_i}$, причем лишь конечное число элементов $\lambda_{\delta\gamma} \alpha_{\delta\alpha_i}$ может быть отлично от нуля для всякого i . По условию $\lambda_{\delta\gamma} \alpha_{\delta\alpha_i} \in A'_\delta$. Следовательно, G' - вполне характеристическая подгруппа группы G .

ЛЕММА 2. Если φ - изоморфное отображение абелевой группы A на группу B и A' - вполне характеристическая подгруппа группы A , то гомоморфная оболочка A' в B совпадает с подгруппой $A'^{''}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что всякий гомоморфизм $\mu \in \text{Hom}(A, B)$ индуцирует эндоморфизм группы A , а именно, $\mu' = \varphi^{-1}\mu$. Пусть A' - вполне характеристическая подгруппа группы A и $\tilde{A}'_B \neq A'^{''}$. Ясно, что тогда $A'^{''} \subset \tilde{A}'_B$. Пусть M - множество всех таких элементов $b \in B$, что $b = \eta c$ для некоторого гомоморфизма $\eta \in \text{Hom}(A, B)$ и некоторого элемента $c \in A'$. M - порождающее множество элементов группы $\tilde{A}'_B$. Так как $A'^{''} \subset \tilde{A}'_B$, то в множестве M существует такой элемент b' , что $b' \neq \varphi a'$ для всех элементов $a' \in A'$. Но элемент b' принадлежит гомоморфной оболочке подгруппы A' в B и поэтому существует такой элемент $a_1 \in A'$ и гомоморфизм $\eta \in \text{Hom}(A, B)$, что $b' = \eta a_1$. Рассмотрим эндоморфизм

$\eta' = E(A)$, индуцированный гомоморфизмом η , то есть $\eta' = \varphi^{-1}\eta$.
Имеем $\eta'a_1 = \varphi^{-1}\eta a_1 = \varphi^{-1}b' = a$, где $a \in A$, $a \notin A'$.
Получили противоречие с вполне характеристичностью A' в A .
Следовательно, $\tilde{A}'_B = A'^{\varphi}$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть φ - изоморфное отображение абелевой группы A на группу B , A' и B' - вполне характеристические подгруппы групп A и B соответственно. Тогда $\tilde{A}'_B \subseteq B'$ и $\tilde{B}'_A \subseteq A'$ в том и только в том случае, когда $A'^{\varphi} = B'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Необходимость. Пусть A' и B' - вполне характеристические подгруппы групп A и B соответственно, $\tilde{A}'_B \subseteq B'$, $\tilde{B}'_A \subseteq A'$. По лемме 2 $\tilde{A}'_B = A'^{\varphi}$, и так как $\tilde{A}'_B \subseteq B'$, то $A'^{\varphi} \subseteq B'$. Предположим, что $A'^{\varphi} \subset B'$, тогда $A' \subset B'^{\varphi^{-1}}$. Но $B'^{\varphi^{-1}} = \tilde{B}'_A$ по предыдущей лемме, следовательно, $B'^{\varphi^{-1}} \subseteq A'$. Итак, получили $A' \subset B'^{\varphi^{-1}}$ и $B'^{\varphi^{-1}} \subseteq A'$. Противоречие. Значит, $A'^{\varphi} = B'$.

б) Достаточность. Пусть $A'^{\varphi} = B'$. По лемме 2 $\tilde{A}'_B = A'^{\varphi}$, а, значит, $\tilde{A}'_B = B'$. Аналогично из равенства $B'^{\varphi^{-1}} = A'$ следует, что $\tilde{B}'_A = A'$.

Будем называть характеристикой всякую последовательность вида $\chi = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots)$, все члены которой - целые неотрицательные числа или символ ∞ . Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ - множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Если G - группа без кручения, $g \in G$, то характеристика $\chi(g)$ элемента g в группе G - это такая характеристика $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots)$, в которой каждое κ_i есть p_i -высота $h_{p_i}(g)$ элемента g в G .

Пусть $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in M} = M$ - некоторое множество характеристик, B - абелева группа без кручения. Обозначим через $B(M)$ подгруппу, порожденную всеми такими элементами a группы B , для которых в множестве M существует характеристика $\chi_\alpha < \chi(a)$ (Характеристики сравниваются по координатам). Понятно, что $B(M)$ - вполне характеристическая подгруппа группы B .

Рассмотрим теперь абелевы группы без кручения ранга I. Обозначим через $\tau(A)$ - тип группы A без кручения ранга I.

Пусть $\mathcal{K}$ - подмножество множества Π всех простых чисел. Группу A назовем $\mathcal{K}$ -делимой, если $pA = A$ для всех $p \in \mathcal{K}$ и $qA \neq A$ для всех $q \in \Pi \setminus \mathcal{K}$. Обозначим через $\pi(A)$ те и только те простые числа p , для которых $pA = A$.

Пусть A' - $\pi(A)$ - делимая подгруппа группы A , B - группа без кручения ранга 1 и $\tau(B) > \tau(A)$. Установим как связаны между собой типы $\tau(A)$, $\tau(B)$, $\tau(A')$ и $\tau(\tilde{A}'_B)$. В теореме 1 такая связь будет установлена. Докажем предварительно следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть A и B - группы без кручения ранга 1, $\tau(A) < \tau(B)$, A' - подгруппа группы A и M - множество, состоящее из всех характеристик элементов подгруппы A' . Тогда гомоморфная оболочка A' в B совпадает с $B(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in \tilde{A}'_B$. Тогда $b = \eta_1 a'_1 + \eta_2 a'_2 + \dots + \eta_k a'_k$, где $a'_i \in A'$, $\eta_i \in \text{Hom}(A, B)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Имеем $\chi(\eta_i a'_i) > \chi(a'_i)$ для всякого i и, следовательно, $b \in B(M)$. Итак, $\tilde{A}'_B \subseteq B(M)$.

Пусть теперь $b \in B(M)$. Значит, $b = b_1 + b_2 + \dots + b_k$, где $\chi(b_i) > \chi_i$, $\chi_i \in M$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Существуют элементы $a_i \in A'$ такие, что $\chi(a_i) = \chi_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ и поэтому $\chi(b_i) > \chi(a_i)$. Следовательно, найдутся гомоморфизмы $\eta_i \in \text{Hom}(A, B)$, что $\eta_i a_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$, и поэтому $b \in \tilde{A}'_B$. Итак, $B(M) \subseteq \tilde{A}'_B$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A и B - группы ранга 1 и $\tau(A) < \tau(B)$. Тогда гомоморфная оболочка A в B есть вся группа B , то есть $\sum_{\eta \in \text{Hom}(A, B)} A^\eta = B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $G = \sum_{\alpha \in \mathcal{U}} A_\alpha$ - вполне разложимая абелева группа без кручения (ранг A_α равен 1 для всякого $\alpha \in \mathcal{U}$),

S - вполне характеристическая подгруппа группы G , и всякое A_{α_0} ($\alpha_0 \in \mathcal{U}$), тип которого минимален среди типов всех прямых слагаемых A_α , содержится в S , то $S = G$.

Это следует из леммы 1, следствия 1 и следствия 2.

Пусть τ_1 и τ_2 - два типа и $\chi_1 = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots)$, $\chi_2 = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots)$ - характеристики, принадлежащие типам τ_1 и τ_2 соответственно. Сумму типов $\tau_1 + \tau_2$ определим как тип, содержащий характеристику $(\kappa_1 + \ell_1, \kappa_2 + \ell_2, \dots, \kappa_n + \ell_n, \dots)$, где $\infty + \ell = \infty$ для всякого ℓ . Разность $\tau_1 - \tau_2$ двух типов $\tau_1 \geq \tau_2$ определим как тип, содержащий характеристику $(\kappa_1 - \ell_1, \kappa_2 - \ell_2, \dots, \kappa_n - \ell_n, \dots)$, где $\chi_1 = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots) \in \tau_1$, $\chi_2 = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots) \in \tau_2$, $\chi_1 \geq \chi_2$ и полагаем $\infty - \ell = \infty$ для всякого ℓ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть A и B - две группы без кручения

ранга I, $\tau(A) \leq \tau(B)$, $A' = \pi(A)$ — делимая подгруппа группы A . Если B' — гомоморфная оболочка подгруппы A' в группе B , то $\tau(B') = \tau(B) - \tau(A) + \tau(A')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $\alpha \in A'$, $\beta \in A'$ и $\chi(\alpha) = (\kappa_1, \dots, \kappa_n, \dots)$, $\chi(\beta) = (\ell_1, \dots, \ell_n, \dots)$ (характеристики элементов расматриваются в группе A) и $\kappa_{j_1} > \ell_{j_1}$, то α делится на $\rho_{j_1}^{\kappa_{j_1} - \ell_{j_1}}$ в A' . В самом деле, пусть $\ell_{i_1} > \kappa_{i_1}$, $\ell_{i_2} > \kappa_{i_2}, \dots, \ell_{i_s} > \kappa_{i_s}$ и $\ell_{j_1} < \kappa_{j_1}$, $\ell_{j_2} < \kappa_{j_2}, \dots, \ell_{j_t} < \kappa_{j_t}$. Положим $C = \rho_{i_1}^{\ell_{i_1} - \kappa_{i_1}} \rho_{i_2}^{\ell_{i_2} - \kappa_{i_2}} \dots \rho_{i_s}^{\ell_{i_s} - \kappa_{i_s}} \alpha$. Тогда $C = \rho_{j_1}^{\kappa_{j_1} - \ell_{j_1}} \beta'$, где $\beta' = \rho_{j_2}^{\kappa_{j_2} - \ell_{j_2}} \dots \rho_{j_t}^{\kappa_{j_t} - \ell_{j_t}} \beta$; $C \in A'$, $\beta' \in A'$. Так как C делится на $\rho_{j_1}^{\kappa_{j_1} - \ell_{j_1}}$ в A' , значит, и α делится на $\rho_{j_1}^{\kappa_{j_1} - \ell_{j_1}}$ в A' .

Рассмотрим покомординатный $\inf$ характеристик элементов из A' . Пусть это будет последовательность $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots)$. Для всякого ℓ_i существует такой элемент $c_i \in A'$, что $h_{\rho_i}(c_i) = \ell_i$ в группе A . Пусть $\alpha \in A'$ и $\chi(\alpha) = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots) \in \tau(A)$. В силу сделанного выше замечания, α делится в A' на $\rho_i^{\kappa_i - \ell_i}$ и, очевидно, не делится на более высокую степень ρ_i (Если $\kappa_i = \infty$, то и $\ell_i = \infty$ и, наоборот, тогда α делится на любую степень ρ_i). Следовательно, $(\kappa_1 - \ell_1, \kappa_2 - \ell_2, \dots, \kappa_n - \ell_n) \in \tau(A')$. Заметим, что $B' = \pi(B)$ — делимая группа. Действительно, по лемме 4 B' порождается элементами β' со свойством $\chi(\beta') > \chi(\alpha')$, $\alpha' \in A'$, и если $\chi(\beta') > \chi(\alpha')$, то и $\chi(\frac{\beta'}{\rho_n}) > \chi(\alpha')$, где $\rho \in \pi(B)$.

Покажем, что если $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ — покомординатный $\inf$ характеристик элементов из B' и $\rho_i \notin \pi(B)$, то $s_i = \ell_i$. Действительно, существует элемент $c_i \in A'$, что $h_{\rho_i}(c_i) = \ell_i$. Рассмотрим в группе B элемент d_i такой, что $h_{\rho_i}(d_i) = \ell_i$ и $\chi(d_i) > \chi(c_i)$. По лемме 4 $d_i \in B'$. Следовательно, $s_i \leq \ell_i$. Но в силу той же леммы не может быть $s_i < \ell_i$. Значит, $s_i = \ell_i$.

Пусть $\beta \in B'$ и $\chi(\beta) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots) \in \tau(B)$. Тогда $(\tau_1 - \ell_1, \tau_2 - \ell_2, \dots, \tau_n - \ell_n, \dots) \in \tau(B')$. Переходя к типам, получаем $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots) \in \tau(A) - \tau(A')$ и $\tau(B') = \tau(B) - [\tau(A) - \tau(A')] = \tau(B) - \tau(A) + \tau(A')$, что и требовалось доказать.

Следующая простая лемма описывает вполне характеристические подгруппы групп без кручения ранга I.

ЛЕММА 4. Пусть G - π -делимая группа без кручения ранга I. S - вполне характеристическая подгруппа группы G тогда и только тогда, когда S - π -делимая подгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Необходимость. Пусть S - вполне характеристическая подгруппа группы G , $a \in S$, $p \in \pi$. Рассмотрим эндоморфизм η группы G : $\eta g = \frac{g}{p}$ для всякого $g \in G$. Так как $\eta a \in S$, то $\frac{a}{p} \in S$, и S - π -делимая подгруппа.

б) Достаточность. Пусть S - произвольная π -делимая подгруппа группы G . Всякий эндоморфизм τ группы G можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m - целое число, а n - положительное число, в разложении которого на простые множители встречаются только те числа p , для которых $pG = G$ [2]. Эндоморфизм τ действует следующим образом:

$$\tau g = \frac{m}{n} g, g \in G. \text{ Если } a \in S, \text{ то и } \frac{ma}{n} \in S.$$

Докажем теперь теорему, дающую описание вполне характеристических подгрупп вполне разложимых абелевых групп в терминах типов. Условимся для удобства считать, что нулевой группе соответствует тип τ^0 (несобственный тип), который обладает следующими свойствами: 1) $\tau^0 < \tau$ для всякого типа $\tau \neq \tau^0$; 2) $\tau + \tau = \tau$ для всякого типа τ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и A' - вполне разложимые абелевы группы без кручения $A = \sum_{\alpha \in \alpha} A_\alpha, A' = \sum_{\alpha \in \alpha} A'_\alpha$, где $\tau k(A_\alpha) = \tau k(A'_\alpha) = 1, \alpha \in \alpha$ (среди групп A'_α могут быть и нулевые). Группа A' изоморфна некоторой вполне характеристической подгруппе группы A тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: (1) $\tau(A'_\alpha) \leq \tau(A_\alpha)$; (2) если A_α - π -делима, то и A'_α - π -делима; (3) если $A_{\alpha_1} \cong A_{\alpha_2}$, то и $A'_{\alpha_1} \cong A'_{\alpha_2}$; (4) если $\tau(A_p) > \tau(A_r)$, то $\tau(A'_p) \geq \tau(A_p) - \tau(A_r) + \tau(A'_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а). Необходимость. Условие (1) очевидно, (2) следует из леммы 4, (3) следует из леммы I и следствия I. Для доказательства условия (4) заметим, что если $\tau(A_p) > \tau(A_r)$, то $\text{Hom}(A_p, A_r) \neq 0$ и по лемме I группа A'_p должна содержать в себе гомоморфизм оболочку A'_r в A_r . Если $\tau(A'_p) \neq \tau^0$, то есть A'_p - ненулевая группа, то по теореме I $\tau(A'_p)_{A_p} = \tau(A_p) - \tau(A_r) + \tau(A'_r)$. Тогда $\tau(A'_p) \geq \tau(A_p) - \tau(A_r) + \tau(A'_r)$. Если же $\tau(A'_p) = \tau^0$, то условие (4) автоматичес-

ли выполняется, так как оно в этом случае имеет вид $\tau(A'_p) \geq \tau^0$.

б). Достаточность. Пусть $\mathcal{S}$ - множество различных типов прямых слагаемых в разложении $A = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}} \alpha A_\alpha$, отличных от τ^0 .

Рассмотрим всевозможные цепи (линейно упорядоченные множества) из $\mathcal{S}$, порядковые типы которых ω , ω^* , $\omega^* + \omega$ [1] или $\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ - натуральное число. Другими словами, рассмотрим цепи типов из $\mathcal{S}$ такие, что между любыми двумя типами расположено лишь конечное число типов. Вполне упорядочим множество всех таких цепей. Пусть M_λ - такая цепь. Для каждого типа $\tau(A_{\alpha_i}) \in M_\lambda$ (i - целое число) составим разность $\tau(A_{\alpha_i}) - \tau(A_{\alpha_{i+1}}) = \tau_{\alpha_i}$. В каждом типе τ_{α_i} выберем характеристику $\lambda_{\alpha_i} = (\kappa_1^{(\alpha_i)}, \kappa_2^{(\alpha_i)}, \dots, \kappa_n^{(\alpha_i)}, \dots)$ так, чтобы выполнялось следующее условие: если $\tau(A_{\alpha_{i+1}})$ тип, следующий за $\tau(A_{\alpha_i})$ в цепи M_λ , то в типе $\tau_{\alpha_{i+1}}$ выберем характеристику $(\kappa_1^{(\alpha_{i+1})}, \kappa_2^{(\alpha_{i+1})}, \dots, \kappa_n^{(\alpha_{i+1})}, \dots)$ такую, чтобы для всех $\kappa_n^{(\alpha_{i+1})} \neq \infty$ выполнялось $\kappa_n^{(\alpha_{i+1})} \leq \kappa_n^{(\alpha_i)}$ (*). Такой выбор характеристик можно осуществить с помощью трансфинитной индукции. Действительно, для первой цепи M_λ это можно сделать в силу неравенства из условия (4) доказываемой теоремы. Пусть теперь для всех типов, входящих в цепи M_τ , $\tau < \lambda$ осуществлен выбор характеристик, удовлетворяющих условию (*). Пусть $N_\lambda = M_\lambda \cap (\bigcup_{\tau < \lambda} M_\tau)$. Для всех типов из N_λ характеристики уже выбраны. Так как между любыми двумя типами из N_λ в цепи M_λ содержится лишь конечное число типов, то и для типов из M_λ можно выбрать характеристики, удовлетворяющие условию (*).

Таким образом, любым двум сравнимым типам $\tau(A_\alpha)$ и $\tau(A_\beta)$ из $\mathcal{S}$ ($\tau(A_\alpha) < \tau(A_\beta)$) соответствует характеристика $\lambda_\alpha = (\kappa_1^{(\alpha)}, \kappa_2^{(\alpha)}, \dots, \kappa_n^{(\alpha)}, \dots)$ и $\lambda_\beta = (\kappa_1^{(\beta)}, \kappa_2^{(\beta)}, \dots, \kappa_n^{(\beta)}, \dots)$, удовлетворяющие условию: для всех $\kappa_n^{(\beta)} \neq \infty$ выполняется $\kappa_n^{(\beta)} \leq \kappa_n^{(\alpha)}$ (**). Действительно, рассмотрим цепь M_β , содержащую $\tau(A_\beta)$ и $\tau(A_\alpha)$. В силу согласованности выбора характеристик можно рассмотреть такую цепь. Между $\tau(A_\alpha)$ и $\tau(A_\beta)$ в цепи M_β содержится лишь конечное число типов: $\tau(A_{\alpha_1}) < \tau(A_{\alpha_2}) < \dots < \tau(A_{\alpha_n}) < \tau(A_\beta)$. Учитывая условие (*), получаем, что типам $\tau(A_\alpha)$ и $\tau(A_\beta)$ соответствует характеристика, удовлетворяющая условию (**).

Если $A_{\alpha_1} \neq A_{\alpha_2}$ и типу $\tau(A_{\alpha_1})$ соответствует характеристика

ка χ_{α_2} , то типу $\tau(A_{\alpha_2})$ поставим в соответствие характеристику $\chi_{\alpha_2} = \chi_{\alpha_1}$. Будем считать, что типу τ° соответствует характеристика χ° . Рассмотрим теперь группу $A'' = \sum_{\alpha \in U} A_\alpha[\chi_\alpha]$, где $A_\alpha[\chi_\alpha] = \{a \in A_\alpha \mid \chi(a) \geq \chi_\alpha\}$ для $\chi_\alpha \neq \chi^\circ$. Если же $\chi_\alpha = \chi^\circ$, то $A_\alpha[\chi_\alpha] = 0$. Покажем, что $A'' \cong A'$ и A'' - вполне характеристическая подгруппа группы A . Действительно, $A'' \cong A'$, так как $\chi_\alpha \in \tau(A_\alpha) - \tau(A'_\alpha)$ и тогда $\tau(A_\alpha[\chi_\alpha]) = \tau(A_\alpha) - [\tau(A_\alpha) - \tau(A'_\alpha)] = \tau(A'_\alpha)$. Ясно, что $A_\alpha[\chi_\alpha]$ - вполне характеристическая подгруппа группы A_α для всякого $\alpha \in U$. Если $\text{Hom}(A_\gamma, A_\beta) \neq 0$, ($\gamma \in U, \beta \in U$) и $A_\gamma \neq A_\beta$, то $\tau(A_\beta) > \tau(A_\gamma)$. Так как характеристики χ_γ и χ_β удовлетворяют условию $(**)$, то гомоморфная оболочка подгруппы $A_\gamma[\chi_\gamma]$ в группе A_β содержится в $A_\beta[\chi_\beta]$ (см. доказательство теоремы I). Следовательно, в силу леммы I, A'' - вполне характеристическая подгруппа группы A . Теорема доказана.

Литература

1. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М., 1937.
2. Кишкина З.М. Эндоморфизмы p -примитивных абелевых групп без кручения. - "Изв.АН СССР", сер.матем., 1945, 9, 201-232.
3. Fuchs L. Abelian groups, Budapest, Kiado, 1966.

КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫЕ ГРУППЫ

Ю. Б. Добрусин

В данной работе изучаются свойства квазисервантно инъективных (КСИ) абелевых групп [1, проблема 17], то есть таких групп G , что всякий гомоморфизм $H \rightarrow G$, где H — сервантная подгруппа группы G , может быть продолжен до эндоморфизма группы G . В работе характеризуется ряд классов КСИ абелевых групп без кручения (в том числе класс однородных КСИ групп без кручения) и класс периодических КСИ абелевых групп.

§ 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Абелеву группу G без кручения назовем вполне транзитивной (ВТ), если любой гомоморфизм её сервантной подгруппы ранга 1 в саму группу продолжается до эндоморфизма всей группы.

Абелеву группу G называют сильно неразложимой, если для любых ненулевых подгрупп A, B , таких, что $A \cap B = 0$, фактор-группа $G/A \oplus B$ неограничена. Пусть G — абелева группа без кручения, $\alpha \in G$, $A \leq G$. Запись $A \leq G$ означает, что A — сервантная подгруппа в G , через $\langle A \rangle_*^G$ ($\langle \alpha \rangle_*^G$) обозначается сервантная подгруппа группы G , порожденная множеством A (элементом α), $\tau_\alpha(\alpha)$, $\chi_\alpha(\alpha)$, $h_\alpha^\alpha(\alpha)$ — соответственно тип, характеристика, ρ — высота элемента α в группе G . Если ясно, о какой группе G идет речь, то индекс G в указанных обозначениях опускается.

$E(G)$ - кольцо эндоморфизмов группы G .

$\tau(G)$ - ранг группы G .

$T(G)$ - множество всех различных типов элементов группы G .

Пусть α - тип абелевой группы без кручения ранга 1, χ - характеристика, $\chi \in \alpha$, полагаем

$$G(\alpha) = \{a \in G, \tau(a) \neq \alpha\}, G(\chi) = \{a \in G, \chi(a) \neq \chi\}.$$

Под словом группа везде дальше понимается редуцированная абелева группа без кручения, множество всех различных типов элементов которой удовлетворяет условию максимальности.

Через $\mathcal{M}$ обозначим класс всех групп, каждая сервантная подгруппа которых сильно неразложима, $\mathcal{M}^0$ - класс всех прямых сумм групп из класса $\mathcal{M}$.

ЛЕММА 1.1. Пусть G - КСИ группа, ψ - такой эндоморфизм G , что $0 \neq A = \langle \psi(G) \rangle_*^G \in \mathcal{M}$. Тогда любой ненулевой эндоморфизм группы A есть мономорфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия леммы и $\varphi \in E(A)$, $\ker \varphi \neq 0$. Докажем, что $\varphi(a) = 0$ для любого типа $\alpha \in T(A)$ и любого элемента $a \in A$ типа α . Индукция по частично упорядоченному множеству $T(A)$, удовлетворяющему условию максимальности. Если элемент a имеет в A максимальный тип, то согласно [2, лемма 1.1], $\varphi(a) = 0$. Пусть $a \in A$ и для любого $b \in A$, из того, что $\tau(b) > \tau(a)$, следует $\varphi(b) = 0$. Докажем, что $\varphi(a) = 0$. Пусть $\varphi(a) \neq 0$. Тогда $\tau(a)$ не максимален в $T(A)$. Пусть $c \in A$, $\tau(c)$ максимален в $T(A)$ и $\tau(c) > \tau(\varphi(a)) > \tau(a)$, причем $k_p^G(c) = 0$ для простого числа p . Так как $a \in A$, то $na \in \text{Im } \psi$, $0 \neq n$ - целое число и $\varphi(na) = n\varphi(a) \neq 0$, $\tau(a) = \tau(na)$, поэтому можно считать, что $a \in \text{Im } \psi$, $a = \psi(d)$. Пусть k - натуральное число. Тогда $\psi(p^k d + c) = p^k a + \psi(c)$. Так как $\tau(c)$ максимален в $T(A)$, то $\tau(c) = \tau(\psi(c))$ и $\varphi\psi(c) = 0$. $\varphi(p^k d + \psi(c)) = p^k \varphi(a) \neq 0$. Согласно индуктивному предположению $\tau(p^k a + \psi(c))$ не больше $\tau(a)$, поэтому $\tau(p^k a + \psi(c)) = \tau(a) < \tau(c)$. Следовательно, $\tau(d) \leq \tau(p^k d + c) \leq \tau(p^k a + \psi(c)) < \tau(c)$.

Поэтому $\tau_a(p^k d + c) = \tau_a(d)$ и существует такое целое $s \neq 0$, что $\chi_a(p^s d + c) \leq \chi_a(sd)$, причем ввиду $k_p(c) = 0 = k_p(p^s d + c)$ можно считать $(s, p) = 1$. Группа G КСИ, существует $f \in E(G)$, $f(p^s d + c) = sd$, $sd - f(c) = p^s f(d)$. Если обозначить $\tau_a(c)$ через β , то $f(c) \in G(\beta)$ и последнее равенство показывает, что

смежный класс $sd + G(\beta)$ делится на p^c в группе $G/G(\beta)$; бан-
торгруппа $G/G(\beta)$ без кручения, $(S, p) = 1$, κ выбрано произволь-
но, поэтому смежный класс $d + G(\beta)$ делится на любую степень p
в группе $G/G(\beta)$. Следовательно, смежный класс $\psi\psi(d) + \psi\psi(G(\beta))$
делится на любую степень p в группе $\psi\psi(G)/\psi\psi(G(\beta))$. Одна-
ко $\psi(G(\beta)) \in A(\beta)$, как доказано, $\psi(A(\beta)) = 0$, то есть
 $\psi\psi(G(\beta)) = 0$. Поэтому элемент $\psi\psi(d) = \psi(a)$ обязан де-
литься на любую степень числа p в группе $\psi\psi(G)$, откуда $k_p^c(\psi(a)) =$
 $= \infty$, это противоречит тому, что $k_p^c(c) = 0$, $\tau(c) > \tau(\psi(a))$.
Таким образом, $\psi(a) = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть G - КС И группа. Тогда любой элемент из
 G , тип которого максимален в $T(G)$, принадлежит некоторому
прямому слагаемому из класса $\mathcal{M}$ группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоре-
мы и $0 \neq a \in G$, $\tau(a)$ - максимальный тип в $T(G)$. Рас-
смотрим множество $\mathcal{L}$ всех пар (H, φ) , где $a \in H$, $H \in G$,
 $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$, $\varphi(a) = a$ и каждый ненулевой гомоморфизм из
 $\text{Hom}(\langle \varphi(H) \rangle, G)$ - мономорфизм. На $\mathcal{L}$ вводится отношение
порядка $(H_1, \varphi_1) \leq (H_2, \varphi_2) \iff H_1 \subseteq H_2, \varphi_2|_{H_1} = \varphi_1$.

Так как $\mathcal{L} \ni (\langle a \rangle, 1)$, 1 - тождественный гомоморфизм и $\mathcal{L}$ ин-
дуктивно, то в $\mathcal{L}$ существует максимальный элемент (H, φ) .
Пусть $E(G) \ni \psi$ - продолжение φ .

Допустим, что $H \neq G$. Тогда существует $b \in G \setminus H$, $c = \psi(b) \neq$
 $\notin \langle \mathcal{M} \varphi \rangle$. Рассмотрим $B = \langle a, c \rangle$. Допустим, что группа B
квазиразложима, $B \cong X \oplus Y \cong nB$, где $\tau(X) = \tau(Y) = 1$, $X, Y \in G$,
 $0 \neq n$ - целое число. Так как $\tau(a)$ максимален в $T(G)$, то
можно считать тип X равным $\tau(a)$. Группа B вполне разложима.
Действительно, пусть тип X несравним с типом Y и пусть $0 \neq x \in X$,
 $0 \neq y \in Y$, $k_p^c(x) = k_p^c(y) = 0$, p - простое. Тогда для неко-
торого натурального κ , $\kappa_c(x + p^c y) \leq \kappa_c(ny)$, причем ny
не делится в G на p^c . Группа G КС-И-, поэтому $\ell(x + p^c y) = ny$
для некоторого $\ell \in E(G)$. Если $\ell(x) \neq 0$ то тип $X = \tau(x) =$
 $= \tau(\ell(x)) = \tau(ny - \ell(p^c y)) > \tau(y)$, $\tau(y)$ равен типу Y ,
но тип X несравним с типом Y , поэтому $\ell(x) = 0$, $p^c \ell(y) = ny$,
что противоречит выбору κ . Таким образом, для любого простого
 p , $pX \neq X$ влечет $pY = Y$, согласно [3, теорема 3]
группа B вполне разложима. Так как $\tau(a)$ максимален в $T(G)$,
то [4, лемма 86.8, с.137] $B = \langle a \rangle \oplus Y'$. Тогда сущест-
вует $\tilde{\ell} \in E(G)$, $\tilde{\ell}(a) = a$, $\tilde{\ell}(Y') = 0$, поэтому

$\chi(\psi) \in \mathcal{L}$, это противоречит максимальнойности (H, φ) . Поэтому $\langle a, c \rangle_\psi^*$ — сильно неразложимая группа.

Из того, что G КСИ и ненулевые элементы из $\text{Hom}(\langle \varphi(H) \rangle_\psi^*, G)$ — мономорфизмы, следует, что $\langle \text{Im } \varphi \rangle_\psi^* \in \mathcal{M}$. Поэтому $\langle a, c \rangle_\psi^*$ — сильно неразложимая группа при любом $c \in \text{Im } \varphi$. Заметим, что так как $\tau(a)$ максимален в $T(G)$, из [2, лемма 1.1] следует, что любой элемент из $\text{Hom}(\langle a, c \rangle_\psi^*, G)$ однозначно определяется своим действием на c для любого $c \in \text{Im } \varphi$. Докажем, что $\langle \text{Im } \varphi \rangle_\psi^* \in \mathcal{M}$. Допустим противное: пусть D — квазиразложимая сервантная подгруппа ранга 2 в $\langle \text{Im } \varphi \rangle_\psi^*$, $D \cong D_1 \oplus D_2 \cong mD$, $\chi(D_1) = \chi(D_2) = 1$, $0 \neq m$ — целое. Тогда существует $\pi \in E(G)$, $\pi(D_1) = 0$, π действует на D_2 как умножение на m . Пусть $0 \neq c_1 \in D_1 \cap \text{Im } \varphi$. По сделанному замечанию, так как $\pi(c_1) = 0$, то $\pi(a) = 0$, с другой стороны, $\pi(c_1) = mc_1$, поэтому $\pi(a) = ma \neq 0$. Противоречие доказывает, что $\langle \text{Im } \varphi \rangle_\psi^* \in \mathcal{M}$. Если $H = G$, то $\varphi = \psi$ и $\langle \text{Im } \varphi \rangle_\psi^* = \langle \text{Im } \varphi \rangle_\psi^* \in \mathcal{M}$. Из леммы I.3 следует, что ψ действует на $\text{Im } \varphi$ как тождественный гомоморфизм, поэтому $G = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi$. Теорема доказана.

Группа называется связной [4], если факторгруппа по любой ее сервантной подгруппе делима.

Для изучения однородных КСИ групп нам потребуется следующий результат, имеющий самостоятельный интерес.

ЛЕММА I.3. Для однородной идемпотентного типа группы G следующие условия эквивалентны:

1. G — связная КСИ-группа.
2. Для любого простого p со свойством $pG \neq G$, G вкладывается в кольцо $\mathcal{Q}_p^*$ целых p -адических чисел как p -сервантное подкольцо (содержащее 1), в котором каждый элемент есть целое кратное обратимого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (2). Согласно [5] связная группа G вкладывается в аддитивную группу $\mathcal{I}_p$ кольца $\mathcal{Q}_p^*$ как p -сервантная подгруппа при любом простом p со свойством $pG \neq G$. отождествляем G с ее образом при указанном вложении. Так как G содержит элементы, обратимые в $\mathcal{Q}_p^*$ и умножение на обратимый элемент из $\mathcal{Q}_p^*$ есть автоморфизм $\mathcal{I}_p$, то можно считать, что G содержит 1 из $\mathcal{Q}_p^*$, причем $\chi_G(1)$ — наименьшая из характеристик элементов в G . Пусть $a, b \in G$. Тогда $\chi_G(a) \geq \chi_G(1)$, так как G КСИ, то существует $\varphi \in E(G)$, $\varphi(1) = a$. Так как

φ можно продолжить до эндоморфизма $\mathcal{I}_p$, а любой эндоморфизм $\mathcal{I}_p$ есть умножение на некоторый элемент из Q_p^* , то φ действует как умножение на a , $\varphi(b) = ab = ba \in G$. То есть G - подкольцо в Q_p^* . Так как G - однородная группа, то существует такое целое n , что $\chi_a(a) = \chi_a(n \cdot 1)$. Из того что G - К С И группа и из проведенных рассуждений следует, что существует $b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a = n \cdot 1$ (умножение в кольце Q_p^*). Поэтому $\frac{a}{n} \cdot b = b \cdot \frac{a}{n} = 1$. $\frac{a}{n}$ - обратимый элемент из G .

Импликация (2) $\implies$ (1) следует из [2, теорема 1.13].

ТЕОРЕМА 1.4. Однородная группа G К С И тогда и только тогда, когда либо G - алгебраически компактная группа, либо $G \cong H \otimes_{\mathbb{Z}} R^n$, где H - группа ранга 1 того же типа, что и группа G , n - натуральное число, R - ассоциативное кольцо с 1, в котором любой элемент есть целое кратное обратимого, $(H \otimes_{\mathbb{Z}} R) \in \mathcal{M}$ и если $n \geq 2$, то R вкладывается в кольцо целых p -адических чисел как p -сервантное подкольцо (содержащее 1) при любом простом p со свойством $pG \neq G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - К С И однородная абелева группа без кручения. Пусть χ - характеристика ненулевого элемента в группе G . Обозначим $A = G(\chi)$ и допустим, что $A \notin \mathcal{M}^0$. Докажем, что группа A алгебраически компактна. Для этого воспользуемся признаком алгебраической компактности группы, который сформулирован в [1, с.190] и легко проверяется: группа A алгебраически компактна, если из того, что всякая конечная подсистема системы уравнений со счетным числом неизвестных над A имеет решение в группе A , следует, что и вся система уравнений разрешима в A .

Пусть $\sum n_{ij} x_j = a_i, i \in \mathcal{I}$ (*) система уравнений над A со счетным числом неизвестных $x_1, x_2, \dots$. Тогда [1, с.122] n_{ij} - целые числа, для фиксированного i , $n_{ij} \neq 0$ лишь для конечного числа значений j , $a_i \in A$. Допустим, что каждая конечная подсистема системы (*) разрешима в группе A . Множество всех различных левых частей уравнений системы (*) счетно. Поэтому можно считать множество $\mathcal{I}$ счетным. Докажем, что система (*) разрешима в группе A .

Если $a_i = 0$ для любого $i \in \mathcal{I}$, то решением (*) является $x_j = 0, j = 1, 2, \dots$. Допустим, что $a_i \neq 0$ для некоторого $i \in \mathcal{I}$. Пусть $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ - множество всех ненулевых правых частей уравнений из (*), очевидно, $|S| \leq \aleph_0$. Согласно [2, теорема 1.10]

A - однородная КСИ группа. По теореме 1.2, $a_1 \in A_1$, $A_1 \in \mathcal{M}$, $A = A_1 \oplus \bar{A}_1$. Так как $A_1 \notin \mathcal{M}^\oplus$, то $\bar{A}_1 \neq 0$. Прямое слагаемое КСИ группы является КСИ, поэтому $\bar{A}_1$ - однородная КСИ группа. Если $a_2 \notin A_1$, то $a_2 = b_1 + b_2$, $b_1 \in A_1$, $b_2 \in \bar{A}_1$. По теореме 1.2, $b_2 \in A_2$, $A_2 \in \mathcal{M}$, $A_1 = A_2 + \bar{A}_2$, $\bar{A}_2 \neq 0$.

Учитывая проведенные рассуждения, по индукции нетрудно доказать, что существуют группы $0 \neq A_j \in \mathcal{M}$ такие, что $A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \oplus \bar{A}_k$ для всякого натурального k и $a_k \in \sum_{j=1}^k A_j$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Положим $M = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$.

Для любого натурального k группа $\sum_{j=1}^k A_j$ - прямое слагаемое однородной КСИ группы A и $A_j \in \mathcal{M}$, согласно [2, теорема 2.11] $A_j \cong A_1$, $j = \overline{1, \infty}$. Так как A_1 - КСИ однородная идемпотентного типа группа из класса $\mathcal{M}$, то [2, теорема 1.18] A_1 является аддитивной группой коммутативной области главных идеалов R . Поэтому группу $M = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$ можно естественным образом рассматривать как свободный R -модуль. Согласно определению, $M \in \mathcal{A}$, $a_i \in \mathcal{J}$, $i \in \mathcal{J}$. Положим $c_i = \sum n_{ij} e_j$, где $A_j \cong e_j$ - единица кольца R ($\sum n_{ij} x_j$) - левая часть уравнения системы (*) под индексом i . Счетное множество $\mathcal{J}$ можно представить в виде объединения счетной возрастающей последовательности непустых конечных подмножеств $\mathcal{J}_n$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $C_n = \langle \bigcup_{i \in \mathcal{J}_n} \{c_i\} \rangle_n$, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Для любого натурального n существует такой гомоморфизм $\varphi_n: C_n \rightarrow M$, что $\varphi(c_i) = a_i$, $i \in \mathcal{J}_n$. Действительно, пусть n - натуральное число, рассмотрим конечную подсистему $\sum n_{ij} x_j = a_i$, $i \in \mathcal{J}_n$ системы (*). Согласно предположению, эта подсистема имеет решение в группе A . Так как $\mathcal{J}_n$ - конечное множество, то существует натуральное k такое, что $a_i \in \sum_{j=1}^k A_j$ для любого $i \in \mathcal{J}_n$. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - решение данной подсистемы в A , тогда $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ - также решение этой подсистемы, где y_j есть проекция x_j на прямое слагаемое $\sum_{j=1}^k A_j$ группы A , $y_j \in M$. Семейство $\{e_1, e_2, \dots\}$ является базисом модуля M_R , поэтому отображение $e_j \rightarrow y_j$, $j = \overline{1, m}$ можно продолжить до эндоморфизма ψ модуля M . Тогда $\psi(c_i) = \psi(\sum n_{ij} e_j) = \sum n_{ij} y_j = a_i$, $i \in \mathcal{J}_n$. Ограничение ψ на группе C_n дает исконый гомоморфизм φ_n . Так как φ_{n+1} является продолжением φ_n для любого натурального n , то зададим

гомоморфизм $\varphi: C \rightarrow M$ следующим образом: если $a \in C$, $a \in C_{a_i}$, то полагаем $\varphi(a) = \varphi_{a_i}(a)$. Очевидно, $\varphi(c_i) = a_i$, $i \in I$. Так как $C \subseteq A$, A - КСИ группа, то φ можно продолжить до эндоморфизма f группы A . Положим $x_j = f(e_j)$, $j = 1, 2, \dots$. Подставляя x_j в уравнение из $(*)$ под индексом i , получаем

$$\sum_j n_{ij} x_j = \sum_j n_{ij} f(e_j) = \sum_j f(n_{ij} e_j) = f(c_i) = \varphi(c_i) = a_i.$$

Таким образом, $(f(e_1), f(e_2), \dots)$ - решение системы $(*)$ в группе A . Следовательно, группа A алгебраически компактна. Согласно [1, следствие 40.4, с.199] A обладает прямым слагаемым, изоморфным аддитивной группе кольца Q_p^* целых p -адических чисел при некотором простом p . Тогда тип группы A содержит характеристику χ_0 , у которой на месте, соответствующем p , стоит 0, а на всех остальных местах - символ ∞ . В данном случае группа G имеет тот же тип, что и группа A , $G = G(\chi_0)$. Согласно [6, предложение 2] $G = G(\chi_0) \cong G(\chi) \cong A$. Следовательно, G - алгебраически компактная группа.

Если $A \in \mathcal{M}^0$, то из [2, теоремы 1,2] и из леммы 3 следует, что группа A является свободным конечнопородненным R -модулем, $A = R^n$, где R - ассоциативное кольцо с 1, в котором каждый элемент есть целое кратное обратимого элемента, аддитивная группа кольца $R^+ \in \mathcal{M}$ и если $n \geq 2$, то R есть p -сервантное подкольцо кольца Q_p^* при любом простом p со свойством $pA \neq A$ (что равносильно $pG \neq G$).

Согласно [6, предложение 2], $G \cong H \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong H \otimes_{\mathbb{Z}} R^n$, где H - группа ранга 1 того же типа, что и группа G , причем

$$R^+ \cong \text{Hom}(H, H \otimes_{\mathbb{Z}} R) \cong (H \otimes_{\mathbb{Z}} R)(\chi),$$

где χ - характеристика ненулевого элемента в H . Откуда нетрудно видеть, что так как $R^+ \in \mathcal{M}$, то $(H \otimes_{\mathbb{Z}} R) \in \mathcal{M}$.

Импликация $\Leftarrow$ следует из [2, теоремы 1,2] и леммы I.3I.5 и того, что алгебраически компактная группа является сервантно инъективной.

ЛЕММА I.5. Если G - КСИ (ВТ-) группа, A - группа ранга 1, то

1. $\text{Hom}(A, G)$ - КСИ (ВТ-) группа.
 2. Если для любого простого p , $pA = A$ влечет $pG = G$, то $A \otimes_{\mathbb{Z}} G$ - КСИ (ВТ-) группа.
 3. (Если группа G однородна, то $T = A \otimes_{\mathbb{Z}} G$ - ВТ группа).
- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\bar{M} \in H = \text{Hom}(A, G)$, $\psi \in \text{Hom}(\bar{M}, H)$.

Зафиксируем $0 \neq a \in A$ и положим $M = \langle \{f(a) \mid f \in \bar{M}\} \rangle_A$. Тогда $\bar{M} = \text{Hom}(A, M)$ и для любого $x \in M$ существуют $b_x \in A$ и $f_x \in \bar{M}$ такие, что $x = f_x(b_x)$. Положим

$$\varphi(x) = \psi(f_x)(b_x).$$

Пусть $x \in M$, $x = f_1(b_1) = f_2(b_2)$, $f_1, f_2 \in \bar{M}$, $b_1, b_2 \in A$. Тогда существуют целые m, n , $(m, n) = 1$, для которых $mb_1 = nb_2$ и $nf_1(\frac{b_1}{n}) = mf_2(\frac{b_2}{m})$, поэтому $nf_1 = mf_2$. Из того, что $n\psi(f_1) = m\psi(f_2)$, получаем $\psi(f_1)(b_1) = \psi(f_2)(b_2)$. То есть отображение φ задано корректно. Нетрудно видеть, что φ - гомоморфизм. Пусть $\bar{\varphi}$ - эндоморфизм G , продолжающий φ . Зададим эндоморфизм $\bar{\psi}$ группы H так: $\bar{\psi}(f) = \bar{\varphi} \cdot f$. Пусть $f \in \bar{M}$, тогда для любого $b \in A$, $\bar{\psi}(f)(b) = \bar{\varphi} \cdot f(b) = \varphi \cdot f(b) = \psi(f)(b)$. То есть $\bar{\psi}$ - продолжение ψ .

2) Докажем утверждение для ВТ группы G , во втором случае доказательство аналогично. Пусть $\bar{M} \in T$, $\chi(\bar{M}) = 1$,

$\psi \in \text{Hom}(\bar{M}, T)$. Пусть $0 \neq a \otimes g \in \bar{M}$, $a \in A$, $g \in G$.

Тогда $\bar{M} = A \otimes M$, где $M = \langle g \rangle_A$. Так как

$$\chi_\tau(a \otimes g) \leq \chi_\tau(\psi(a \otimes g)), \quad \chi(A) = 1,$$

то $\psi(a \otimes g) = a \otimes g'$, где $g' \in G$, $\chi(g) \leq \chi(g')$. Существует гомоморфизм M в G , отображающий g в g' . Пусть φ - эндоморфизм G , $\varphi(g) = g'$. Для любых $b \in A$: $x \in G$, положим $\bar{\psi}(b \otimes g) = b \otimes \varphi(x)$. Докажем, что $\bar{\psi}$ - эндоморфизм группы T . Любой элемент из T представим в виде $c \otimes x$, $c \in A$, $x \in G$. Пусть $t = c_1 \otimes x_1 + c_2 \otimes x_2$, $x_1, x_2 \in G$, $c_1, c_2 \in A$, $mc_1 = nc_2$, m, n - целые. Тогда $t = \frac{mc_1}{mn} = \frac{c_1}{n} \otimes (mx_1 + nx_2)$,

$$\bar{\psi}(t) = c_1 \otimes \varphi(x_1) + c_2 \otimes \varphi(x_2) = \bar{\psi}(c_1 \otimes x_1) + \bar{\psi}(c_2 \otimes x_2).$$

Так как $\bar{\psi}(a \otimes g) = a \otimes \varphi(g) = \psi(a \otimes g)$,

то $\bar{\psi}$ - продолжение ψ .

Доказательство 3 аналогично доказательству 2.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть группа $G = \prod_{i \in J} G_i$, где для любого простого p и любого $i, j \in J$, $pg_i + b_i$ влечет $pg_j = b_j$. Группа G К-С-И- (В-Т-) тогда и только тогда, когда каждая группа G_i К-С-И- (В-Т-), $i \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для квазисервантно инъективной группы G во втором случае доказательство аналогично. Необходимость следует из того, что прилеп слагаемое К-С-И- группы есть К-С-И- группа [2, лемма 2.3].

Достаточность. Пусть каждая группа G_i К-С-И-, $i \in J$, $H \in G$, $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$. Пусть π_i - естественная проекция G на G_i ,

$H_i = \pi_i(H)$, $\bar{H}_i = \langle H_i \rangle_{\pi_i}^G$. Для любого $i \in J$, зададим гомоморфизм $\varphi_i: H_i \rightarrow G_i$ следующим образом: для всякого $a \in H_i$, $\varphi_i(a) = \pi_i(\varphi(h))$, где $a = \pi_i(h)$, $h \in H$. Если $\pi_i(h) = 0$, $h \in H$, то $\varphi(h) \in \prod_{i \in J} G_i$ в силу вполне характеристичности подгруппы $\prod_{i \in J} G_i$ в группе G и $\pi_i(\varphi(h)) = 0$. То есть гомоморфизм φ_i задан корректно. Из условий на группы G_i следует, что $\chi_a(a) \leq \chi_a(\varphi_i(a))$ для всякого $a \in H_i$, $i \in J$. Согласно [2, лемма 1.9] φ_i можно продолжить до гомоморфизма $\psi_i: \bar{H}_i \rightarrow G_i$. По условию ψ_i продолжается до эндоморфизма z_i группы G_i . Пусть z эндоморфизм группы G , действующий на каждой группе G_i , как z_i . Докажем, что $z|_H = \varphi$. Пусть $h \in H$, тогда $\pi_i(z(h)) = z_i(\pi_i(h)) = \varphi_i(\pi_i(h)) = \pi_i(\varphi(h))$. Таким образом, G - КСИ группа.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $G = \prod_{i \in J} A_i$, $A_i = \prod_{j \in J_i} G_{ij}$, $G_{ij} \cong G_{ik}$ для любых $j, k \in J_i$ и $G_{ij} \in \mathcal{M}$ для любых $i \in J$, $j \in J_i$. Группа G КСИ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1 - 3:

1. для любого простого p , $pA_i \neq A_i$ влечет $pA_j = A_j$ для любых $i, j \in J$.
2. для любого $i \in J$, если $|J_i| > 1$, то G_{ij} - однородная связная группа для всякого $j \in J_i$, если $|J_i| \geq N_0$, то G_{ij} - аддитивная группа J_p кольца всех целых p -адических чисел при некотором простом p .
3. Группа G_{ij} КСИ при любых $i \in J$, $j \in J_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условий 1 - 3 следует из [2, теорема 2.1] того, что $\prod_n J_p$ - группа сервантно инъективная, и теоремы 1.6.

Необходимость. Из [2, теорема 2.1, лемма 2.3] следуют условия 2, 3, а также то, что если $|J_i| > 1$, то G_{ij} - однородная связная группа для любых $i \in J$, $j \in J_i$. Пусть $|J_i| \geq N_0$, группа A_i КСИ как прямое слагаемое группы G , поэтому $\text{Hom}(H, A_i)$ - КСИ, где H - сервантная подгруппа ранга 1 группы G_{ij} (лемма 1.5), $\text{Hom}(H, A_i) \cong A_i(\chi)$, где χ - характеристика ненулевого элемента в H [6, предложение 2],

$A_i(\chi) = \prod_{j \in J_i} G_{ij}(\chi)$, $G_{ij}(\chi) \in \mathcal{M}$ ввиду того, что $G_{ij} \in \mathcal{M}$. $A_i(\chi) \in \mathcal{M}^0$ - однородная КСИ-группа. Если бы $A_i(\chi) \in \mathcal{M}^0$, то [2, теорема 2.1] p -базисная подгруппа группы $A_i(\chi)$ имела бы конечный ранг при $pA_i \neq A_i$. С другой стороны, так как

$|J_i| \geq h_0$, то ясно, что ранг p -оазисной подгруппы группы $A_i(\chi)$ бесконечен. Таким образом, $A_i(\chi) \notin \mathcal{M}$ по теореме 1.4. $A_i(\chi)$ - алгебраически компактная группа. Так как $G_{ij}(\chi)$ - неразложимая группа, то $G_{ij}(\chi) \cong \mathbb{Z}_p$ при некотором простом p [1, следствие 40.4, с.155]. В данном случае тип группы G_{ij} совпадает с типом группы $G_{ij}(\chi)$, и если через χ_0 обозначить характеристику, у которой на месте, соответствующем указанному простому числу p , стоит 0, а на всех остальных местах - символ ∞ , то

$$G_{ij} = G_{ij}(\chi_0) \cong G_{ij}(\chi) \cong \mathbb{Z}_p$$

[6, предложение 4]. То есть $G_{ij} \cong \mathbb{Z}_p$. Теорема доказана.

Лемма 1.8. Пусть $G = \sum_{i \in I} \oplus G_i$, где G_i - редуцированная группа без кручения и $T(G_i)$ удовлетворяет условию максимальности, $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при любых $i \neq j$. Здесь $\Pi(A)$ - множество всех таких простых чисел p , что $pA \neq A$. Тогда $T(G)$ также удовлетворяет условию максимальности.

Доказательство. Обозначим через π_i каноническую проекцию G на G_i . Пусть

$$\tau(g_1) \leq \tau(g_2) \leq \dots \leq \tau(g_n) \leq \dots \quad (1)$$

возрастающая последовательность типов ненулевых элементов

$g_1, \dots, g_n, \dots$ группы G . Так как $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$, то выполнены условия: для любого $i \in I$, если $\pi_i(g_{n+1}) \neq 0$, то $\pi_i(g_n) \neq 0$; $\tau(\pi_i(g_{n+1})) \geq \tau(\pi_i(g_n))$.

Откуда следует, что $\{g_1, g_2, \dots\} \subseteq \sum_{i \in K} \oplus G_i$, $K = \{i \in I, \pi_i(g_1) \neq 0\}$, причём последовательности $\tau(\pi_i(g_1)) \leq \tau(\pi_i(g_2)) \leq \dots \leq \tau(\pi_i(g_n)) \leq \dots$ стабилизируются по условию для любого i . Так как K - конечное множество, то через конечное число шагов стабилизируется и последовательность (1).

Из леммы 1.8 и [10, теорема 5] вытекает

Следствие 1.9. Если к.с.и. группа $G = \sum_{i \in I} \oplus G_i$, где G_i - группы без кручения, и $T(G_i)$ удовлетворяет условию максимальности при любом i , то $T(G)$ также удовлетворяет условию максимальности.

В заключение отметим, что в работе [10, теорема 1] доказано, что каждая к.с.и. группа G без кручения, у которой $T(G)$ удовлетворяет условию максимальности, однозначно представима в виде прямой суммы однородных к.с.и. групп и к.с.и. групп из класса $\mathcal{M}$. Поэтому описание к.с.и. групп, разложимых в прямое произведение групп без кручения, множество типов элементов каждой из которых удовлетворяет условию максимальности, проводится аналогично теореме 1.7.

Если α и β -типы групп без кручения ранга I, то через $(\alpha + \beta)$ обозначается тип, содержащий сумму характеристики из типа α и характеристики из типа β .

Сформулируем предложения 2.1.-2.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Группа G квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда квазисервантно инъективна ее редуцированная часть.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Периодическая группа G квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда $G = D \oplus \sum_{p \in \Pi} R_p$, где D - делимая группа, R_p - редуцированная периодически полная p -группа для любого $p \in \Pi$ (Π - множество простых чисел).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть группа $A = D \oplus G$, где D - делимая, G - редуцированная группы и $G = \prod_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$, где G_α - прямое произведение групп без кручения ранга I типа α , Ω есть множество различных типов групп без кручения ранга I. Группа A квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда выполнены условия:

- i) ранг группы G_α конечен для каждого $\alpha \in \Omega$;
- ii) если $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$, то $(\alpha + \beta) \ni (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть группа $A = D \oplus G$, где D - делимая, а G - редуцированная сепарабельная группа без кручения. Группа A квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда G - вполне разложимая группа, $G = \sum_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$, где G_α - вполне разложимая однородная группа типа α , Ω - множество различных типов групп ранга I, и выполняются условия i), ii) предложения 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть группа A без кручения содержит такую подгруппу G , что $G \ni nA$ для целого $n \neq 0$ и G - сепарабельная группа (G - прямое произведение групп ранга I). Группа A квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда группа G квазисервантно инъективна и $A \cong G$.

Перейдем к доказательству результатов.

ЛЕММА 2.1. Прямое слагаемое квазисервантно инъективной группы является квазисервантно инъективной группой.

Доказательство. Допустим, что группа G квазисервантно инъективна и $G = A \oplus B$. Пусть $H \in A$, $\varphi \in \text{Hom}(H, A)$. Так как $H \in G$, то существует эндоморфизм ψ группы G такой, что $\psi|_H = \varphi$. Пусть π и ρ - соответственно проекция G на A и вложение A в G . Положим $\bar{\psi} = \pi \psi \rho$. Нетрудно видеть, что $\bar{\psi}$ - эндоморфизм группы A . $\bar{\psi}|_H = \varphi$.

Докажем ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Необходимость следует из леммы 2.1. Докажем достаточность. Пусть H - произвольная сервантная подгруппа группы G , $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$, $H = R' \oplus D'$, где R' - редуцированная, а D' - делимая группы. Тогда $G = R \oplus D$, где R - редуцированная, а D - делимая группы и [1, теорема 21.2, с.120] $R' \subseteq R$, $D' \subseteq D$. Пусть группа R - квазисервантно инъективна; так как группа D инъективна, то имеет место две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{i} & R \\ \pi_1 \varphi \downarrow & \dashrightarrow & \bar{\varphi}_1 \\ R' & & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & G \\ \pi_2 \varphi \downarrow & \dashrightarrow & \varphi_2 \\ D' & & \end{array}$$

где i, j - тождественные вложения, π_1, π_2 - проекции группы G на R и на D соответственно. Пусть эндоморфизм φ_2 группы G действует как 0 на D и как $\bar{\varphi}_1$ на R . Положим $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$. Для любого элемента $h \in H$, $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in R'$, $h_2 \in D'$ имеем

$$\psi(h) = \varphi_1(h) + \varphi_2(h) = \pi_1 \varphi(h_1) + \pi_2 \varphi(h_2) = \pi_1 \varphi(h_1) + \pi_2 \varphi(h_2) = \varphi(h).$$

Таким образом, группа G квазисервантно инъективна.

Докажем ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Предложение 2.1 сводит доказательство к редуцированному случаю. Непосредственно доказывается, что редуцированная периодическая группа R квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда квазисервантно инъективна каждая её p -компонента R_p .

Таким образом, предложение 2.2 будет доказано, если мы докажем, что редуцированная p -группа R_p квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда R_p - периодически полная группа.

Достаточность следует из [4, теорема 68.4, с.17].

Докажем необходимость. Пусть R_p - квазисервантно инъективная группа и B_1, B_2 - две её базисные подгруппы. Пусть φ - изоморфизм B_1 на B_2 . Так как $B_1 \subseteq R_p$, $B_2 \subseteq R_p$, то существуют $\rho, \psi \in \text{Hom}(R_p, R_p)$, $\rho|_{B_1} = \varphi$, $\psi|_{B_2} = \varphi^{-1}$. Из [1, предложение 34.1, с.171] следует, что $\rho \cdot \psi = 1_{R_p}$. Таким образом, ρ - автоморфизм группы R_p . Согласно [4, теорема 69.2, с.22], получаем, что R_p - периодически полная группа. Предложение 2.2 доказано.

В дальнейшем нам понадобятся леммы 2.2, 2.3, которые следуют из результатов § I, однако мы приводим ниже другие доказательства. В конце этих доказательств получатся замечания, позволяющие до-

казать предложение 2.5.

ЛЕММА 2.2. Прямая сумма (прямое произведение) бесконечного множества групп без кручения ранга I одного и того же типа $\alpha \neq (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$ не является квазисервантно инъективной группой.

Доказательство. В силу леммы 2.1 достаточно ограничиться случаем счетного множества прямых слагаемых (прямых сомножителей) ранга I. Пусть $G = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus A_i$ ($\bar{G} = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$), где A_i - группа ранга I типа $\alpha \neq (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$. Пусть p - такое простое число, что $pA_i \neq A_i$ и пусть $0 \neq a_i \in A_i$, a_i - элементы с одинаковыми характеристиками χ , с нулевой p -высотой в группах A_i , $i=1, 2, \dots$. Положим $b_i = a_i - p^i a_{i+1}$ и $H = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus \langle b_i \rangle$. Непосредственно проверяется, что $H \in G \in \bar{G}$. Так как элементы b_i имеют характеристику χ в группе G , то отображение $b_i \rightarrow a_i$, $i=1, 2, \dots$ продолжается до гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$. Допустим, что φ продолжается до эндоморфизма ψ группы G (группы $\bar{G}$). Тогда найдутся такие рациональные числа $x_{i\kappa}$, $i, \kappa=1, 2, \dots$, что

$$\psi(a_i) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} x_{i\kappa} a_{\kappa}, \quad i=1, 2, \dots,$$

где почти все $x_{i\kappa}$, за исключением быть может конечного числа, для фиксированного i равны 0.

$(\psi(a_i) = (x_{i1}a_1, x_{i2}a_2, \dots, x_{i\kappa}a_{\kappa}, \dots), \quad i=1, 2, \dots)$. Так как $\varphi_p^A(a_i) = 0$, $i=1, 2, \dots$, то все числа $x_{i\kappa}$ принадлежат кольцу Q_p всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p . Из того, что $\psi|_H = \varphi$, следует, что

$$\begin{aligned} \psi(b_i) &= \psi(a_i) - p^i \psi(a_{i+1}) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (x_{i\kappa} - p^i x_{i+1, \kappa}) a_{\kappa} = \varphi(b_i) = a_i; \\ (\psi(b_i) &= ((x_{i1} - p^i x_{i+1, 1})a_1, (x_{i2} - p^i x_{i+1, 2})a_2, \dots, (x_{i\kappa} - p^i x_{i+1, \kappa})a_{\kappa}, \dots) = a_i), \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда получим, что числа $x_{i\kappa}$ удовлетворяют системе уравнений

$$x_{i1} - p^i x_{i+1, 1} = 1, \quad i=1, 2, \dots \quad (*)$$

Пусть $x_{i1} = \frac{n}{m \cdot p^k}$, где n, m - целые числа, $(m, p) = 1$. Из первого уравнения (*) находим $x_{21} = \frac{n-m}{p \cdot m}$, представляем это значение x_{21} во второе уравнение и т.д. Из $(k-1)$ -го уравнения найдем

$$x_{k1} = \frac{n - (1+p+p^2+\dots+p^{k-2})m}{m \cdot p \cdot p^2 \cdot \dots \cdot p^k} = \frac{n - m(1 + \sum_{i=1}^{k-2} p^i)}{m \cdot p^{\frac{k(k+1)}{2}}} = \frac{M_k}{m \cdot p^{\frac{k(k+1)}{2}}}.$$

Если $x_{k1} = 0$, то из k -го уравнения (*) найдем $x_{k+1, 1} = -\frac{1}{p^k}$. Это противоречит тому, что $x_{k+1, 1} \in Q_p$. Таким образом, $x_{k1} \neq 0$, $k=1, 2, \dots$. Так как $x_{k1} \in Q_p$, то $0 \neq M_k$ должно делиться на цело на $p^{\frac{k(k+1)}{2}}$, $k=1, 2, \dots$. Пусть τ - такое натуральное

число, что $p^2 > 1/\pi_1/1n/$. Тогда из соотношения

$$\frac{|M_K|}{p^{\frac{K(K+1)}{2}}} < \frac{p^2 \cdot K \cdot p^{\frac{K(K-1)}{2}}}{p^{\frac{K(K+1)}{2}}} = \frac{K p^2}{p^K}$$

следует, что M_K не может делиться на $p^{\frac{K(K+1)}{2}}$, если K достаточно велико. Таким образом, система (*) неразрешима в кольце Q_p . Следовательно, гомоморфизм φ нельзя продолжить до эндоморфизма группы G (группы $\bar{G}$).

Заметим, что совершенно аналогично можно доказать, что гомоморфизм $S \cdot \varphi$ нельзя продолжить до эндоморфизма группы G (группы $\bar{G}$), где $0 \neq S$ - произвольное натуральное число.

ЛЕММА 2.3. Пусть редуцированная группа $G = A \oplus B$, где A, B - абелевы группы без кручения ранга 1 типов α и β соответственно, $\alpha \neq \beta$. Если группа G квазисервантно инъективна, то $(\alpha + \beta) \ni (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, но $(\alpha + \beta) \not\ni (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$. Тогда существует такое простое число p , что $pA \neq A, pB \neq B$. Так как $\alpha \neq \beta$, то, не нарушая общности доказательства, можно считать, что либо $\alpha < \beta$, либо α и β - несравнимые типы. Существуют такие элементы $0 \neq a, \bar{a} \in A, b \in B$, что $k_p^{\bar{a}}(a) > k_p^{\bar{a}}(b) = k_p^{\bar{a}}(\bar{a})$, $k_q^{\bar{a}}(a) \leq k_q^{\bar{a}}(\bar{a})$ для всех простых чисел $q \neq p$. Тогда отображение $(a+b) \rightarrow \bar{a}$ продолжается до гомоморфизма φ из $\langle a+b \rangle_p^G$ в A . Пусть φ индуцируется эндоморфизмом ψ группы G . Так как B - вполне характеристическая подгруппа группы G , то $\psi(b) = b_1 \in B$. Пусть $\psi(a) = a_1 + b_1$, где $a_1 \in A, b_1 \in B$, тогда $\varphi(a+b) = a_1 + b_1 + b_1 = \varphi(a+b) = \bar{a}$, откуда $b_1 = -b_1, a_1 = \bar{a}$. Следовательно, $\psi(a) = \bar{a} + b_1$ и $k_p^{\bar{a}}(\psi(a)) \leq k_p^{\bar{a}}(\bar{a}) < k_p^{\bar{a}}(a)$. Последнее неравенство противоречит тому, что гомоморфизм φ не понижает высоты элементов.

Заметим, что если $pA \neq A, pB \neq B$, то для любого натурального числа $s \neq 0$ можно подобрать элементы $a, \bar{a}, b$ из доказательства леммы 2.3 так, что $k_p^{\bar{a}}(a) > k_p^{\bar{a}}(b) + s = k_p^{\bar{a}}(\bar{a}) + s$, где $s = p^2 \cdot k, (k, p) = 1$ и $k_q^{\bar{a}}(a) \leq k_q^{\bar{a}}(\bar{a})$ для всех простых $q \neq p$. Тогда совершенно аналогично доказывается, что ни гомоморфизм φ , ни $S \cdot \varphi$ не продолжается до эндоморфизма группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 следует из предложения 2.1 и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть дана редуцированная группа $G = \sum_{\alpha \in \Omega} G_{\alpha}$

($G = \prod_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$), где G_α - прямая сумма (прямое произведение) групп без кручения ранга I типа α , Ω - множество различных типов групп без кручения ранга I. Группа G квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда выполнены условия:

i) ранг G_α конечен для каждого $\alpha \in \Omega$;

ii) если $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$, то $(\alpha + \beta) \ni (\infty, \dots, \infty, \dots)$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из лемм 2.1-2.3. Докажем достаточность. Пусть указанная в теореме группа G удовлетворяет условиям i), ii), $\forall \psi \in \text{Hom}(H, G)$. Докажем, что ψ продолжается до эндоморфизма группы G . Через π_α обозначим каноническую проекцию G на прямое слагаемое (прямой сомножитель) G_α . Для любого $g \in G$, положим $g_\alpha = \pi_\alpha(g)$. Зафиксируем тип $\alpha_0 \in \Omega$. Пусть $a \neq 0$, $a \in H$. Если p - такое простое число, что $pG_{\alpha_0} \neq G_{\alpha_0}$, то согласно ii) $pG_\alpha = G_\alpha$ для любого $\alpha \in \Omega$, $\alpha \neq \alpha_0$. Поэтому

$$h_p^{G_{\alpha_0}}(a_{\alpha_0}) = h_p^{G_{\alpha_0}}(a) \leq h_p^{G_{\alpha_0}}(\psi(a)) = h_p^{G_{\alpha_0}}((\psi(a))_{\alpha_0}).$$

Таким образом, для любого простого числа p , любого типа $\alpha \in \Omega$ и любого $a \in H$ имеет место соотношение

$$h_p^{G_\alpha}(a_\alpha) \leq h_p^{G_\alpha}((\psi(a))_\alpha). \quad (**)$$

Пусть $H_\alpha = \langle \pi_\alpha(H) \rangle_{G_\alpha}$, $\alpha \in \Omega$. Для любого элемента $v \in H_\alpha$ существует такое целое число n , что $nv \in \pi_\alpha(H)$, то есть $nv = a_\alpha$ для некоторого $a \in H$. Из (**) получаем, что элемент $(\psi(a))_\alpha$ делится на n в группе G_α . Положим $\gamma_\alpha(v) = \frac{1}{n}(\psi(a))_\alpha$. Так как G - группа без кручения и ψ - гомоморфизм, то нетрудно видеть, что отображение $\gamma_\alpha : H_\alpha \rightarrow G_\alpha$ определено однозначно и является гомоморфизмом для каждого $\alpha \in \Omega$. Согласно i), ранг G_α конечен для каждого $\alpha \in \Omega$. Следовательно, H_α выделяется в G_α прямым слагаемым [4, лемма 86.8, с. II5] и поэтому γ_α продолжается до эндоморфизма $\hat{\gamma}_\alpha$ группы G_α . Пусть $\hat{\gamma}$ - эндоморфизм группы G , который на каждой группе G_α , $\alpha \in \Omega$ действует как $\hat{\gamma}_\alpha$. Согласно определению $\hat{\gamma}$ индуцирует на H гомоморфизм φ . Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 следует из предложения 2.1 и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Для редуцированной сепарабельной группы G без кручения следующие три условия а), б), в) эквивалентны:

а) группа G квазисервантно инъективна;

б) если группа G имеет прямое $A \oplus B$, где A, B группы ранга I типов α и β , $\alpha \neq \beta$, то $(\alpha + \beta) \in (\infty, \dots, \infty, \dots)$, и если группа G имеет прямое слагаемое A_i ранга I типа α , то $G = G_\alpha \oplus \bar{G}_\alpha$, где $A_i \in G_\alpha$, G_α - вполне разложимая однородная типа α группа конечного ранга, а группа $\bar{G}_\alpha$ не имеет прямых слагаемых ранга I типа α ;

с) G - вполне разложимая группа, $G = \sum_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$, где Ω - множество различных типов групп без кручения ранга I, G_α - вполне разложимая однородная группа типа α , и выполнены условия i), ii) предложения 2.3.

Докажем импликацию (a) $\Rightarrow$ (б).

Первая часть условия б) следует из лемм 2.1, 2.3. Допустим, что существует такой тип α , что $G = A_1 \oplus B_1$, $B_1 = A_2 \oplus B_2, \dots$, $B_i = A_i \oplus B_{i+1}, \dots, i = 1, 2, \dots$, где A_i - группа ранга I типа α . Положим $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Группа A является объединением возрастающей последовательности прямых слагаемых группы G , поэтому $A \in G$. Из доказательства леммы 2.2 следует, что существует такая подгруппа $H \in A$ и гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}(H, A_i)$, что φ не продолжается до эндоморфизма группы A . Так как A_i - прямое слагаемое группы G , то нетрудно видеть, что φ не продолжается до эндоморфизма группы G . Это противоречит условию а).

Докажем импликацию (б) $\Rightarrow$ (с). Пусть Ω - множество различных типов прямых слагаемых ранга I группы G . Пусть $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$. Тогда $G = A \oplus G_1 = B \oplus G_2$, где A, B - группы ранга I типов α и β . Так как $\alpha \neq \beta$, то допустим, что либо $\beta > \alpha$, либо α и β - несравнимые типы. Тогда нетрудно видеть, что $B \subseteq G_1$ и поэтому $G_1 = B \oplus G_3$. Следовательно, $G = A \oplus B \oplus G_3$. Из условия б) следует, что $(\alpha + \beta) \in (\infty, \dots, \infty, \dots)$ (***) для любых различных типов $\alpha, \beta \in \Omega$. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $G = G_\alpha^1 \oplus \bar{G}_\alpha^1 = G_\alpha^2 \oplus \bar{G}_\alpha^2$, где G_α^1, G_α^2 - вполне разложимые однородные группы типа α , а группы $\bar{G}_\alpha^1$ и $\bar{G}_\alpha^2$ не имеют прямых слагаемых ранга I типа α . Используя (***) , нетрудно получить, что $G_\alpha^1 \subseteq G_\alpha^2, G_\alpha^2 \subseteq G_\alpha^1, \bar{G}_\alpha^1 \subseteq \bar{G}_\alpha^2, \bar{G}_\alpha^2 \subseteq \bar{G}_\alpha^1$, то есть $\bar{G}_\alpha^1 = \bar{G}_\alpha^2 = \bar{G}_\alpha$, $G_\alpha^1 = G_\alpha^2 = G_\alpha$, $G = G_\alpha \oplus \bar{G}_\alpha$. Таким образом, группы G_α из условия б) определены для каждого типа α однозначно для данной группы G . Нетрудно видеть, что G порождается группами G_α , $\alpha \in \Omega$. Каждая группа G_α счетна. Из (***) следует, что множество Ω счетно. Таким об-

разом, G - счетная сепарабельная группа. Из [7, с. 185] следует, что группа G вполне разложима. Оставшаяся часть условия $c)$ следует теперь непосредственно из вполне разложимости группы G и условия $b)$.

Импликация $c) \Rightarrow a)$ следует из теоремы 2.1. Теорема доказана.

Докажем ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Согласно предложению 2.1, можно ограничиться случаем редуцированной группы A . Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть группа A квазисервантно инъективна, но группа G не является квазисервантно инъективной. Тогда из условия $b)$ теоремы 2.2 (из предложения 2.3) и из замечаний в конце доказательств лемм 2.2, 2.3 следует, что существует такой гомоморфизм φ из некоторой сервантной подгруппы H группы G в группу G , что ни φ , ни $\pi^2\varphi$ не продолжается до эндоморфизма группы G . Пусть $H = \langle H_* \rangle$. Так как $H \cong \pi H$, то гомоморфизм $\pi\varphi$ продолжается до гомоморфизма $\psi \in \text{Hom}(H, A)$. Пусть π - эндоморфизм группы A , индуцирующий ψ на H . Так как $(\pi\pi)(G) = \pi(\pi(G)) \subseteq G$, то гомоморфизм $\pi\pi$ индуцирует эндоморфизм группы G , который на H действует как $\pi^2\varphi$. Получим противоречие. Следовательно, группа G является квазисервантно инъективной.

Если группа G сепарабельная, то она удовлетворяет условию $c)$ теоремы 2.2. Тогда, согласно [3, теорема 3], $G \cong A$, и в этом случае предложение доказано.

Если G разлагается в прямое произведение групп ранга 1, то она удовлетворяет условиям $i)$, $ii)$ предложения 2.3. Так как число π имеет конечное число простых делителей, согласно $ii)$ получим, что почти для всех $\alpha \in \mathcal{S}$, за исключением быть может конечного числа, $\pi G_\alpha = G_\alpha$. Поэтому $G = G_1 \oplus G_2$, где G_1 - прямая сумма всех групп G_α , $\alpha \in \mathcal{S}$, для которых $\pi G_\alpha \neq G_\alpha$, а G_2 - прямое произведение всех остальных групп G_α . Согласно сделанному замечанию и условию $i)$, G_1 - группа конечного ранга. Так как $G \cong \pi A \cong \pi G$, то $G_1 \oplus G_2 \cong \pi A \cong \pi G_1 \oplus \pi G_2$. Следовательно, $\pi A = A_1 \oplus G_2$ для некоторой группы A_1 . Так как $(\pi G) \cap G_2 = 0$, то непосредственно проверяется, что проекция π_1 группы πA на A_1 действует на πG_1 как изоморфизм. Аналогично проекция π_2 группы G на G_1 действует на группе A_1 как изоморфизм. Так как $\pi G_1 \cong G_1$, то получаем, что $G_1 \cong \pi_2(A_1) \cong \pi_2 \pi_1(\pi G_1)$, где $\pi_2(A_1) \cong A_1$,

$\mathcal{K}_2 \mathcal{K}_1(nG_1) \cong nG_1 \cong G_1$. Из последних соотношений ясно, согласно [8, теорема 2.4], что $\kappa G_1 \subseteq \mathcal{K}_2(A_1)$ для некоторого натурального $\kappa \neq 0$. Группа G_1 удовлетворяет условию ii) теорем 2.2 и $G_1 \cong \mathcal{K}_2(A_1) \cong \kappa G_1$, поэтому [3, теорема 3] $G_1 \cong \mathcal{K}_2(A_1) \cong A_1$. Таким образом, $nA = A_1 \oplus G_2 \cong G_1 \oplus G_2 = G$, следовательно, $A \cong G$.

Предложение доказано.

Замечание. Редуцированная квазисервантно инъективная вполне разложимая абелева группа G без кручения обладает двумя интересными свойствами:

1) для любой абелевой группы A из того, что $A \cong G_1$ и $G \cong A_1$, где $G \supseteq G_1 \supseteq nG$, $A \supseteq A_1 \supseteq \kappa A$, κ, n - ненулевые целые числа, следует $A \cong G$.

2) для любой вполне разложимой абелевой группы A из того, что $A \cong G_1$ и $G \cong A_1$, где A_1 и G_1 - подгруппы групп A и G соответственно, следует $A \cong G$.

Доказательства свойств 1 и 2 следует непосредственно из предложения 2.4 [3, теорема 3] и [9, теорема 1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы. Т. I. М., 1974.
2. Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные и транзитивные абелевы группы без кручения. Томск, Изд-во ТГУ, 1977, 45 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 19 июля 1977 г., № 2942-77 Деп.
3. Bican L. On isomorphism of quasi-isomorphic torsion free abelian groups. - "Comm. Math. Univ. Carolinae," 1968, 9, 109-119.
4. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М., "Мир", 1977.
5. Dubois D.W. Cokernive groups and p-adic integers. - "Publ. Math. Debrecen," 1965, 12, 51-58.
6. Warfield R.B. Homomorphisms and duality for torsion free abelian groups. - "Math. Z.", 1968, 107, 189-200.
7. Курош А.Г. Теория групп. М.; "Наука", 1967.
8. Jonsson B. On direct decomposition of torsion-free abelian groups. - "Math. Scandinavica," 1953, v. 7, p 361-371.
9. Добрусин Ю.Б. Корректные и сервантно-корректные абелевы

группы без кручения. - Материалы пятой научной конференции по математике и механике, Томск, 1975, т. I, с. 76.

10. Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения. Томск, Изд-во ТГУ, 1977, 14 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 10 ноября 1977 г., № 4206-77 Деп.

СЕРВАНТНО КОРРЕКТНЫЕ И РЕГУЛЯРНО КОРРЕКТНЫЕ
ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ
КРУЧЕНИЯ

Ю.Б.Добрусин, А.В.Иванов

Введение и основные обозначения

Согласно [1] абелевы группы A и B называются сервантно эквивалентными (регулярно эквивалентными), если каждая из них изоморфна сервантной (регулярной) подгруппе другой. В [2] утверждается, что сервантная эквивалентность любых вполне разложимых абелевых групп A и B влечет их изоморфизм. Однако это утверждение не верно для случая, когда A и B - группы без кручения [1, с.79], [3].

В данной работе изучается вопрос о том, в каких случаях из сервантной (регулярной) эквивалентности двух вполне разложимых абелевых групп без кручения следует их изоморфизм. Более точно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть $\mathcal{U}$ - произвольный класс абелевых групп и $A \in \mathcal{U}$. Назовем группу A сервантно (регулярно) корректной в классе $\mathcal{U}$, если для любой $B \in \mathcal{U}$ сервантная (регулярная) эквивалентность групп A и B влечет их изоморфизм.

Пусть $\mathcal{L}$ - класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения.

В работе изучается строение и свойства сервантно (регулярно) корректных групп в классе $\mathcal{L}$.

В § I (теоремы 1,2) устанавливается связь между свойством группы $A \in \mathcal{L}$ быть сервантно (регулярно) корректной в $\mathcal{L}$ и свойствами типов групп ранга I быть $\mathcal{M}_A$ - сервантными (регулярными) (определение 2).

В § 2 изучается зависимость сервантной (регулярной) корректности группы A в $\mathcal{L}$ от структуры множества $T(A)$ типов прямых слагаемых ранга I группы A , от наличия $\mathcal{L}$ цепей типов и χ цепей характеристик над $T(A)$ (определения 3,6). На основании результатов этого параграфа (лемма 8, следствие 2, замечание 4) можно сделать вывод, что строение сервантно корректных групп в $\mathcal{L}$ в общем случае не может быть описано, если следовать изложенному в работе подходу, на языке типов абелевых групп без кручения ранга I и рангов типов (то есть на языке инвариантов этого класса групп). Строение этих групп, по-видимому, (лемма 8, замечание 4) можно описать, используя язык характеристик элементов групп без кручения.

В § 3 описывается строение регулярно (сервантно) корректных групп в $\mathcal{L}$. Теорема 3 во многих случаях позволяет описать строение регулярно корректных групп в $\mathcal{L}$, так как все требования этой теоремы, кроме условия $(i)_2$, формулируются на языке инвариантов групп из класса $\mathcal{L}$. При дополнительных условиях на группу A доказывается (теоремы 4,5), что группа A регулярно корректна в $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда она сервантно корректна в $\mathcal{L}$, найдены необходимые и достаточные условия для сервантной корректности таких групп A в $\mathcal{L}$. Есть примеры групп, являющихся сервантно корректными в $\mathcal{L}$, но не являющихся регулярно корректными в $\mathcal{L}$ (пример из замечания 4). Основные результаты данной работы получены авторами независимо друг от друга.

Авторы выражают благодарность А.П.Мишиной и И.Х.Беккеру за руководство и постоянное внимание к данной работе.

Основные обозначения и терминология работы стандартны и взяты из [4]. Обозначим через Ω множество всех различных типов абелевых групп без кручения ранга I. Всюду дальше для $A \in \mathcal{L}$ подразумевается, что зафиксировано разложение $A = \sum_{\beta \in T(A)} A_{\beta}$ группы A в прямую сумму групп A_{β} ранга I типа β . Таким образом, $T(A)$ - множество типов всех прямых слагаемых ранга I фиксированного разложения группы A . Пусть $\beta_1, \beta_2 \in T(A)$, тот факт, что типы групп A_{β_1} и A_{β_2} равны, договоримся обозначать $\beta_1 \stackrel{\Omega}{=} \beta_2$. Очевидно, что возможна ситуация $\beta_1 \neq \beta_2$, но $\beta_1 \stackrel{\Omega}{=} \beta_2$, то есть A_{β_1} и A_{β_2} - различные прямые слагаемые с равными типами.

Если тип $\beta \in T(A)$ равен типу $\alpha \in \Omega$, то условимся писать $\beta \stackrel{\Omega}{=} \alpha$. Если $A' \in \mathcal{A}$, $A' = \sum_{\beta \in T'} \oplus A'_\beta$, где $T' \subseteq T(A)$, то полагаем $T(A') = T'$. Через $\Omega(A)$ обозначим множество всех различных типов прямых слагаемых ранга I группы A . Для группы $A \in \mathcal{L}$, типов $\alpha \in \Omega(A)$ и $\beta \in \Omega$ положим

$$A^{(\alpha)} = \sum_{\beta \in T(A), \beta \stackrel{\Omega}{=} \alpha} \oplus A_\beta, \quad A(\beta) = \sum_{\gamma \in \Omega(A), \gamma \neq \beta} \oplus A_\gamma, \quad A^*(\beta) = \sum_{\gamma \in \Omega(A), \gamma \neq \beta} \oplus A^{(\gamma)}.$$

Через $z(A)$ обозначим ранг группы A . Если $A \in \mathcal{L}$, $\beta \in T(A)$, $\alpha \in \Omega(A)$ и $\beta \stackrel{\Omega}{=} \alpha$, то полагаем $z_A(\alpha) = z_A(\beta) = z(A^{(\alpha)})$. Для $A \in \mathcal{L}$, $\gamma \in \Omega$ полагаем $z_A(\gamma) = z(A^{(\gamma)})$, если $\gamma \in \Omega(A)$, и $z_A(\gamma) = 0$, если $\gamma \notin \Omega(A)$. Если B является сервантной (регулярной) подгруппой группы A , то пишем $A \supset B$ ($A \supset B$). Пусть α -элемент группы $A \in \mathcal{L}$, тогда через $\langle \alpha \rangle_A^*$ обозначается сервантная подгруппа, порожденная элементом α в группе A . Если $\alpha \in \Omega$, то через $\mathcal{Q}_\alpha$ обозначим абелеву группу без кручения ранга I типа α , $\aleph$ -мощность континуума. Некоторые этапы нескольких доказательств изложены не очень подробно, так как исчерпывающее их изложение сделало бы работу еще более громоздкой.

§ I. Сервантно (регулярно) корректные группы и $\mathcal{M}$ -сервантные (регулярные) типы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $A \in \mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ - кардинальное число. Тип $\alpha \in \Omega$ будем называть $\mathcal{M}_A$ -сервантным ($\mathcal{M}_A$ -регулярным), если группа $\bigoplus_{\beta \in \Omega} \mathcal{Q}_\beta \oplus A^*(\alpha)$ изоморфна сервантной (регулярной) подгруппе группы $A^*(\alpha)$.

Следующая теорема сводит вопрос о том, когда группа является сервантно (регулярно) корректной в классе $\mathcal{L}$, к вопросу о том, какие типы являются $\mathcal{M}_A$ -сервантными ($\mathcal{M}_A$ -регулярными).

ТЕОРЕМА I. Группа $A \in \mathcal{L}$ сервантно корректна (регулярно корректна) в $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

(*) если тип $\alpha \in \Omega$ является $\mathcal{M}_A$ -сервантным ($\mathcal{M}_A$ -регулярным), то $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть условие (*) не выполнено. Тогда для некоторого $\mathcal{M}_A$ -сервантного ($\mathcal{M}_A$ -регу-

лярного) типа $\alpha \in \Omega$ имеет место $z_A(\alpha) \leq m$. Если $z_A(\alpha) = 0$, то группы $A \oplus Q_\alpha$ и A сервантно (регулярно) эквивалентны, но не изоморфны. Если $z_A(\alpha) > 0$, то группы A и $B = \sum_{\substack{\beta \in \Omega, \\ \beta \in \Omega(A)}} A^{(\beta)}$ сервантно (регулярно) эквивалентны, но не изоморфны.

Обратно, пусть условие $(*)$ выполнено, и пусть $A, B \in \mathcal{L}$ сервантно (регулярно) эквивалентны, $\varphi: A \rightarrow B$ и $\psi: B \rightarrow A$ - сервантные (регулярные) вложения. Предположим, что для некоторого типа $\alpha \in \Omega$ имеет место $z_A(\alpha) > z_B(\alpha)$. Пусть $\pi: B \rightarrow B^{(\alpha)}$ - проекция. Тогда $(\pi\varphi|A^{(\alpha)})$ отображает $A^{(\alpha)}$ в $B^{(\alpha)}$, а так как $z_A(\alpha) > z_B(\alpha)$, то $\pi\varphi|A^{(\alpha)}$ имеет ненулевое ядро. Пусть $0 \neq x \in \text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)})$. Так как $\varphi(x) \in B^{(\alpha)}$ и $\pi\varphi(x) = 0$, то $\varphi(x) \in B^*(\alpha)$. Откуда $\varphi(\langle x \rangle^A) \subseteq B^*(\alpha)$. Поскольку $\varphi(A^*(\alpha)) \subseteq B^*(\alpha)$, то $\varphi(A^*(\alpha) \oplus \langle x \rangle^A) \subseteq B^*(\alpha)$.

Кроме того, $\varphi(B^*(\alpha)) \subseteq A^*(\alpha)$, откуда

$$\varphi\varphi(A^*(\alpha) \oplus \langle x \rangle^A) \subseteq A^*(\alpha). \quad (I)$$

При этом $A \supseteq A^*(\alpha) \oplus \langle x \rangle^A$, а так как $\varphi\varphi$ - сервантное вложение (регулярное вложение), то в (I) левая часть содержится в правой в качестве сервантной (регулярной) подгруппы. Так как $x \in A^{(\alpha)}$, то $\langle x \rangle^A \cong Q_\alpha$. Следовательно, тип α является

1_A -сервантным (1_A -регулярным). Поэтому α является n_A -сервантным (n_A -регулярным) при любом натуральном n . Поэтому в силу условия $(*)$ имеем $z_A(\alpha) \geq \mathcal{H}_0$. Из того, что $z_A(\alpha) \geq \mathcal{H}_0$, получаем $z(\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)})) = z(A^{(\alpha)})$. Так как $\text{Im}(\pi\varphi|A^{(\alpha)}) \subseteq B$ группа без кручения, то $A^{(\alpha)} \supseteq \text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)})$. Поэтому так как сервантная подгруппа однородной вполне разложимой группы сама является однородной вполне разложимой группой, то $\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)})$ - вполне разложимая группа типа α , откуда

$$\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)}) \cong A^{(\alpha)}.$$

Исно, что $\varphi((\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)}) \oplus A^*(\alpha)) \subseteq B^*(\alpha)$, причем так как $\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)}) \oplus A^*(\alpha) \subseteq A$ и φ - сервантное (регулярное) вложение, то $\varphi(\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)}) \oplus A^*(\alpha))$ - сервантная (регулярная) подгруппа в $B^*(\alpha)$. Поскольку $\varphi(B^*(\alpha)) \subseteq A^*(\alpha)$, то $\varphi\varphi$ - сервантное (регулярное) вложение

$$\text{Ker}(\pi\varphi|A^{(\alpha)}) \oplus A^*(\alpha) \cong A^{(\alpha)} \oplus A^*(\alpha) \text{ в } A^*(\alpha).$$

Это означает, что тип α является $(z_A(\alpha))_A$ — сервантным (регулярным), что противоречит условию (*). Итак, $z_A(\alpha) > z_B(\alpha)$ невозможно. Если $z_A(\alpha) < z_B(\alpha)$, то, как и выше, получим, что $B^*(\alpha) \subset Q_\alpha \oplus B^*(\alpha)$, где $\subset$ обозначает "изоморфно сервантной (регулярной) подгруппе". Отсюда

$$A^*(\alpha) \oplus Q_\alpha \subset B^*(\alpha) \oplus Q_\alpha \subset B^*(\alpha) \subset A^*(\alpha).$$

Поэтому тип α является 1_A -сервантным (регулярным), откуда из условия (*) $z_A(\alpha) \geq \aleph_0$, значит, $z_B(\alpha) > \aleph_0$ и, как и выше, получаем, что $B^*(\alpha) \subset B(\alpha)$. Поэтому

$$A^*(\alpha) \subset B^*(\alpha) \subset B(\alpha) \subset A(\alpha).$$

Это означает, что тип α является $(z_A(\alpha))_A$ — сервантным (регулярным), а это противоречит условию (*).

Таким образом $z_A(\alpha) = z_B(\alpha)$ при всех $\alpha \in \Omega$. Отсюда $A \cong B$. Теорема доказана.

ЛЕММА 1. Пусть абелевы группы A, B, C таковы, что $A \cong B \oplus C$, $A \cap B = 0$. Тогда A изоморфна подгруппе группы C .

Доказательство. Нетрудно видеть, что группа A изоморфна своей проекции на группу C .

ЛЕММА 2. Пусть $m \geq \aleph_0$ и $\alpha \in \Omega$ является m -сервантным (регулярным). Тогда существует сервантное (регулярное) вложение

$\varphi: \sum_m \oplus Q_\alpha^i \oplus A^*(\alpha) \longrightarrow A^*(\alpha)$ и
разложение $A^*(\alpha) = \sum_m \oplus A^i \oplus A_0$, где $\varphi(Q_\alpha^i) \subseteq A^i$
и A^i — группы конечного ранга.

Доказательство. Пусть $A^*(\alpha) \subset \sum_m \oplus Q_\alpha \oplus \bar{A}^*(\alpha)$, где $\bar{A}^*(\alpha) \cong A^*(\alpha)$. Пусть $A^*(\alpha) = \sum_{j \in J} \oplus A_j$ — разложение в прямую сумму групп ранга 1. Обозначим через $\{Q_\alpha^i | i \in I\}$ множество всех прямых слагаемых ранга 1 группы $\sum_m \oplus Q_\alpha$, ясно, что $|I| \geq m$. Для любой группы Q_α^i найдется такое конечное множество $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathcal{Y}$, что $Q_\alpha^i \subseteq \sum_{j \in \mathcal{Y}_i} \oplus A_j$. Пусть $\mathcal{F}$ — максимальное относительно включения множество, элементами которого являются попарно непересекающиеся множества $\mathcal{Y}_i$. Тогда $|\mathcal{F}| \geq m$. Действительно, если $|\mathcal{F}| < m$, то $A^*(\alpha) = A_1 \oplus A_0$, где $A_1 = \sum_{j \in \mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_i \in \mathcal{F}} \oplus A_j$. Так как $|\mathcal{Y}_i| < \aleph_0$, $m \geq \aleph_0$, то $|A_1| < m$.

Согласно лемме 1, $(\sum_{\mathcal{F}} \oplus Q_{\alpha}) \cap A_0 \neq 0$. Это противоречит максимальнойности множества $\mathcal{F}$.

Обозначим $A^i = \sum_{\mathcal{F}} \oplus A_j$ для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$. Тогда

$$A^*(\alpha) = \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}} \oplus A^i \oplus A_0, \quad (\sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}} \oplus A^i) \hookrightarrow Q_{\alpha}^i, \quad |\mathcal{F}| = m.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть η - мощность множества типов $\beta \in \Omega(A)$ таких, что $z_A(\beta) < \aleph_0$ и пусть $\eta > \eta$, $\eta \geq \aleph_0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. α является η_A -сервантным.
2. α является η_A -регулярным.
3. Существует разложение

$$A^*(\alpha) = \sum_{\eta} \oplus A_i \oplus A_0, \quad A_i = \sum_{\mathcal{F}} \oplus Q_{\alpha_{ij}},$$

$$z(A_i) < \aleph_0, \quad z_A(\alpha_{ij}) \geq \aleph_0,$$

причем при всех i имеет место $\alpha = \bigcap \alpha_{ij}$.

Доказательство. (1) $\implies$ (2) очевидно.

(2) $\implies$ (3). Пусть тип α является η_A -регулярным. Тогда в силу леммы 2 существует регулярное вложение

$$\varphi: \sum_{\eta} \oplus Q_{\alpha}^i \oplus A^*(\alpha) \longrightarrow A^*(\alpha)$$

и разложение $A^*(\alpha) = \sum_{\eta} \oplus A^i \oplus A_0$, $z(A^i) < \aleph_0$, и

$\varphi(Q_{\alpha}^i) \subseteq A^i$. Запишем

$$\sum_{\eta} \oplus A^i = \sum_{i \in I_1} \oplus A^i \oplus \sum_{i \in I_2} \oplus A^i,$$

где $\sum_{i \in I_1} \oplus A^i$ - сумма тех A^i , в разложении которых имеются слагаемые Q_{β} из фиксированного разложения A такие, что $z_A(\beta) < \aleph_0$. Тогда, очевидно, $|I_1| < \eta$, откуда $|I_2| = \eta$. Пусть $A^i = A_i' \oplus A_i''$, где A_i' - сумма тех групп ранга I, в которых $\varphi(Q_{\alpha}^i)$ имеет ненулевую компоненту. Очевидно, что разложение

$$A^*(\alpha) = \sum_{i \in I_2} \oplus A_i' \oplus (\sum_{i \in I_2} \oplus A_i'' \oplus \sum_{i \in I_1} \oplus A^i \oplus A_0)$$

является искомым, то есть $|I_2| = \eta$, $A_i' = \sum \oplus Q_{\alpha_{ij}}$,

$$z_A(\alpha_{ij}) \geq \aleph_0, \quad \alpha = \bigcap \alpha_{ij}.$$

(3) $\implies$ (I). В условиях п.3 имеем

$$A^*(\alpha) \cong \sum_m \oplus \sum_{\mathcal{K}_0} \oplus A^i \oplus A_0.$$

Остается заметить, что Q_α изоморфна сервантной подгруппе группы A^i . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $\mathcal{M} > \mathcal{K}$, справедливо утверждение теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно заметить, что $|\Omega| = \mathcal{K}$, откуда $\mathcal{M} > \mathcal{N}$, и $\mathcal{M} > \mathcal{K}_0$.

§ 2. Сервантно (регулярно) корректные группы и цепи типов и характеристик

Зафиксируем группу $A \in \mathcal{L}$, $A \neq 0$. На протяжении всей работы $M = \{M_i\}_{i=1,2,\dots}$ - счетное семейство непустых конечных множеств M_i , элементами которых являются непустые конечные подмножества множества $T(A)$. Для любого $i = 1, 2, \dots$ положим $M^i = \bigcup_{t \in M_i} t$. Очевидно, что $0 \neq M^i \in T(A)$, $|M^i| < \mathcal{K}_0$. Положим $MI = \bigcup_{i=1} M^i$. Очевидно, $MI \in T(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть рассматриваемое семейство M таково, что M_1 - одноэлементное множество и $\alpha \in \Omega$ такой тип, что $\alpha = \bigcap_{\beta \in MI} \beta$, $\beta \neq \alpha$ для любого $\beta \in MI$. Задано отображение $f: MI \rightarrow \bigcup_{i=2} M_i$. Пару (M, f) назовем α цепью над $T(A)$, если выполняются условия:

а) $\beta \notin \bigcap_{\tau \in f(\beta)} \tau$ для любого $\beta \in MI$;

в) $f(M^i) = M_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$;

с) $\beta \notin F(\beta)$ для любого $\beta \in MI$, где $F(\beta) = \bigcup_{i=1}^\infty F_i(\beta)$,

$F_1(\cdot) = f(\cdot)$, $F_{i+1}(\beta) = \{\tau \mid \tau \in f(\beta), \beta \in F_i(\tau)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из того, что $\alpha = \bigcap_{\beta \in MI} \beta$, $\beta \neq \alpha$ для $\beta \in MI$ и из условий в), а) следует, что $\beta > \alpha$ для любого $\beta \in MI$.

Из в) следует, что $M^j \subseteq \bigcup_{\beta \in M^i} F(\beta)$, если $i < j$, $i, j = 1, 2, \dots$

с). Учитывая определение $F(\beta)$ и условие а), заключаем, что любой тип из M^j больше либо равен некоторому типу из M^i , если $i < j$. Поэтому $\bigcap_{\tau \in M^j} \tau \geq \bigcap_{\tau \in M^i} \tau \geq \alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для всякого непустого конечного подмножества $S \subseteq MI$ множество $\bar{S} = \{\beta \mid \beta \in S, \beta \notin \mathcal{F}(\beta)\}$ для любого $\beta \in S\} \neq \emptyset$. Действительно, пусть $\beta_1 \in S$, если $\beta_1 \in \bar{S}$ то $\bar{S} \neq \emptyset$. Если $\beta_1 \notin \bar{S}$, то $\beta_1 \in \mathcal{F}(\beta_2)$ для некоторого $\beta_2 \in S$. В силу с) $\beta_1 \neq \beta_2$. Очевидно, что $\mathcal{F}(\beta_1) \subseteq \mathcal{F}(\beta_2)$. Если $\beta_2 \in \bar{S}$, то $\bar{S} \neq \emptyset$. Если $\beta_2 \notin \bar{S}$, то $\beta_2 \in \mathcal{F}(\beta_3)$, $\beta_3 \in S$. В силу с) $\beta_1 \neq \beta_3, \beta_2 \neq \beta_3, \dots$. Так как S - конечное множество, то на некотором шаге мы должны получить $\beta_k \in \bar{S}$. Таким образом, $\bar{S} \neq \emptyset$. Пусть $\tau \in S \setminus \bar{S}$. Тогда нетрудно видеть, что $\tau \in \mathcal{F}(\beta)$ для некоторого $\beta \in \bar{S}$, из определения $\mathcal{F}(\beta)$ и а) следует, что $\tau > \beta$. Откуда, так как $\bar{S} \subseteq S$, следует, что $\bigcap_{\tau \in \bar{S}} \tau = \bigcap_{\tau \in S} \tau$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть (M, f) - ω цепь над $T(A)$ и пусть $\emptyset = N^0 \subseteq MI$, $|N^i| \leq \aleph_0$. Положим $N_1 = \{N_0\}$, $N^1 = N^0$, $N_{j+1} = \{f(\tau) \mid \tau \in N^j\}$, $N^{j+1} = \bigcup_{\tau \in N^j} f(\tau)$. Пусть $N = \{N_j\}_{j=1,2,\dots}$, $\gamma \in \Omega$, $\gamma = \bigcap_{\tau \in N^j} \tau$, φ - ограничение f на $\bigcup_{j=1}^{\infty} N^j$ (очевидно, что $\bigcup_{j=1}^{\infty} N^j \subseteq MI$).

Тогда нетрудно проверить, что (N, φ) есть γ цепь над $T(A)$. Обозначим эту цепь через $M(N^0)$.

Пусть $A \in \mathcal{L}$, $A = \sum_{\beta \in T(A)} A_\beta$, (M, f) - ω цепь над $T(A)$.

Для любого $\beta \in M^1$ зафиксируем элемент a_β^0 , для любого $\beta \in MI$ зафиксируем элемент a_β^1 и для любой пары (τ, β) , где $\beta \in MI$, $\tau \in f(\beta)$, зафиксируем элемент a_β^τ так, что $0 \neq a_\beta^0 \in A_\beta$, $a_\beta^0 \in A_\beta$, $0 \neq a_\beta^\tau \in A_\tau$, причем элемент a_β^0 может равняться 0 лишь тогда, когда $\beta \subseteq \bigcap_{\tau \in f(\beta)} \tau$. Положим $A_\beta^0 = \langle \sum_{\tau \in f(\beta)} a_\beta^0 \rangle^A$ и для любого $\beta \in MI$ положим $A_\beta^M = \langle a_\beta^0 + \sum_{\tau \in f(\beta)} a_\beta^\tau \rangle^A$. Группа A_0^M -

группа ранга 1 типа $\alpha = \bigcap_{\beta \in MI} \beta$. Так как $\beta \neq f(\beta)$ для любого $\beta \in MI$ [с), определение 3], то согласно выбору элементов a_β^0, a_β^τ , и условию а) определения 3, очевидно, что A_β^M - группа ранга 1 типа β .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Группу $A(M) = A_0^M + \sum_{\beta \in MI} A_\beta^M$ назовем группой ω цепи (M, f) над $T(A)$, если группы A_0^M и A_β^M , $\beta \in MI$ определены так, как сказано выше. Очевидно, что группа $A(M)$ зависит от выбора элементов $a_\beta^0, a_\beta^1, a_\beta^\tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ω цепь (M, f) над $T(A)$ называется P_ω цепью над $T(A)$, если выполняются условия:

$$d) \alpha = \bigcap_{\beta \in M^i} \beta, \quad i = 1, 2, \dots;$$

е) если $\beta \in MI, \beta \neq \gamma$, то $f(\beta) \cap f(\gamma) = \emptyset$;

ф) $M^i \cap M^j = \emptyset$, если $i \neq j$.

Структуру P_α цепи (M, f) над $T(A)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(0, \dots, 0)\} \\ M_2 &= \{(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{\text{---}}, \dots, \overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}})\} \\ M_3 &= \{(\overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}, \dots, \overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}), \dots, (\overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}, \dots, \overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}), \dots, (\overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}, \dots, \overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}), \dots, (\overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}}, \dots, \overbrace{0, \dots, 0}^{\text{---}})\} \end{aligned}$$

где кружками обозначены типы - элементы множеств M^i , стрелки показывают действие отображения f , пересечение всех типов, стоящих в каждой строке равно типу α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть (M, f) - P_α цепь над $T(A)$ и $\chi \in \alpha$ - некоторая характеристика. Пусть для каждого $\beta \in MI$ выбрана некоторая характеристика $\chi_\beta \in \beta$ и пусть отображение $\chi: MI \rightarrow \tilde{\Omega}$ таково, что $\chi(\beta) = \chi_\beta$. Тройка (M, f, χ) называется χ_0 цепью характеристик, если выполнены условия

$$1. \chi_0 = \bigcap_{\beta \in M^1} \chi_\beta, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$2. \text{ для любого } \beta \in MI, \chi_\beta \leq \bigcap_{\gamma \in f(\beta)} \chi_\gamma.$$

ЛЕММА 3. Пусть $A \in \mathcal{L}, A = \sum_{\alpha \in \Omega(A)} \oplus A^{(\alpha)}$ и пусть $B^{(\alpha)} \oplus A^{*(\alpha)} = A^{*(\alpha)} \oplus A^{*(\alpha)}$ для любого $\alpha \in \Omega(A)$. Тогда $A \geq B = \sum_{\alpha \in \Omega(A)} \oplus B^{(\alpha)}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого конечного множества типов $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subseteq \Omega(A)$ имеет место соотношение $A \geq \sum_{i=1}^n \oplus B^{(\alpha_i)}$. Последнее соотношение следует из того, что

$$A = \sum_{\alpha \in \Omega(A)} \oplus A^{(\alpha)} = B^{(\alpha_1)} \oplus \sum_{\alpha \in \Omega(A)} \oplus A^{(\alpha)} = \dots = \sum_{i=1}^n \oplus B^{(\alpha_i)} \oplus \sum_{\substack{\alpha \in \Omega(A) \\ \alpha \neq \alpha_i \\ i=1, \dots, n}} \oplus A^{(\alpha)}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{L}$. A и B сервантно (регулярно) эквивалентны. Тогда для любого типа $\alpha_0 \in \Omega$ такого, что $z_B(\alpha_0) > z_A(\alpha_0)$, существует α_0 цепь (M, f) над $T(A)$. При

этом существует такая группа $A(M)$ цепи (M, f) , что $A(M) = A_0^M \oplus \sum_{\beta \in MI} \oplus A_\beta^M$, $A \supset A(M)$ ($A \supset A(M)$).

Доказательство. Будем под записью $X \supset Y$ понимать, что Y является серванткой (регулярной) подгруппой в X . Пусть $A = \sum_{\beta \in T(A)} \oplus A_\beta$. Представим $T(A)$ в виде $T(A) = T(A_1) \cup T(A_2)$, где $T(A_1) \cap T(A_2) = \emptyset$, причем группы $A_1 = \sum_{\beta \in T(A_1)} \oplus A_\beta$ и $A_2 = \sum_{\beta \in T(A_2)} \oplus A_\beta$ таковы, что $A = A_1 \oplus A_2$, $A_1 \cong A$, $A_2 \cong \sum_{\beta \in T(A)} \oplus A_\beta$. Такое разбиение $T(A)$ всегда возможно. Согласно условию леммы, существуют такие группы $\bar{A} \cong A \cong A_1$ и $\bar{B} \cong B$, что $A_1 \supset \bar{B} \supset \bar{A}$. Положим $T_1 = \{\beta / \beta \in T(A_1), z_{A_1}(\beta) \in \mathcal{H}_0, A_\beta \cap \bar{A} = 0\}$; $T_2 = \{\beta / \beta \in T(A_2), z_{A_2}(\beta) \in \mathcal{H}_0\}$. Определим такое отображение φ из множества $T = T_1 \cup T_2 \cup T(A_2)$ во множество непустых конечных подмножеств множества T и для каждого $\beta \in T$, определим такую группу $\tilde{A}_\beta$, что выполняются условия:

- 1) условия а), с) определения 3 с заменой MI на T и f на φ ;
- 2) $\tilde{A}_\beta = \langle a^\beta + \sum_{\tau \in \varphi(\beta)} a_\tau^\tau \rangle_{\tilde{A}}$, $a^\beta \in A_\beta$, $0 \neq a_\tau^\tau \in A_\tau$, группа $\tilde{A}_\beta$

имеет тип β ;

- 3) $\bar{A} \supset \sum_{\beta \in T_1} \oplus \tilde{A}_\beta$, $A_2 \supset \sum_{\beta \in T_2 \cup T(A_2)} \oplus \tilde{A}_\beta$.

Если $A_2 = 0$, то $T_2 = T(A_2) = \emptyset$ и $T = T_1$. Пусть $A_2 \neq 0$. Определим φ на $(T_2 \cup T(A_2)) \neq \emptyset$. Нетрудно видеть, что $T(A_2)$ можно представить в виде следующего объединения попарно непересекающихся счетных подмножеств T_γ : $T(A_2) = \bigcup_{\gamma \in T_2} T_\gamma$, где $T_\gamma = \{r_i / r_i \stackrel{\Omega}{=} \gamma, i=1, \dots\}$. Для любого $\gamma \in T_2$ положим $\varphi(\gamma) = \{r_1\}$, $\varphi(r_1) = \{r_2\}$, $\dots$, $\varphi(r_i) = \{r_{i+1}\}$, где $r_i \in T_\gamma$, $i=1, 2, \dots$. Для любого $\beta \in T_2 \cup T(A_2)$ положим $\tilde{A}_\beta = A_\tau$, где $\{\tau\} = \varphi(\beta)$, A_τ — прямое слагаемое из фиксированного разложения группы A_2 , тип A_τ равен $\tau \stackrel{\Omega}{=} \beta$ (согласно определению $\varphi(\beta)$). Нетрудно видеть, что определенные таким образом отображение φ на множестве $T_2 \cup T(A_2)$ и группы $\tilde{A}_\beta$, $\beta \in T_2 \cup T(A_2)$ удовлетворяют условиям I — 3.

Определим φ на T_1 . Задача согласования определений φ

на $T_2 \cup T(A_2)$ и на T_1 не возникает, так как $T_1 \cap (T_2 \cup T(A_2)) = \emptyset$.

Представим T_1 в виде следующего объединения непересекающихся подмножеств: $T_1 = T_\alpha$, $T_\alpha = T_1 \cap T(A_1^{(\alpha)})$. Достаточно

определить φ на каждом $T_\alpha \neq \emptyset$. Пусть $\alpha \in \Omega(A_1)$, $T_\alpha \neq \emptyset$.

Тогда $z_{A_1}(\alpha) = n \in \mathcal{N}_0$ согласно определению T_1 . Пусть $A_1^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^n \oplus A_{\beta_i}$, $T_\alpha = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$, $1 \leq \ell \leq n$. Считаем, что зафиксировано разложение группы $\bar{A}$ в прямую сумму групп ранга 1. Так

как $A_1 \cong \bar{A}$, то $\alpha \in \Omega(\bar{A})$, $z_{\bar{A}}(\alpha) = z(\bar{A}^{(\alpha)}) = n$. Так как $A_1 \hookrightarrow \bar{A}$, то $A_1^{(\alpha)} = (A_1^{(\alpha)} \oplus A_1^*(\alpha)) \hookrightarrow \bar{A}^{(\alpha)}$. Используя последнее соотношение и лемму I, легко показать, что $z(\bar{C}) \geq \ell$, где $\bar{C} = (\sum_{i=1}^n \oplus A_{\beta_i} \oplus A_1^*(\alpha)) \cap \bar{A}^{(\alpha)}$.

Очевидно, $\bar{A}^{(\alpha)} \supseteq \bar{C}$. Поэтому в силу [4, леммы 86.7, 86.7, с. II5], группу $\bar{A}^{(\alpha)}$ можно записать в виде $\bar{A}^{(\alpha)} = \mathcal{D}^{(\alpha)} \oplus C^{(\alpha)}$, где $C^{(\alpha)}$ — однородная вполне разложимая группа ранга ℓ типа α , $\bar{C} \supseteq C^{(\alpha)}$. Так как $C^{(\alpha)} \subseteq \sum_{i=1}^n \oplus A_{\beta_i} \oplus A_1^*(\alpha)$, то нетрудно

доказать, что $C^{(\alpha)}$ представима в виде $C^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{\ell} \oplus C_j$, где $z(C_j) = 1$, $C_j \subseteq \sum_{i=1}^n \oplus A_{\beta_i} \oplus A_1^*(\alpha)$. Следовательно, $C_j =$

$= \langle \alpha^{\beta_j} + \sum_{\tau \in f_j} \alpha_{\tau}^{\tau} \rangle_{*}^{\bar{A}}$, где $\alpha^{\beta_j} \in A_{\beta_j}$, $0 \neq \alpha_{\tau}^{\tau} \in A_{\tau}$, $|f_j| < \mathcal{N}_0$. Множество $f_j \neq \emptyset$ для $j = 1, 2, \dots, \ell$.

Действительно, если $f_j = \emptyset$, то $C_j = \langle \alpha^{\beta_j} \rangle_{*}^{\bar{A}} \subseteq A_{\beta_j}$, то есть $C_j \subseteq A_{\beta_j} \cap \bar{A}$; это противоречит тому, что $\beta_j \in T_\alpha \subseteq T_1$. Положим $\varphi(\beta_j) = \{\tau \in f_j, A_\tau \cap \bar{A} \neq \emptyset\}$. Так как $A_{\beta_j} \cap \bar{A} = \emptyset$, $j = 1, 2, \dots, \ell$, то $(f_j \setminus \varphi(\beta_j)) \subseteq T(A_1^{(\alpha)})$, где $j = 1, 2, \dots, \ell$. Поэтому, если $\tau \in f_j \setminus \varphi(\beta_j)$, то так как $A_1 \hookrightarrow \bar{A}$, $A_\tau \subseteq A_1$, $A_\tau \cap \bar{A} \neq \emptyset$, получаем $A_\tau \cap \bar{A}^*(\alpha) \neq \emptyset$. Откуда, так как $z(A_\tau) = 1$, следует, что $\bar{A}^{(\alpha)} = \bar{A}^{(\alpha)} \oplus \bar{A}^*(\alpha) = \mathcal{D}^{(\alpha)} \oplus C^{(\alpha)} \oplus \bar{A}^*(\alpha) =$

$= \mathcal{D}^{(\alpha)} \oplus \sum_{j=1}^{\ell} \oplus \tilde{A}_{\beta_j} \oplus \bar{A}^*(\alpha)$ где $\tilde{A}_{\beta_j} = \langle \alpha^{\beta_j} + \sum_{\tau \in \varphi(\beta_j)} \alpha_{\tau}^{\tau} \rangle_{*}^{\bar{A}}$, где элементы α_{τ}^{τ} , α^{β_j} те же, что в записи группы C_j . Из последнего равенства получаем $(\sum_{j=1}^{\ell} \oplus \tilde{A}_{\beta_j}) \cong C^{(\alpha)}$.

Следовательно, $\tilde{A}_{\beta_j}$ — подгруппа ранга 1 типа α в группе $\bar{A}$. Множество $\varphi(\beta_j) \neq \emptyset$ для $\beta_j \in T_\alpha$. Действительно, если $\varphi(\beta_j) = \emptyset$, то $\langle \alpha^{\beta_j} \rangle_{*}^{\bar{A}} \subseteq A_{\beta_j} \cap \bar{A}$, это противоречит тому, что $\beta_j \in T_\alpha \subseteq T_1$. Очевидно, что $\beta_j \cong \alpha \in \cap_{\tau \in \varphi(\beta_j)} \tau$. Заметим, что $\varphi(\beta_j) \cap \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell\} = \emptyset$ согласно выбору групп C_j , отсюда нетрудно проверить выполнение условия I.

Для каждого $\beta \in T_\alpha$, $\alpha \in \Omega(A_1)$ группы $\tilde{A}_\beta$ определены

так, что $\bar{A}^{(\alpha)} \oplus \bar{A}^*(\alpha) = \mathcal{D}^{(\alpha)} \oplus \sum_{r \in T_2} \bar{A}_r \oplus \bar{A}^*(\alpha)$. В силу леммы 3, нетрудно видеть, что $\sum_{r \in T_2} \bar{A}_r = \sum_{r \in T_2, \ell \in \Omega(A_1)} \bar{A}_r \in \bar{A}$. Таким

образом, определено отображение φ и определены группы $\bar{A}_\beta$, $\beta \in (T_1 \cup T_2 \cup T(A_2))$ так, что выполнены условия 1, 2, 3. Докажем непосредственно утверждение леммы. Пусть $\alpha_0 \in \Omega$, $z_\beta(\alpha_0) > z_A(\alpha_0)$. Тогда $\alpha_0 \in \Omega(\bar{B})$, $z_{\bar{B}}(\alpha_0) > z_{A_1}(\alpha_0)$. Так как $A_1 \subset \bar{B}$, то $(A_1^{(\alpha_0)} \oplus$

$\oplus A_1^*(\alpha_0)) \subset \bar{B}^{(\alpha_0)}$. Из последнего соотношения, леммы 1 и того, что $z(\bar{B}^{(\alpha_0)}) > z(A_1^{(\alpha_0)})$ следует, что $\bar{B}^{(\alpha_0)} \cap A_1^*(\alpha_0) \neq \emptyset$. Пусть $(\bar{B}^{(\alpha_0)} \cap A_1^*(\alpha_0)) \ni B_0$, $z(B_0) = 1$. Так как $A_1 \subset \bar{B}^{(\alpha_0)} \ni B_0$, то B_0 - подгруппа ранга 1 типа α_0 группы A_1 . Так как $A_1^*(\alpha_0) \ni B_0$, то $B_0 = \langle \sum_{i=1}^k \alpha_i \rangle_{\beta_i}^{\bar{B}}$, где $\alpha_i \in A_{\beta_i}$, $\beta_i \in T(A_1^*(\alpha_0))$.

Тип группы B_0 равен $\alpha_0 = \bigwedge_{i=1}^k \beta_i$, $\beta_i > \alpha_0$. Положим $M^1 = \{ \beta_i / A_{\beta_i} \cap \bar{B} = 0, i = 1, 2, \dots, k \}$. Если $\beta_i \notin M^1$, $i = 1, \dots, k$, то, так как $A_1 \subset \bar{B}$, $\beta_i > \alpha_0$, получаем $A_{\beta_i} \cap \bar{B}^{(\alpha_0)} \neq \emptyset$. Поэтому $B_0 \oplus \bar{B}^{(\alpha_0)} = \bar{A}_0 \oplus \bar{B}^{(\alpha_0)}$, где $\bar{A} = \langle \sum_{\beta_i \in M^1} \alpha_i \rangle_{\beta_i}^{\bar{B}}$, α_i - те же

элементы, что и в записи группы B_0 . Из последнего соотношения следует $\bar{A}_0 \cong B_0$. Поэтому $M^1 \neq \emptyset$, тип группы $\bar{A}_0$ равен $\alpha_0 = \bigwedge_{\beta \in M^1} \beta$. Положим $M_1 = \{ M^1 \}$, так как $M^1 \leq T = T_1 \cup T_2 \cup T(A_2)$, то положим $M_{i+1} = \{ \varphi(\beta) / \beta \in M^i \}$, $i = 1, 2, \dots$, пусть $M = \{ M_i \}_{i=1}^\infty$. Пусть f - ограничение φ на $MI = \bigcup_{i=1}^\infty M^i \leq T$. В силу условий

1, 2, 3, нетрудно видеть, что (M, f) - α_0 цепь над $T(A)$. Очевидно также, что если положить $A_0^M = \langle \bar{A}_0, \bar{A}_2^M, \bar{A}_2^M \rangle$ для $\beta \in MI$, то группа $A_0^M \oplus \sum_{\beta \in MI} \bar{A}_\beta = A(M)$ удовлетворяет определению 4. Так как (M, f) - α_0 цепь над $T(A)$, то $\beta > \alpha_0$ для $\beta \in MI$. Следовательно, так как $MI \leq T$, то по условию 3 $\bar{A}^*(\alpha_0) \subset \sum_{\beta \in MI \cap T_2} \bar{A}_\beta$,

$A_2 \subset \sum_{\beta \in MI \cap (T_2 \cup T(A_2))} \bar{A}_\beta$. Поэтому $A = A_1 \oplus A_2 \ni B_0 \oplus \bar{B}^*(\alpha_0) \oplus A_2 = \bar{A}_0 \oplus \bar{B}^*(\alpha_0) \oplus A_2 \ni \bar{A}_0 \oplus \sum_{\beta \in MI \cap T_2} \bar{A}_\beta \oplus \sum_{\beta \in MI \cap (T_2 \cup T(A_2))} \bar{A}_\beta = \bar{A}_0 \oplus \sum_{\beta \in MI} \bar{A}_\beta$. Откуда следует, что

$$A \subset A(M), \quad A(M) = A_0^M \oplus \sum_{\beta \in MI} \bar{A}_\beta.$$

ЛЕММА 5. Пусть $A \in \mathcal{L}$ и (M, f) - такая α цепь над $T(A)$, что существует $A(M)$ - группа α цепи (M, f) со свой-

ствами $A \supset A(M) = \sum_{\beta \in MI} A_{\beta}^M \oplus A_0^M$. Тогда $\mathcal{A} = \bigcap_{\tau \in M^n} \tau$, $n=1, 2, \dots$.

Доказательство. Индукция по n - номеру множества M^n . Для $n=1$ утверждение вытекает из определения 3. Пусть для любого $\omega \in \Omega$ и любой α цепи (M, f) над $T(A)$, удовлетворяющей условию леммы, имеем $\alpha = \bigcap_{\tau \in M^n} \tau$ для некоторого натурального n . Рассмотрим α цепь (M, f) над $T(A)$, которая удовлетворяет условию леммы. Тогда имеем группу $A(M) = A_0^M \oplus \sum_{\beta \in MI} A_{\beta}^M$, $A \supset A(M)$, где $A_0^M = \langle \sum_{\beta \in M^1} \alpha_{\beta}^{\beta} \rangle_*$, $A_{\beta}^M = \langle \alpha^{\beta} + \sum_{\tau \in f(\beta)} \alpha_{\tau}^{\tau} \rangle_*$. Введем обозначения

$$M[\kappa] = \bigcup_{i=\kappa}^{\infty} M^i, \quad M(\kappa) = \bigcup_{i=\kappa+1}^{\infty} M^i, \quad M[\kappa]_0 = \{\beta \mid \beta \in M[\kappa], \alpha^{\beta} = 0\},$$

$$\mathcal{F}_{\kappa} = \{\beta \mid \beta \in M[\kappa] \cap M(\kappa), \alpha^{\beta} \neq 0\}, \quad R_{\kappa} = \{\beta \mid \beta \in M^{\kappa} \setminus M(\kappa), \alpha^{\beta} \neq 0\},$$

$$S_{\kappa} = \mathcal{F}_{\kappa} \cup R_{\kappa} \cup M[\kappa]_0, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad R_0 = \emptyset.$$

Все определенные выше множества, кроме $M(\kappa)$, конечные, элементы α^{β} - это элементы из записи групп A_{β}^M . Пусть $M[n]_0 \neq \emptyset$, где n - то число, для которого сделано индуктивное предположение. Зафиксируем $\beta \in M[n]_0$. Так как $\alpha^{\beta} = 0$, то из определения 4 следует, что $\beta \equiv \bigcap_{\tau \in f(\beta)} \tau$. Пусть $\beta_0 \in \Omega$, $\beta_0 \equiv \beta$.

Рассмотрим $M(f(\beta)) - \beta_0$ цепь над $T(A)$, определенную в замечании 3. Пусть $M(f(\beta)) = (N_{\beta}, \varphi_{\beta})$, $N_{\beta} = \{N_{\beta}^i\}_{i=1, 2, \dots}$, $N_{\beta}^i =$

$$= \bigcup_{i=N_{\beta}^i}^{\infty} N_{\beta}^i. \text{ Пользуясь тем, что } N_{\beta} I \subseteq MI, \text{ положим } A_{N_{\beta}}^{N_{\beta}} = \bigcup_{i=N_{\beta}^i}^{\infty} A_{N_{\beta}^i}^M \text{ для любого } \tau \in N_{\beta} I. \text{ Положим } A_0^{N_{\beta}} = A_{\beta}^M = \langle \sum_{\tau \in f(\beta)} \alpha_{\tau}^{\tau} \rangle_*$$

Очевидно, что группа $A(N_{\beta}) = A_0^{N_{\beta}} \oplus \sum_{\tau \in N_{\beta} I} A_{\tau}^{N_{\beta}}$ является группой β_0

цепи $(N_{\beta}, \varphi_{\beta})$ над $T(A)$. Группа $A(N_{\beta})$ - прямое слагаемое группы $A(M)$, поэтому $A \supset A(N_{\beta})$. Таким образом, β_0 цепь $(N_{\beta}, \varphi_{\beta})$ удовлетворяет условию данной леммы. Согласно индуктивному предположению, имеем $\beta \equiv \beta_0 = \bigcap_{\tau \in N_{\beta}^n} \tau$. Так как $\beta \in$

$\in M[n_0] \subseteq MI$, то $f(\beta) \subseteq M^{i(\beta)}$, где $i(\beta) \geq 2$, поэтому (замечание 3), $N_{\beta}^n \subseteq M^{i(\beta)+n-1}$, причем $j(\beta) = (i(\beta)+n-1) \geq n+1$.

Поэтому, используя то, что $\beta \equiv \bigcap_{\tau \in N_{\beta}^n} \tau$ и замечание 1, получаем

$\cap \beta = \cap \tau \geq \cap \tau \geq \cap \tau$
 $\beta \in M[n]_0, \tau \in N_\beta^n, \beta \in M[n]_0, \tau \in M^{j(\beta)}, \beta \in M[n]_0, \tau \in M^{n+1}$
 Откуда, так как $M[n+1]_0 \setminus M[n]_0 \subseteq M^{n+1}$, следует, что

$$\cap \beta \geq \cap \beta \quad (\text{II})$$

$\beta \in M[n+1]_0, \beta \in M^{n+1}$

Докажем, что для любого натурального k существует подгруппа B_k ранга 1 типа α в группе A такая, что $B_k =$

$= \langle \sum_{\beta \in S_k} \tilde{\alpha}^\beta \rangle_*^{A(M)}, B_k \subseteq A_0^M \oplus \sum_{\beta \in \bigcup_{i=1}^k R_i} A_\beta^M$, где $\tilde{\alpha}^\beta \in A_\beta$, элементы $\tilde{\alpha}^\beta$ не обязательно все отличны от 0. В качестве групп B_1 берем группу

$$B_1 = A_0^M = \langle \sum_{\beta \in M^1} \alpha_0^\beta \rangle_*^A = \langle \sum_{\beta \in S_1} \alpha_0^\beta \rangle_*^A.$$

Пусть для натурального k существует группа B_k с указанными свойствами

$$B_k = \langle \sum_{\beta \in S_k} \tilde{\alpha}^\beta \rangle_*^{A(M)} = \langle \sum_{\beta \in \mathcal{F} \cup M[k]_0} \tilde{\alpha}^\beta + \sum_{\beta \in R_k} \tilde{\alpha}^\beta \rangle_*^{A(M)}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{F} \cup M[k]_0 \subseteq S_{k+1}$. Поэтому в случае, когда $(\sum_{\beta \in R_k} \tilde{\alpha}^\beta) = 0$, в качестве группы B_{k+1} можно взять группу B_k . Пусть $(\sum_{\beta \in R_k} \tilde{\alpha}^\beta) \neq 0$. Тогда $R_k \neq \emptyset$. Так как $\alpha^\beta \neq 0$

для $\beta \in R_k$, то $\{\alpha^\beta / \beta \in R_k\}$ - максимальное линейно независимое множество элементов группы $\sum_{\beta \in R_k} A_\beta$.

Поэтому существуют такие целые числа u и $u_\beta, \beta \in R_k$, что

$$u \sum_{\beta \in R_k} \tilde{\alpha}^\beta = \sum_{\beta \in R_k} u_\beta \alpha^\beta. \text{ Так как } (A_0^M \oplus \sum_{\beta \in \bigcup_{i=1}^k R_i} A_\beta^M) \ni B_k, \text{ то}$$

$$(B_k \oplus \sum_{\beta \in R_k} A_\beta^M) \ni \langle u \sum_{\beta \in R_k} \tilde{\alpha}^\beta - \sum_{\beta \in R_k} u_\beta (\sum_{\tau \in \mathcal{F} \cup M[k]_0} \alpha^\tau) \rangle_*^{A(M)} = B_{k+1}.$$

Тип подгруппы B_{k+1} в группе A равен пересечению типов групп B_k и A_β^M по всем $\beta \in R_k, \tilde{\alpha}^\beta \neq 0$. Тип группы B_k равен α , тип A_β^M равен $\beta > \alpha$. Поэтому тип B_{k+1} равен α . Очевидно, что $B_{k+1} \subseteq A_0^M \oplus \sum_{\beta \in \bigcup_{i=1}^{k+1} R_i} A_\beta^M$. Учитывая, что для $\beta \in$

$R_k \subseteq M^k$, имеем $\mathcal{F}(\beta) \in M^{k+1} \subseteq S_{k+1}$, и, что $\mathcal{F} \cup M[k]_0 \subseteq S_{k+1}$, нетрудно группу B_{k+1} представить в виде $B_{k+1} = \langle \sum_{\beta \in S_{k+1}} \tilde{\alpha}^\beta \rangle_*^{A(M)}$,

где $\tilde{\alpha}^\beta$ не обязательно все отличны от 0, $\tilde{\alpha}^\beta \in A_\beta$. Таким образом, индукцией по k доказано существование групп $B_1, B_2, \dots$.

Тип группы B_{n+1} равен $\alpha = \bigwedge_{\beta \in S_{n+1}, \bar{\alpha} \neq 0} \beta$, где $B_{n+1} = \langle \sum_{\beta \in S_{n+1}} \bar{\alpha} \beta \rangle_{*}^{A(M)}$.

Поэтому $\alpha \geq \bigwedge_{\beta \in S_{n+1}, \beta \in F_{n+1} \cup R_{n+1} \cup M[n+1]_0} \beta$. Так как $F_{n+1} \subseteq M(n+1)$, $R_{n+1} \subseteq M^{n+1}$, то, используя (II) и замечание I, из последнего неравенства получаем $\alpha \geq \bigwedge_{\beta \in M^{n+1}} \beta \geq \alpha$.

То есть $\alpha = \bigwedge_{\beta \in M^{n+1}} \beta$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $A \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \Omega$ и (M, f) такая α цепь над $T(A)$, что $\alpha = \bigwedge_{\tau \in M^i} \tau$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда существует P_α

цепь над $T(A)$.

Доказательство. Для любого $i = 1, 2, \dots$ рассмотрим непустое конечное множество $\bar{M}^i = \{\beta \mid \beta \in M^i, \beta \notin F(f)\}$ для любого $f \in M^i$ (замечание 2). Допустим, что $\beta \in \bar{M}^i \cap \bar{M}^j$, $j > i$. Так как $\bar{M}^j \subseteq M^j$, то $\beta \in M^j \subseteq F(f)$ (замечание I). Следовательно, существует $f \in M^i$, $\beta \in F(f)$. Последнее противоречит тому, что $\beta \in \bar{M}^i$. Таким образом, $\bar{M}^i \cap \bar{M}^j = \emptyset$, если $i \neq j$. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ запишем $\bar{M}^i$ в виде $\bar{M}^i = \{\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_{n(i)}^i\}$, где $n(i)$ — натуральное число. Для любого $i = 1, 2, \dots$ определим отображение φ_i из $\bar{M}^i$ во множество подмножеств $\bar{M}^{i+1}$ следующим образом: $\varphi_i(\beta_i) = \{\tau \mid \tau \in \bar{M}^{i+1}, \tau \geq \beta_i^i\}$, $\varphi_i(\beta_k^i) = \{\tau \mid \tau \in \bar{M}^{i+1}, \tau \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} \varphi_i(\beta_j^i), \tau \geq \beta_k^i\}$, $1 \leq k \leq n(i)$. Очевидно, что если $\beta, \gamma \in \bar{M}^i$, $\beta \neq \gamma$, то $\varphi_i(\beta) \cap \varphi_i(\gamma) = \emptyset$; для любого $\beta \in \bar{M}^i$, если $\varphi_i(\beta) \neq \emptyset$, то $\beta \leq \bigwedge_{\tau \in \varphi_i(\beta)} \tau$. Положим $N_1^i = \{\beta \mid \beta \in \bar{M}^i, \varphi_i(\beta) \neq \emptyset\}$, $N_{j+1}^i = \{\beta \mid \beta \in N_j^i, \varphi_i(\beta) \cap N_{j+1}^{i+1} \neq \emptyset\}$, $j = 1, 2, \dots$. Согласно замечанию 2, любой тип из M^i больше либо равен некоторому типу из $\bar{M}^i$, $i = 1, 2, \dots$. Из замечания I следует, что любой тип из M^{i+1} больше либо равен некоторому типу из M^i . Для любого $i = 1, 2, \dots$, $M^i \subseteq M^i$. Следовательно, любой тип из $\bar{M}^{i+1}$ больше либо равен некоторому типу из $\bar{M}^i$, $i = 1, 2, \dots$. Поэтому из определения φ_i , следует, что $N_1^{i+1} \subseteq \bar{M}^{i+1} = \bigcup_{\beta \in \bar{M}^i} \varphi_i(\beta) = \bigcup_{\beta \in N_1^i} \varphi_i(\beta)$. Так как $\bar{M}^{i+1} \neq \emptyset$, то $N_1^i \neq \emptyset$. Согласно условию данной леммы, замечаниям I, 2 и определению φ_i , получаем

$$\alpha = \bigwedge_{\tau \in M^{i+1}} \tau = \bigwedge_{\tau \in \bar{M}^{i+1}} \tau = \bigwedge_{\tau \in \varphi_i(\beta)} \tau \geq \bigwedge_{\beta \in N_1^i} \beta \geq \alpha, \text{ откуда следует,}$$

что $\alpha = \bigcap_{\tau \in N_j^i} \tau$, $i=1,2,\dots$. Совершенно аналогичным образом индукцией по j доказывается, что

$$N_j^i \neq \emptyset, N_j^{i+1} \subseteq \bigcup_{\beta \in N_j^i} \varphi_i(\beta), \alpha = \bigcap_{\tau \in N_j^i} \tau \quad (III)$$

для любых $i, j=1,2,\dots$

Очевидно, что $\bar{M}^i \supseteq N_1^i \supseteq N_2^i \supseteq \dots$. Так как $\bar{M}^i$ - конечное множество, то для любого $i=1,2,\dots$ существует такое натуральное число $m(i)$, что $N_{m(i)}^i = N_{m(i)+1}^i = N_{m(i)+2}^i = \dots$. Для любого $\beta \in N_{m(i)}^i$, положим $\tilde{\varphi}(\beta) = \varphi_i(\beta) \cap N_{m(i)+1}^{i+1}$. Так как $N_{m(i)}^i \subseteq \bar{M}^i$, $i=1,2,\dots$ и $\bar{M}^i \cap \bar{M}^j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $N_{m(i)}^i \cap N_{m(j)}^j = \emptyset$, если $i \neq j$. Следовательно, множество $\tilde{\varphi}(\beta)$ определено однозначно для $\beta \in \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{m(i)}^i$. Согласно (III) и согласно определению множеств $N_{m(i)}^i$ получаем, что

$$\emptyset \neq N_{m(i)}^i = N_{m(i)+1}^{i+1} = \{ \beta \mid \beta \in N_{m(i)+1}^{i+1}, \varphi_i(\beta) \cap N_{m(i)+1}^{i+1} \neq \emptyset \}.$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}(\beta) \neq \emptyset$ для любого $\beta \in N_{m(i)}^i$, $i=1,2,\dots$. Положим

$$N_2 = \{ N_{m(1)}^1 \}, N_{i+1} = \{ \tilde{\varphi}(\beta) \mid \beta \in N_{m(i)}^i \}, i=1,2,\dots$$

Так как $N_{m(i)}^i \neq \emptyset$, то $N_i \neq \emptyset$. Положим $N^1 = N_{m(1)}^1$, $N^{i+1} =$

$= \bigcup_{\beta \in N_{m(i)}^i} \tilde{\varphi}(\beta)$. Согласно (III) $N_{m(i)}^{i+1} \subseteq \bigcup_{\beta \in N_{m(i)}^i} \varphi_i(\beta)$. По определению множество $N_{m(i)}^{i+1}$ имеет место включение $N_{m(i)+1}^{i+1} \subseteq N_{m(i)}^{i+1}$.

Таким образом, $N_{m(i)+1}^{i+1} \subseteq \bigcup_{\beta \in N_{m(i)}^i} \varphi_i(\beta)$. Откуда следует $N_{m(i)+1}^{i+1} =$

$$= \bigcup_{\beta \in N_{m(i)}^i} \tilde{\varphi}(\beta) = N_{m(i)+1}^{i+1}$$

То есть $N^i = N_{m(i)}^i$, $i=1,2,\dots$. Положим $NI = \bigcup_{i=1}^{\infty} N^i$. Зададим отображение φ из NI в $\bigcup_{i=1}^{\infty} N^i$ следующим образом:

$$\varphi: \beta \longrightarrow \tilde{\varphi}(\beta), \text{ таким образом, } \varphi(\beta) = \tilde{\varphi}(\beta).$$

Очевидно, что $NI \subseteq MI$. Так как $(M, f) - \alpha$ цепь над $T(A)$, то $\beta \neq \alpha$ для $\beta \in NI$. Множество N_2 - одноэлементное. Для $\beta \in NI$, согласно определению φ и φ_i , имеем $\beta \neq \bigcap_{\tau \in \varphi(\beta)} \tau$. Очевидно, что

$\varphi(N^i) = N_{m(i)+1}^{i+1}$. Уже замечалось, что $N_{m(i)}^i \cap N_{m(j)}^j = \emptyset$ при $i \neq j$, так как $N^i = N_{m(i)}^i$, $i=1,2,\dots$, то $N^i \cap N^j = \emptyset$, если $i \neq j$. Если $\beta \in N^i$,

$\gamma \in N^j$, $i \neq j$, то $\varphi(\beta) \subseteq N_{m(i)+1}^{i+1}$, $\varphi(\gamma) \subseteq N_{m(j)+1}^{j+1}$, $i+1 \neq j+1$, поэтому $\varphi(\beta) \cap \varphi(\gamma) = \emptyset$. Если же $\beta, \gamma \in N^i$, то $\varphi(\beta) \subseteq \varphi_i(\beta)$, $\varphi(\gamma) \subseteq \varphi_i(\gamma)$, согласно определению φ_i , из $\beta \neq \gamma$ следует $\varphi(\beta) \cap \varphi(\gamma) = \emptyset$.

Согласно (III), получаем $\bigcap_{\tau \in N^i} \tau = \bigcap_{\tau \in N_{m(i)}^i} \tau = \alpha$, $i=1,2,\dots$. Пусть $N = \{ N_{m(i)}^i \}_{i=1}^{\infty}$

Из проведенных рассуждений следует, что (M, φ) -

P_α цепь над $T(A)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \Omega$. Если тип α $\mathcal{M}_A$ - регулярен (сервантен), где $\mathcal{M} > 0$, то существует P_α цепь над $T(A)$. Доказательство следует непосредственно из леммы 4-6.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие существования P_α цепи над $T(A)$ ($A \in \mathcal{L}$) не является достаточным для того, чтобы тип α был γ_A - сервантным. Пример. Пусть $A = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus A_i \oplus \sum_{i=1}^{\infty} \oplus B_i$, где A_i, B_i - группы ранга I типа α_i, β_i соответственно, причем $\alpha_i \ni (\infty, \dots, \infty, 0, 0, \dots)$, $\beta_i \ni (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Положим $M_1 = \{\{\alpha_i, \beta_i\}\}$, $M_i = \{\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}\}$, $i = 2, 3, \dots$, $f(\alpha_i) = \{\alpha_{i+1}\}$, $f(\beta_i) = \{\beta_{i+1}\}$, $i = 1, 2, \dots$. Очевидно, что (M, f) - P_α цепь над $T(A)$, где α - нулевой тип $= \alpha_1 \cap \beta_1$.

Пусть α γ_A - сервантен, тогда $A \ni A' = A'_0 \oplus \sum_{i=1}^{\infty} \oplus A'_i \oplus B'_i$, где A'_0 - ранга I тип α , $A'_i \cong A_i$, $B'_i \cong B_i$. Откуда получаем $A'_0 = \langle d_0 \rangle_*^A$, где $d_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 + \theta$, $\alpha_i^0 \in A_i$, $0 \neq \theta \in \sum_{i=1}^{\infty} \oplus B_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 \neq 0$. В силу выбора типов α_i имеем $A'_i = \langle d_i \rangle_*^A$, где $d_i = \alpha_i + \sum_{j=i+1}^{\infty} \alpha_j^i$, $0 \neq \alpha_i \in A_i$, $\alpha_j^i \in A_j$. Согласно выбору α_i, β_i существует простое число p такое, что $k_p^A(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0) = 0$, $k_p^A(\theta) = 1$,

то есть $k_p^A(d_0) = 0$. Если $\alpha_i^0 \neq 0$, то $u_1 \alpha_i^0 = v_1 \alpha_1$ для ненулевых целых u_1, v_1 , поэтому $A'_0 \oplus A'_1 \ni \langle u_1 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 + u_1 \theta - v_1 \alpha_1 - v_1 \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j^1 \rangle_*^A = \langle \sum_{i=2}^{\infty} \bar{\alpha}_i + u_1 \theta \rangle_*^A$, где $\bar{\alpha}_i \in A_i$. Если $\bar{\alpha}_2 \neq 0$, то $u_2 \bar{\alpha}_2 = v_2 \alpha_2$ для ненулевых целых u_2, v_2 , поэтому

$$A'_0 \oplus A'_1 \oplus A'_2 \ni \langle \sum_{i=3}^{\infty} \bar{\alpha}_i + u_2 u_1 \theta \rangle_*^A, \bar{\alpha}_i \in A_i, \dots$$

Поэтому можно утверждать, что существует натуральное k такое,

что $A'_0 \oplus \sum_{i=1}^k \oplus A'_i \ni \langle \sum_{i=k+1}^{\infty} \bar{\alpha}_i + u_k u_{k-1} \dots u_1 \theta \rangle_*^A$, где $u_i \neq 0$ - целые числа и либо $(\sum_{i=k+1}^{\infty} \bar{\alpha}_i) = 0$, либо (см. выбор типов α_i)

$k_p^A(\sum_{i=k+1}^{\infty} \bar{\alpha}_i) = \infty$. В обоих случаях, если положить $d = (\sum_{i=k+1}^{\infty} \bar{\alpha}_i + u_k \dots u_1 \theta)$

то $k_p^A(d) = k_p^A(u_k u_{k-1} \dots u_1 \theta) = s+1$, где $u_1 u_2 \dots u_k = p^s z$, $(z, p) = 1$.

Запись элемента d через элементы прямых слагаемых $A'_0 \oplus \sum_{i=1}^k \oplus A'_i$

имеет вид $d = u_k u_{k-1} \dots u_1 d_0 - u_k \dots u_2 v_2 d_1 - u_k \dots u_3 v_2 d_2 - \dots - v_k d_k$. Таким образом, $k_p^A(d) \leq k_p^A(u_k u_{k-1} \dots u_1 d_0) = k_p^A(u_k u_{k-1} \dots u_1 d_0) = s$.

То есть $k_p^{A'}(d) < k_p^A(d)$, что противоречит сервантности $A' \in A$.

ЛЕММА 7. Пусть $A \in \mathcal{L}$. Любая группа $A(M)$ P_α цепи (M, f) над $T(A)$ есть регулярная подгруппа группы A .

Доказательство. Из определения P_α цепи следует, что любая группа $A(M)$, указанная в лемме, имеет вид

$A(M) = A_0^M \oplus \sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M$, причем $(\sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M) \in A$. Пусть $g \in A(M)$. Тогда $g = \alpha + \sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus \beta$, $\alpha \in A_0^M$, $\beta \in \sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M$. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$,

то так как $A_0^M \in A$ и $(\sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M) \in A$, то тип g в $A(M)$ тот же, что и в A . Если же $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\alpha_i \in A_{\beta_i}$ запись элемента g через элементы прямых слагаемых ранга I типа β_i группы A , то так как $(M, f) - P_\alpha$ цепь, то среди типов $\beta_1, \dots, \beta_n$ найдутся такие типы $\beta_1, \dots, \beta_k$, что $\alpha = \bigwedge_{i=1}^k \beta_i$. То есть тип g в A не больше α . Так как $\alpha \neq 0$, то тип g в $A(M)$ равен α , поэтому тип g в A тоже равен α . Что доказывает регулярность $A(M)$ в A .

СЛЕДСТВИЕ 3. Тип $\alpha \in \Omega$ 1_A -регулярен тогда и только тогда, когда существует P_α цепь типов над $T(A)$.

Доказательство следует непосредственно из следствия 2, леммы 7 и из того факта, что $A(M) = A_0^M \oplus \sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M \oplus \sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M$, где A_0^M - группа ранга I типа α , $\sum_{\beta \in M \Gamma} \oplus A_\beta^M$ - прямое слагаемое группы $A^*(\alpha)$ и $A_\beta^M \cong A_\beta$ для $\beta \in M \Gamma$.

ЛЕММА 8. Пусть $(M, f) - P_\alpha$ цепь над $T(A)$, $A \in \mathcal{L}$ и пусть $\chi_0 \in \mathcal{L}_0$. Если существует χ_0 цепь характеристик, то тип α является 1_A -сервантным.

Доказательство. Пусть $(M, f, \chi) - \chi_0$ цепь характеристик. Для каждого $\alpha \in M \Gamma$ выберем элемент $e_\alpha \in A_\alpha$ характеристики $\chi(e_\alpha) = \chi_\alpha$. Пусть $A_0 = \sum_{\alpha \in M \Gamma} \oplus A_\alpha$. Определим гомоморфизм $\varphi: A_0 \oplus Q_\alpha \rightarrow A_0$, полагая

$\varphi(e_1) = \sum_{\alpha \in M \Gamma} e_\alpha$, $\varphi(e_\alpha) = e_\alpha + \sum_{\beta \in f(\alpha)} e_\beta$, где $e \in Q_\alpha$ - элемент характеристики χ_0 . Так как $\chi(e_\alpha) \geq \chi(e)$, $\chi(e_\alpha) \in \cap_{\beta \in \chi(e)} \chi(e_\beta)$, то это отображение однозначно продолжается до гомоморфизма φ . Остается показать, что φ - сервантное вложение. Каждый элемент $x \in A_0 \oplus Q_\alpha$ записывается в виде $x =$

$$= z_0 e + \sum_{\alpha \in M^1} z_\alpha e_\alpha + \dots + \sum_{\alpha \in M^k} z_\alpha e_\alpha,$$

где z_α — рациональные числа. Пусть p — произвольное простое число, необходимо показать, что $h_p(x) = h_p(\varphi(x))$. Если z — рациональное число, $z = p^m \frac{\beta}{f}$, где $(\beta, p) = 1$, $(f, p) = 1$, то будем обозначать $h_p(z) = m$. Пусть $h_p(x) = h_p(z_\alpha e_\alpha)$, $\alpha \in M^k$ и k — наименьшее. Разумеется, k может зависеть от p . Возможны два случая:

1) $z_\alpha e_\alpha \neq z_0 e$. Тогда $\alpha \in f(\beta)$, где $\beta \in M^{k-1}$. Так как k было наименьшим со свойством $h_p(x) = h_p(z_\alpha e_\alpha)$, то $h_p(z_\beta e_\beta) > h_p(z_\alpha e_\alpha)$, а так как $h_p(e_\beta) \leq h_p(e_\alpha)$, то $h_p(z_\beta) > h_p(z_\alpha)$. Отсюда $h_p(z_\alpha + z_\beta) = h_p(z_\alpha)$. Поэтому

$$h_p(\varphi(x)) = h_p(\varphi(z_\alpha e_\alpha + z_\beta e_\beta) + \varphi(\sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} z_\gamma e_\gamma)) = h_p((z_\alpha + z_\beta) e_\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} z_\gamma e_\gamma) \leq h_p((z_\alpha + z_\beta) e_\alpha) = h_p(z_\alpha e_\alpha) = h_p(x).$$

2) $z_\alpha e_\alpha = z_0 e$. Так как $\chi(e) = \bigcap_{\beta \in M^{n-1}} \chi(e_\beta)$, то существует $\beta \in M^{n-1}$ такой, что $h_p(e_\beta) = h_p(e)$. Из определения χ_0 цепи следует, что существуют $\beta_i \in M^i$, $i \leq n$ такие, что $\beta \in f(\beta_n)$, $\beta_i \in f(\beta_{i-1})$ при $i \leq n$. Тогда

$$h_p(e) = \dots = h_p(e_{\beta_n}) = h_p(e_\beta).$$

Если $h_p(z_0) = h_p(z_{\beta_n})$, то $h_p(x) = h_p(z_0 e) = h_p(z_{\beta_n} e_\beta)$, откуда

$$h_p(\varphi(x)) = h_p(\sum_{\gamma \neq \beta} z_\gamma e_\gamma + z_{\beta_n} e_\beta) \leq h_p(z_{\beta_n} e_\beta) = h_p(x).$$

Если же $h_p(z_0) \neq h_p(z_{\beta_n})$, то выберем наименьшее s такое, что $h_p(z_0) \neq h_p(z_{\beta_s})$. Тогда $h_p(z_0) = \dots = h_p(z_{\beta_{s-1}}) \neq h_p(z_{\beta_s})$.

Отсюда

$$\begin{aligned} h_p(z_{\beta_{s-1}} + z_{\beta_s}) &= \min \{ h_p(z_{\beta_{s-1}}), h_p(z_{\beta_s}) \} \leq h_p(z_{\beta_s}), \\ h_p(\varphi(x)) &= h_p(z_{\beta_{s-1}} + z_{\beta_s}) e_{\beta_s} + \sum_{\gamma \neq \beta_s} z_\gamma e_\gamma \leq \\ &\leq h_p((z_{\beta_{s-1}} + z_{\beta_s}) e_{\beta_s}) = h_p(z_{\beta_{s-1}} + z_{\beta_s}) \cdot h_p(e_{\beta_s}) \leq \\ &\leq h_p(z_{\beta_{s-1}}) h_p(e_{\beta_s}) = h_p(z_{\beta_{s-1}} e_{\beta_{s-1}}) = h_p(x). \end{aligned}$$

Итак, всегда $h_p(\varphi(x)) \leq h_p(x)$. Так как φ не может уменьшать высоты, то $h_p(\varphi(x)) = h_p(x)$. Следовательно, φ — сервантное вложение. Лемма доказана.

Таким образом, из существования P_α цепи над $T(A)$ не следует существование X цепи характеристик, где $X \in \mathcal{A}$. Однако в одном частном случае это так.

ЛЕММА 9. Пусть (M, f) - P_α цепь над $T(A)$ и

$$P = \{p \mid \exists \alpha (\alpha \in MI, \chi_\alpha(p) = \infty)\}.$$

Если P конечно, то существует X цепь характеристик, где $X \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Для каждого $\beta \in M^n$ выберем характеристику $\chi_\beta \in \beta$ индукцией по n . Возьмем произвольную характеристику $\chi_\alpha \in \mathcal{A}$. Пусть выбраны характеристики во всех β , где $\beta \in M^{n-1}$, выберем характеристики в β для $\beta \in M^n$ (временно считаем, что $M^0 = \{\alpha\}$). Так как для каждого $\beta \in M^{n-1}$ имеет место $\beta \leq \bigcap_{r \in f(\beta)} \chi_r$, то существуют характеристики $\bar{\chi}_r = (\bar{\chi}_r(p_1), \dots, \bar{\chi}_r(p_n))$ такие, что $\chi_\beta \leq \bigcap_{r \in f(\beta)} \bar{\chi}_r$. Пусть

$$P_n = \{p \mid h_\alpha(p) < \min_{r \in M^n} \bar{\chi}_r(p)\}.$$

Так как $\mathcal{A} = \bigcap_{r \in M^n} \bar{\chi}_r$, то P_n конечно. Теперь для $r \in f(p)$ определим

$$\chi_r(p) = \begin{cases} \chi_\alpha(p), & \text{если } p \in P, \bar{\chi}_r(p) \neq \infty; \\ \infty, & \text{если } \bar{\chi}_r(p) = \infty; \\ \bar{\chi}_r(p), & \text{если } p \notin P, p \notin P_n; \\ \chi_\beta(p), & \text{если } p \notin P, p \in P_n. \end{cases}$$

Заметим, что $\chi_r(p) \neq \bar{\chi}_r(p)$ только для $p \in P \cup P_n$ причем, если эти числа не совпадают, то они конечны. Отсюда характеристики χ_r и $\bar{\chi}_r$ эквивалентны, то есть $\chi_r = \bar{\chi}_r$. Тем самым характеристики выбраны. Покажем, что получается χ_α цепь характеристик. Условие 2 в определении 6 очевидно. Условие I доказывается индукцией по i . Пусть p - простое число. Тогда по индуктивному предположению найдется $\beta \in M^{i-1}$ такое, что $\chi_\alpha(p) = \chi_\beta(p)$. Если $\chi_\alpha(p) < \infty$, то найдется $r \in M^n$ для которого $\chi_r(p) = \infty$. Если $p \in P$, то $\chi_r(p) = \chi_\alpha(p)$, и все доказано. Если $p \notin P$ и $p \notin P_n$, то найдется $r_1 \in M^n$, для которого $\chi_{r_1}(p) = \chi_\alpha(p)$. Если $p \notin P$ и $p \in P_n$, то для $r_2 \in f(\beta)$, $\chi_{r_2}(p) = \chi_\beta(p) = \chi_\alpha(p)$. Итак, в любом случае существует $r \in M^n$, для которого $\chi_r(p) = \chi_\alpha(p)$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Тип $\mathcal{A} \in \Omega$ 1_A - регулярен тогда и только тогда, когда он $\mathcal{A}$ - регулярен.

Доказательство. Если α $\mathcal{L}_A$ -регулярен, то по следствию 2 существует P_α цепь (M, f) . Счетное семейство $M = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ можно разбить на счетное множество попарно непересекающихся счетных подсемейств. На каждом из полученных подсемейств

нетрудно, учитывая, что (M, f) — P_α цепь над $T(A)$, задать структуру P_α цепи над $T(A)$. Таким образом, получим счетное семейство попарно непересекающихся P_α цепей (M_i, f_i) над $T(A)$. Отсюда $A^*(\alpha)$ имеет прямое слагаемое $A_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \oplus \sum_{\beta \in M_i} A_\beta$. При

этом $Q_\alpha \oplus \sum_{\beta \in M_i} A_\beta \subset_r \sum_{\beta \in M_i} A_\beta$, откуда $\sum_{\mathcal{L}_0} Q_\alpha \oplus A_0 \subset_r A_0$.

Далее отсюда следует, что тип α $\mathcal{L}_0 A$ -регулярен.

§ 3. Строение сервантно (регулярно) корректных групп

ТЕОРЕМА 3. Для группы $A \in \mathcal{L}$ следующие утверждения $i)$, $ii)$, $iii)$ эквивалентны:

$i)$ группа A регулярно корректна в $\mathcal{L}$;

$ii)$ состоит из двух частей:

$ii)_1$ если $\emptyset \neq S$ — семейство попарно непересекающихся P_α цепей над $T(A)$, то $z_A(\alpha) > \max\{|S|, \mathcal{L}_0\}$;

$ii)_2$ если $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{M} \leq \mathcal{K}$ и тип α $\mathcal{M}_A$ -регулярен, то $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$;

$iii)$ состоит из трех частей:

$iii)_1$ если $\alpha \in \Omega$ и $A^*(\alpha) = \sum_{i \in I} \oplus A^i \oplus A^0$, где

$A^i = \sum_{j=1}^{K_i} \oplus Q_{\alpha_{ij}}$, $z_A(\alpha_{ij}) > \mathcal{L}_0$, K_i — натуральное число и $\alpha = \bigcap_{j=1}^{K_i} \alpha_{ij}$, $i \in I$, то $z_A(\alpha) > |I|$;

$iii)_2$ если существует P_α цепь над $T(A)$, то $z_A(\alpha) > \mathcal{L}_0$;

$iii)_3$ условие $ii)_2$.

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (iii)$ следует из теоремы I, следствий 3, 4.

Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)_1$ следует из того, что если $\alpha \in \Omega$ и $A^*(\alpha) = \sum_{i \in I} \oplus A^i \oplus A^0$, $A^i = \sum_{j=1}^{K_i} \oplus Q_{\alpha_{ij}}$,

$z_A(\alpha_{ij}) \geq \mathcal{N}_0$, $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{\kappa_i} \alpha_{ij}$, $i \in I$, то, рассуждая аналогично доказательству первой части леммы 4, получим, что над $T(A^*(\alpha))$ существует непустое семейство S - попарно непересекающихся ρ_α цепей, причем $|S| = |I|$. Согласно (ii) , получаем $z_A(\alpha) > |I|$. Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)_2$ следует из $(ii)_2$. Условия $(ii)_2$ и $(iii)_3$ совпадают.

Докажем импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$. Согласно теореме I, достаточно доказать, что если тип $\alpha \in \Omega$ $\mathcal{M}_A$ -регулярен, где либо $\mathcal{M} < \mathcal{N}_1$, либо $\mathcal{M} > \mathcal{N}_1$, то $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$. Если $\mathcal{M} > \mathcal{N}_1$, то указанное утверждение следует из следствия I и условия (iii) . Если $\mathcal{M} < \mathcal{N}_1$ и тип α $\mathcal{M}_A$ -регулярен, то согласно следствию 3 существует ρ_α цепь над $T(A)$ и из $(iii)_2$ следует $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть группа $A \in \mathcal{L}$ такова, что $z_A(\alpha) \geq \mathcal{N}_0$ для любого $\alpha \in \Omega(A)$. Следующие условия эквивалентны:

1. Группа A регулярно корректна в $\mathcal{L}$.
2. Группа A сервантно корректна в $\mathcal{L}$.
3. Если $\alpha \in \Omega$ и $A^*(\alpha) = \sum_{i \in I} A^i \oplus A^0$, где $A^i = \sum_{j=1}^{\kappa_i} Q_{\alpha_{ij}}$, κ_i - натуральное число и $\alpha = \bigwedge_{j=1}^{\kappa_i} \alpha_{ij}$,

$i \in I$, то $z_A(\alpha) > |I|$.

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна. Докажем, что $(2) \Rightarrow (3)$. Пусть для типа α верна посылка условия 3. Тогда очевидно, что тип α $|I|_A$ -сервантен. Согласно теореме I, $z_A(\alpha) > |I|$.

Докажем, что $(3) \Rightarrow (1)$. Пусть тип α $\mathcal{M}_A$ -регулярен, где $\mathcal{M} > 0$. Согласно следствию 4, $\mathcal{M} \geq \mathcal{N}_0$. Поэтому можно применить теорему 2, согласно которой получаем, что верна посылка условия 3 при $I = \mathcal{M}$. По условию 3 $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$. Из теоремы I следует, что верно I.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A \in \mathcal{L}$ такая группа, что множество всех таких простых чисел p , для каждого из которых существует прямое слагаемое B ранга I группы A со свойством $pB = B$, есть конечное множество и для любого $\alpha \in \Omega(A)$ $z_A(\alpha) \neq \mathcal{N}$,

для любого $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1 \leq \mathcal{N} \leq \mathcal{N}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Группа A регулярно корректна в $\mathcal{L}$.
2. Группа A сервантно корректна в $\mathcal{L}$.
3. Условие ii), теоремы 3.

Доказательство. Очевидно, что $(1) \Rightarrow (2)$.

Докажем, что $(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $\phi \neq S$ - семейство попарно непересекающихся P_α цепей типов над $T(A)$, $\alpha \in \Omega$. Согласно следствию 4, можно считать $|S| \geq \mathcal{N}_0$. Из леммы 9 следует, что существует семейство $\mathcal{S}$ попарно пересекающихся χ цепей характеристик, где $\chi \leq \alpha$, $|\mathcal{S}| = |S|$. Согласно лемме 8, тип α S/A - сервантен. По теореме 1, $z_A(\alpha) > |S|$. Таким образом, верно 3.

Для доказательства $(3) \Rightarrow (1)$ достаточно, согласно теореме 3, показать, что если тип α $\mathcal{M}_A$ - регулярен, где $\mathcal{N}_1 \leq \mathcal{M} \leq \mathcal{N}$, то $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$. Если тип α $\mathcal{M}_A$ - регулярен и $\mathcal{N}_1 \leq \mathcal{M} \leq \mathcal{N}$, то согласно следствиям 3, 4 и условию 3 данной теоремы, получаем, что $z_A(\alpha) > \mathcal{N}_0$, так как $z_A(\alpha) \neq \mathcal{N}$ для $\mathcal{N}_1 \leq \mathcal{M} \leq \mathcal{N}$, то $z_A(\alpha) > \mathcal{N}_1$, следовательно, $z_A(\alpha) > \mathcal{M}$. Теорема доказана.

Литература

1. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., "Наука", 1969.
2. De Groot J. An Isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups. - "Math. Annalen", 1956, 132, 328-332.
3. Росошек С.К. Об изоморфизме эквивалентных абелевых групп. - "Труды ТГУ, серия механико-математическая". 1974, 253, 39-43.
4. Tuckers L. Infinite abelian groups V. 2. New-York and London, "Academic Press" 1973.

Прстушло
5 октября 1976 г.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ

С.Ф.Кожухов

При рассмотрении различных вопросов теории абелевых групп часто возникает задача изучения абелевых групп, не имеющих ненулевых нильпотентных эндоморфизмов. Так, например, если группа автоморфизмов абелевой группы G без кручения периодична (конечна) или если все автоморфизмы абелевой группы G , кроме тождественного, регулярны, то группа G не имеет отличных от нуля нильпотентных эндоморфизмов. Назовем абелеву группу свободной от нильпотентностей, если она не имеет ненулевых нильпотентных эндоморфизмов.

Работа посвящена изучению свободных от нильпотентностей абелевых групп. Получено описание периодических и смешанных свободных от нильпотентностей абелевых групп. Затем рассматриваются свободные от нильпотентностей группы без кручения. При этом рассматривается класс $\mathcal{A}$ групп G без кручения, содержащих такие подгруппы $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i$, что каждая группа A_i сервантна в G и является сильно неразложимой [1] группой конечного ранга, а фактор-группа G/A ограничена. Каждую такую подгруппу A будем называть полным квазиразложением группы G . Отметим, что класс $\mathcal{A}$ содержит в себе класс всех групп конечного ранга, класс всех вполне разложимых групп и другие классы групп без кручения.

Начнем рассмотрение свободных от нильпотентностей абелевых групп с доказательства простой, но весьма важной леммы.

ЛЕММА 1. Группа $G = \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$ свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) для

любого индекса $i \in J$ группа G_i свободна от нильпотентностей;

б) для любых индексов $i, j \in J$, $i \neq j$, $\text{Hom}(G_i, G_j) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G свободна от нильпотентностей. Если для некоторого индекса $i \in J$ группа G_i обладает нильпотентным эндоморфизмом $\varphi_i \neq 0$, то эндоморфизм φ , действующий как φ_i на подгруппе G_i и как 0 на остальных подгруппах, является ненулевым нильпотентным эндоморфизмом. Далее, пусть $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(G, G_j)$. Тогда для эндоморфизма ψ такого, что $\psi(g) = \varphi(g)$, если $g \in G_i$, и $\psi(g) = 0$, если $g \in G_j$, имеем $\psi^2 = 0$. Это также противоречит условию.

Обратно, пусть для группы G выполнены условия леммы и φ - произвольный нильпотентный эндоморфизм группы G . Согласно условию б), эндоморфизм φ индуцирует на каждой подгруппе G_i некоторый нильпотентный эндоморфизм φ_i . Ввиду условия а), для каждого индекса $i \in J$ $\varphi_i = 0$, значит и $\varphi = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Периодическая группа G свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда каждая ее p -компонента изоморфна либо $Z(p)$, либо $Z(p^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть некоторая p -компонента G_p группы G отлична от группы типа $Z(p^\infty)$, $k = 1, 2, \dots, \infty$. Известно, что тогда группа G_p разлагается в прямую сумму некоторых двух ее ненулевых подгрупп A, B . В таком случае $G = A \oplus B \oplus \sum_{p \neq p} G_p$. Поскольку для любых p -групп A и B либо $\text{Hom}(A, B) \neq 0$, либо $\text{Hom}(B, A) \neq 0$, то группа G не удовлетворяет условию б) леммы 1. Итак, каждая p -компонента G_p изоморфна $Z(p^k)$, $k = 1, 2, \dots, \infty$. Пусть для некоторого p $G_p \cong Z(p^k)$ и $k > 1$, $k \neq \infty$. Тогда эндоморфизм φ группы G_p , действующий на ее элементах как умножение на число p , очевидно, отличен от нуля и нильпотентен. Так как это противоречит лемме 1, то $G_p \cong Z(p)$ или $G_p \cong Z(p^\infty)$. Обратное утверждение очевидно, так как группы $Z(p)$ и $Z(p^\infty)$ свободны от нильпотентностей.

Перейдем к рассмотрению свободных от нильпотентностей смешанных абелевых групп. Для смешанной абелевой группы G через $t(G)$ обозначим периодическую часть группы G , а $\Pi(t(G))$ - множество тех простых чисел p , для которых p -компонента группы G отлична от нуля. Предварительно сформулируем две леммы, доказательство которых можно найти в [2].

ЛЕММА 3. Пусть G - произвольная абелева группа. Группа $\text{Hom}(G, Z(p))$ равна нулю тогда и только тогда, когда G p -делима.

ЛЕММА 4. Если G - смешанная абелева группа, то $\text{Hom}(G, Z(p^\infty)) \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если G - свободная от нильпотентностей смешанная абелева группа, то $t(G) = \sum_p^\oplus \langle g_p \rangle$, $o(g_p) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая как в теореме 2, нетрудно получить, что каждая p -компонента группы $t(G)$ либо группа типа $Z(p)$, либо типа $Z(p^\infty)$. Если для некоторого p p -компонента G_p изоморфна $Z(p^\infty)$, то $G = G_p \oplus G(p)$ и группа $G(p)$ смешанная. Ввиду леммы 4, $\text{Hom}(G(p), G_p) \neq 0$, что противоречит лемме 1.

ЛЕММА 6. Пусть G - свободная от нильпотентностей смешанная абелева группа. Тогда фактор-группа $G/t(G)$ p -делима для любых простых чисел $p \in \Pi(t(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \Pi(t(G))$, $G = \langle g_p \rangle \oplus G(p)$ и покажем, что в группе $G/t(G)$ разрешимо уравнение $p(x + t(G)) = g + t(G)$ для любого элемента $g \notin t(G)$. Элемент g запишем в виде $g = \kappa g_p + g'$, где $g' \in G(p)$. Так как G свободна от нильпотентностей, то ввиду леммы 3 группа $G(p)$ p -делима. Значит, существует элемент $g'_1 \in G(p)$ такой, что $pg'_1 = g'$. В таком случае $pg'_1 - g = g' - g = -\kappa g_p \in t(G)$, то есть $p(g'_1 + t(G)) = g + t(G)$.

ЛЕММА 7. Если G - свободная от нильпотентностей смешанная абелева группа, то каждый класс смежности $g + t(G)$ содержит элемент a такой, что его p -высота в группе G равна p -высоте элемента $g + t(G)$ в группе $G/t(G)$ для любого простого числа p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \Pi(t(G))$ и $g + t(G)$ - произвольный элемент из группы $G/t(G)$. Тогда, согласно лемме 6, элемент $g + t(G)$ имеет бесконечную p -высоту в группе $G/t(G)$. Если $G = \langle g_p \rangle \oplus G(p)$, то $g = \kappa g_p + g'$, где $g' \in G(p)$. Поскольку $g - g' = \kappa g_p \in t(G)$, то $g' \in g + t(G)$. Ввиду леммы 3, группа $G(p)$ p -делима. Поэтому элемент g' имеет бесконечную p -высоту в группе $G(p)$, а значит, и в группе G . Пусть теперь $p \notin \Pi(t(G))$ и p -высота элемента $g + t(G)$ в группе $G/t(G)$ равна κ . Следовательно, в группе G существует элемент x такой, что $p^\kappa(x + t(G)) = g + t(G)$ или $p^\kappa x - g = t$, где $o(t)$ конечен. Ввиду того, что $p \notin \Pi(t(G))$, $p(t)$ взаимно прост с p . Известно, что в этом случае в группе G существует элемент t' такой, что $p^\kappa t' = t$, и, значит, $p^\kappa(x - t') = g$. Следова-

но, p -высота элемента $y \in g + t(G)$ не меньше, чем K . А поскольку элемент $g + t(G)$ является гомоморфным образом элемента g при естественном гомоморфизме группы G на $G/t(G)$ и при любом гомоморфизме абелевой группы G в любую группу p -высота образа любого ее элемента не меньше p -высоты самого элемента, то p -высота элемента g в группе G равна K .

ТЕОРЕМА 8. Смешанная абелева группа G свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда она расщепляется, $G = t(G) \oplus F$ и удовлетворяет следующим условиям:

- а) каждая p -компонента группы $t(G)$ изоморфна $Z(p)$;
- б) группа F свободна от нильпотентностей;
- в) $pF = F$ для любых простых чисел $p \in \Pi(t(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G свободна от нильпотентностей. Ввиду следствия 5, лемм 6 и 7, группа G удовлетворяет следующим условиям: периодическая часть группы G сепарабельна, фактор-группа $G/t(G)$ p -делима для любого $p \in \Pi(t(G))$ и каждый класс смежности $g + t(G)$ содержит такой элемент a , что его p -высота в группе G равна p -высоте элемента $g + t(G)$ в группе $G/t(G)$. Согласно [4], группа G расщепляется, то есть $G = t(G) \oplus F$. В таком случае утверждения а) - в) очевидны.

Обратно, пусть $G = t(G) \oplus F$, G удовлетворяет условиям теоремы и пусть φ - произвольный нильпотентный эндоморфизм группы G . Из условий а) и в) и леммы 3 следует, что подгруппы $t(G)$ и F вполне характеристичны в G . Значит, φ индуцирует на этих подгруппах нильпотентные эндоморфизмы, которые, согласно условию, равны нулю. Значит $\varphi = 0$, то есть G свободна от нильпотентностей.

Перейдем теперь к рассмотрению свободных от нильпотентностей групп без кручения. Как уже отмечалось, будем рассматривать группы из класса $\mathcal{A}$. При этом воспользуемся терминологией из [1]. Подгруппу H группы G без кручения назовем квазиравной группой G , если фактор-группа G/H ограничена, то есть $nG \subseteq H$ для некоторого целого n . Подгруппу $A \oplus B$ группы G назовем прямым квазиразложением группы G , если она квазиравна группе G (подгруппы A и B в этом случае называем прямыми квазислагаемыми группами G). Если группа G без кручения не имеет нетривиальных прямых квазиразложений, то G сильно неразложима. Следуя [5], назовем всякую сервантную вполне характеристическую подгруппу группы G без кручения p - f -подгруппой, а через $\text{Soc } G$ (псев-

дополнень) обозначим сервантную подгруппу группы G , порожденную всеми ее минимальными ρfi -подгруппами. Для любого подмножества элементов M группы G без кручения через $\langle M \rangle_*^G$ обозначим ее сервантную подгруппу, порожденную M .

ЛЕММА 9. Пусть G - группа без кручения, H - квазиравная ей подгруппа ($nG \subseteq H$). Если A - ρfi -подгруппа (минимальная ρfi -подгруппа) группы G , то $\langle nA \rangle_*^H$ - ρfi -подгруппа (минимальная ρfi -подгруппа) группы H . Обратно, если A - ρfi -подгруппа (минимальная ρfi -подгруппа) группы H , то $\langle A \rangle_*^G$ - ρfi -подгруппа (минимальная ρfi -подгруппа) группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A - ρfi -подгруппа группы G . Предварительно покажем, что $\langle nA \rangle_*^H = A \cap H$. Очевидно, что $\langle nA \rangle_*^H \subseteq A \cap H$. Пусть $x \in A \cap H$, то есть $x \in A$ и $x \in H$. В таком случае, $nx \in \langle nA \rangle_*^H$, и, значит, $x \in \langle nA \rangle_*^H$. Покажем, что $\langle nA \rangle_*^H$ - ρfi -подгруппа группы H . Если φ - эндоморфизм группы H , то $n\varphi$ - эндоморфизм группы G . Поэтому для любого элемента $g \in \langle nA \rangle_*^H$ ($n\varphi(g) \in A \cap H = \langle nA \rangle_*^H$). Итак, $\varphi(g) \in H$ и $n\varphi(g) \in \langle nA \rangle_*^H$. Следовательно, $\varphi(g) \in \langle nA \rangle_*^H$. Аналогично показывается, что если A - ρfi -подгруппа группы H , то $\langle A \rangle_*^G$ - ρfi -подгруппа группы G . Пусть A - минимальная ρfi -подгруппа группы G . Согласно вышесказанному, $\langle nA \rangle_*^H$ - ρfi -подгруппа группы H . Предположим, что существует ρfi -подгруппа B группы H , которая входит в $\langle nA \rangle_*^H$. В таком случае $\langle B \rangle_*^G \subseteq \langle \langle nA \rangle_*^H \rangle_*^G = A$ и $\langle B \rangle_*^G$ является ρfi -подгруппой группы G , что противоречит минимальности группы A . Аналогично показывается, что если A - минимальная ρfi -подгруппа группы H , то $\langle A \rangle_*^G$ - минимальная ρfi -подгруппа группы G .

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть G - группа без кручения и $A \oplus B$ - квазиравная ей подгруппа. Если A сервантна в G и $\text{Hom}(A, B) = 0$, то A вполне характеристична в G .

В [5] показано, что если группа G конечного ранга свободна от нильпотентностей, то $G = \text{Soc } G$. Оказывается, это утверждение справедливо для любой группы из класса $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 11. Если группа $G \in \mathcal{A}$ свободна от нильпотентностей, то $G = \text{Soc } G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \sum_{i \in I} A_i$ - полное квазиразложение группы G и $nG \subseteq A$. Так как для любого эндоморфизма φ группы G $n\varphi$ является эндоморфизмом группы A и наоборот, то G свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда A сво-

бодна от нильпотентностей. Ввиду леммы 1, каждая подгруппа A_i вполне характеристична в A . Поэтому, поскольку сильно неразложимая группа свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда она совпадает со своим псевдооколом [5], то нетрудно видеть, что $A = Soc A$. Пусть $\mathcal{P}(G)$ и $\mathcal{P}(A)$ - соответственно совокупности минимальных $\rho\phi i$ -подгрупп групп G и A . Согласно вышесказанному, $A = Soc A = \langle N | N \in \mathcal{P}(A) \rangle_*^A$. Так как $nG \subseteq A$, то для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(A)$. В самом деле, если $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(A)$, то $G = \langle A \rangle_*^G = \langle Soc A \rangle_*^G = \langle \langle N | N \in \mathcal{P}(A) \rangle_*^A \rangle_*^G = \langle N | N \in \mathcal{P}(G) \rangle_*^G = Soc G$. Итак, пусть $N \in \mathcal{P}(G)$. По лемме 9 $\langle nN \rangle_*^A$ - минимальная $\rho\phi i$ -подгруппа группы A , поэтому $\langle nN \rangle_*^A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} (\langle nN \rangle_*^A \cap A_i)$. Так как $\langle nN \rangle_*^A$ и A_i вполне характеристичны в A , то $\langle nN \rangle_*^A \cap A_i$ - $\rho\phi i$ -подгруппы группы A . Ввиду минимальности подгруппы $\langle nN \rangle_*^A$, существует индекс i такой, что $\langle nN \rangle_*^A \cap A_i = \langle nN \rangle_*^A$, то есть $\langle nN \rangle_*^A \subseteq A_i$. Поскольку A_i сервантна в G , то очевидно, что $\langle nN \rangle_*^A = \langle nN \rangle_*^G = \langle nN \rangle_*^G = N$, то есть $\mathcal{P}(G) \subseteq \mathcal{P}(A)$. Аналогично показывается обратное включение.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $G \in \mathcal{OL}$ и $A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} A_i$ - некоторое полное квазиразложение группы G . Для группы G следующие условия эквивалентны:

- а) группа G свободна от нильпотентностей;
- б) для любого $i \in \mathcal{I}$ $A_i = Soc A_i$ и $Hom(A_i, A_j) = 0$ для любого $j \in \mathcal{I}$, $j \neq i$;
- в) $G = Soc G$ и для любых индексов $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$, $Hom(A_i, A_j) = 0$;
- г) для любого индекса $i \in \mathcal{I}$ подгруппа A_i вполне характеристична в G и $A_i = Soc A_i$;
- д) $G = Soc G$ и для любого индекса $i \in \mathcal{I}$ подгруппа A_i вполне характеристична в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $(a) \Rightarrow (v) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ следуют из доказательства леммы 11 и из леммы 1. Чтобы доказать эквивалентность условий г) и д) условиям а), б) и в), достаточно показать, что если каждая подгруппа A_i вполне характеристична в G , то $Hom(A_i, A_j) = 0$ для любого индекса $j \in \mathcal{I}$, $j \neq i$. Это утверждение следует из леммы 9. Так как если A_i вполне характеристична в G и $nG \subseteq N$, то $\langle nA_i \rangle_*^A = A_i$ - $\rho\phi i$ -подгруппа A , то есть $Hom(A_i, A_j) = 0$ для любого индекса $j \in \mathcal{I}$, $j \neq i$.

СЛЕДСТВИЕ 13. Если группа $G \in \mathcal{O}$ свободна от нильпотентностей, то каждое сервантное квазислагаемое группы G вполне хагактеристично в группе G .

ТЕОРЕМА 14. Если группа $G \in \mathcal{O}$ свободна от нильпотентностей, то она обладает единственным полным квазиразложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} A_i$ - некоторое полное квазиразложение группы G , $nG \subset A$ и пусть B - сильно неразложимое квазислагаемое конечного ранга группы G , являющееся прямым слагаемым ее полного квазиразложения. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $B = A_i$ для некоторого индекса $i \in \mathcal{I}$. По лемме 9 $\langle nB \rangle_*^A$ - $\rho\mathfrak{f}i$ -подгруппа группы A . Значит, $\langle nB \rangle_*^A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} (\langle nB \rangle_*^A \cap A_i)$. Поскольку группа $\langle nB \rangle_*^A$ сильно неразложима, то существует индекс $i \in \mathcal{I}$ такой, что $\langle nB \rangle_*^A \subseteq A_i$. Ввиду сервантности группы A_i , нетрудно получить, что $\langle nB \rangle_*^A = \langle nB \rangle_*^G = B \subseteq A_i$. Так как B - прямое квазислагаемое группы G , то B - прямое квазислагаемое группы A_i [3]. Но группа A_i сильно неразложима, поэтому $A_i = B$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 15. Пусть группа $G \in \mathcal{O}$ свободна от нильпотентностей и $A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} A_i$ - ее полное квазиразложение. Тогда каждое сервантное квазислагаемое B группы G является сервантной оболочкой некоторого семейства групп A_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B - сервантное квазислагаемое группы G . По следствию 13, B - $\rho\mathfrak{f}i$ -подгруппа группы G . Поэтому если $nG \subset A$, то $\langle nB \rangle_*^A$ - $\rho\mathfrak{f}i$ -подгруппа группы A . Следовательно, $\langle nB \rangle_*^A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} (\langle nB \rangle_*^A \cap A_i)$. Пусть $\mathcal{I}_1$ множество тех индексов из $\mathcal{I}$, для которых $\langle nB \rangle_*^A \cap A_i \neq 0$, то есть $\langle nB \rangle_*^A = \sum_{i \in \mathcal{I}_1}^{\oplus} (\langle nB \rangle_*^A \cap A_i)$. Таким образом, $\langle nB \rangle_*^A \cap A_i$ - прямое квазислагаемое группы B , а значит, $\langle nB \rangle_*^A \cap A_i$ - прямое квазислагаемое группы G . В таком случае $\langle nB \rangle_*^A \cap A_i$, ввиду [3], является прямым квазислагаемым A_i . Ввиду сильной неразложимости группы A_i , $\langle nB \rangle_*^A \cap A_i = A_i$. Итак, $\langle nB \rangle_*^A = \sum_{i \in \mathcal{I}_1}^{\oplus} A_i$ и, значит, $B = \langle \langle nB \rangle_*^A \rangle_*^G = \langle \sum_{i \in \mathcal{I}_1}^{\oplus} A_i \rangle_*^G$.

СЛЕДСТВИЕ 16. Всякое квазислагаемое свободной от нильпотентностей группы из класса $\mathcal{O}$ также свободно от нильпотентностей и принадлежит классу $\mathcal{O}$.

СЛЕДСТВИЕ 17. Если группа $G \in \mathcal{O}$ свободна от нильпотентностей,

то каждое из прямое квазиразложение с сервантными квазислагаемыми можно продолжить до полного квазиразложения.

В заключении работы дадим описание свободных от нильпотентностей групп G , которые квазиравны вполне разложимым, векторным или сепарабельным группам. Если $G = \sum_{i \in I} A_i$ ($G = \sum_{i \in I}^* A_i$)

-- вполне разложимая группа (векторная группа), то через $S_2(G)$ обозначаем множество всех различных типов групп A_i ранга 1, а для любого $\alpha \in S_2(G)$ $\tau_\alpha(\alpha)$ -- мощность множества тех групп A_i , тип которых равен α .

ТЕОРЕМА 18. Пусть группа G квазиравна подгруппе A , которая либо вполне разложима, либо является векторной группой. Группа G свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда любые два типа из $S_2(A)$ несравнимы и для любого типа $\alpha \in S_2(A)$ $\tau_\alpha(\alpha) = 1$.

ТЕОРЕМА 19. Пусть группа G квазиравна сепарабельной подгруппе A . Группа G свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда A является вполне разложимой группой, удовлетворяющей условиям теоремы 17.

Доказательство этих теорем основано на том факте, что G свободна от нильпотентностей тогда и только тогда, когда A свободна от нильпотентностей. Доказательство утверждений для группы A можно найти в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reid J.D. On the ring of quasi-endomorphisms of torsion-free groups. -- "Topics in Abelian groups," Chicago, 1963, 57-61.
2. Фуко И. Бесконечные абелевы группы. Т.1. Москва, "Мир", 1974.
3. Фуко И. Бесконечные абелевы группы. Т.2. Москва, "Мир", 1977.
4. Дуравский В.С. О расщеплении некоторых смешанных абелевых групп. -- "Матем. сб.", 1969, 48, 499-508.
5. Крылов П.А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. -- "Матем. сб.", 1974, 96, 2, 214-228.
6. Кожухов С.Ф. О регулярных автоморфизмах абелевых групп. -- "Группы и модули", 1. Томск, Издательство ТГУ, 3-10.

Поступило

5 октября 1976 г.

РЕГУЛЯРНО ЗАМКНУТЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С.Ф. Кожухов

В работе изучаются абелевы группы без кручения, у которых все регулярные автоморфизмы вместе с тождественным автоморфизмом образуют подгруппу в группе всех автоморфизмов. Такие группы назовем регулярно замкнутыми. В работе рассматривается класс $\mathcal{OL}$ групп без кручения, введенный в [1]. Вся основная терминология и обозначения также взяты из [1]. Через $\text{Aut } G$ обозначаем группу всех автоморфизмов группы G , а под ε всюду понимаем тождественный автоморфизм соответствующей группы.

Примером регулярно замкнутых групп являются регулярно полные группы, то есть группы, у которых все автоморфизмы, кроме тождественного, регулярны. Регулярно замкнутыми являются также группы, у которых единственным регулярным автоморфизмом является автоморфизм $-\varepsilon$, то есть автоморфизм вида $g \mapsto -g$, $g \in G$. Такие группы назовем регулярно простыми. В работе доказывается, что группа G из класса $\mathcal{OL}$ регулярно замкнута тогда и только тогда, когда она либо регулярно полна, либо регулярно проста (теорема 3). Регулярно полные группы из класса $\mathcal{OL}$ подробно рассматривались в [2]. Поэтому в дальнейшем работа посвящена изучению регулярно простых групп. В [3] дано описание некоторых классов регулярно простых групп (вполне разложимых, сепарабельных и др.). При этом оказывается, что регулярная простота групп G из этих классов эквивалентна тому, что группа автоморфизмов $\text{Aut } G$ разлагается в прямое произведение подгрупп типа $Z(2)$. В настоящей работе доказано, что группа автоморфизмов регулярно простой группы из класса $\mathcal{OL}$ является 2-группой (следствие 6).

Более того, во многих случаях группа автоморфизмов регулярно простых групп из этого класса разлагается в прямое произведение групп типа $Z(2)$ (теорема 9). Однако существуют группы из класса $\mathcal{O}_2$, группы автоморфизмов которых не изоморфны прямому произведению групп типа $Z(2)$, но сами группы регулярно просты (теорема 3). В работе получены необходимые и достаточные условия того, чтобы группа автоморфизмов группы $G \in \mathcal{O}_2$ разлагалась в прямое произведение групп типа $Z(2)$ (теорема 11).

ЛЕММА 1. Если группа G без кручения регулярно замкнута, то она свободна от нильпотентностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ — отличный от нуля нильпотентный эндоморфизм группы G . Тогда $\varphi + \varepsilon$ — автоморфизм группы G , не являющийся регулярным. В самом деле, если автоморфизм $\varphi + \varepsilon$ регулярен, то $(\varphi + \varepsilon) - \varepsilon = \varphi$ — изоморфизм, чего быть не может ввиду нильпотентности φ . В то же время автоморфизм $-\varphi - \varepsilon$ регулярен. Действительно, пусть для $g \in G$ $(-\varphi - \varepsilon)(g) = g$. Если $\varphi^m = 0$, то $(-\varphi)(g) = 2g$, $(-\varphi)^2(g) = 4g, \dots, 0 = (-\varphi^m)(g) = 2^m g$. Поскольку G — группа без кручения, то $g = 0$. Имеем два регулярных автоморфизма $-\varepsilon$ и $-\varphi - \varepsilon$, произведение которых $(-\varphi - \varepsilon)(-\varepsilon) = \varphi + \varepsilon$ не является регулярным автоморфизмом. Это противоречит регулярной замкнутости группы G .

ЛЕММА 2. Если квазиразложимая группа $G \in \mathcal{O}_2$ регулярно замкнута, то ее группа автоморфизмов $\text{Aut } G$ периодична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \sum_{i \in \mathcal{I}}^{\oplus} A_i$ — полное квазиразложение группы G и n — натуральное число со свойством $nG \in A$. Предположим, что для некоторого индекса $i \in \mathcal{I}$ группа A_i обладает автоморфизмом φ бесконечного порядка. Так как группа A_i имеет конечный ранг, то фактор-группа A_i/nA_i конечна. Следовательно, автоморфизм φ индуцирует на этой фактор-группе автоморфизм конечного порядка, то есть существует такое натуральное m , что $\varphi^m(a) - a \in nA_i$ для любого элемента $a \in A_i$. Пусть $g \in G$ и $B = \langle A_j | j \in \mathcal{I}, j \neq i \rangle_G^*$. Тогда $ng = a + b$, где $a \in A_i$, $b \in B$. Рассмотрим в группе G уравнение $nx = \varphi^m(a) + b$. Так как $\varphi^m(a) - a = na_1$ для некоторого элемента $a_1 \in A_i$, то $x_0 = g + a_1$ является решением этого уравнения. В самом деле, $nx_0 = ng + na_1 = a + b + \varphi^m(a) - a = \varphi^m(a) + b$. Положим, $\psi(g) = x_0$. Нетрудно видеть, что ψ является автоморфизмом группы G , который действует как φ^m на A_i и как ε на B (очевидно, ψ не регулярен). Поскольку группа A_i сильно неразложима и, ввиду [1],

$A_i = \text{Soc } A_i$, то каждый эндоморфизм группы A_i , отличный от нуля, есть мономорфизм [4]. Следовательно, группа A_i регулярно полна. В таком случае, автоморфизм $-\varphi^m$ регулярен, а значит, регулярен автоморфизм $-\varphi$. Но произведение регулярных автоморфизмов $-\varphi$ и $-\varepsilon$ не является регулярным автоморфизмом, что противоречит регулярной замкнутости группы G .

Итак, всякий автоморфизм каждой группы A_i , $i \in J$ имеет конечный порядок. Согласно [5, с. 315] порядок любого автоморфизма группы A_i , $i \in J$ равен 2, 3, 4, 6, то есть, если $\varphi \in \text{Aut}(A_i)$, то $\varphi^{12} = \varepsilon$. Пусть ψ - произвольный автоморфизм группы G . Согласно [1], автоморфизм ψ индуцирует на каждой подгруппе A_i , $i \in J$, автоморфизм ψ_i , причем $\psi_i^{12} = \varepsilon$. В таком случае $\psi^{12} = \varepsilon$, то есть группа $\text{Aut } G$ периодична.

ТЕОРЕМА 3. Группа $G \in \mathcal{A}$ регулярно замкнута тогда и только тогда, когда она либо регулярно полна, либо регулярно проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G сильно неразложима, то ее ранг конечен по определению класса $\mathcal{A}$ и согласно лемме 1 и [1] $G = \text{Soc } G$. В таком случае, как уже отмечалось в доказательстве леммы 2, все ее автоморфизмы, отличные от тождественного, регулярны, то есть группа G регулярно полна. Итак, пусть группа G квазиразложима и $A = \sum_{i \in J}^{\oplus} A_i$ - ее полное квазиразложение. Согласно лемме 2, группа $\text{Aut } G$ периодична. Покажем сначала, что все автоморфизмы порядка 3 и 6 группы G регулярны. Для этого достаточно показать, что регулярны все ее автоморфизмы порядка 3. Пусть φ - нерегулярный автоморфизм порядка 3. Тогда автоморфизм $-\varphi$ регулярен. В самом деле, если $(-\varphi)(g) = g$, то $(-\varphi)^2(g) = g$ и $g = (-\varphi)^3(g) = (-\varepsilon)(g) = -g$, то есть $g = 0$. В таком случае произведение регулярных автоморфизмов $-\varphi$ и $-\varepsilon$ не является регулярным автоморфизмом, что противоречит регулярной замкнутости группы G . Итак, нерегулярными автоморфизмами в группе G могут быть лишь автоморфизмы порядков 2 и 4.

Предположим, что $-\varepsilon$ - единственный автоморфизм порядка 2 группы G . Тогда всякий автоморфизм φ группы G порядка 4 регулярен, так как $\varphi^2 = -\varepsilon$. Следовательно, в этом случае группа G регулярно полна.

Пусть группа G обладает автоморфизмом ε порядка 2 и $\varepsilon \neq -\varepsilon$. Тогда ε является нерегулярным автоморфизмом. Действительно, если ε регулярен, то $\varepsilon - \varepsilon$ - мономорфизм. Поскольку $\varepsilon^2 = \varepsilon$, то $(\varepsilon - \varepsilon)(\varepsilon + \varepsilon) = 0$, а значит, $\varepsilon + \varepsilon = 0$. Тем самым

показано, что единственным регулярным автоморфизмом порядка 2 в любой группе является автоморфизм $-\varepsilon$. Из [1] следует (так как $A_i = \text{Soc } A_i$ и A_i сильно неразложима), что каждая группа $A_i, i \in \mathcal{I}$ регулярно полна и вполне характеристична в G . Поэтому автоморфизм $\mathcal{A}$ индуцирует на каждой подгруппе $A_i, i \in \mathcal{I}$ либо автоморфизм ε , либо $-\varepsilon$. Пусть B - сервантная оболочка тех подгрупп A_i , на которых $\mathcal{A}$ действует как ε , а C - сервантная оболочка остальных подгрупп A_i . Покажем теперь, что в группе G $-\varepsilon$ - единственный регулярный автоморфизм, то есть, что группа G регулярно проста. Пусть φ - регулярный автоморфизм группы G , отличный от $-\varepsilon$. Автоморфизм φ индуцирует соответственно на подгруппах B и C регулярные автоморфизмы φ_B и φ_C . Тогда автоморфизм $\mathcal{A}\varphi$ действует как φ_B на подгруппе B и как $-\varphi_C$ на подгруппе C . Если автоморфизм $-\varphi_C$ не регулярен, то, значит, автоморфизм φ_C действует на какой-то подгруппе A_i как $-\varepsilon$. Но в таком случае φ^2 действует на этой подгруппе как ε , то есть φ^2 не регулярен. Это же противоречит регулярной замкнутости группы G . Итак, автоморфизм $-\varphi_C$ регулярен. Следовательно, регулярен и автоморфизм $\mathcal{A}\varphi$. Тогда произведение двух регулярных автоморфизмов $\mathcal{A}\varphi$ и φ^{-1} равняется $\mathcal{A}$, то есть не является регулярным автоморфизмом. Полученное противоречие говорит о том, что в группе G нет регулярных автоморфизмов, отличных от $-\varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ 4. В любой группе без кручения автоморфизм $-\varepsilon$ - единственный регулярный автоморфизм порядка 2.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если G - сильно неразложимая группа конечного ранга и $G = \text{Soc } G$, то $-\varepsilon$ - единственный ее автоморфизм порядка 2.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если группа G из класса $\mathcal{A}$ регулярно проста, то группа $\text{Aut } G$ является 2-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G регулярно проста, то группа $\text{Aut } G$ периодична. Следовательно, автоморфизмы группы G имеют порядки 2, 3, 4 или 6 [5, с. 315]. Для доказательства утверждения надо показать, что G не имеет автоморфизма порядка 3. Из доказательства теоремы 3 следует, что если α - автоморфизм порядка 3, то $-\alpha$ - регулярный автоморфизм, отличный от $-\varepsilon$. Это противоречит регулярной простоте группы G .

Как уже отмечалось, из [3] следует, что регулярная простота различных классов групп G без кручения (вполне разложимых, сепарабельных групп, а также векторных групп) эквивалентна тому, что

группа $\text{Aut } G$ разлагается в прямое произведение групп типа $Z(2)$. Из следствия 1 нетрудно получить, что любая группа без кручения регулярно проста, если ее группа автоморфизмов изоморфна прямому произведению групп типа $Z(2)$. Однако разложимость группы автоморфизмов группы без кручения в прямое произведение подгрупп типа $Z(2)$ не является характеристическим свойством регулярной простоты.

ЛЕММА 7. Пусть G - не 2-делимая группа без кручения и φ - такой ее автоморфизм, что $\varphi^2 = -E$. Тогда в группе G существует элемент g , для которого $\varphi(g) - g \notin 2G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для любого элемента $g \in G$ $\varphi(g) - g \in 2G$, то есть $\varphi(g) - g = 2g_1$ для некоторого $g_1 \in G$. Это означает, что $\varphi - E = 2\chi$, где χ - эндоморфизм группы G . Тогда $\varphi = E + 2\chi$ или $-E = \varphi^2 = (E + 2\chi)^2 = E + 4(\chi + \chi^2)$, то есть $-E = 2(\chi + \chi^2)$. Это равенство показывает, что группа G 2-делима, что противоречит условию леммы.

ТЕОРЕМА 8. Существуют регулярно простые группы без кручения такие, что их группы автоморфизмов не разлагаются в прямое произведение групп типа $Z(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем три группы A, B, C со свойствами:

- 1) $\text{Aut}(A) = \langle \varphi | \varphi^2 = -E \rangle$, $\text{Aut } B = \langle -E \rangle$, $\text{Aut}(C) = \langle -E \rangle$;
 - 2) $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(B, A) = \text{Hom}(A, C) = \text{Hom}(C, A) = \text{Hom}(B, C) = \text{Hom}(C, B) = 0$. Существование таких групп показано в [6].
- В группе A , согласно лемме 7, выберем элемент a такой, что $\varphi(a) + a \notin 2A$, а в группах B и C возьмем элементы b и c , соответственно имеющие нулевую 2-высоту. Рассмотрим группу $G = \langle A, B, C, g_1, g_2 \rangle$, где $4g_1 = 2a + b + c$, $4g_2 = 2\varphi(a) + b - c$. Покажем, что группа G является искомой.

1. Покажем сначала, что подгруппы A, B и C сервантны в группе G . Для этого достаточно показать, что если $4g \in A$ ($4g \in B$ или $4g \in C$), то $g \in A$ (соответственно $g \in B$ или $g \in C$).

а) Пусть $4g \in A$ и $g = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \kappa g_1 + \ell g_2$, где $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ и $\bar{c} \in C$. Тогда $4g = 4\bar{a} + 4\bar{b} + 4\bar{c} + 2\kappa a + \kappa b + \kappa c + 2\ell \varphi(a) + \ell b - \ell c$. Поскольку $4g \in A$, то $(\kappa + \ell)b = -4\bar{b}$ и $(\kappa - \ell)c = -4\bar{c}$. Ввиду выбора элементов b и c , $\kappa + \ell \equiv 0 \pmod{4}$ и $\kappa - \ell \equiv 0 \pmod{4}$. Согласно построению группы G , $0 \leq \kappa < 4$ и $0 \leq \ell < 4$, поэтому эти два сравнения имеют место лишь в случаях $\kappa = \ell = 0$ или $\kappa = \ell = 2$. Если $\kappa = \ell = 0$, то, очевидно, $g \in A$. Если же $\kappa = \ell = 2$, то $\bar{b} = -b$ и $\bar{c} = 0$. В таком случае $g = \bar{a} - b +$

$$+2g_1+2g_2 \text{ или } 2g=2\bar{a}-2\bar{b}+2a+b+c+2\varphi(a)+\bar{b}-c=2\bar{a}+2a+2\varphi(a).$$

Следовательно, $g \in A$, поскольку $g = \bar{a} + a + \varphi(a) \in A$.

б) Пусть $4g \in B$ и $g = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \kappa g_1 + \ell g_2$ или $4g = 4\bar{a} + 4\bar{b} + 4\bar{c} + 2\kappa a + \kappa b + \kappa c + 2\ell\varphi(a) + \ell b - \ell c$. Так как $4g \in B$, то $4\bar{a} + 2\kappa a + 2\ell\varphi(a) = 0$ и $4\bar{b} + \kappa c - \ell c = 0$. Ввиду выбора элемента с последнее равенство возможно лишь в случае $\kappa - \ell \equiv 0 \pmod{4}$. Поскольку $0 \leq \kappa < 4$ и $0 \leq \ell < 4$, то это сравнение имеет место в случаях $\kappa = \ell = 0$, $\kappa = \ell = 1$, $\kappa = \ell = 2$ и $\kappa = \ell = 3$.

Пусть $\kappa = \ell = 1$ или $\kappa = \ell = 3$. Из равенства $4\bar{a} + 2\kappa a + 2\ell\varphi(a) = 0$ получаем $2\bar{a} + a + \varphi(a) = 0$ или $2\bar{a} + 3a + 3\varphi(a) = 0$. В обоих случаях $\varphi(a) + a \in 2A$, что противоречит выбору элемента a . Итак, осталось рассмотреть случай $\kappa = \ell = 2$, так как $\kappa = \ell = 0$ сразу влечет $g \in B$. Пусть $\kappa = \ell = 2$. Тогда $\bar{a} = -a - \varphi(a)$ и $\bar{b} = 0$, поэтому $g = -a - \varphi(a) + \bar{b} + 2g_1 + 2g_2$ или

$$2g = -2a - 2\varphi(a) + 2\bar{b} + 2a + b + c + 2\varphi(a) + \bar{b} - c = 2\bar{b} + 2b.$$

Таким образом, $g \in B$, то есть подгруппа B сервантна в G .

Аналогично показывается сервантность подгруппы C в G .

2. Докажем, что группа $\text{Aut } G$ не разлагается в прямое произведение групп типа $Z(2)$. Для этого достаточно показать, что группа G обладает автоморфизмом ψ , действующим как φ на подгруппе A , как ε на B и как $-\varepsilon$ на C . Пусть $4g = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, где $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$, $\bar{c} \in C$. Докажем, что в группе G разрешимо уравнение $4x = \varphi(\bar{a}) + \bar{b} - \bar{c}$. Если $g = a_1 + b_1 + c_1 + \kappa g_1 + \ell g_2$, где $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $c_1 \in C$, то $\bar{a} = 4a_1 + 2\kappa a + 2\ell\varphi(a)$, $\bar{b} = 4b_1 + \kappa b + \ell b$ и $\bar{c} = 4c_1 + \kappa c - \ell c$. Убедимся, что элемент

$$x_0 = \varphi(a_1) + b_1 - c_1 + \ell g_1 + \kappa g_2 - \ell a$$

является решением указанного уравнения. В самом деле, $4x_0 = 4\varphi(a_1) + 4b_1 - 4c_1 + 2\ell a + \ell b + \ell c + 2\kappa\varphi(a) + \kappa b - \kappa c - 4\ell a = 4\varphi(a_1) + 4b_1 - 4c_1 + 2\ell\varphi^2(a) + \ell b + \ell c + 2\kappa\varphi(a) + \kappa b - \kappa c = \varphi(4a_1 + 2\kappa a + 2\ell\varphi(a)) + (4b_1 + \ell b + \kappa b) - (4c_1 + \kappa c - \ell c) = \varphi(\bar{a}) + \bar{b} - \bar{c}$.

Полагая $\psi(g) = x_0$, получим искомый автоморфизм.

3. Наконец, покажем, что группа G регулярно проста. Пусть группа G обладает регулярным автоморфизмом α , отличным от $-\varepsilon$. Ввиду условия и поскольку подгруппы A , B и C сервантны в G , то они вполне характеристичны в G [1]. Из построения группы G следует, что либо α действует как φ на A и как $-\varepsilon$ на B и C , либо α действует как $-\varphi$ на A и как $-\varepsilon$ на B и C . Очевидно, что невозможность одного из этих случаев влечет невозможность другого. Итак, пусть α действует как φ на подгруппе A

и как $-\varepsilon$ на B и C . В таком случае $4g_2 = 2a + b + c$ влечет $4\alpha(g_2) = 2\alpha(a) - b - c$. Тогда $4(\alpha(g_2) + g_2) = 2(\varphi(a) + a)$ или, ввиду сервантности подгруппы A в группе G , $a + \varphi(a) \in 2A$, что невозможно ввиду выбора элемента a . Следовательно, группа G регулярно проста.

Таким образом, теорема 8 говорит о том, что регулярная простота групп G из класса $\mathcal{O}_2$ не эквивалентна разложимости групп $\text{Aut}(G)$ в прямые произведения подгрупп типа $Z(2)$. Тем не менее, как показывает следующая теорема, для довольно широкого подкласса групп из класса $\mathcal{O}_2$ эти условия эквивалентны.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $G \in \mathcal{O}_2$, $A = \sum_{i \in J} \oplus A_i$ - некоторое полное ее квазиразложение и группа G удовлетворяет одному из условий: 1) $2G \subset A$; 2) для любой подгруппы $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ (G_1, G_2, G_3 серванты в G), квазиравной G , наименьшее натуральное число n со свойством $nG \subseteq G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ отлично от 4. Группа G регулярно проста тогда и только тогда, когда группа $\text{Aut}(G)$ разлагается в прямое произведение групп типа $Z(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что G регулярно проста, но группа $\text{Aut}(G)$ не разлагается в прямое произведение подгрупп типа $Z(2)$. Следовательно, группа G обладает нерегулярным автоморфизмом порядка 4 (следствие 6). Ввиду [1] и леммы 1 каждая подгруппа A_i , $i \in J$ вполне характеристична в G . Пусть $\phi \neq \varepsilon$ - такое максимальное подмножество индексного множества J , что для любого индекса $i \in J_1$ автоморфизм φ действует на подгруппе A_i как ε . Далее, через J_2 обозначим такое максимальное подмножество из J , что на всех подгруппах A_i , $i \in J_2$ автоморфизм φ действует как некоторый регулярный автоморфизм ψ порядка 4, причем $\psi^2 = -\varepsilon$. Если $J_1 \cup J_2 = J$, то тогда автоморфизм $-\varphi$ регулярен и отличен от $-\varepsilon$, что противоречит регулярной простоте группы G . Пусть $J_1 \cup J_2 \neq J$, $B = \langle A_i \mid i \in J_1 \rangle$, $C = \langle A_i \mid i \in J_2 \rangle$ и $D = \langle A_i \mid i \in J \setminus (J_1 \cup J_2) \rangle$.

Из выше сделанных замечаний следует, что подгруппы B , C и D отличны от нуля и что на B автоморфизм φ действует, как ε , на C как ψ и на D как $-\varepsilon$. Поскольку $2G \subseteq A$, то очевидно, что $2G \subseteq B \oplus C \oplus D$. Согласно [2], группа G обладает автоморфизмом μ , действующим как $-\varepsilon$ на подгруппе B и как ε на C и D . В таком случае автоморфизм $\varphi\mu$ является регулярным автоморфизмом группы G , отличным от $-\varepsilon$, что противоречит условию.

2. Предположим, что группа G регулярно проста и обладает автоморфизмом порядка 4. Аналогично, как в пункте 1, показываем, что группа G обладает такой подгруппой $B \oplus C \oplus D$, что на B этот автоморфизм φ действует, как некоторый автоморфизм ψ порядка 4 ($\psi^2 = -E$), на C как $-E$ и на D как E . Очевидно, что φ^2 действует как $-E$ на B и как E на $\langle C \oplus D \rangle_{\varphi}^G$. Согласно [2], $2G \subseteq B \oplus \langle C \oplus D \rangle_{\varphi}^G$. Далее, автоморфизм φ действует, как $-E$ на C и как E на D , поэтому $2\langle C \oplus D \rangle_{\varphi}^G \subseteq C \oplus D$. Таким образом, $4G \subseteq B \oplus C \oplus D$. Если $2G \subseteq B \oplus C \oplus D$, то так же, как в пункте 1, показываем, что группа G обладает регулярным автоморфизмом, отличным от $-E$, что противоречит регулярной простоте группы G . Следовательно, 4 является наименьшим числом из всех таких натуральных n , что $nG \subseteq B \oplus C \oplus D$. Это противоречит условию теоремы, поэтому каждый автоморфизм группы G имеет порядок 2. Но в таком случае группа $\text{Aut}(G)$ разлагается в прямое произведение подгруппы типа $Z(2)$.

в заключение дадим описание групп из класса $\mathcal{O}_2$, группы автоморфизмов которых разлагаются в прямые произведения типа $Z(2)$.

ЛЕММА 10. Пусть G - сильно неразложимая группа конечного ранга, $G = \text{Soc } G$ и φ - автоморфизм группы G . Если для некоторого элемента $x \in G$, $x \neq 0$, $\varphi(x) = \frac{m}{n}x$, где m и n - целые числа, то $\varphi(g) = \frac{m}{n}g$ для любого элемента $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G сильно неразложима и $G = \text{Soc } G$, то согласно [4], каждый ее ненулевой эндоморфизм есть мономорфизм. Для элемента x $\varphi(x) = \frac{m}{n}x$, следовательно, $(n\varphi)(x) = mx$. Пусть ψ - эндоморфизм группы G , действующий как умножение на число m . Рассмотрим эндоморфизм $n\varphi - \psi$. Поскольку $(n\varphi - \psi)(x) = (n\varphi)(x) - \psi(x) = mx - mx = 0$, то $n\varphi - \psi$ - не мономорфизм. Значит, $n\varphi - \psi = 0$. Следовательно, для любого элемента $g \in G$ $n\varphi(g) = \psi(g) = mg$, а поэтому $\varphi(g) = \frac{m}{n}g$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $G \in \mathcal{O}_2$, $A = \sum_{i \in \mathcal{I}} A_i$ - некоторое ее полное квазиразложение. Группа $\text{Aut } G$ изоморфна прямому произведению групп типа $Z(2)$ тогда, и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $A_i = \text{Soc } A_i$ для любого индекса $i \in \mathcal{I}$;
- для любых индексов $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$, $\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$;
- $\rho A_i \neq A_i$ для любого простого числа ρ и любого индекса $i \in \mathcal{I}$;
- каждая группа A_i , $i \in \mathcal{I}$ содержит подгруппу H_i ранга

1, характеристичную в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Aut}(G)$ изоморфна прямому произведению групп $Z(2)$, то есть G регулярно проста. Следовательно, ввиду леммы 1, группа G свободна от нильпотентностей. Поэтому, согласно [1], для группы G выполнены условия а) и б). Из доказательства леммы 2 следует, что для регулярно простой группы каждая группа $\text{Aut}(A_i)$ периодична. Значит, группа G удовлетворяет условию в). Пусть H_i - произвольная подгруппа ранга 1 группы A_i и φ - автоморфизм группы G . Так как $o(\varphi)=2$ и каждая подгруппа A_i вполне характеристична в G , то согласно следствию 5 φ индуцирует на каждой подгруппе A_i либо ε , либо $-\varepsilon$. В таком случае очевидно, что подгруппы H_i , $i \in I$ характеристичны в группе G .

Обратно, пусть для группы G выполнены условия а) - г) и пусть φ - произвольный автоморфизм группы G . Согласно условиям а) и б) и ввиду [1], подгруппы A_i вполне характеристичны в G . Пусть φ_i - ограничения автоморфизма φ на подгруппах A_i . Поскольку подгруппа H_i , $i \in I$ характеристична в G и ее ранг равен 1, то φ_i действует на ней как умножение на некоторое рациональное число $\frac{\varphi_i \varepsilon}{\varepsilon}$. Согласно лемме 10, φ_i действует как умножение на $\frac{\varphi_i \varepsilon}{\varepsilon}$ на всей подгруппе A_i . Поскольку для группы выполнено условие в), то $\varphi_i = \pm \varepsilon$. Таким образом, порядок автоморфизма φ равен 2, что означает разложимость группы $\text{Aut } G$ в прямое произведение групп типа $Z(2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожухов С.Ф. Абелевы группы без нильпотентных эндоморфизмов. - Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 87-94. [Данный сборник].
2. Кожухов С.Ф. Группы автоморфизмов регулярно полных абелевых групп без кручения, рукопись депонирована в ВИНТИ. Деп. № 2790-77 от 12.07.77.
3. Кожухов С.Ф. О регулярных автоморфизмах абелевых групп. - В сб.: Группы и модули. Томск, 1976, 3-10.
4. Крылов П.А. Радиалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. - "Матем. сб.", 1974, 95, 2, 214-228.
5. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы. Т.2. М., "Мир", 1977.
6. Hallett J.T., Hirsch K.A. Die Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebener Automorphismen-gruppen, - "J. reine angew. Math.", 1969, 239/240, p. 32-46.

Поступило
10 ноября 1977 г.

ГРУППА ГОМОМОРФИЗМОВ В ГРУППУ БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА I

П.А.Крылов

Работа посвящена группам гомоморфизмов абелевых групп без кручения. Тот факт, что гомоморфизмы одной абелевой группы в другую сами образуют группу, оказался исключительно важным. Однако точное строение группы $\text{Hom}(M, A)$ известно лишь в некоторых случаях. Например, если M - периодическая группа или если A - алгебраически компактная группа, то группа $\text{Hom}(M, A)$ алгебраически компактна. Один из основных случаев, когда A не имеет кручения, еще мало изучен. Можно, разумеется, считать, что M также не имеет кручения. Естественно начать исследование, считая, что A - группа ранга I. Интересные результаты в этом направлении получил Уорфилд [1]. Он доказал, что группа M без кручения конечного ранга является группой гомоморфизмов некоторой группы в группу ранга I тогда и только тогда, когда M - локально свободная группа [1; следствие 9]. Этот факт получен как следствие основной теоремы 2 [1], дающей необходимые и достаточные условия того, чтобы естественный гомоморфизм $h(M): M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$ являлся изоморфизмом, где M и A - группы без кручения, причем M имеет конечный ранг, а A - группа ранга I.

Основные результаты этой работы касаются естественного гомоморфизма $h(M): M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$, где A - группа без кручения ранга I. Получен также ряд фактов о самой группе $\text{Hom}(M, A)$. В § I изучаются группы гомоморфизмов в локально ло-

кально свободные группы. В частности, получается, что если A - группа ранга 1, то группа $\text{Hom}(M, A)$ всегда локально локально свободна. Основным результат § 2 - это теорема 2.5. Она содержит необходимые и достаточные условия того, чтобы $h(M)$ осуществлял изоморфное вложение M в $\text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$ в качестве сервантной подгруппы. Используя терминологию Шарля [2], можно сказать, что теорема 2.5 дает ответ на вопрос: "Когда M и $\text{Hom}(M, A)$ находятся в "отношении слабой двойственности"? Если M имеет конечный ранг, то теорема 2.5 превращается в теорему 2 работы Уорфилда [1]. В § 3 при некотором ограничении на мощности выясняется, когда $h(M)$ - изоморфизм. В § 4 дополнительно предполагается, что A имеет идемпотентный тип. В таком случае изоморфизм $h(M)$ эквивалентен выполнению некоторых соотношений между M и $\text{Hom}(M, A)$ (предложение 4.3).

Различные вопросы, связанные с гомоморфизмом $h(M)$ и группой $\text{Hom}(M, A)$, изучали Шарль [2] (аннуляторные соотношения между M и $\text{Hom}(M, A)$, топологии на M и $\text{Hom}(M, A)$), Гроссе [3] (итерированные группы гомоморфизмов), Шульц [4], Нунке [5] и другие авторы.

Все рассматриваемые в работе группы - абелевы. Если M - группа без кручения, то $\tau(M)$ - ранг группы M , $\Pi(M) = \{p | pM \neq M\}$, $OT(M)$ - внешний тип группы M [1]. Если $X \subseteq M$, то $\{X\}_*$ - сервантная подгруппа в M , порожденная множеством X , если $x \in M$, то $T(x)$ - тип элемента x в M . Если A - группа, то $\Sigma^{\oplus} A$ (соответственно ΠA) - прямая сумма (соответственно прямое произведение) некоторого числа копий группы A . Наконец, Z - аддитивная группа или кольцо целых чисел, Q_p - аддитивная группа или кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p .

§ 1. ГРУППЫ ГОМОМОРФИЗМОВ В ЛОКАЛЬНО ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Группа M называется локально свободной, если $M_p = M \otimes Q_p$ - свободный Q_p -модуль для всех $p \in \Pi(M)$ [1].

2. Группу M назовем локально локально свободной, если M_p - локально свободный Q_p -модуль для всех $p \in \Pi(M)$ (модуль

локально свободен, если каждое конечное семейство его элементов можно вложить в свободное прямое слагаемое).

Локально свободная группа будет локально локально свободной. Обратное неверно. Однако в счетном случае определения 1 и 2 равносильны, так как счетный локально свободный Q_p -модуль свободен.

В [1] доказано (лемма 6), что если M и A - группы без кручения, причем $\tau(M) < \aleph_0$, $\tau(A) = 1$, то $\text{Hom}(M, A)$ - локально свободная группа. Простые примеры показывают, что это не так, если M имеет бесконечный ранг. Однако можно доказать, что всегда группа $\text{Hom}(M, A)$, где $\tau(A) = 1$, локально локально свободна. На самом деле справедливо следующее общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. I. Если A - локально локально свободная группа, то группа $\text{Hom}(M, A)$ локально локально свободна для любой группы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in P(\text{Hom}(M, A))$. Тогда $p \in P(A)$. p -сервантно точная строка $0 \rightarrow Z \rightarrow Q_p$ дает такую p -сервантно точную строку:

$$0 \rightarrow A \cong A \otimes Z \rightarrow A \otimes Q_p = A_p.$$

В свою очередь эта строка индуцирует следующую сервантно точную строку Q_p -модулей:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \otimes Q_p \rightarrow \text{Hom}(M, A_p) \otimes Q_p \cong \text{Hom}(M, A_p).$$

Пусть B - p -базисная подгруппа группы M . Тогда p -сервантно точная строка $0 \rightarrow B \rightarrow M$ индуцирует сервантно точную строку Q_p -модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A_p) \rightarrow \text{Hom}(B, A_p).$$

$(\text{Hom}(M/B, A_p) = 0$, так как M/B - p -делимая группа, а A_p не имеет ненулевых p -делимых подгрупп). Так как $B \cong \Sigma^{\oplus} Z$ (можно считать, как уже отмечалось, что M не имеет кручения), то

$$\text{Hom}(B, A_p) \cong \prod \text{Hom}(Z, A_p) \cong \prod A_p.$$

Модуль $\prod A_p$ локально свободен как прямое произведение локально свободных Q_p -модулей. В итоге получим, что $\text{Hom}(M, A) \otimes Q_p$ изоморфен сервантному подмодулю локально свободного модуля $\prod A_p$. Следовательно, $\text{Hom}(M, A) \otimes Q_p$ - локально свободный модуль, а

$\text{Hom}(M, A)$ - локально локально свободная группа. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если A - локально свободная группа, то $\text{Hom}(M; A)$ - локально локально свободная группа для любой группы M .

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Если A - однородная сепарабельная группа без кручения, то группа $\text{Hom}(M, A)$ локально локально свободна для любой группы M . В частности, если $\chi(A) = 1$, то $\text{Hom}(M, A)$ - локально локально свободная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.1 достаточно убедиться, что A - локально локально свободная группа. Пусть $p \in \Pi(A)$. Докажем, что $A_p = A \otimes Q_p$ - локально свободный Q_p -модуль. Для этого нужно показать, что любой сервантный подмодуль A'_p ранга 1 выделяется в A_p прямым слагаемым. Возьмем $0 \neq \alpha \otimes q \in A'_p$, $\alpha \in A$, $q \in Q_p$. Так как A - однородная сепарабельная группа, то $A = \{\alpha\}_* \oplus B$ для некоторой подгруппы B . Тогда $A_p = (\{\alpha\}_* \otimes Q_p) \oplus (B \otimes Q_p)$. И далее $A'_p = \{\alpha \otimes q\}_* = \{\alpha\}_* \otimes Q_p$. Таким образом, A'_p - прямое слагаемое в A_p . Следовательно, A_p - локально свободный модуль, а A - локально локально свободная группа.

Особо рассмотрим случай, когда группа A имеет идемпотентный тип.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Если A - однородная сепарабельная группа без кручения идемпотентного типа, то $\text{Hom}(M, A)$ - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$ для любой группы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1. $\chi(A) = 1$. Обозначим $\mathcal{K} = \Pi(A)$ и $Q_{\mathcal{K}}$ - кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с числами из $\mathcal{K}$ (можно считать, что A - аддитивная группа кольца $Q_{\mathcal{K}}$). Тогда $M \otimes Q_{\mathcal{K}}$ является $Q_{\mathcal{K}}$ -модулем и $\text{Hom}(M, A) \cong \text{Hom}(M \otimes Q_{\mathcal{K}}, A)$. Действительно, точная строка

$$0 \rightarrow M \cong M \otimes \mathbb{Z} \rightarrow M \otimes Q_{\mathcal{K}} \rightarrow M \otimes Q_{\mathcal{K}} / \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

индуцирует точную строку

$$0 = \text{Hom}(M \otimes Q_{\mathcal{K}} / \mathbb{Z}, A) \rightarrow \text{Hom}(M \otimes Q_{\mathcal{K}}, A) \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Ext}(M \otimes Q_{\mathcal{K}} / \mathbb{Z}, A).$$

Но $\text{Ext}(M \otimes Q_{\mathcal{K}} / \mathbb{Z}, A) = 0$, так как порядки элементов группы $M \otimes Q_{\mathcal{K}} / \mathbb{Z}$ делят группу A , поэтому $\text{Hom}(M, A) \cong \text{Hom}(M \otimes Q_{\mathcal{K}}, A)$.

Следовательно, можно считать, что M является $Q_{\mathcal{K}}$ -моду-

лем, т.е. $\Pi(M) \in \mathcal{F}$. Докажем, что $\text{Hom}_{Q_X}(M, Q_X)$ - локально свободный Q_X -модуль. Это равносильно тому, что

$\text{Hom}(M, A)$ - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$. Возьмем некоторый сервантный подмодуль N^* в $\text{Hom}_{Q_X}(M, Q_X)$ ранга I и докажем, что N^* - прямое слагаемое. Пусть $0 \neq \alpha \in N^*$. Тогда $M/\ker \alpha \cong \text{im } \alpha \subseteq Q_X$. Но $\text{im } \alpha \cong Q_X$. Следовательно, $M = N \oplus \ker \alpha$, где $N \cong Q_X$. Отсюда

$$\text{Hom}_{Q_X}(M, Q_X) = \text{Hom}_{Q_X}(N, Q_X) \oplus \text{Hom}_{Q_X}(\ker \alpha, Q_X).$$

Так как $\alpha \in \text{Hom}_{Q_X}(N, Q_X)$, то $N_\alpha = \{\alpha\}_* = \text{Hom}(N, Q_X)$. Таким образом, каждый сервантный подмодуль ранга I выделяется в $\text{Hom}_{Q_X}(M, Q_X)$ прямым слагаемым. Следовательно, $\text{Hom}_{Q_X}(M, A)$ - локально свободный Q_X -модуль, а $\text{Hom}(M, A)$ - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$.

Случай 2. A - произвольная группа. Пусть B - группа ранга I и типа $T(A)$. Известно, что существует сервантно точная строка $0 \rightarrow A \rightarrow \Pi B$. Следовательно:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, \Pi B)$$

сервантно точная строка. Но $\text{Hom}(M, \Pi B) \cong \Pi \text{Hom}(M, B)$ - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$ как прямое произведение таких групп. Следовательно, $\text{Hom}(M, A)$ - также однородная сепарабельная группа типа $T(A)$. Предложение доказано.

Отметим, что предложение I.4 вытекает из следствия I.3 и следующего факта, который мы сформулируем без доказательства. Если M - однородная локально локально свободная группа идемпотентного типа, то M - сепарабельная группа.

§ 2. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ГОМОМОРФИЗМ

$$M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A), \quad \chi(A) = 1$$

ЛЕММА 2.1. Сервантные подгруппы локально локально свободных групп локально локально свободны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M - локально локально свободная группа и N - сервантная подгруппа в M . Тогда Q_p -модуль $N_p = N \otimes Q_p$ изоморфно вкладывается в качестве сервантного подмодуля в локально свободный модуль $M \otimes Q_p$. Следовательно, N_p - локально свободный модуль, а N - локально локально свободная группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A - группа. A -векторной группой будем называть прямое произведение некоторого числа копий группы A .

ЛЕММА 2.2. Группа $\text{Hom}(M, A)$ изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - свободная подгруппа в M , порожденная некоторой максимальной системой линейно независимых в M элементов. Так как M/F - периодическая группа, то $\text{Hom}(M/F, A) = 0$ и точна строка

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(F, A).$$

Далее, так как $F \cong \sum^{\oplus} \mathbb{Z}$, то $\text{Hom}(F, A) \cong \prod \text{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong \prod A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Используя лемму 2.2, нетрудно доказать (собственно, это - известный факт), что если A - группа без кручения, то естественный гомоморфизм $M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$ есть мономорфизм, если и только если M изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы. Если $\chi(M) < \aleph_0$ и $\chi(A) = 1$, то M изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы тогда и только тогда, когда $\text{OT}(M) \leq T(A)$ [1, предложение 3]. Понятие внешнего типа для групп бесконечного ранга не имеет смысла.

Зафиксируем некоторую группу A . Обозначим через H функтор $\text{Hom}(\cdot, A)$ из категории абелевых групп в категорию абелевых групп. Существует естественное преобразование h тождественного функтора в функтор H^2 , где $h(M): M \rightarrow H^2(M)$ задается формулой $(h(M)m)\alpha = \alpha m$, $m \in M$, $\alpha \in H(M)$.

ЛЕММА 2.4. Пусть M и A - группы без кручения и пусть $h(M): M \rightarrow H^2(M)$ - мономорфизм. Тогда подгруппа $\text{im } h(M)$ p -сервантна в $H^2(M)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $m \in M - pM$, то существует $\alpha \in H(M)$ такой, что $\alpha m \in A - pA$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подгруппа $\text{im } h(M)$ p -сервантна в $H^2(M)$. Возьмем $m \in M - pM$. Допустим, что $\alpha m \in pA$ для каждого $\alpha \in H(M)$. Тогда для каждого $\alpha \in H(M)$ существует единственный $a \in A$ со свойством $(h(M)m)\alpha = \alpha m = pa$. Определим $\eta \in H^2(M)$, положив $\eta\alpha = a$, $\alpha \in H(M)$. Ясно, что $h(M)m = p\eta$. Следовательно, в силу p -сервантности $\text{im } h(M)$, $\eta \in \text{im } h(M)$, т.е. $\eta = h(M)m'$ для некоторого $m' \in M$. Теперь имеем $h(M)m = p\eta = p(h(M)m')$ и $H(M)(m - pm') = 0$.

Отсюда $m - \rho m' = 0$ и $m = \rho m' \in \rho M$, что противоречит выбору m . Значит, $\Delta m \notin \rho A$ для некоторого $\Delta \in H(M)$.

Обратно, пусть выполнено условие леммы. Предположим, что $m \in M$, $\eta \in H^2(M)$ и $h(M)m = \rho\eta$. Для любого $\Delta \in H(M)$ имеем $\Delta m = (h(M)m)\Delta = (\rho\eta)\Delta = \rho(\eta\Delta) \in \rho A$. Следовательно, $m \in \rho M$, т.е. $m = \rho m'$ для некоторого $m' \in M$. Теперь $\rho\eta = h(M)m = \rho(h(M)m')$, $\eta = h(M)m'$ и $\eta \in \text{im } h(M)$. Следовательно, подгруппа $\text{im } h(M)$ ρ -сервантна в $H^2(M)$. Лемма доказана.

Уорфилд доказал [1, теорема 2], что если M и A - группы без кручения, причем $\tau(M) < \infty$, $\tau(A) = 1$, то $h(M): M \rightarrow H^2(M)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда M - локально свободная группа, $OT(M) \leq T(A)$ и $\Pi(M) = \Pi(A)$. Оказывается, что если M - произвольная группа, то эти условия (конечно, локальную свободу нужно заменить на локальную локальную свободу, условие " $OT(M) \leq T(A)$ " на " M изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы") являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $h(M)$ изоморфно вкладывал M в $H^2(M)$ в качестве сервантной подгруппы. Это будет доказано в следующей теореме. Если $h(M)$ - мономорфизм и $\text{im } h(M)$ - сервантная подгруппа в $H^2(M)$, то по терминологии Шарля [2] M в $H(M)$ находятся в "отношении слабой двойственности".

Если $m \in M$, то $K_p^2(m)$ - ρ -высота элемента m в группе M .

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть M - группа без кручения, A - группа без кручения ранга I. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $h(M)$ - мономорфизм и $\text{im } h(M)$ - сервантная подгруппа в $H^2(M)$.

2. M - локально локально свободная группа, изоморфная подгруппе A -векторной группы и $\Pi(M) = \Pi(A)$.

3. M изоморфна сервантной подгруппе группы $W = \prod_{i \in J} A_i$, где $\tau(A_i) = 1$, $T(A_i) \leq T(A)$, $\Pi(A_i) = \Pi(A)$, $|J| = |H(M)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (3). Пусть J - множество мощности $|H(M)|$ и $H(M) = \{\alpha_i \mid i \in J\}$. Обозначим $A_i = M / \ker \alpha_i$ для каждого $i \in J$. Так как $A_i \cong M / \ker \alpha_i \cong \text{im } \alpha_i \in A$, то $\tau(A_i) = 1$, $T(A_i) \leq T(A)$ и $\Pi(A) \leq \Pi(A_i)$. Далее $\Pi(A_i) \leq \Pi(M) = \Pi(\text{im } h(M)) \leq \Pi(H^2(M)) \leq \Pi(A)$. Значит, $\Pi(A_i) = \Pi(A)$. Поскольку $\prod_{i \in J} \ker \alpha_i = 0$, то обычным способом M изоморф-

на некоторой подгруппе группы $W = \prod_{i \in J} A_i$. А именно, пусть $\sigma_i: M \rightarrow A_i$ - канонические эпиморфизмы, $\pi_i: W \rightarrow A_i$ - канонические проекции. Определим $\theta: M \rightarrow W$, положим $\pi_i \theta(m) = \sigma_i(m)$, $i \in J$. Ясно, что θ - мономорфизм. Осталось показать, что $\theta(M)$ - сервантная подгруппа в W . Возьмем некоторый элемент $0 \neq m \in M$ и простое число $p \in \Pi(M)$. Так как подгруппа $\text{im} h(M)$ сервантна в $H^2(M)$, то по лемме 2.4. существует $\alpha_i \in H(M)$ такой, что $h_p^M(m) = h_p^A(\alpha_i m)$. Гомоморфизм α_i можно провести через σ_i , т.е. $\alpha_i' \sigma_i = \alpha_i$ для некоторого $\alpha_i': A_i \rightarrow A$. Из последнего равенства следует, что $h_p^A(\sigma_i m) \leq h_p^A(\alpha_i m)$. Таким образом, $h_p^M(m) \leq h_p^A(\sigma_i m) \leq h_p^A(\alpha_i m) = h_p^M(m)$ и $h_p^M(m) = h_p^A(\sigma_i m)$. Теперь имеем

$$h_p^{\theta(M)}(\theta m) = h_p^M(m) = h_p^A(\sigma_i m) = h_p^A(\pi_i \theta(m)) \geq h_p^W(\theta m) \geq h_p^{\theta(M)}(\theta m), \quad h_p^{\theta(M)} = h_p^W(\theta m)$$

. Получили, что каждый элемент подгруппы $\theta(M)$ имеет одинаковые высоты в $\theta(M)$ и W . Следовательно, подгруппа $\theta(M)$ сервантна в W .

(3) $\implies$ (2). Так как $T(A_i) \leq T(A)$, то каждая группа A_i изоморфна некоторой подгруппе в A . Следовательно, W изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы. Е силу 3 то же справедливо для M . Далее, $\Pi(M) \leq \Pi(W) = \Pi(A)$, $\Pi(M) \leq \Pi(A)$. Обратное включение следует из того, что M изоморфна подгруппе A -векторной группы. Следовательно, $\Pi(M) = \Pi(A)$. Для доказательства локальной локальной свободы группы M на основании 3 и леммы 2.1 достаточно доказать, что W - локально локально свободная группа. Положим $V = \sum_{i \in J}^{\oplus} H(A_i)$. Тогда

$$\text{Hom}(V, A) \cong \prod_{i \in J} \text{Hom}(H(A_i), A) \cong \prod_{i \in J} A_i = W.$$

По следствию 1.3 группа W локально локально свободна.

(2) $\implies$ (1). Ввиду замечания 2.3 $h(M)$ - мономорфизм. Подгруппа $\text{im} h(M)$ сервантна в $H^2(M)$, если она p -сервантна для каждого простого p . Воспользуемся леммой 2.4. Пусть $m \in M - pM$. Нужно найти такой $\alpha \in H(M)$, что $\alpha m \notin pA$. Так как $h(M)$ - мономорфизм, то существует $\beta \in H(M)$ такой, что $\beta m \neq 0$. Пусть $\beta_p: M_p \rightarrow A_p$ - продолжение β (β_p определяется формулой $\beta_p(m \oplus q) = \beta m \oplus q$, $m \in M$, $q \in Q_p$). Так как $p \in \Pi(M)$, то $p \in \Pi(A)$. Следовательно, $A_p \cong Q_p$ и $M_p / \ker \beta_p \cong Q_p$. Отсюда $M_p = N_1 \oplus \ker \beta_p$, где

$N_1 \cong Q_p$. Пусть $m = a + b$, где $0 \neq a \in N_1$, $b \in \ker \beta_p$ и пусть N_2 (соответственно N) - сервантный подмодуль в M_p , порожденный элементом b (соответственно элементом $a + b$). Так как M_p - локально свободный модуль, то для некоторого N_3 будет $\ker \beta_p = N_2 \oplus N_3$ и $N_1 \oplus N_2 = N \oplus N_2$. Таким образом, $M_p = N \oplus N_2 \oplus N_3 = N \oplus \ker \beta_p$, где $N \cong Q_p$ и $m \in N$.

Определим теперь $\gamma_p: M_p \rightarrow A_p$, положив $\gamma_p|_N$ - некоторый изоморфизм N на Q_p и $\gamma_p(\ker \beta_p) = 0$. Пусть $\gamma = \gamma_p|_M$ - ограничение γ_p на M . Тогда $\ker \gamma = \ker \gamma_p \cap M = \ker \beta_p \cap M = \ker \beta$. Отсюда $\text{im } \gamma \cong M / \ker \gamma = M / \ker \beta \cong \text{im } \beta \subseteq A$. Следовательно, $T(\text{im } \gamma) \leq T(A)$. В таком случае по лемме I [1] существует целое $z \neq 0$ такое, что $z \text{im } \gamma \subseteq A$. Причем можно взять $(z, p) = 1$. Положим $\lambda = z\gamma$. Тогда $\lambda \in H(M)$, так как $\text{im } \lambda \subseteq A$. Поскольку $m \notin pM$, то $m \notin pM_p$ и $m \notin pN$. Следовательно, $\gamma_p m \notin pA_p$. Далее $\lambda m = z(\gamma m) = z(\gamma_p m)$. Отсюда $\lambda m \notin pA_p$, так как $(z, p) = 1$. Тем более $\lambda m \notin pA$. Итак, $\lambda \in H(M)$ и $\lambda m \notin pA$. В силу леммы 2.4 подгруппа $\text{im } h(M)$ сервантна в $H^2(M)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6 [I, теорема 2]. Если M и A - группы без кручения, $\tau(M) < \aleph_0$, $\tau(A) = 1$, то следующие утверждения эквивалентны:

1. $h(M): M \rightarrow H^2(M)$ - изоморфизм;
2. M - локально свободная группа, $OT(M) \leq T(A)$ и $\Pi(M) = \Pi(A)$;
3. M изоморфна сервантной подгруппе группы $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, где $\tau(A_i) = 1$, $T(A_i) \leq T(A)$, $\Pi(A_i) = \Pi(A)^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно лишь доказать $(2) \implies (1)$. Если имеем 2, то по теореме 2.5 $h(M)$ - мономорфизм и $\text{im } h(M)$ - сервантная подгруппа в $H^2(M)$. Но у нас $\tau(M) < \aleph_0$, поэтому $\tau(H^2(M)) \leq \tau(H(M)) \leq \tau(M)$ [I, предложение 4]. Отсюда $\tau(H^2(M)) \leq \tau(M) = \tau(\text{im } h(M)) \leq \tau(H^2(M))$ и $\tau(\text{im } h(M)) = \tau(H^2(M)) < \aleph_0$. Следовательно, ввиду сервантности $\text{im } h(M)$, $\text{im } h(M) = H^2(M)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Если M и A - группы без кручения, $\tau(A) = 1$, то $h(H(M)): H(M) \rightarrow H^3(M)$ - мономорфизм и подгруппа $\text{im } h(H(M))$ сервантна в $H^3(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $H(M)$ изоморфна подгруппе A - векторной группы по лемме 2.2 и локально локально свободна по следствию 1.3. Кроме того, $\Pi(H(M)) = \Pi(A)$. Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 2.5.

С помощью теоремы 2.5 можно получить обозрение всех сервантных подгрупп групп гомоморфизмов в группы ранга I.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если M и A - группы без кручения, $\chi(A) = 1$, то существует группа G такая, что M изоморфна некоторой сервантной подгруппе группы $\text{Hom}(G, A)$ тогда и только тогда, когда M - локально локально свободная группа, изоморфная подгруппе A -векторной группы, и $\Pi(M) = \Pi(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M изоморфна некоторой сервантной подгруппе группы $\text{Hom}(G, A)$ для некоторой группы G . Как уже отмечалось, группа $\text{Hom}(G, A)$ локально локально свободна, изоморфна подгруппе A -векторной группы и $\Pi(M) = \Pi(A)$. Следовательно, учитывая лемму 2.1, такова же и группа M . Если M удовлетворяет условию следствия, то в качестве G возьмем $\text{Hom}(M, A)$. Тогда по теореме 2.5 M изоморфна сервантной подгруппе группы $\text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$.

Существуют группы M , удовлетворяющие условиям 1 - 3 теоремы 2.5, для которых $h(M)$ не является изоморфизмом. Опираясь на работу Майера [6], приведем пример такой группы. Майер доказал, что если $P = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ и G - счетная группа без кручения, то существует однородное сепарабельное расширение M группы P с помощью группы G . При этом $M \cong P$ тогда и только тогда, когда G - свободная группа конечного ранга. Возьмем, например, $G \cong \mathbb{Q}$. Тогда $H(G) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0$ и, следовательно, $H(M)$ изоморфно вкладывается в $H(P)$. Но

$H(P) \cong \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\oplus} \mathbb{Z}$. Следовательно, также $H(M) \cong \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\oplus} \mathbb{Z}$. Откуда $H^2(M) \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = P$. Следовательно, $M \neq H^2(M)$, так как $M \neq P$.

Поскольку вообще $h(M)M$ не совпадает с $H^2(M)$, то интересно изучить группу $H^2(M)/h(M)M$. В частности, когда $H(H^2(M)/h(M)M) = 0$? Равенство $H(H^2(M)/h(M)M) = 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы $h(H(M))$ был изоморфизмом или, что эквивалентно, $h(H^n(M))$ был изоморфизмом для некоторого $n > 1$ (см. [3]).

Майер [6] доказал, что если M - однородное сепарабельное расширение группы P с помощью счетной группы, то $H^2(M)/h(M)M$ - копериодическая группа. Изменив немного рассуждения Майера, можно доказать следующие более общие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. 1. Если группа M является расширением группы $P_m = \prod_m Z$ (m - неизмеримый кардинал) с помощью группы G , причем $H(G) = \text{Hom}(G, Z) = 0$, то $H^2(M)/h(M)M$ - копериодическая группа;

2. Если группа M является расширением группы P_m с помощью счетной группы G , то $H^2(M)/h(M)M$ - копериодическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Г. Точная строка

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow 0$$

индуцирует точную строку

$$0 = H(G) \rightarrow H(M) \rightarrow H(P_m) \rightarrow \tau(H(P_m)) \rightarrow 0,$$

где $\tau: H(P_m) \rightarrow \text{Ext}(G, Z)$ - связывающий гомоморфизм. Так как m - неизмеримый кардинал, то $H(P_m) \cong \sum_m^{\oplus} Z$, поэтому $\text{Ext}(H(P_m), Z) = 0$. Следовательно, точна строка

$$H^2(P_m) \rightarrow H^2(M) \rightarrow \text{Ext}(\tau(H(P_m)), Z) \rightarrow 0.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & & & & \\ & \downarrow & & & & & \\ 0 & \rightarrow & P_m & \xrightarrow{\quad} & M & \xrightarrow{\quad} & H \rightarrow 0 \\ & & \downarrow h(P_m) & & \downarrow h(M) & & \downarrow f \\ & & H^2(P_m) & \xrightarrow{\quad} & H^2(M) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}(\tau(H(P_m)), Z) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \rightarrow & H^2(M)/h(M)M & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}(\tau(H(P_m)), Z)/fH \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Здесь левый верхний квадрат коммутативен в силу естественности h , f индуцируется $h(P_m)$ и $h(M)$, ρ индуцируется ν и μ . Таким образом, ρ - изоморфизм и группа $H^2(M)/h(M)M$ оказывается гомоморфным образом копериодической группы $Ext(\tau(H(P_m)), Z)$ и, следовательно, сама копериодическая.

2. Так как G - счетная группа, то $G = F \oplus E$, где F - свободная группа, а $H(E) = 0$. Пусть N - такая подгруппа в M , что $P_m \subseteq N$ и $N/P_m = E$. Тогда

$$M/N = M/P_m / N/P_m = (F \oplus E)/E \cong F. \text{ Следовательно,}$$

$$M \cong N \oplus F. \text{ Откуда } H^2(M)/h(M)M \cong H^2(N)/h(N)N.$$

Группа N содержит подгруппу P_m и $N/P_m = E$. Следовательно, в силу 1) $H^2(N)/h(N)N \cong H^2(M)/h(M)M$ - копериодическая группа. Предложение доказано.

§ 3. КОГДА $h(M)$ ИЗОМОРФИЗМ ?

Пусть M и A - группы без кручения, $\tau(A) = 1$. Если M удовлетворяет условиям пункта 2 теоремы 2.5, то зафиксируем для M группу W и мономорфизм $\theta: M \rightarrow W$, построенные при доказательстве импликации (1) $\implies$ (3) этой теоремы. Таким образом, если M - локально локально свободная группа, изоморфная подгруппе A -векторной группы и $\Pi(M) = \Pi(A)$, то мы ассоциируем с M мономорфизм $\theta: M \rightarrow W$ из теоремы 2.5.

Напомним построение W и θ . Пусть $|J| = |H(M)|$ и $H(M) = \{\alpha_i \mid i \in J\}$. Обозначим $A_i = M/\ker \alpha_i$, $\sigma_i: M \rightarrow A_i$ - канонические эпиморфизмы, $W = \prod_{i \in J} A_i$ и $\pi_i: W \rightarrow A_i$ - канонические проекции ($i \in J$). Тогда $\theta: M \rightarrow W$ определяется так: $\pi_i \theta(m) = \sigma_i m$, $m \in M$, $i \in J$. Было доказано, что θ - мономорфизм и подгруппа $\text{im } \theta$ сервантна в W . Роль этого мономорфизма видна из следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. $H(\theta): H(W) \rightarrow H(M)$ - эпиморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\alpha \in H(M)$. Нужно найти $\beta \in H(W)$ такой, что $\alpha = H(\theta)(\beta) = \beta \theta$. Пусть $j \in J$ таков, что $\alpha = \alpha_j$. Существует $\alpha'_j: A_j \rightarrow A$, для которого $\alpha'_j \sigma_j = \alpha_j$. Зададим $\beta \in H(W)$ следующим образом: $\beta|_{A_j} = \alpha'_j$ и $\beta(A_i) = 0$ при $i \neq j$. Заметим, что

$\beta w = \beta(\pi_j w) = \alpha'_j(\pi_j w)$ для любого $w \in W$. Теперь, если $m \in M$, то $\alpha m = \alpha_j m (\alpha'_j \theta_j) m = (\alpha'_j \pi_j \theta) m = \alpha'_j((\pi_j \theta) m) = \beta(\pi_j(\theta m)) = \beta(\theta m) = (\beta \theta) m$. Отсюда $\alpha = \beta \theta = H(\theta)(\beta)$. Лемма доказана.

Сделаем одно замечание относительно группы W . По построению $W = \prod_{i \in J} A_i$, где $\alpha(A_i) = 1$, $T(A_i) \leq T(A)$,

$\Pi(A_i) = \Pi(A)$ ($i \in J$). Следовательно, $h(A_i): A_i \rightarrow H^2(A_i)$ — изоморфизм для каждого $i \in J$. Поэтому, если $|J|$ — неизмеримый кардинал, то $h(W): W \rightarrow H^2(W)$ — также изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 3.2

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\theta} & W \\ & & \downarrow h(M) & & \downarrow h(W) \\ 0 & \longrightarrow & H^2(M) & \xrightarrow{H^2(\theta)} & H^2(W) \end{array}$$

коммутативная диаграмма с точными строками. Кроме того, если $|M|$ — неизмеримый кардинал, то $h(W)$ — изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутативность диаграммы следует из естественности h . Точность нижней строки следует из того, что $H(\theta)$ — эпиморфизм (лемма 3.1). Так как $|J| = |H(M)| \leq 2^{|M|}$, то

$|J|$ — неизмеримый кардинал, если $|M|$ — неизмеримый кардинал. Следствие доказано.

Теперь можно найти условие изоморфизма $h(M)$. Это условие заключается в том, как подгруппа $\theta(M)$ располагается в W .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть M — локально локально свободная группа, изоморфная подгруппе A -векторной группы ($\alpha(A) = 1$), $\Pi(M) = \Pi(A)$ и $|M|$ — неизмеримый кардинал. Тогда $h(M)$ — изоморфизм в том и только в том случае, когда $W/\theta(M)$ изоморфна подгруппе A -векторной группы, где $\theta: M \rightarrow W$ — ассоциированный с M мономорфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = W/\theta(M)$, $\alpha: W \rightarrow K$ — канонический эпиморфизм. В силу естественности h и следствия 3.2 имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\theta} & W & \xrightarrow{\alpha} & K \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h(M) & & \downarrow h(W) & & \downarrow h(K) \\
 0 & \longrightarrow & H^2(M) & \xrightarrow{H^2(\theta)} & H^2(W) & \xrightarrow{H^2(\alpha)} & H^2(K)
 \end{array}$$

в которой $h(M)$ - мономорфизм, $h(W)$ - изоморфизм. Группа K изоморфна подгруппе A -векторной группы тогда и только тогда, когда $h(K)$ - мономорфизм. Рассмотрение диаграммы показывает, что $h(K)$ - мономорфизм тогда и только тогда, когда $h(M)$ - изоморфизм. Теорема доказана.

§ 4. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ГОМОМОРФИЗМ

$M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$, $\epsilon(A)=1$, $T(A)$ - идемпотент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если M и A - группы без кручения, причем $\epsilon(A)=1$ и $T(A)$ - идемпотент, то $h(M)$ - мономорфизм и подгруппа $\text{im } h(M)$ сервантна в $H^2(M)$ тогда и только тогда, когда M - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если M - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$, то, очевидно, M - локально локально свободная группа (см. доказательство следствия 1.3), изоморфная подгруппе

A -векторной группы и $\Pi(M)=\Pi(A)$. Осталось сослаться на теорему 2.5. Обратно. Пусть $h(M)$ - мономорфизм и подгруппа $\text{im } h(M)$ сервантна в $H^2(M)$. Тогда группа $H^2(M)$ является однородной сепарабельной типа $T(A)$ (предложение 1.4). Следовательно, такова же и группа $\text{im } h(M)$. Предложение доказано.

Для группы A идемпотентного типа можно соответствующим образом, учитывая предложение 4.1, переформулировать следствие 2.8 и теорему 3.3.

Если M и A - некоторые группы и $h(M): M \rightarrow H^2(M)$ - изоморфизм, то функтор H индуцирует антиизоморфизм кольца эндоморфизмов группы M на кольцо эндоморфизмов группы $H(M)$. Кроме того, каждое прямое разложение группы $H(M)$ имеет вид

$H(M) = H(M_1) \oplus H(M_2)$, где $M = M_1 \oplus M_2$ - некоторое прямое разложение группы M . Оказывается, если A - группа ранга I идемпотентного типа, то справедливо обратное. Докажем прежде следующую лемму.

ЛЕММА 4.2. Если M и A - группы без кручения, $\tau(A) = 1$ и $h(M)$ - мономорфизм, то $H^2(M)/\text{im } h(M)$ - периодическая группа тогда и только тогда, когда для каждого $0 \neq z \in H^2(M)$ выполняется $\bigcap_{\alpha \in \ker z} \ker \alpha \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $H^2(M)/\text{im } h(M)$ - периодическая группа. Пусть $0 \neq z \in H^2(M)$. Существует натуральное t такое, что $tz \in \text{im } h(M)$. Отсюда $tz = h(M)m$ для некоторого $0 \neq m \in M$. Теперь, если $\alpha \in \ker z$, то $\alpha m = (h(M)m)/\alpha = (tz)\alpha = t(z\alpha) = 0$. Следовательно, $m \in \bigcap_{\alpha \in \ker z} \ker \alpha$.

Предположим теперь, что выполнено условие леммы. Пусть $0 \neq z \in H^2(M)$. Тогда существует $0 \neq m \in \bigcap_{\alpha \in \ker z} \ker \alpha$.

Так как $h(M)$ - мономорфизм, то $\beta m \neq 0$ для некоторого $\beta \in H(M)$. Тогда $z\beta \neq 0$. Итак, имеем два ненулевых элемента $z\beta$ и βm в группе A ранга I. Следовательно, $z(\beta m) = t(z\beta)$ для некоторых натуральных z и t , или $\beta(sm) = (tz)\beta$. Докажем, что $tz = h(M)(sm)$. Пусть $\gamma \in H(M)$. Так как $H(M)/\ker \gamma \cong \text{im } \gamma \subseteq A$, то $H(M)/\ker \gamma$ - группа ранга I. Следовательно, $k\gamma = \ell\beta + \alpha$, где $\alpha \in \ker \gamma$, k и ℓ - натуральные числа. Имеем $(tz)(k\gamma) = (tz)(\ell\beta + \alpha) = (tz)(\ell\beta) + (tz)\alpha = \ell(tz)\beta + t(z\alpha) = \ell\beta(z, \alpha) = \ell\beta(sm) = (k\gamma + \alpha)(sm) = (k\gamma)(sm) + \alpha(sm) = (k\gamma)(sm)$. Отсюда $k(tz)\gamma = k\gamma(sm)$, $(tz)\gamma = \gamma(sm)$, $tz = h(M)(sm)$. $\text{im } h(M)$ и $H^2(M)/\text{im } h(M)$ - периодическая группа. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть A - группа без кручения ранга I идемпотентного типа, M - однородная сепарабельная группа типа $T(A)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $h(M): M \rightarrow H^2(M)$ - изоморфизм.
2. Каждый автоморфизм z группы $H(M)$ индуцируется некоторым автоморфизмом φ группы M , т.е. $z(\alpha) = \alpha\varphi$, $\alpha \in H(M)$.
3. Если $H(M) = M_1^* \oplus M_2^* = M_1^* \oplus M_2^*$ - два прямых раз-

ложения группы $H(M)$, причем $\kappa(M_1^*)=1$, то существует автоморфизм γ группы $H(M)$ со свойствами: а) $\gamma M_1^*=M_1^*$, $\gamma M_2^*=M_3^*$; б) γ индуцируется некоторым автоморфизмом φ группы M ;

4. Каждое прямое разложение $H(M)=M_1^* \oplus M_2^*$, где $\kappa(M_1^*)=1$ индуцируется некоторым прямым разложением группы M , т.е. существует разложение $M=M_1 \oplus M_2$ такое, что $M_1^*=H(M_1)$, $M_2^*=H(M_2)$;

5. Каждое прямое разложение группы $H(M)$ индуцируется прямым разложением группы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, $(1) \implies (2)$. Импликация $(2) \implies (3)$ очевидна. Докажем $(3) \implies (4)$. Пусть $H(M)=M_1^* \oplus M_2^*$ - прямое разложение группы $H(M)$, причем $\kappa(M_1^*)=1$. Возьмем некоторый $0 \neq \alpha \in M_1^*$. Так как $M/\ker \alpha \cong \text{im } \alpha \cong A$, то $\ker \alpha$ выделяется в M прямым слагаемым. Таким образом, $M=N_1 \oplus N_2$, где $\kappa(N_1)=1$, $N_2=\ker \alpha$. Это разложение индуцирует разложение $H(M)=H(N_1) \oplus H(N_2)$. Так как $\kappa(H(N_1))=1$ и $\alpha \in H(N_1)$, то $H(N_1)=M_1^*$. Ввиду 3 существует автоморфизм γ группы $H(M)$ такой, что $\gamma M_1^*=M_1^*$, $\gamma M_2^*=H(N_2)$ и γ индуцируется некоторым автоморфизмом φ группы M . Положим $M_1=\varphi N_1$, $M_2=\varphi N_2$ - индуцирует разложение $H(M)=M_1^* \oplus M_2^*$, т.е. $H(M_1)=M_1^*$, $H(M_2)=M_2^*$. Пусть $\alpha \in H(M_1)$. Тогда $0=\alpha M_2=\alpha(\varphi N_2)=(\alpha \varphi) N_2=\gamma(\alpha) N_2$. Отсюда $\gamma(\alpha) \in H(N_1)=M_1^*$ и $\alpha \in M_1^*$. Обратно, если $\alpha \in M_1^*$, то $\gamma(\alpha) \in M_1^*=H(N_1)$. Имеем $\alpha M_2=\alpha(\varphi N_2)=(\alpha \varphi) N_2=\gamma(\alpha) N_2=0$. Значит, $\alpha \in H(M_1)$ и $H(M_1)=M_1^*$. Пусть теперь $\alpha \in H(M_2)$. Тогда $0=\alpha M_1=\alpha(\varphi N_1)=(\alpha \varphi) N_1=\gamma(\alpha) N_1$. Следова-

тельно, $\gamma(\alpha) \in H(N_2)=M_2^*$ и $\alpha \in M_2^*$. Обратно, если $\alpha \in M_2^*$, то $\gamma(\alpha) \in H(N_2)$. Поэтому $\alpha M_1=\alpha(\varphi N_1)=\gamma(\alpha) N_1=0$, т.е. $\alpha \in H(M_2)$ и $H(M_2)=M_2^*$.

$(4) \implies (1)$. Ввиду условия предложения и предложения 4.1 $h(M)$ - мономорфизм и подгруппа $\text{im } h(M)$ сервантна в $H^2(M)$. Сервантность $\text{im } h(M)$ равносильна тому, что $H^2(M)/\text{im } h(M)$ - группа без кручения. Поэтому для доказательства равенства $\text{im } h(M)=H^2(M)$ достаточно показать, что $H^2(M)/\text{im } h(M)$ - периодическая группа. Применим лемму 4.2. Нужно проверить, что $\cap_{\alpha \in \ker \gamma} \ker \alpha \neq 0$ для любого $0 \neq \gamma \in H^2(M)$.

Итак, пусть $0 \neq \chi \in H^2(M)$. Так как $H(M)$ — однородная группа типа $T(A)$ (предложение 1.4), то, как и в доказательстве импликации (3) $\implies$ (4), $H(M) = M_1^* \oplus \ker \chi$ для некоторой подгруппы M_1^* , причем $\chi(M_1^*) = 1$. В силу 4 существует разложение $M = M_1 \oplus M_2$ со свойством $H(M_1) = M_1^*$, $H(M_2) = \ker \chi$. Отсюда

$$0 \neq M_1 \subseteq \bigcap_{\chi \in H(M_2)} \ker \chi = \bigcap_{\chi \in \ker \chi} \ker \chi.$$

Импликации (1) $\implies$ (5) $\implies$ (4) справедливы всегда. Предложение доказано.

В заключение отметим несколько, как нам кажется, основных вопросов, связанных с темой этой работы.

1. Описать группу $\text{Hom}(M, A)$, $\chi(A) = 1$ (см. следствие 1.3 и [1]) [7].
2. Изучить соотношения между M и $H(M)$, например, аннуляторные и т.д. (см. теоремы 2.5, 3.3, предложение 4.3 и [2]).
3. Исследовать зависимость следующих утверждений:
 - а) группа M изоморфна $H(G) = \text{Hom}(G, A)$, $\chi(A) = 1$ для некоторой группы G ;
 - б) группа M изоморфна $H^2(G)$ для некоторой группы G ;
 - в) $h(M): M \longrightarrow H^2(M)$ — изоморфизм.

Ясно, что (в) $\implies$ (б) $\implies$ (а). Если M и G имеют конечный ранг, то а), б) и в) эквивалентны [1]. Если $H(H^2(M)/h(M)M) = 0$ для любой группы M , удовлетворяющей условию 2 теоремы 2.5, то (а) $\implies$ (в).

4. Изучить фактор-группу $H^2(M)/h(M)M$. Верно ли, что $H(H^2(M)/h(M)M) = 0$? В частности, когда $H^2(M)/h(M)M$ копериодическая [алгебраически компактная] группа (см. предложение 2.9)?

Литература

1. Warfield R. B., Jr. Homomorphisms and duality for torsion-free groups. — "Math. Z.", 1968, 107, №3, 189-200.
2. Charles B. Méthodes topologiques en théorie des

- groupes abéliens. - „Proc. Colloq. on abelian groups”, Budapest, 1964, 29-42.
3. Grosse P. Periodizität der iterierten Homomorphismengruppen. - „Arch. Math”, 1965, 16, 393-406.
 4. Schultz P. Periodic homomorphism sequences of abelian groups. - „Arch. Math”, 1970, 21, 132-135.
 5. Nunke R. J. Undirect products of infinite cyclic groups. - „Proc. Amer. Math. Soc.”, 1962, 13, № 1, 66-71.
 6. Meijer A. R. A note on separable homogeneous extensions of the Specker group. - „Arch. Math”, 1973, 24, № 2, 123-126.
 7. Fuchs L. Recent results and problems on abelian groups. - „Topics in abelian groups”. Chicago, 1963, 9-40.

Поступило

3 октября 1977г.

О СЕРВАНТНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ ЦЕЛЫХ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

П. А. Крылов

Эта заметка примыкает к статье автора [1]. В [1] изучались абелевы группы без кручения, все p -базисные подгруппы которых группы циклические. Класс всех таких групп совпадает с классом всех сервантных подгрупп в $\prod_{p=2,3,\dots} \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}_p$ - группа целых p -адических чисел. В частности, сюда попадают все сервантные подгруппы группы $\mathbb{Z}_p$. Известно, что группа G без кручения изоморфна некоторой сервантной подгруппе в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда $qG = G$ для всех простых чисел q с $q \neq p$ и $\chi(G/pG) = 1$, т.е. G имеет циклическую p -базисную подгруппу. По существу о таких группах ничего неизвестно (исключая случай групп конечного ранга, см. [2]). Оказывается, как следует из теоремы I этой заметки, что если G - сервантная подгруппа в $\mathbb{Z}_p$ и G совпадает со своим псевдоцоклем, то G обладает многими свойствами сервантных подгрупп в $\mathbb{Z}_p$ конечного ранга. Сервантные подгруппы в $\mathbb{Z}_p$, совпадающие с псевдоцоклем, и их кольца эндоморфизмов оказываются "просто устроенными" во многих отношениях.

Напомним, что псевдоцокль $\text{Soc } G$ группы G без кручения - это сервантная подгруппа в G , порожденная всеми её минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами, $E(G)$ - кольцо эндоморфизмов группы G , $\chi(G)$ - её ранг. Следуя [3], будем говорить, что G есть IP -группа, если G имеет собственные сервантные изоморфные подгруппы. Все топологические рассуждения ведутся в $\mathbb{Z}$ -адической топологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть G - однородная группа без кручения

с циклическими p -базисными подгруппами. Следующие свойства группы G эквивалентны: 1. $G = \text{Soc } G$; 2. $\text{Soc } G \neq 0$; 3. G не является IP - группой.

Доказательство. (2) $\rightarrow$ (3). Предположим, что $G = A \oplus B$, где $A, B \neq 0$. Возьмем простое число p , такое что $pG \neq G$. Тогда ввиду однородности группы G также $pA \neq A$ и $pB \neq B$. Значит, $1 = z(G/pG) = z(A/pA) + z(B/pB) > 1$. Противоречие, и, следовательно, G - неразложимая группа. Далее, если A - сервантная подгруппа в G , то каждая p -базисная подгруппа в A будет p -базисной и в G (снова в силу однородности группы G и того факта, что $z(G/pG) \leq 1$). Следовательно, G/A - делимая группа и A плотна в G . Если теперь $\lambda \in E(G)$ и $\ker \lambda \neq 0$, то $\ker \lambda$ - плотная подгруппа в G . Значит, $\lambda = 0$. Таким образом, группа G неразложима и каждый её ненулевой эндоморфизм имеет нулевое ядро (отметим, что здесь использовалось только то, что G - однородная группа с циклическими p -базисными подгруппами). Рассуждая теперь так же, как в конце доказательства импликации (1) $\rightarrow$ (2) из теоремы I работы [I], можно получить, что каждый эндоморфизм группы G есть целое кратное некоторого её автоморфизма. Ясно, что G не является IP - группой.

(3) $\rightarrow$ (1). Допустим, что $G \neq \text{Soc } G$. Тогда по теореме I [I] существует $\lambda \in E(G)$, не являющийся целым кратным никакого автоморфизма группы G . Возьмем некоторый ненулевой элемент a группы G . Обозначим $A = \{a\}_*$, $B = \{\lambda(a)\}_*$ и λ' - ограничение эндоморфизма λ на A . Тогда $\lambda' = n\chi'$, где χ' - некоторый изоморфизм A на B . Покажем, что $\lambda(G) \leq nG$. Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ - каноническое разложение числа n (не ограничивая общности, можно считать, что $p_i G \neq G$, $i = 1, \dots, s$). Для каждого $i = 1, \dots, s$ положим $S_i = \{x \in G \mid \lambda(x) \in p_i^{k_i} G\}$. Тогда $S_i \geq p_i^{k_i} G$. Кроме того, ввиду $\lambda' = n\chi'$, существует $v \in G - p_i G$, такой что $v \in S_i$. Отсюда, принимая во внимание, что $G/p_i G$ - циклическая группа простого порядка, $S_i = G$. Таким образом, $\lambda(G) \leq \bigcap_{i=1}^s p_i^{k_i} G = nG$.

Определим эндоморфизм χ следующим образом. Если $x \in G$, то $\lambda(x) = ny$ для единственного $y \in G$. Полагаем $\chi(x) = y$. Очевидно, $\chi \in E(G)$ и $\lambda = n\chi$. Покажем, что χ сохраняет p -высоты всех элементов группы G для всех простых p . Действительно, λ сохраняет p -высоты для всех $p \neq p_i$, $i = 1, \dots, s$.

Следовательно, и χ сохраняет p -высоты для этих p . Допустим теперь, что для некоторого i , $1 \leq i \leq s$ и некоторого $c \in G$ $h_{p_i}(c) < h_{p_i}(\chi(c))$. Тогда, как и выше, можно найти $\xi \in E(G)$ со свойством $\chi = m\xi$, причем $p_i | m$. Отсюда $\lambda = nm\xi$ и $\lambda' = nm\xi'$, где ξ' - ограничение ξ на A . Следовательно, $\chi' = m\xi'$. Но это равенство невозможно, так как $p_i | m$. Поэтому $B = \chi'(A) = (m\xi')A \subseteq p_i B$, а по выбору p_i

$B \neq p_i B$. Таким образом, χ сохраняет p -высоты для всех p . Следовательно, подгруппа $\text{im } \chi$ сервантна в G и $\text{im } \chi \cong G$. Кроме того, $\text{im } \chi \neq G$, т.к. λ не является целым кратным никакого автоморфизма группы G . Но существование такой подгруппы противоречит 3. Поэтому $G = \text{Soc } G$. Предложение доказано.

В следующей теореме $\mathcal{U}(E(G))$ - радикал Джекобсона кольца $E(G)$, $(1 \cdot n) = n E(G)$ и F_p - поле из p элементов.

ТЕОРЕМА I. Пусть G - сервантная подгруппа группы целых p -адических чисел $\mathcal{U}_p$. Следующие условия эквивалентны:

1. $G = \text{Soc } G$; 2. $\text{Soc } G \neq 0$.
3. Каждый автоморфизм группы G есть целое кратное некоторого её автоморфизма.
4. G не является IP -группой.
5. $E(G)$ - кольцо дискретного нормирования.
6. $E(G)$ - локальное кольцо.
7. $(1 \cdot p) = \mathcal{U}(E(G))$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1, 2, 3 и 4 вытекает из теоремы I [1] и предложения 1. (1) $\rightarrow$ (5). Из следствия I [1] видно, что каждый идеал кольца $E(G)$ имеет вид $(1 \cdot n)$ для некоторого n . Но в нашем случае $nG = G$, если $(n, p) = 1$. Поэтому $(1 \cdot n) = E(G)$ для таких n . Так что идеалы кольца $E(G)$ исчерпываются идеалами $(1 \cdot p^n)$ для различных n . Импликация (5) $\rightarrow$ (6) справедлива всегда. (6) $\rightarrow$ (7). Так как $E(G)/(1 \cdot p) \cong F_p$, то $(1 \cdot p) \supseteq \mathcal{U}(E(G))$. Но по предположению $E(G)/\mathcal{U}(E(G))$ - поле. Следовательно, $(1 \cdot p) = \mathcal{U}(E(G))$. (7) $\rightarrow$ (1). Сначала заметим, что $E(G)/\mathcal{U}(E(G)) = E(G)/(1 \cdot p) \cong F_p$ и поэтому $E(G)$ - локальное кольцо. Допустим теперь, что $G \neq \text{Soc } G$. Тогда ввиду 4 существует в G собственная сервантная изоморфная подгруппа S . Если $\lambda: G \rightarrow S$ - некоторый изоморфизм, то

$\lambda \in \mathcal{U}(E(G))$ в силу необратимости λ и локальности $E(G)$. Однако $\lambda \notin (1-p)$, что противоречит 7. Следовательно, $G = Soc\ G$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если G - сервантная подгруппа в $\mathcal{U}_p$; то G является IP -группой тогда и только тогда, когда $Soc\ G = 0$. Сервантные подгруппы в $\mathcal{U}_p$ конечного ранга удовлетворяют условиям 1 - 7 из теоремы 1. Следствие 3 выделяет ещё один класс таких подгрупп. А именно, сервантные подгруппы в $\mathcal{U}_p$ конечного ко-ранга также удовлетворяют этим условиям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G - такая редуцированная группа без кручения, что $z(\hat{G}/G) < \infty$, где $\hat{G}$ - пополнение группы G в $\mathbb{Z}$ -адической топологии. Тогда если S - сервантная плотная подгруппа в G , изоморфная G , то $S = G$.

Доказательство. Возьмем некоторый изоморфизм $\alpha: G \rightarrow S$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G & \xrightarrow{i} & \hat{G} & \rightarrow & \hat{G}/S \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \hat{\alpha} & & \downarrow \beta \\ 0 & \rightarrow & S & \xrightarrow{j} & \hat{G} & \rightarrow & \hat{G}/S \rightarrow 0, \end{array}$$

где i, j - канонические вложения, $\hat{\alpha}$ - изоморфизм, индуцированный α . Так как α и $\hat{\alpha}$ - изоморфизмы, то и β - изоморфизм. Поскольку $\hat{G}/G \cong \hat{G}/S/G/S$, то $z(\hat{G}/S) = z(\hat{G}/G) + z(G/S)$. Но $z(\hat{G}/S) = z(\hat{G}/G) < \infty$. Поэтому $z(G/S) = 0$, т.е. $S = G$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G - такая редуцированная группа без кручения, что $z(\hat{G}/G) < \infty$ и $z(G/pG) < \infty$ для каждого p . Тогда G не является IP -группой.

Доказательство. Пусть S - сервантная подгруппа в G , изоморфная G . Так как для каждого p $z(G/pG) < \infty$, то каждая p -базисная подгруппа группы S будет p -базисной подгруппой и в G . Отсюда заключаем, что G/S - делимая группа, а это равносильно плотности S . По предложению 2 $S = G$.

Если G - сервантная подгруппа в $\mathcal{U}_p$, то G плотна в $\mathcal{U}_p$, а $\mathcal{U}_p$ -полная группа. Следовательно, $G \cong \mathcal{U}_p$.

Поэтому из следствия 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G - сервантная подгруппа в $\mathcal{U}_p$, при-

чем $\tau(J_p/G) < \infty$. Тогда G не является IP -группой.

Литература

1. Крылов П.А. Абелевы группы без кручения с циклическими p -базисными подгруппами. - "Мат. заметки", 1976, 20, 6, 805-813.

2. Murley C. E. The classification of certain classes of torsion-free abelian groups. - "Pac. J. Math.", 1972, 10, 3, 647-665.

3. Beaumont R. H., Pierce R. S. Isomorphic direct summands of abelian groups. - "Math. Ann.", 1964, 153, 1, 21-37.

Поступило

15 сентября 1976 г.

КОРРЕКТНЫЕ И ЧИСТО КОРРЕКТНЫЕ МОДУЛИ

С. К. Росошек

Основное внимание в этой работе уделяется выяснению следующего вопроса: какие модули и над какими кольцами являются корректными /строго корректными/ и чисто корректными /строго чисто корректными/. В § I изучаются корректные и строго корректные модули. Предложение I.3 выделяет классы модулей, которые корректны над любыми кольцами. Теорема I.6 дает ответ на вопрос о корректности проективных модулей над целостными кольцами. Описание колец, над которыми любой модуль и каждый инъективный модуль корректны, дано в теореме I.9. Табл. I на основе результатов § I показывает, для каких классов колец и модулей вопрос о корректности /строгой корректности/ может быть решен положительно или отрицательно. В § 2 изучаются чисто корректные и строго чисто корректные модули. Теорема 2.4 выделяет довольно широкий класс колец /а именно, класс полулокальных колец/, над которыми любой конечно порожденный модуль строго чисто корректен. Еще один такой класс /нетеровы кольца/ указан в теореме 2.5. Описание колец, над которыми любой инъективный модуль чисто корректен, дано в теореме 2.6. Теорема 2.10 утверждает, что любой проективный правый модуль над совершенным справа кольцом чисто корректен. Ответ на вопрос, над какими кольцами любой модуль чисто корректен, дается в теореме 2.12. В качестве следствия получено, что в коммутативном случае кольца, над которыми любой модуль чисто корректен, есть в точности артиновы кольца главных идеалов. Табл. 2 на основе результатов § 2 показывает, для каких классов колец и модулей вопрос о чисто корректности /строгой чисто корректности/ может быть решен положительно или отрицательно.

Все рассматриваемые в этой работе кольца - ассоциативные с единицей, а модули - правые унитарные.

§ 1. Корректные модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть R - кольцо и M - правый R - модуль. Будем говорить, что M есть корректный модуль, если для любого правого R -модуля N из того, что модули M и N изоморфны подмодулям один другого, следует изоморфизм $M \cong N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть R - кольцо и M - правый R - модуль. Будем говорить, что M есть строго корректный модуль, если для любого правого R -модуля N из того, что существуют мономорфизмы $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow M$, следует, что f или g есть изоморфизм модулей M и N . /Таким образом, если f / или g / есть изоморфизм, то и g /соответственно f / есть также изоморфизм/.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Для произвольного кольца R справедливы следующие утверждения:

- любой артинов R -модуль строго корректен;
- любой конечно порожденный совершенный /т.е. удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепочек циклических подмодулей/ R -модуль строго корректен;
- любой нетеров квазинъективный R -модуль строго корректен;
- любой полупростой R -модуль корректен.

Доказательство. а) Пусть M - произвольный артинов R -модуль и N - произвольный R -модуль такой, что существуют мономорфизмы $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow M$. Тогда gf есть мономорфизм модуля M . Из [3, с. 41] следует, что gf - автоморфизм модуля M . Следовательно, g - сюръективное отображение, откуда g - изоморфизм.

б) Пусть M - конечно порожденный совершенный R -модуль и $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow M$ - мономорфизмы для некоторого модуля N . Согласно [14, с. 76] gf есть автоморфизм модуля M , тогда g - изоморфизм модулей M и N .

в) Пусть M - нетеров квазинъективный R -модуль, N - произвольный R -модуль такой, что $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow M$ - мономорфизмы. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im}(gf) \xrightarrow{\varphi} M \\ & & \searrow \psi \\ & & M, \end{array}$$

где φ - некоторый изоморфизм модулей M и $\text{Im}(gf)$, ψ -

естественное вложение. Так как M - квазиинъективный модуль, то существует R -гомоморфизм $\chi : M \rightarrow M$ такой, что $\varphi = \chi\psi$. Заметим, что поскольку φ - эпиморфизм, то и χ - эпиморфизм. Но M - нетеров модуль, следовательно, по [3, с. 41] χ есть автоморфизм модуля M . Тогда $\psi = \chi^{-1}\varphi$, откуда $\text{Im}(g\psi) = M$. Следовательно, g сюръективный, т.е. g - изоморфизм модулей M и N .

г) Пусть M - полупростой R -модуль /т.е. прямая сумма простых R -модулей/, N - любой R -модуль такой, что M и N изоморфны подмодулям один другого. Очевидно, N - полупростой модуль. непосредственно проверяется, что однородные компоненты модуля N те же, что и у модуля M , причем соответствующие компоненты модулей M и N изоморфны. Следовательно, модули M и N изоморфны.

Вясним теперь, что можно сказать о кольце R , если некоторые R -модули корректны или строго корректны. Заметим сначала, что для любого ненулевого кольца R существует не строго корректный R -модуль /например, прямая сумма счетного числа копий R /.
ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.4. Пусть R - кольцо без делителей нуля /не

обязательно коммутативное/.

а) Модуль R_R корректен тогда и только тогда, когда R - кольцо главных правых идеалов.

б) Модуль R_R строго корректен тогда и только тогда, когда R - тело.

Имеет место непосредственно проверяемое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5. Пусть R - кольцо и любой правый проективный R -модуль корректен. Тогда R - наследственное справа кольцо.

Заметим, что утверждение, обратное к предложению I.5, неверно. Действительно, пусть $\mathbb{Z}$ - кольцо целых чисел, $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ и $J = 2R + (1 + \sqrt{-3})R$. Так как J - неглавный идеал кольца R , то по предложению I.4 модуль R_R не корректен. Поскольку R есть дедекиндова область целостности, то R - наследственное кольцо и R_R - проективный не корректный R -модуль.

Ответ на вопрос, когда любой проективный модуль корректен над целостным кольцом, даст следующая

ТЕОРЕМА I.6. Пусть R - кольцо /не обязательно коммутативное/ без делителей нуля. Любой проективный правый R -модуль корректен

теи тогда и только тогда, когда R есть область главных правых идеалов.

Необходимость следует из предложения I.4 а).

Достаточность. Пусть R - целостное кольцо главных правых идеалов, тогда R - наследственно справа. Пусть M - произвольный проективный правый R -модуль и, следовательно, свободный модуль, т.е. $M = \sum_{i \in J} \oplus M_i$, где $M_i \cong R_R$ для любого $i \in J$. Предположим, что N - произвольный правый R -модуль такой, что M и N изоморфны подмодулям один другого. Тогда N проективный модуль /так как R - наследственное справа/ и, следовательно, свободный R -модуль, т.е. $N = \sum_{j \in J'} \oplus N_j$, где $N_j \cong R_R$ для любого $j \in J'$.

Так как N изоморфен подмодулю M , то по [3, с. 136] $N \cong \sum_{i \in J'} \oplus N'_i$, где $0 \neq N'_i \cong M_i$ и $J' \subseteq J$. Заметим, что по условию $N'_i \cong R_R$ для любого $i \in J'$. С другой стороны, так как M изоморфен подмодулю N , то $M \cong \sum_{j \in J'} \oplus M'_j$, где $0 \neq M'_j \cong N_j$, $J' \subseteq J$ и $M'_j \cong R_R$ для любого $j \in J'$. Учитывая, что кольцо R обладает свойством инвариантности базисного числа, поскольку R - нетерово справа [4, с. 22], то имеем $|J| = |J'| \leq |J| = |J'| \leq |J|$. Следовательно, $|J| = |J'|$, т.е. $M \cong N$.

СЛЕДСТВИЕ I.7. Пусть R - локальное кольцо /не обязательно без делителей нуля/. Любой проективный правый R -модуль корректен тогда и только тогда, когда R - область правых главных идеалов.

Необходимость. Если любой правый проективный R -модуль корректен, то по предложению I.5 R - наследственное справа кольцо. Поскольку наследственное справа локальное кольцо не имеет делителей нуля [4, с. 27 и с. 33 (упр. 6)], применяем предложение I.4 а).

Достаточность. Пусть R - локальная область главных правых идеалов, тогда по теореме I.6 получаем доказательство.

Утверждение следствия I.7 справедливо и для более широкого класса колец, включающего в себя локальные кольца, а именно, для проективно свободных колец [4, с. 23].

СЛЕДСТВИЕ I.8. Пусть R - проективно свободное кольцо. Любой проективный правый R -модуль корректен тогда и только тогда, когда R - область главных правых идеалов.

Доказательство. Пусть любой проективный правый R -модуль корректен и R - произвольный ненулевой правый идеал R .

Пусть $0 \neq x \in P$, тогда по определению проективно свободного кольца и по предложению I.5 xR есть свободный модуль единственного ранга. Следовательно, P содержит правый идеал, изоморфный R_d . Тогда любой ненулевой правый идеал есть свободный модуль ранга I, откуда следует, что R есть область главных правых идеалов. Достаточность следует из теоремы I.6.

Выясним теперь, над какими кольцами любой модуль корректен.

ТЕОРЕМА I.9. Для произвольного кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1. Любой правый R -модуль корректен.
2. Любой правый инъективный R -модуль корректен.
3. R - классически полупростое кольцо.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно, (3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения I.3 /г/. Покажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть 2 выполнено и R не классически полупростое кольцо. Тогда существует не инъективный R -модуль A . Обозначим через J инъективную оболочку модуля A и пусть $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, где $J_n \cong J$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Положим $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} M \ominus A$. Ясно, что M - инъективный модуль, а N - не инъективный модуль, т.е. M и N не изоморфны. В то же время легко видеть, что модули M и N изоморфны подмодулям один другого. Следовательно, M - не корректный инъективный R -модуль, что противоречит 2.

Таблица 1

КОРРЕКТНЫЕ И СТРОГО КОРРЕКТНЫЕ МОДУЛИ

[illegible]

Пояснения к табл. I

1. Модульные и кольцевые условия здесь предполагаются правыми. Например, "артинов модуль" означает артинов правый модуль, "нетерово кольцо" означает нетерово справа кольцо.

2. Знак "+" означает, что данный модуль над данным кольцом является корректным модулем. Например, на пересечении строки "конечно порожденные модули" и столбца "артиновы кольца" стоит знак "+". Это означает, что каждый конечно порожденный правый модуль над любым артиновым справа кольцом корректен. Знак "-" означает, что в классе колец из соответствующего столбца существует кольцо такое, что некоторый модуль в классе модулей из соответствующей строки не является корректным модулем. Например, на пересечении строки "конечно порожденные модули" и столбца "нетеровы кольца" стоит знак "-". Это означает, что существует нетерово справа кольцо такое, что некоторый конечно порожденный правый модуль над этим кольцом не является корректным модулем.

3. Знаки "(+)" и "(-)" имеют тот же смысл, что и знаки "+" и "-", с той лишь разницей, что они относятся к строго корректным модулям.

4. Доказательство утверждений, собранных в табл. I, либо есть непосредственное применение соответствующего результата из § I, либо легко следует из него. Например, утверждение "любой нетеров квазинъективный правый модуль над любым кольцом строго корректен" есть в точности предложение I.3 /в/. А утверждение "каждый конечно порожденный правый модуль над артиновым справа кольцом корректен" следует из предложения I.3 /а/, того факта, что любой конечно порожденный правый модуль над артиновым справа кольцом есть артинов модуль, а также поскольку любой строго корректный модуль корректен.

§ 2. Чисто корректные и строго чисто корректные модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Точная последовательность правых R -модулей

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \quad (1)$$

называется точной чистой последовательностью, если для любого левого R -модуля K индуцированная последовательность абелевых групп

$$0 \rightarrow M \otimes_R K \xrightarrow{i \otimes 1} N \otimes_R K$$

точна; $\text{Im } f$ называется чистым подмодулем модуля N , f - чистым мономорфизмом, если (I) - точная чистая последовательность

[8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть R - кольцо и M - правый R -модуль. Будем говорить, что M есть чисто корректный модуль, если для любого правого R -модуля N из того, что модули M и N изоморфны чистым подмодулям один другого, следует изоморфизм $M \cong N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть R - кольцо и M - правый R -модуль. Будем говорить, что модуль M - строго чисто корректный, если для любого правого R -модуля N из того, что существуют чистые мономорфизмы $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow M$ следует, что f или g есть изоморфизм модулей M и N .

Заметим, что для любого ненулевого кольца R существует не строго чисто корректный модуль /прямая сумма бесконечного числа копий R /. Таким образом, изучение строго чисто корректных модулей представляет интерес прежде всего для конечно порожденных модулей.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть R - полулокальное кольцо /т.е. $R/J(R)$ - классически полупростое кольцо, где $J(R)$ - радикал Джексона/. Любой конечно порожденный правый /левый/ R -модуль строго чисто корректен.

Доказательство. Пусть A - произвольный правый конечно порожденный R -модуль, B - любой правый R -модуль такой, что существуют чистые мономорфизмы $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow A$. Ясно, что $gf: A \rightarrow A$ есть чистый мономорфизм. Пусть

$\text{Im } gf = A'$. Тогда имеем точную чистую последовательность

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A, \quad (I)$$

где i - естественное вложение. Умножая тензорно (I) справа на $R/J(R)$, получаем точную последовательность $R/J(R)$ -модулей

$$0 \rightarrow A' \otimes_R (R/J(R)) \xrightarrow{i \otimes 1} A \otimes_R (R/J(R)). \quad (2)$$

Поскольку A - конечно порожденный R -модуль, то, как легко видеть, существует $R/J(R)$ -эпиморфизм $(R/J(R))^n$ на модуль $A \otimes_R (R/J(R))$ для некоторого натурального числа n . Так как $R/J(R)$ классически полупростое, то $A \otimes_R (R/J(R))$ - полупростой $R/J(R)$ -модуль конечной длины. Далее, $\text{Im } (i \otimes 1)$ есть изоморфный подмодуль в $A \otimes_R (R/J(R))$. Так как полупростой модуль конечной длины не содержит собственных изоморфных подмодулей, то $\text{Im } (i \otimes 1) = A \otimes_R (R/J(R))$, т.е. $i \otimes 1$ - сюръективное отображение. Следовательно, по [1, с. II7] i - сюръективное

отображение, т.е. $Jm(gf) = A$. Отсюда q есть изоморфизм и A - строго чисто корректный модуль.

Доказательство для левых модулей совершенно аналогично.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть R - нетерово справа кольцо, M - конечно порожденный правый R -модуль. Тогда M строго чисто корректный модуль.

Доказательство см. в [6], теорема 3.6].

Заметим, что конечно порожденный модуль над произвольным кольцом не обязательно строго чисто корректен и даже более того не обязательно чисто корректен.

ПРИМЕР 2.6. Пусть P - поле, A - счетномерное векторное пространство над P и R - кольцо всех линейных преобразований векторного пространства A . Кольцо R можно отождествить с кольцом $M_{\infty} \times M_{\infty}$ матриц над полем P , у которых в каждом столбце отлично от нуля лишь конечное число элементов. Из строения кольца R ясно, что существует прямое разложение $R_R = J \oplus J'$, где J, J' - правые идеалы в R , причем $J = R_R \cong J'$. Так как R не является классически полупростым кольцом, то R_R , а следовательно, и J, J' не есть полупростые модули. Тогда существует правый идеал K кольца R такой, что $K = J'$, причем K не есть прямое слагаемое модуля R_R . Далее, $J \oplus K$ и R_R не изоморфные модули. Действительно, если $J \oplus K \cong R_R$, то $J \oplus K$ есть главный правый идеал R . Поскольку R является регулярным по Нейману кольцом, то $J \oplus K$ в этом случае порождается идемпотентом. Следовательно, $J \oplus K$ - прямое слагаемое в R_R . Получено противоречие. Таким образом, имеем $J = J \oplus K \subset R_R$, где $J = R_R$ и $J \oplus K \neq R_R$. Заметим, что $J \oplus K$ есть чистый подмодуль в R_R , так как над регулярным по Нейману кольцом любая точная последовательность есть точная чистая последовательность. Следовательно, R_R не является чисто корректным модулем.

Рассмотрим теперь чисто корректные модули.

ТЕОРЕМА 2.7. Для произвольного кольца R любой инъективный правый R -модуль чисто корректен тогда и только тогда, когда R есть нетерово справа кольцо.

Доказательство. Напомним, что правый R -модуль M называется FP -инъективным [16, с. 323], если для любого конечно представленного правого R -модуля K имеем $Ext_R^1(K, M) = 0$.

Пусть любой правый инъективный R -модуль чисто корректен.

Тогда покажем, что прямая сумма любого семейства правых инъективных

R -модулей есть инъективный модуль. Предположим противное, пусть существует семейство правых инъективных R -модулей $\{A_i\}_{i \in I}$ таких, что $A = \sum_{i \in I} \oplus A_i$ не есть инъективный модуль. Так как любой инъективный модуль FP -инъективен и прямая сумма FP -инъективных модулей есть FP -инъективный модуль, то A - FP -инъективный модуль. Используя [2, предложение 1.30], получаем, что модуль A чист в своей инъективной оболочке D . Обозначим через $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, где $D_n \cong D$ для $n=1, 2, \dots$ и $C = A \oplus B$. Очевидно, модули B и C не изоморфны. С другой стороны, модули B и C изоморфны чистым подмодулям один другого. Следовательно, B есть инъективный не чисто корректный модуль, что противоречит условию. Таким образом, прямая сумма правых инъективных R -модулей есть инъективный модуль. Отсюда получаем, что R - нетерово справа кольцо [5, теорема 18].

Пусть теперь R - нетерово справа кольцо. Тогда любой FP -инъективный правый модуль инъективен [13, предложение 1 и теорема 3]. Пусть A - произвольный инъективный правый R -модуль и B - любой правый R -модуль такой, что A и B изоморфны чистым подмодулям один другого. Легко видеть, что B есть FP -инъективный R -модуль и, следовательно, B - инъективный модуль. Тогда по [1, с. 184] получаем $A \cong B$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть R - нетерово справа кольцо, α_A - класс правых корректных R -модулей, α'_A - класс правых чисто корректных R -модулей. $\alpha_A = \alpha'_A$ тогда и только тогда, когда R есть классически полупростое кольцо.

Достаточность следует из теоремы 1.9.

Необходимость. Если R - нетерово справа кольцо, не являющееся классически полупростым кольцом, то по теореме 2.7 любой инъективный правый модуль чисто корректен. В то же время по теореме 1.9 существует инъективный не корректный правый модуль. Следовательно, в этом случае $\alpha_A \neq \alpha'_A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть R - регулярное по Нейману кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) любой правый R -модуль корректен;
- б) любой правый R -модуль чисто корректен;
- в) R - нетерово справа кольцо.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б) очевидно. (б) $\Rightarrow$ (в) следует из теоремы 2.7. (в) $\Rightarrow$ (а) вытекает из теоремы 1.9 и того факта, что

нетерова справа регулярное кольцо является классически полупростым кольцом.

Теорема 2.10. Пусть R - совершенное справа кольцо и M - правый проективный R -модуль. Тогда M есть чисто корректный модуль.

Сначала докажем следующую лемму, идея доказательства которой аналогична одному из доказательств теоремы Шредера-Бернштейна [9, с. 17]:

ЛЕММА 2.11. Пусть R - произвольное кольцо, M - такой R -модуль, что любой чистый его подмодуль есть прямое слагаемое. Тогда M - чисто корректный модуль.

Доказательство. Достаточно показать, что если M_1 - произвольный чистый подмодуль модуля M - такой, что $M_1 \cong M$ и N_1 - произвольный чистый подмодуль модуля M , удовлетворяющий $M_1 \subset N_1 \subset M$, то модули M и N_1 изоморфны.

По условию имеем $M = N_1 \oplus N'_1$ и $N_1 = M_1 \oplus M'_1$ для некоторых дополнительных подмодулей N'_1 и M'_1 .

Пусть $\varphi: M \rightarrow M_1$ - фиксированный изоморфизм модулей M и M_1 . Имеем

$$M = N_1 \oplus N'_1 = M_1 \oplus M'_1 \oplus N'_1$$

и так как $M_1 = \varphi(M) = \varphi(N_1) \oplus \varphi(N'_1)$,

то $M = \varphi(N_1) \oplus \varphi(N'_1) \oplus M'_1 \oplus N'_1 = [N'_1 \oplus \varphi(N'_1)] \oplus$

$$\oplus \varphi(M_1) \oplus \varphi(M'_1) \oplus M'_1 = [N'_1 \oplus \varphi(N'_1) \oplus \varphi^2(N'_1)] \oplus \dots$$

Пусть $K_n = N'_1 \oplus \varphi(N'_1) \oplus \dots \oplus \varphi^n(N'_1)$, через K обозначим подмодуль модуля M , порожденный всеми K_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Легко видеть, что K есть чистый подмодуль модуля M .

Тогда по условию K есть прямое слагаемое модуля M , откуда получаем, что $\varphi(K)$ есть прямое слагаемое модуля M_1 , и, следовательно, есть прямое слагаемое модуля N_1 . Таким образом, $N_1 = \varphi(K) \oplus N_2$ для некоторого дополнительного

прямого слагаемого N_2 . По построению модуля K имеем $K = N'_1 \oplus \varphi(K)$. Следовательно, получаем $M = N'_1 \oplus N_1 =$

$$= N'_1 \oplus \varphi(K) \oplus N_2 = K \oplus N_2.$$

Но тогда отображение $\varphi: (k, n_2) \rightarrow (\varphi(k), n_2)$, $k \in K$, $n_2 \in N_2$ есть исконый изоморфизм модулей M и N_1 .

Доказательство теоремы. Если M есть правый проективный R -модуль, то любой чистый подмодуль модуля M есть его прямое слагаемое [10, предложение 10.2]. Пользуясь теперь леммой 2.11,

получаем, что если R есть совершенное справа кольцо, а M - правый проективный R -модуль, то M чисто корректен.

Заметим, что утверждение, обратное к теореме 2.10, неверно. Действительно, кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел не является совершенным кольцом, но любой проективный $\mathbb{Z}$ -модуль чисто корректен.

Выясним теперь, над какими кольцами любой R -модуль чисто корректен. Напомним, что кольцо R называется чисто квазифробениусовым справа, если $\text{r.p.gl.dim } R = 0$, т.е. если любая точная чистая последовательность правых R -модулей расщепляется [12]. Известно, что кольцо R чисто квазифробениусово справа тогда и только тогда, когда любой чисто инъективный правый R -модуль чисто проективен [12, теорема 1]. Из [17, теорема 2] следует, что кольцо R чисто квазифробениусово справа тогда и только тогда, когда любой правый R -модуль алгебраически компактен. Следующая теорема дает характеристику чисто квазифробениусовых колец в терминах чисто корректных модулей.

ТЕОРЕМА 2.12. Любой правый R -модуль чисто корректен тогда и только тогда, когда R - чисто квазифробениусово справа кольцо.

Доказательство. Необходимость. Пусть любой правый R -модуль чисто корректен и M - произвольный правый R -модуль. Модуль M можно вложить как чистый подмодуль в некоторый компактный модуль N [17, лемма 1]. Рассмотрим модуль $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, где $X_i \cong N$ для любого $i \in \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}$ - бесконечное индексное множество. Ясно, что X_i есть компактный модуль для любого $i \in \mathcal{I}$. Легко видеть, что X - компактный модуль. Рассмотрим модули X и $X \oplus M$. Каждый из этих модулей изоморфен чистому подмодулю другого модуля. Поскольку по условию любой R -модуль чисто корректен, то $X \cong X \oplus M$. Следовательно, $X \oplus M$ есть компактный модуль. Но тогда M , как прямое слагаемое компактного модуля, есть алгебраически компактный модуль. Таким образом, R - чисто квазифробениусово справа кольцо.

Достаточность. Если кольцо R чисто квазифробениусово справа, то по определению любая точная чистая последовательность расщепляется. Применяя лемму 2.11, получаем, что любой правый R -модуль чисто корректен.

Следствие 2.13. Пусть R - коммутативное кольцо. Любой R -

модуль чисто корректен тогда и только тогда, когда R - артиново кольцо главных идеалов.

Необходимость. Если любой R -модуль чисто корректен, то из теоремы 2.12 следует, что любая точная чистая последовательность расщепляется. По [11, теорема 4.3] R есть коммутативное артиново кольцо главных идеалов.

Достаточность. Пусть R - коммутативное артиново кольцо главных идеалов. Согласно [11, теорема 4.3] любая точная чистая последовательность расщепляется. По лемме 2.11 отсюда получаем, что любой R -модуль чисто корректен.

СЛЕДСТВИЕ 2.14. Пусть R не обязательно коммутативное кольцо. Если любой правый R -модуль чисто корректен, то кольцо R артиново справа.

Доказательство. Если любой правый R -модуль чисто корректен, то по теореме 2.12 любая чистая точная последовательность правых R -модулей расщепляется. Применяя [10, теорема 10.3], получаем, что R - артиново справа кольцо.

Замечание. Из следствия 2.13 вытекает, что утверждение, обратное к следствию 2.14, неверно.

В заключение укажем некоторый конкретный подкласс класса чисто квазифробениусовых справа колец.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. Любое обобщенно однорядное кольцо /т.е. артиново слева и справа кольцо, каждое неразложимое правое и левое простое слагаемое которого имеет единственный композиционный ряд/ есть чисто квазифробениусово слева и справа кольцо.

Доказательство. Пусть R есть обобщенно однорядное кольцо. Согласно [14], любой R -модуль является прямой суммой циклических модулей. Учтем, что над артиновым кольцом циклический модуль конечно представленный. Тогда любой R -модуль есть прямая сумма конечно представленных модулей и, следовательно, чисто проективен [10, теорема 7.4]. Таким образом, R есть чисто квазифробениусово кольцо.

Таблица 2

ЧИСТО КОРРЕКТНЫЕ И СТРОГО ЧИСТО КОРРЕКТНЫЕ МОДУЛИ

Кольца									
Модули	Любне	Артиновы	Артиновы кольца гл. идеалов	Чисто квази-зифробени-усовы	Дедекиндо-вы первич-ные	Коммутат. области гл. идеалов	Нетеровы	Локальные	Совершен-ные
Любне	(-)-	(-)-	(-)+	(-)+	(-)-	(-)-	(-)-	(-)-	(-)-
Инъектив-ные	(-)-	(-)+	(-)+	(-)+	(-)+	(-)+	(-)+	(-)-	(-)-
Проектив-ные	(-)-	(-)+	(-)+	(-)+	(-)?	(-)+	(-)?	(-)-	(-)+
Свободные	(-)-	(-)+	(-)+	(-)+	(-)?	(-)+	(-)?	(-)-	(-)+
Плоские	(-)-	(-)+	(-)+	(-)+	(-)-	(-)-	(-)-	(-)-	(-)+
Нетеровы	(?)?	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+
Конечно порожден-ные	(-)-	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+
Конечно порожден-ные про-ективные	(-)-	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+
Цикличес-кие	(-)-	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+	(+)+
Алгебра-ически компакт-ные	(-)-	(-)-	(-)+	(-)+	(-)-	(-)-	(-)-	(-)-	(-)-
Без кру-чения по Бассу	(-)-	(-)+	(-)+	(-)+	(-)-	(-)-	(-)-	(-)-	(-)+

Пояснения к табл. 2

а/ Модульные и кольцевые условия здесь предполагаются правыми.

б/ Знаки "+", "-", "(+)" и "(-)" имеют тот же смысл, что и в табл. 1

с той разницей, что здесь они относятся к чисто корректным и строго чисто корректным модулям соответственно.

в/ Доказательства утверждений, собранных в табл. 2, получаются согласно тем же принципам, что и в табл. 1.

г/ Знаки "?" или "(?)" означают, что неизвестно, является ли дан-ный модуль над данным кольцом чисто корректным или строго чисто кор-ректным модулем соответственно.

Литература

1. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., "Мир", 1971.
2. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., "Наука", 1969.
3. Ламбек И. Кольца и модули. М., "Мир", 1971.
4. Кон Р. Свободные кольца и их связи. М., "Мир", 1975.
5. Скорняков Л.А. Гомологическая классификация колец. - "Математический вестник", 1967, 4/19/, 415-434.
6. Рососек С.К. модули без кручения над полунаследственными первичными кольцами Голди. - "Группы и модули", вып. I. Томск, 1976, 57-69.
7. Bumby R. Modules which isomorphic to submodules of each other. - "Arch. Math", 1965, 16, 184-185.
8. Cohn P. On the free product of associative rings I. - "Math. Zeit.", 1959, 71, 380-398.
9. Faith C. Algebra: Rings, modules, categories. Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
10. Fieldhouse D. Pure theories. - "Math. Ann.", 1969, 184, 1-18.
11. Griffith P. On the decomposition of modules and generalized left uniserial rings. - "Math. Ann", 1970, 184, 300-308.
12. Kielbasinski R., Simson D. On pure homological dimension. - Bull. Acad. Polon., 1975, 23, 1-6.
13. Megibben C. Absolutely pure modules. - "Proc. Amer. M. S.", 1970, 26, 561-566.
14. Nakayama T. On Frobenius algebras II. - "Ann. Math.", 1941, 42, 1-21.
15. Sabbagh G. Endomorphisms of finitely presented modules. - "Proc. Amer. M. S.", 1971, 30, 75-78.

16. *Stenström B. Coherent rings and FP-injective modules.* - „*J. Lond. Math. Soc.*”, 1970, 2, 323 - 329.
17. *Warfield R. B. Finitary and algebraic compactness for modules.* - „*Pacif. J. Math.*” 1969, 28, 699 - 719.

Поступило
17 сентября 1976 г.

СТРОГО ЧИСТО КОРРЕКТНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С.К. Росомек

Абелеву группу G назовем строго чисто корректной, если для любой абелевой группы H из того, что существуют чистые мономорфизмы (в смысле [3]) $\varphi: G \rightarrow H$ и $\psi: H \rightarrow G$ следует, что φ или ψ есть изоморфизм групп G и H . Изучение строго чисто корректных абелевых групп представляет интерес по следующим причинам. Во-первых, строго чисто корректные абелевы группы есть в точности те абелевы группы, которые не содержат собственных сервантных изоморфных подгрупп. Во-вторых, строго чисто корректные абелевы группы полезны при решении одной задачи об абелевых групповых унарах. Для конечных групповых унаров Л.А.Скорняков доказал теорему: любой конечный групповой унар можно представить как расширение нильпотентного группового унара при помощи автоморфного [1, теорема 1]. Для бесконечного группового унара можно в общем случае говорить лишь об его представимости в виде расширения нильпотентного группового унара при помощи мономорфного. Если G - бесконечная абелева группа и $\varphi: G \rightarrow G$ - мономорфизм такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi^n G \neq 0$, то абелев групповой унар (A, φ) - мономорфный, но не автоморфный, причем $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker \varphi^n = 0$. В этом случае аналог теоремы Л.А.Скорнякова не имеет места. Однако если A - строго чисто корректная абелева группа, а φ - чистый мономорфизм, то групповой унар (A, φ) автоморфен, т.е. справедлив аналог теоремы Л.А.Скорнякова.

Указанная связь становится еще более тесной для абелевых групп

без кручения. Пусть G - абелева группа без кручения и φ - отмеченный эндоморфизм группы G , т.е. (G, φ) - абелев групповой унар без кручения. Групповой унар (G, φ) называется нильпотентным, если $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Ker } \varphi^i$, другими словами, любой элемент группы G аннулируется некоторой степенью эндоморфизма φ [1, с. 76]. Назовем абелев групповой унар без кручения (G, φ) обобщенно нильпотентным, если любой элемент группы G аннулируется некоторым ненулевым целочисленным полиномом от эндоморфизма φ . Такой подход позволяет рассматривать группу G как модуль $\mathcal{U}G$ над кольцом $Z[x]$ целочисленных полиномов от одного неизвестного x , причем в качестве x берется эндоморфизм φ . Обозначим периодическую часть модуля $\mathcal{U}G$ через $\text{tor}(\mathcal{U}G)$ и $\text{Tor } G = \bigcap_{\varphi \in E(G)} \text{tor}(\mathcal{U}G)$, где $E(G)$ - кольцо эндоморфизмов группы G . Назовем абелеву группу G без кручения полиномиально периодической, если $\text{Tor } G = G$, и полиномиально расщепляемой, если $\text{Tor } G$ есть прямое слагаемое группы G . Другими словами, группа G без кручения полиномиально периодическая, если абелев групповой унар (G, φ) для любого эндоморфизма φ группы G обобщенно нильпотентен.

Связь между понятиями полиномиально периодической и строго чисто корректной группы устанавливает следующая

ТЕОРЕМА 1. Если G - полиномиально периодическая группа без кручения, то G есть строго чисто корректная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ - произвольный чистый мономорфизм $\varphi: G \rightarrow G$, т.е. $\text{Im } \varphi$ - сервантная подгруппа группы G , изоморфная G . Покажем, что $\text{Im } \varphi = G$. Пусть $g \in G$ и $g \notin \text{Im } \varphi$. Поскольку по условию $\mathcal{U}G$ есть периодический $Z[x]$ -модуль, то существует $f(x) \in Z[x]$ такой, что $f(x) \cdot g = 0$. Если $f(x) = n_0 + n_1 x + \dots + n_k x^k$, то возможны два случая.

СЛУЧАЙ 1. $n_0 \neq 0$. Тогда имеем $n_0 g + n_1 \varphi(g) + \dots + n_k \varphi^k(g) = 0$, причем хотя бы один из коэффициентов $n_1, n_2, \dots, n_k$ отличен от нуля. Отсюда $n_0 g \in -n_1 \varphi(g) - \dots - n_k \varphi^k(g) \in \text{Im } \varphi$. Так как $\text{Im } \varphi$ сервантная подгруппа группы G без кручения, то из $n_0 g \in \text{Im } \varphi$ следует $g \in \text{Im } \varphi$. Противоречие.

СЛУЧАЙ 2. $n_0 = 0$. Пусть n_i - первый ненулевой коэффициент, т.е. $f(x) = n_i x^i + \dots + n_k x^k$. Тогда $f(x) = x^i (n_i + n_{i+1} x + \dots + n_k x^{k-i})$. Отсюда $0 = f(x)g = [\varphi^i(n_i + n_{i+1} \varphi + \dots + n_k \varphi^{k-i})](g) = \varphi^i(n_i g + n_{i+1} \varphi(g) + \dots + n_k \varphi^{k-i}(g))$. Поскольку φ - мономорфизм, то

имеем $n_1 g + n_{1+1} \varphi(g) + \dots + n_k \varphi^{k-1}(g) = 0$, т.е. случай 2 сводится к случаю 1.

Обратное утверждение неверно, как показывает следующий

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{I}_p$ - аддитивная группа целых p -адических чисел. Известно, что кольцо эндоморфизмов $E(\mathcal{I}_p)$ группы $\mathcal{I}_p$ изоморфно кольцу Q_p^* целых p -адических чисел [2, с. 212]. Понятно, что $\mathcal{I}_p$ есть Q_p^* -модуль без кручения. Отсюда для любого ненулевого эндоморфизма φ группы $\mathcal{I}_p$ имеем: для $g \in \mathcal{I}_p$, $\varphi(g) \neq 0$ влечет $g \neq 0$. Пусть $\varphi \in E(\mathcal{I}_p)$ есть умножение на целое p -адическое число π . Если π есть алгебраическое целое p -адическое число, то существует целочисленный полином $f(x) = k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n$ такой, что $f(\pi) = 0$. Ясно, что в этом случае (φ_p) есть периодический $Z[x]$ -модуль, т.е. $\text{tor}(\varphi(\mathcal{I}_p)) = \mathcal{I}_p$. Если π - трансцендентное целое p -адическое число, то любой целочисленный полином от π есть некоторое ненулевое целое p -адическое число π' . Следовательно, умножение на π' не может аннулировать никакой ненулевой элемент группы $\mathcal{I}_p$. Тогда $\text{tor}(\varphi(\mathcal{I}_p)) = 0$. Существование трансцендентных целых p -адических чисел следует из существования континуума p -адических чисел, которые алгебраически независимы над полем рациональных чисел, и того, что некоторая степень p -адического числа есть целое p -адическое число. Таким образом, для некоторых эндоморфизмов φ группы $\mathcal{I}_p$ имеем $\text{tor}(\varphi(\mathcal{I}_p)) = 0$. Следовательно, $\text{Tor } \mathcal{I}_p = \bigcap_{\varphi \in E(\mathcal{I}_p)} \text{tor}(\varphi(\mathcal{I}_p)) = 0$, т.е. $\mathcal{I}_p$ не является полиномиально периодической группой.

Однако для некоторых важных классов абелевых групп без кручения понятия строгой чисто корректности и полиномиальной периодичности оказываются эквивалентными. В частности, это имеет место для жестких групп и групп конечного ранга [4]. Еще один такой класс указывает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть G - вполне разложимая абелева группа без кручения и
 $(*) \quad G = \sum_{i \in J}^{\oplus} G_i$ - ее фиксированное разложение в прямую сумму групп G_i ранга 1 ($i \in J$). Следующие утверждения эквивалентны:

- а) G - полиномиально периодическая группа;
- б) G - строго чисто корректная группа;
- в) любая неубывающая цепочка типов различных прямых слагаемых ранга 1 из разложения $(*)$ обрывается через конечное число шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\implies$ (б) следует из теоремы 1, (б) $\implies$ (в)

вытекает из [5], а $(b) \implies (a)$ показано в [4, теорема 6].

Выясним теперь вопрос об эквивалентности строгой чисто корректности и полиномиальной периодичности для класса полных прямых сумм групп без кручения ранга 1. Следующий пример показывает, что для всего этого класса ответ отрицательный:

ПРИМЕР 2. Пусть $\bar{G} = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n - группа без кручения ранга 1 и типа $\tau_n = (0, \dots, 0, \infty, 0, \dots)$ с ∞ на n -м месте, $n = 1, 2, \dots$. Так как ранг группы $\bar{G}$ бесконечен, то, как следует из теоремы 3, группа $\bar{G}$ не является полиномиально периодической. Проверим, что $\bar{G}$ есть строго чисто корректная группа. Пусть $\varphi \in E(\bar{G})$ - чистый мономорфизм. Ясно, $\varphi(G_n)$ есть сервантная подгруппа в G_n для любого $n = 1, 2, \dots$. Так как G_n - группы ранга 1, то $G_n = \varphi(G_n)$ для $n = 1, 2, \dots$, т.е. φ действует на любой компоненте G_n как некоторый ее автоморфизм. Учтем теперь, что любой автоморфизм группы G_n есть умножение на рациональное число $\pm p^{\pm \kappa_n}$, $\kappa_n \geq 0$. Тогда для эндоморфизма ψ группы $\bar{G}$, действующего на каждой компоненте G_n как умножение на $\pm p^{\pm \kappa_n}$, имеем $\varphi\psi = 1_{\bar{G}}$ и $\psi\varphi = 1_{\bar{G}}$. Следовательно, φ - автоморфизм группы $\bar{G}$, т.е. $\bar{G}$ - строго чисто корректная и не полиномиально периодическая группа.

Далее потребуются описание полиномиально расщепляемых групп в классе полных прямых сумм групп без кручения ранга 1, вытекающее из [4, теорема 9]:

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G = \prod_{i \in I} G_i$, где G_i - группы без кручения ранга 1 ($i \in I$). Следующие утверждения эквивалентны:

- G - полиномиально расщепляемая группа;
- Тогда G есть группа конечного ранга;
- множество $\Phi(G)$ всех тех компонент G_i группы G ($i \in I$), для которых существует не более конечного числа различных компонент G_j ($j \in I$), типы которых больше или равны типу компоненты G_i , есть конечное множество;
- множество $\Psi(G)$ всех тех компонент G_i ($i \in I$), для которых любая убывающая цепочка типов различных компонент G_j ($j \in I$), начинающаяся с типа компоненты G_i , обрывается через конечное число шагов, есть конечное множество.

Следующая лемма показывает, что достаточно ограничиться полиномиально расщепляемыми группами:

ЛЕММА 1. Пусть $G = \prod_{i \in I} G_i$, где G_i - группы без кручения ранга 1 ($i \in I$), является полиномиально нерасщепляемой группой.

Из строгой чисто корректности группы G не следует ее полиномиальная периодичность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что полиномиально нерасщепляемая группа не является полиномиально периодической. Для завершения доказательства леммы достаточно убедиться, что существует полиномиально нерасщепляемая и строго чисто корректная полная прямая сумма групп без кручения ранга 1. Рассмотрим группу $\bar{G}$ из примера 2. Как следует из теоремы 3, группа $\bar{G}$ полиномиально нерасщепляемая, а ее строгая чисто корректность была установлена в примере 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G = \prod_{i \in I} G_i$, где G_i ($i \in I$) - группы без кручения ранга 1. Из строгой чисто корректности группы G следует ее полиномиальная периодичность тогда и только тогда, когда группа G полиномиально расщепляема.

Необходимость следует из леммы 1.

Достаточность. Пусть группа G полиномиально расщепляема, покажем, что если G не полиномиально периодическая группа, тогда G не строго чисто корректная группа. Из теоремы 3 следует, что если группа G полиномиально расщепляемая, но не полиномиально периодическая группа, то группа G имеет бесконечный ранг и содержит прямое слагаемое H_0 вида $H_0 = \prod_{\kappa=1}^{\infty} G_{\kappa}$, где типы $\tau(G_{\kappa})$ групп G_{κ} ($\kappa = 1, 2, \dots$) образуют цепь $\tau(G_1) \leq \tau(G_2) \leq \dots \leq \tau(G_{\kappa}) \leq \dots$. Установим, что группа H_0 содержит собственную сервантную подгруппу H_0' , изоморфную H_0 , откуда и будет следовать доказательство достаточности.

Пусть $J = \{\alpha / \alpha \in N\}$, где N - натуральный ряд чисел, есть индексное множество следующего обратного спектра: $\{G_{\alpha}; \pi_{\alpha}^2\}$, где $G_{\alpha} = \sum_{\kappa \in \alpha} G_{\kappa}$ для любого $\alpha \in J$; π_{α}^2 - проектирование G_{β} на G_{α} для $\beta \geq \alpha$; J - направленное частично упорядоченное множество ($\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \subseteq \beta$). Известно, что $\varprojlim_J \{G_{\alpha}; \pi_{\alpha}^2\} \cong \prod_{\alpha=1}^{\infty} G_{\alpha}$ [2, с. 77].

Рассмотрим следующий обратный спектр. Обозначим через J' подмножество J , состоящее из тех конечных множеств натуральных чисел, которые имеют вид $\{\kappa, \kappa+1, \dots, \kappa+\tau\}$ для $\kappa, \tau = 1, 2, \dots$. Ясно, J' есть кофинальное подмножество в J . Тогда $\varprojlim_{J'} \{G_{\alpha};$

$\pi_{\alpha}^2\} \cong \varprojlim_J \{G_{\alpha}; \pi_{\alpha}^2\}$. Для любого натурального числа

К рассмотрим $G_K \oplus G_{K+1}$. Как показано в [5, с. 391], имеем $G_K \oplus G_{K+1} = G'_K \oplus G_{K+1}$, где $G'_K = \langle g_K + g_{K+1} \rangle$, $0 \neq g_K \in G_K$, $0 \neq g_{K+1} \in G_{K+1}$. Ясно, что $G_K \cong G'_K$ для любого $K = 1, 2, \dots$. Пусть $G'_\alpha = \sum_{K \in \alpha} G'_K$ для любого $\alpha \in \mathcal{J}'$. Тогда $\{G'_\alpha; \mu'_\alpha; \mathcal{J}'\}$ образует обратный спектр, где $\alpha, \beta \in \mathcal{J}'$, μ'_α - проектирование G'_β на G'_α для $\beta \geq \alpha$. Понятно, что $\varprojlim_{\mathcal{J}'} \{G'_\alpha; \mu'_\alpha\} \cong \varprojlim_{\mathcal{J}'} \{G_\alpha; \mu_\alpha\}$, так как $G'_\alpha \cong G_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{J}'$ и диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} G'_\beta & \xrightarrow{\phi_\beta} & G_\beta \\ \mu'_\alpha \downarrow & & \downarrow \mu_\alpha \\ G'_\alpha & \xrightarrow{\phi_\alpha} & G_\alpha \end{array},$$

где ϕ_α, ϕ_β - изоморфизмы, $\beta \geq \alpha$ и $\alpha, \beta \in \mathcal{J}'$, коммутативны.

Пусть $f: \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{J}$ - отображение, заданное так: $f: \alpha \mapsto \alpha \cup \{\max \alpha + 1\}$ для любого $\alpha \in \mathcal{J}'$. Непосредственно проверяется, что f есть инъективное отображение, сохраняющее частичный порядок и направленность, заданные на $\mathcal{J}'$. Обозначим $\mathcal{J}'' = \text{Im } f$, тогда f есть изоморфизм частично упорядоченных направленных множеств $\mathcal{J}'$ и $\mathcal{J}''$. Рассмотрим обратный спектр $\{G_\delta; \nu_\delta; \mathcal{J}''\}$, где

$$\nu_\delta = \begin{cases} \pi_\delta^r, & \text{если } \max \delta = \max \gamma; \\ \pi_{f^{-1}(\delta)}^r, & \text{если } \max \delta \neq \max \gamma. \end{cases}$$

(Непосредственно проверяется, что $\nu_\delta^r = 1_{G_\delta}$, если $r = \delta$ и $\nu_{\delta''}^r \nu_{\delta'}^r = \nu_{\delta'''}^r$ для $r \geq \delta' \geq \delta''$). Аналогично [2, с. 77] показывается, что $\varprojlim_{\mathcal{J}''} \{G_\delta; \nu_\delta\} \cong \prod_{K=1}^\infty G_K$

(заметим, что $\mathcal{J}''$ есть кофинальное подмножество в $\mathcal{J}'$, а следовательно, и в $\mathcal{J}$).

Нам потребуется еще один обратный спектр, а именно $\{G_\delta; \varepsilon_\delta; \mathcal{J}''\}$, где для $\gamma \geq \delta$

$$\varepsilon_\delta = \begin{cases} \pi_{f^{-1}(\delta)}^{\gamma} & , \text{ если } \max \gamma = \max \delta, \gamma \neq \delta; \\ 1_{G_\delta} & , \text{ если } \gamma = \delta; \\ 0 & , \text{ если } \max \gamma \neq \max \delta. \end{cases}$$

Вычислим $\varprojlim_{\mathcal{J}''} \{G_\delta; \varepsilon_\delta; \mathcal{J}''\}$. По определению, этот обратный предел есть подгруппа $\prod_{\delta \in \mathcal{J}''} G_\delta$, координаты элементов которой удовлетворяют соотношениям вида $\varepsilon_\delta^r g_r = g_\delta$. Из задания ε_δ^r следует, что координаты δ элементов этого об-

ратного предела отличны от нуля тогда и только тогда, когда δ - минимальные элементы в J'' (т.е. пары чисел вида $(\kappa, \kappa+1)$). Следовательно, $\lim_{J''} \{G_\delta; \varepsilon_\delta^r; j''\} = \prod_{\kappa=1}^{\infty} F_\kappa$, где $F_\kappa = G_\kappa \oplus G_{\kappa+1}$ для любого $\kappa = 1, 2, \dots$.

Зададим теперь гомоморфизм $\bar{\varphi}$ обратных спектров $\{G'_\alpha; \mu_\alpha^A; j'\}$ и $\{G_\delta; \nu_\delta^r; j''\}$ следующим образом: для любого $\alpha \in J'$ пусть φ_α есть вложение $G'_\alpha = \sum_{\kappa \in \alpha} G'_\kappa$ в $G_{f(\alpha)} = G_\alpha \oplus G_{\max(\alpha)+1}$, где $G_\alpha = \sum_{\kappa \in \alpha} G_\kappa$ (т.е. $\text{Im } \varphi_\alpha = G_\alpha$). Тогда для любых $\beta \succ \alpha$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G'_\beta & \xrightarrow{\varphi_\beta} & G_{f(\beta)} \\ \mu_\beta^A \downarrow & & \downarrow \nu_{f(\beta)}^r \\ G'_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & G_{f(\alpha)} \end{array}$$

Поскольку f есть изоморфизм направленных множеств J' и J'' , то $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J'}$ задаёт гомоморфизм $\bar{\varphi}$ указанных выше обратных спектров. По [2, теорема 12.2] существует гомоморфизм $\varphi: \lim_{J'} \{G'_\alpha; \mu_\alpha^A\} \rightarrow \lim_{J''} \{G_\delta; \nu_\delta^r\}$. Поскольку φ_α - мономорфизм для любого $\alpha \in J'$, то φ - мономорфизм.

Рассмотрим для любого $\alpha \in J'$ точную последовательность

$0 \rightarrow G'_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} G_{f(\alpha)} \xrightarrow{\nu_{f(\alpha)}^r} G_{f(\alpha)+1}$, где φ_α было введено выше, а $\nu_{f(\alpha)}^r$ - проектирование $G_{f(\alpha)+1} = G_{f(\alpha)} \oplus G_{\max(f(\alpha))+1}$ на $G_{\max(f(\alpha))+1} = G_{(\max(\alpha)+1)+1}$. Непосредственно проверяется, что для любых $\beta \succ \alpha$ из J' имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G'_\beta & \xrightarrow{\varphi_\beta} & G_{f(\beta)} & \xrightarrow{\nu_{f(\beta)}^r} & G_{f(\beta)+1} \\ & & \mu_\beta^A \downarrow & & \downarrow \nu_{f(\beta)}^r & & \downarrow \varepsilon_{f(\beta)}^r \\ 0 & \longrightarrow & G'_\alpha & \longrightarrow & G_{f(\alpha)} & \longrightarrow & G_{f(\alpha)+1} \end{array}$$

с точными строками. Тогда по [2, теорема 12.3] имеем точную последовательность

$$(*) \quad 0 \longrightarrow G' \xrightarrow{\varphi} G'' \xrightarrow{\psi} G'''$$

где $G' = \lim_{J'} \{G'_\alpha; \mu_\alpha^A\}$, $G'' = \lim_{J''} \{G_\delta; \nu_\delta^r\}$,

$$G''' \cong \lim_{J''} \{G_\delta; \varepsilon_\delta^r\}.$$

Покажем сначала, что $\text{Im } \psi \neq G''$. Для этого достаточно показать, что $\text{Ker } \psi \neq G''$, т.е. что $\psi \neq 0$. По [2, теорема 12.2] для любого $\delta \in J''$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G'' & \xrightarrow{\pi_\delta} & G_\delta \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi_\delta \\ G''' & \xrightarrow{\rho_\delta} & G_\delta \end{array}$$

коммутативна, где π_δ , ρ_δ - канонические отображения. Из задания ψ_δ следует, что для некоторого $\delta \in J''$ имеем $\psi_\delta \pi_\delta \neq 0$ (в противном случае все $\pi_\delta = 0$, т.е. $G'' = 0$, противоречие). Отсюда, так как $\rho_\delta \psi = \psi_\delta \pi_\delta$, получаем, что $\psi \neq 0$. Далее, $\text{Im } \psi$ есть сервантная подгруппа группы G'' . Действительно, $\text{Im } \psi$ есть ненулевая подгруппа группы без кручения $G''' = \prod_{\kappa=1}^{\infty} F_\kappa$, где $F_\kappa = G_\kappa \oplus G_{\kappa+1}$, $\kappa=1, 2, \dots$. Из точности последовательности (*) имеем $\text{Ker } \psi = \text{Im } \psi$. Тогда $G''/\text{Im } \psi = G''/\text{Ker } \psi \cong \text{Im } \psi$ есть группа без кручения, откуда следует, что $\text{Im } \psi$ есть сервантная подгруппа группы G'' . Наконец, $\text{Im } \psi \cong G''$. Действительно, $\text{Im } \psi \cong G' \cong \prod_{\kappa=1}^{\infty} G'_\kappa \cong \prod_{\kappa=1}^{\infty} G_\kappa \cong G''$.

Таким образом, группа G'' содержит собственную сервантную изоморфную подгруппу. Поскольку $G'' \cong \prod_{\kappa=1}^{\infty} G_\kappa \cong H_0$, то это же справедливо и для группы H_0 . Так как H_0 есть прямое слагаемое группы G , то отсюда следует, что группа G содержит собственную сервантную изоморфную подгруппу, что завершает доказательство теоремы.

Таким образом, как следует из теорем 1 и 4, для группы G из класса полных прямых сумм групп без кручения ранга 1 понятия полиномиальной периодичности и строгой чисто корректности эквивалентны тогда и только тогда, когда группа G полиномиально расщепляема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скорняков Л.А. Групповые унары. - „Вестник МГУ. Математика и механика“. 1977, 5, 65-69.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.1. М., "Мир", 1974.
3. Cohn P. On the free product of associative rings I. - „Math. Zeith“, 1959, 71, 380-398.
4. Беккер И.Х., Рососек С.К. Полиномиальная расщепляемость и S -системы групп без кручения (Наст. сборник).
5. Рососек С.К. Модули без кручения над дедекиндовыми кольцами. - „Матем. заметки“, 1974, 16, 387-394.

Поступило
18 ноября 1977 г.

ПОЛНЫЕ ПРЯМЫЕ СУММЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1 С ИЗОМОРФНЫМИ ГРУППАМИ ИЛИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. II

А.М. Себельдин

В работе [1] рассматриваются следующие задачи:

1. Когда из изоморфизма колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения следует изоморфизм самих групп [2, проблема 43]?
2. Когда из изоморфизма групп эндоморфизмов абелевых групп без кручения следует изоморфизм самих групп?

В [1] получены некоторые условия изоморфизма абелевых групп без кручения, разложимых в полные прямые суммы групп ранга 1, с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов (теоремы 1, 2, 3, 4).

Настоящая работа является продолжением [1]. Получены полные ответы на поставленные задачи для класса редуцированных абелевых групп без кручения, разложимых в полные прямые суммы групп ранга 1, и мощность которых не превосходит первого кардинала $\aleph_1$ ненулевой меры. Заметим, что необходимость условий теорем 1, 2 настоящей работы и теорема $\ast$, используемая при доказательстве достаточности, получены в [1]. Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы и без кручения. Используются обозначения работы [1]. Напомним, что группу мы называем почти делимой, если не более чем для конечного числа простых чисел p имеет место неравенство $pG \neq G$.

Пусть $G = \sum_{i \in J}^* G_i$, $H = \sum_{\tau \in T}^* H_\tau$ - полные прямые суммы групп ранга 1. $G = \sum_{\tau \in S_2}^* G^{(\tau)}$, $H = \sum_{\tau \in S_2'}^* H^{(\tau)}$ - со-

ответственно их канонические разложения, где $G^{(\tau)} = \sum_{i \in J(\tau)}^* G_i$, $H^{(\tau)} = \sum_{t \in T(\tau)}^* H_t$, $J(\tau) = \{i \in J \mid \tau(A_i) = \tau\}$, $T(\tau) = \{t \in T \mid \tau(H_t) = \tau\}$, Ω, Ω' - множества всех различных типов соответственно групп $G_i (i \in J)$, $H_t (t \in T)$ (J, T - произвольные индексные множества). Пусть G -редуцированная группа и $|G| < \aleph^1$.

ТЕОРЕМА 1. Из изоморфизма групп эндоморфизмов $End G$ и $End H$ следует изоморфизм самих групп G и H тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. Каждое прямое слагаемое ранга 1 группы G почти делимо.
2. Если множество $J(\tau')$ конечное, то множество $\bar{J}(\tau') = \bigcup_{\tau \neq \tau'} J(\tau)$ также конечное ($\tau, \tau' \in \Omega$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия 1 следует из теоремы 1 работы [1], а необходимость условия 2 следует из теоремы 3 п. 2 той же работы.

Достаточность. Отметим вначале результат, который следует из части доказательства теоремы 2 работы [1], не предполагающей справедливой обобщенную гипотезу континуума.

ТЕОРЕМА *. Если все $G_i (i \in J)$ - почти делимые группы и группы эндоморфизмов $End G$ и $End H$ изоморфны, то $\Omega = \Omega'$, $|H| < \aleph^1$ и для любого τ' из Ω $A^{(\tau')} \cong B^{(\tau')}$

где $A^{(\tau')} = \sum_{j \in J(\tau')}^* \sum_{i \in \bar{J}(\tau')}^{\oplus} Hom(G_i, G_j)$ и $B^{(\tau')} = \sum_{t \in T(\tau')}^* \sum_{t' \in \bar{T}(\tau')}^{\oplus} Hom(H_{t'}, H_t)$.

Пусть выполнены условия 1 и 2. Рассмотрим случай, когда $J(\tau')$ - конечное множество, где τ' произвольный фиксированный тип из Ω . Тогда согласно условию 2 имеем $|\bar{J}(\tau')| < \aleph_0$.

Из того, что $\chi(B^{(\tau')}) = |T(\tau')| \cdot |\bar{T}(\tau')| = \chi(A^{(\tau')}) = |J(\tau')| \cdot |\bar{J}(\tau')| < \aleph_0$, получаем $|\bar{T}(\tau')| < \aleph_0$, $|T(\tau')| < \aleph_0$ и $|T(\tau')| = |J(\tau')|$.

Пусть теперь $J(\tau')$ - бесконечное множество. Тогда $T(\tau')$ - бесконечное множество. Покажем, что $|T(\tau')| = |J(\tau')|$. Предположим противное. Пусть, например, $|T(\tau')| < |J(\tau')|$. Обозначим через $R^{(\tau')}$ группу ранга 1 типа τ' . Заметим, что $Hom(G_i, G_j) \cong Hom(H_{t'}, H_t) \cong R^{(\tau')}$ для любых $j \in J(\tau')$, $i \in \bar{J}(\tau')$, $t \in T(\tau')$, $t' \in \bar{T}(\tau')$ и $\tau' \in \Omega$. Пусть $A' = Hom(A^{(\tau')}, R^{(\tau')})$ и $B' = Hom(B^{(\tau')}, R^{(\tau')})$. Так как $A^{(\tau')} \cong B^{(\tau')}$, то $A' \cong B'$ или $\sum_{j \in J(\tau')}^* \sum_{i \in \bar{J}(\tau')}^{\oplus} Hom(G_i, R^{(\tau')}) \cong \sum_{t \in T(\tau')}^* \sum_{t' \in \bar{T}(\tau')}^{\oplus} Hom(H_{t'}, R^{(\tau')})$,

где $G_{ij} = \text{Hom}(G_i, G_j)$, $H_{t,t} = \text{Hom}(H_t, H_t)$ [3, с. 170; 2, с. 208]. Рассмотрим прямое слагаемое $A'' = \sum_{i \in J(\tau')}^{\oplus} \text{Hom}(\text{Hom}(G_i, G_j), R^{(\tau')})$ группы A' . Тогда в B' выделяется прямое слагаемое B'' , изоморфное A'' . Рассмотрим проекцию $\pi: B' \rightarrow B''$ и ее ограничение $\pi_t: \sum_{t \in T(\tau')}^* \text{Hom}(H_{t,t}, R^{(\tau')}) \rightarrow B'' (t \in T(\tau'))$.

Согласно [3, с. 170; 2, с. 172], получаем, что лишь для конечного числа $k(t)$ индексов t' из $T(\tau')$ $\pi_t[\text{Hom}(H_{t,t}, R^{(\tau')})] \neq 0$. Таким образом, для любого t из $T(\tau')$ произвольный элемент b из B'' имеет не более чем конечное число $k(t)$ ненулевых координат b_t , о $\pi_t(b_t) \neq 0$ в $\sum_{t \in T(\tau')}^* \text{Hom}(H_{t,t}, R^{(\tau')})$.

Множество всех таких элементов в группе B' имеет мощность, не превосходящую мощность множества $T(\tau')$. С другой стороны, имеем $|B'| = |A'| = |J(\tau')| > |T(\tau')|$. Противоречие. Аналогично показывается, что неравенство $|J(\tau')| < |T(\tau')|$ также невозможно. Следовательно, $|J(\tau')| = |T(\tau')|$ для любого τ' из Ω , поэтому $G \cong H$.

Пусть $G = \sum_{i \in J}^* G_i$, $H = \sum_{t \in T}^* H_t$ — полные прямые суммы групп ранга 1, G — редуцированная группа и $|G| < \aleph^4$.

ТЕОРЕМА 1. Из изоморфизма колец эндоморфизмов $E(G)$ и $E(H)$ следует изоморфизм самих групп G и H тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое ранга 1 группы G почти делимое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из следствия теоремы 1 работы [1].

Достаточность. Используя теорему *, получаем $\Omega = \Omega'$ и

$|H| < \aleph^4$. Пусть $J(\tau')$ — бесконечное множество. Тогда, согласно теореме 1, имеем $|J(\tau')| = |T(\tau')|$.

Пусть теперь $J(\tau')$ — конечное множество. Рассмотрим прямое слагаемое $G^{(\tau')} = \sum_{i \in J(\tau')}^* G_i = \sum_{i \in J(\tau')}^{\oplus} G_i$ группы G . Согласно [2, с. 214] существует такое прямое слагаемое H' группы H , что $E(G^{(\tau')}) \cong E(H')$. Покажем, что прямое слагаемое H' — группа конечного ранга. Известно [4], что существует мономорфизм

$$\begin{aligned} \varphi: H' &\rightarrow \text{Hom}(\text{End } H', H') \quad \text{Далее } \text{End } H' \cong \text{End } G^{(\tau')} \cong \\ &\cong \sum_{i \in J(\tau')}^{\oplus} \sum_{j \in J(\tau')}^{\oplus} \text{Hom}(G_i, G_j) \quad \text{Поэтому } \text{Hom}(\text{End } H', H') \cong \\ &\cong \sum_{i \in J(\tau')}^{\oplus} \sum_{j \in J(\tau')}^{\oplus} \text{Hom}(G_{ij}, H'). \end{aligned}$$

Покажем, что $\text{Hom}(G_{ij}, H')$ - группа конечного ранга, где $i, j \in \mathcal{I}(\tau')$. Для этого рассмотрим прямое слагаемое ранга 1 G_{i_0} ($i_0 \in \mathcal{I}(\tau')$) группы $G^{(\tau')}$. Согласно [2, с. 214] существует такое прямое слагаемое H'' группы H' , что $E(G_{i_0}) \cong E(H'')$. Покажем, что H'' - группа ранга 1. Согласно [4] существует мономорфизм $\psi: H'' \rightarrow \text{Hom}(\text{End } H'', H'')$.

Имеем $\text{End } H'' \cong \text{End } G_{i_0} \cong R^{(\tau')}$. Далее, согласно [5, с. 192] получаем $\text{Hom}(R^{(\tau')}, H'') \cong H''(\tau')$, где $H''(\tau') =$

$= \{x \in H'' \mid \tau(x) \geq \tau'\}$, $\tau(x)$ - тип элемента x в группе H'' . Следовательно, $H'' \cong H''(\tau')$. Покажем теперь, что H'' -

прямое слагаемое группы $\sum_{\substack{i \in \mathcal{U} \\ \tau \geq \tau'}}^* G_i$. Предположим противное.

Пусть некоторый элемент $x' \in H''$ имеет отличную от нуля координату в группе $G_{i'}$ ($i' \in \bigcup_{\tau \geq \tau'} \mathcal{I}(\tau)$). Так как $R^{(\tau')}$ - почти делимая группа, то существует такое простое число p , что $pG_{i'} \neq G_{i'}$

и $pR^{(\tau')} = R^{(\tau')} \oplus$. Откуда $\tau(x') \notin \bar{\Omega} = \{\tau \in \Omega \mid \tau \geq \tau'\}$.

Противоречие. Заметим, что так как $R^{(\tau')}$ - группа почти делимая для любого τ из Ω , то $\bar{\Omega}$ - конечное множество. Поэтому $\bar{G} =$

$= \sum_{\substack{i \in \mathcal{U} \\ \tau \geq \tau'}}^* G_i$ - сепарабельная группа [6]. Согласно [7] прямое слагаемое H'' сепарабельной группы $\bar{G}$ само сепарабельно.

Предположим теперь, что $\tau(H'') > 1$. Тогда возьмем два линейно независимых элемента x_1 и x_2 . Они по определению сепарабельной группы принадлежат некоторому вполне разложимому прямому слагаемому H_2 группы H'' . Очевидно, $\tau(H_2) \geq 2$. Поэтому

$\tau(\text{End } H'') > 1$. Действительно, $\text{End } H'' = \text{Hom}(H_1, H_1) \oplus \oplus \text{Hom}(H_1, H_2) \oplus \text{Hom}(H_2, H_1) \oplus \text{Hom}(H_2, H_2)$,

где $H_1 \oplus H_2 = H''$. С другой стороны, $\tau(\text{End } H'') = \tau(\text{End } G_{i_0}) = 1$. Противоречие. Следовательно, H'' - группа ранга 1. Из того что

G_{i_0} - почти делимая группа и $\text{End } H'' \cong \text{End } G_{i_0}$, сразу следует изоморфизм $H'' \cong G_{i_0} \cong R^{(\tau')}$. Рассмотрим группу эндоморфизмов $\text{End } H'$. Имеем $H' = H'' \oplus \bar{H}$. Откуда $\text{End } H' \cong$

$\cong \text{Hom}(H'', H') \oplus \text{Hom}(\bar{H}, H')$. Далее $\text{End } H' \cong \text{End } G^{(\tau')}$.

Однако $\text{End } G^{(\tau')}$ - вполне разложимая группа конечного ранга. Поэтому и прямое слагаемое $\text{Hom}(H'', H') \cong \text{Hom}(R^{(\tau')}, H')$ - группа конечного ранга. Заметим, что $\text{Hom}(G_{i_1}, G_{i_2}) \cong R^{(\tau')}$

для любых $i, j \in J(\tau')$. Поэтому $\text{Hom}(G_{ij}, H')$ - группа конечного ранга для любых $i, j \in J(\tau')$. Откуда $\text{Hom}(\text{End } H', H')$ - группа конечного ранга. Следовательно, H' - группа конечного ранга. Согласно [8] имеем $H' \cong \sum_{\tau' \in T'}^{\oplus} H_{\tau'}$, где $T' \subset T$ и $|T'| < \aleph$. Из того что $E(G(\tau')) \cong E(H')$, следует $G(\tau') \cong H'$ [9]. Следовательно, $|J(\tau')| \leq |T(\tau')|$. Заметим, что $|H| < \aleph^1$ и $\Omega = \Omega'$. Поэтому обратное неравенство $|J(\tau')| \geq |T(\tau')|$ доказывается аналогично. Итак, $|J(\tau')| = |T(\tau')|$ для любого τ' из Ω . Следовательно, $G \cong H$.

Замечание 1. Формулировка теоремы 2 совпадает с формулировкой теоремы 3 работы [9], если знак прямой суммы поменять на знак полной прямой суммы. Однако ее доказательство существенно отличается от доказательства теоремы 3 работы [9].

Замечание 2. Полное решение задачи 2 для класса редуцированных вполне разложимых абелевых групп без кручения, мощность которых не превосходит первого кардинала ненулевой меры, можно получить, заменив в теореме 1 знак полной прямой суммы на знак прямой суммы. Доказательство этого результата использует схему, подобную схеме доказательства теоремы 1 (см. [10]).

Замечание 3. Условие 1 теоремы 1 эквивалентно согласно [11] такому условию: каждая группа G_i ($i \in J$) почти делимая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Себельдин А.М. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов 1. - "Матем. зам.", 1973, 14, 6, 867-878.
2. Fuchs L. Abelian groups. Budapest. 1966.
3. Sasiada E. Proof that every countable and reduced torsion free abelian group is slender. - "Bull. acad. Polon.", 1959, 7, 143-144.
4. Schultz P. Periodic Homomorphism sequences of abelian groups. - "Arch. Math", 1970, 21, 2, 132-135.
5. Warfield R.B. Homomorphisms and Duality for torsion free groups. - "Math. Z.", 1968, 107, 3, 189-200.

6. Мишина А.П. Сепарабельность полных прямых сум абелевых групп без кручения ранга 1. - "Матем. сб.", 1962, 57, 375-383.
7. Fuchs L. *Summands of separable abelian groups.* - „Bull. London Math. Soc.", 1970, 2, 2, 205-208.
8. Мишина А.П. О прямых слагаемых полных прямых сум абелевых групп без кручения ранга 1. - "Сиб. матем. ж." 1962, 3, 244-249.
9. Себельдин А.М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов. - "Матем. зам." 1972, 11, 4, 403-408.
10. Себельдин А.М. Вполне разложимые абелевы группы без кручения с изоморфными группами эндоморфизмов. - Сборник аспирантских работ. Томск, 1974, 28-34.
11. Sasiada E. *On the isomorphism of decompositions of torsion free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one.* - „Bull. Acad. Polon.", 1959, 7, 145-149.

Поступило

19 сентября 1976 г.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С ИЗОМОРФНЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

А. М. Себельдин

Будем говорить, что абелева группа A определяется своим кольцом эндоморфизмов $E(A)$ в некотором классе $\mathcal{A}$ абелевых групп, если всякий раз из изоморфизма $E(A) \cong E(B)$, где $B \in \mathcal{A}$, следует изоморфизм групп A и B . В работе показано, что вопрос об определяемости абелевой группы без кручения своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп сводится к этому же вопросу в классе всех абелевых групп без кручения (теорема 1). Найдено необходимое условие определяемости абелевой группы без кручения своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп без кручения (теорема 5). Теорема 7 показывает, что это условие является необходимым и в классе всех сепарабельных групп без кручения. Для однородно разложимой сепарабельной группы без кручения это условие является и достаточным (теорема 8).

ТЕОРЕМА 1. Абелева группа без кручения определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп без кручения и не является редуцированной алгебраически компактной группой.

Согласно [1, с. 82] достаточно рассмотреть случай, когда абелева группа A без кручения является нередуцированной и определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп без кручения. Пусть B — такая абелева группа, что $E(A) \cong E(B)$.

Предположим, что $A \neq B$. Следовательно, периодическая часть $t(B)$ группы B отлична от нуля. Тогда $t(B)$ - делимая группа. В противном случае $t(B)$, а следовательно, и группы B , $\text{Hom}(B, B)$ содержали бы циклические прямые слагаемые конечного порядка, что невозможно. Согласно [2] получаем, что B - периодическая группа, т.е. $B = t(B)$. Следовательно, $\text{Hom}(B, B)$ - редуцированная группа. С другой стороны, имеем: группа A , а следовательно, и $\text{Hom}(A, A)$ - нередуцированные группы. Противоречие. Таким образом, получаем, что группа определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп.

Все группы, рассматриваемые в дальнейшем, абелевы и (если не оговорено) без кручения.

ЛЕММА 2. Пусть B - подгруппа группы A , D - делимая группа. Любой гомоморфизм $\varphi: B \rightarrow D$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi}: A \rightarrow D$ единственным образом тогда и только тогда, когда A/B - периодическая группа.

Действительно, пусть $B \not\subseteq A$ и A/B - непериодическая группа. Обозначим через $\{b_i\}_{i \in J}$ максимальную линейно независимую систему элементов группы B и дополним её до максимальной линейно независимой системы $\{b_i, c_j\}_{i \in J, j \in J'}$ группы A . Покажем, что $J' \neq \emptyset$. Действительно, в противном случае имеем $B' = \langle \{b_i\}_{i \in J} \rangle$ - существенная подгруппа группы B и группы A , т.е. A/B' и B/B' - периодические группы. С другой стороны, имеем $A/B \cong A/B' / B/B'$ - непериодическая группа. Противоречие. Следовательно, $J' \neq \emptyset$. Положим $B_k = \langle \{b_i, c_j\}_{j \neq k} \rangle$. Имеем $B_k \subsetneq A$ и A/B_k - группа ранга 1. Далее, пусть $\psi: A \rightarrow A/B_k \cong D$ - естественный гомоморфизм. Тогда для любого гомоморфизма $\varphi: B \rightarrow D$ и его продолжения $\bar{\varphi}: A \rightarrow D$ имеем $(\bar{\varphi} + \psi)|_B = \varphi$ и $\bar{\varphi} + \psi \neq \bar{\varphi}$.

Таким образом, в этом случае продолжение не единственно.

Обратно, пусть A/B - периодическая группа, $\varphi \in \text{Hom}(B, D)$ и $\bar{\varphi}_1 \neq \bar{\varphi}_2$ - два различных продолжения φ , $(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)|_B = 0$. Имеем $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \in \text{Hom}(A, D)$, следовательно, $\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 \in \text{Hom}(A, D)$ и $B \in \text{Ker}(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2) \subsetneq A$. Ясно, что $A/\text{Ker}(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)$ - периодическая группа. С другой стороны, имеем $(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)A \subseteq D$. Противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если B - существенная вполне характеристическая подгруппа группы A , то кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A

изоморфно вкладывается в $E(B)$.

Действительно, вполне характеристичность B в A обеспечивает существование естественного гомоморфизма $\eta: E(A) \rightarrow E(B)$, а согласно лемме 2 η - мономорфизм ($D = D_A$ - делимая оболочка группы A).

Обозначим через $\tau_*(A)$ некоторую нижнюю грань множества $T(A)$ типов $\tau(a)$ всех элементов группы A . Если ν - некоторая характеристика, то положим $\nu A = \{a \in A \mid \chi^A(a) \geq \nu\}$, где $\chi^A(a)$ - характеристика элемента a в группе A .

ТЕОРЕМА 4. Если $\nu \in \tau_*(A)$, то $E(A) \cong E(\nu A)$.

Покажем вначале, что $A/\nu A$ - периодическая группа. Действительно, пусть $a + \nu A \in A/\nu A$, тогда $\chi^A(a) \in \tau(a) \geq \tau_*(A) \geq \nu$. Следовательно, если $\chi^A(a) \not\geq \nu$, то существует такое целое

число m , что $\chi^A(ma) \geq \nu$, т.е. $m(a + \nu A) = ma + \nu A = \nu A$.

Таким образом, $A/\nu A$ - периодическая группа. Согласно следствию 2 естественный гомоморфизм $\eta: E(A) \rightarrow E(\nu A)$ является мономорфизмом. Покажем, что η - эпиморфизм. Пусть D_A - делимая оболочка группы A , $\varphi \in E(\nu A)$. Тогда $\varphi \in \text{Hom}(\nu A, D_A)$.

Рассмотрим его продолжение $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(A, D_A)$.

Покажем, что $\bar{\varphi}(A) \subseteq A$. Действительно, пусть $a \in A \setminus \nu A$. Так как $\tau(a) \geq \tau_*(A)$, то

существует такое натуральное число m , что $\chi^A(ma) = \nu$. Имеем $m\bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(ma) = \varphi(ma) \in \nu A$. Согласно выбору m имеем $\bar{\varphi}(a) \in A$. Теорема доказана.

Будем говорить, что натуральное число $m = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ делит характеристику $\nu = (\dots, \nu_n, \dots)$, $m \mid \nu$, если $a_n \leq \nu_n$, $n = 1, 2, \dots, k$. Пусть $\nu^{-1}A = \{x \in D_A \mid mx \in A, m = m(x) \mid \nu\}$.

Заметим, что $A \in \nu(\nu^{-1}A)$ и равенство будет тогда и только тогда, когда $\nu_n = \infty$ влечет $p_n A = A$. Будем говорить, что группа A - почти делимая, если $\{p \mid pA \neq A\}$ - конечное множество.

ТЕОРЕМА 5. Если группа A содержит сервантную не почти делимую подгруппу ранга I, то она не определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех групп без кручения.

Действительно, пусть x - ненулевой элемент сервантной не почти делимой подгруппы ранга I группы A , $\chi(x) = (\dots, \chi_n, \dots)$ - характеристика элемента x в группе A . Положим $\nu = (\dots, \nu_n, \dots)$, где $\nu_n = \chi_n + 1$, если χ_n - конечное число и $\nu_n = 0$,

если $\chi_k = \infty$. Имеем $A = v(v^{-1}A)$ - вполне характеристическая подгруппа группы $v^{-1}A$. Ясно, что тип $\tau(v)$, определяемый характеристикой v , является нижней гранью для множества типов $T(v^{-1}A)$ всех элементов группы $v^{-1}A$. С другой стороны, тип элемента x в группе A не превосходит типа $\tau(v)$. Следовательно, $A \neq v^{-1}A$. Согласно теореме 4 имеем $E(A) = E(v(v^{-1}A)) \cong E(v^{-1}A)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Однородная не почти делимая группа не определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе однородных групп.

Если A - однородная группа, то $v^{-1}A$ также однородна. Согласно теореме 5 существует такая характеристика v , что $v^{-1}A \neq A$ и $E(v^{-1}A) \cong E(A)$.

Заметим, что для сепарабельной группы следующие условия эквивалентны:

- 1) всякое прямое слагаемое ранга I почти делимо;
- 2) всякая сервантная подгруппа ранга I почти делима.

Пусть $\Omega(A)$ - множество всех различных типов прямых слагаемых ранга I группы A .

ТЕОРЕМА 7. Сепарабельная группа не определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех сепарабельных групп, если не всякое её прямое слагаемое ранга I почти делимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сепарабельная группа A содержит сервантную не почти делимую подгруппу ранга I. Тогда согласно теореме 5 существует такая характеристика v , что $D_A \cong v^{-1}A \neq A$ и $E(v^{-1}A) \cong E(A)$. Покажем, что $v^{-1}A$ - сепарабельная группа. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k \in v^{-1}A$, тогда существуют такие натуральные числа $n_1, \dots, n_k$, что $n_i x_i \in A$, $n_i | v$ ($i=1, \dots, k$). Пусть $A = A' \oplus A''$, где A' - вполне разложимая группа конечного ранга, содержащая элементы $n_i x_i$ ($i=1, 2, \dots, k$). Покажем, что $v^{-1}A = v^{-1}A' \oplus v^{-1}A''$. Возьмем минимальную подгруппу D' группы D_A , содержащую A' . Так как A' - существенная подгруппа группы D' , то $\chi(D') = \chi(A')$ и, следовательно, $D' \cap A'' = 0$. Согласно [3, теорема 21.2] существует такая подгруппа D'' группы D_A , что $D_A = D' \oplus D''$ и $D'' \cong A''$. Пусть x - произвольный элемент группы $v^{-1}A$. Имеем $x = d' + d''$, где $d' \in D'$, $d'' \in D''$ и $nx = nd' + nd'' = x' + x'' \in A$, для некоторого натурального n ($n | v$); $x' \in A'$, $x'' \in A''$. Очевидно, что $nd' = x'$, $nd'' = x''$ и, следовательно, $x \in v^{-1}A' \oplus v^{-1}A''$. Обратно, если $d' + d''$ - произвольный элемент группы $v^{-1}A' \oplus v^{-1}A''$, $d' \in v^{-1}A' \in D'$, $d'' \in v^{-1}A'' \in D''$, то $nd' \in A'$, $nd'' \in A''$ для

некоторых натуральных n', n'' ($n' | v, n'' | v$). Пусть $\bar{n}$ - наименьшее общее кратное чисел n', n'' . Тогда $\bar{n} | v$, $\bar{n} (d' + d'') \in A$ и, следовательно, $d' + d'' \in v^{-1}A$. Итак, $v^{-1}A = v^{-1}A' \oplus v^{-1}A''$. Очевидно, что $x_i \in v^{-1}A'$ ($i = 1, 2, \dots, \kappa'$), и $v^{-1}A'$ - вполне разложимая группа. Следовательно, $v^{-1}A$ - сепарабельная группа.

ТЕОРЕМА 8. Однородно разложимая [4, с. 211] сепарабельная группа определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех сепарабельных групп тогда и только тогда, когда каждое её прямое слагаемое ранга I почти делимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из теоремы 7. Для доказательства достаточности заметим, что множество $\Omega(A)$ сепарабельной группы A , каждое прямое слагаемое ранга I которой почти делимо, можно вполне упорядочить (по убыванию) следующим образом: пусть $\tau', \tau'' \in \Omega(A)$ - два максимальных типа в обычном смысле, содержащие характеристики $\chi' = (\dots, \chi'_n, \dots)$, $\chi'' = (\dots, \chi''_n, \dots)$ соответственно, где $\chi'_l \neq \infty$ при $l = 1, 2, \dots, \kappa$; $\chi''_s \neq \infty$ при $s = 1, 2, \dots, m$. Будем говорить, что тип τ' больше типа τ'' , если $i_\kappa \leq j_m$ и $i_{\kappa-t} \leq j_{m-t}$ при $i_{\kappa-t+1} = j_{m-t+1}$ ($t = 1, \dots, \kappa-1$). Далее выбираем множество Ω' всех максимальных типов в $\Omega(A)$ (оно, очевидно, конечно) и введем там вышеуказанный порядок. Затем аналогично поступаем со множеством $\Omega(A) \setminus \Omega'$ и так далее. Ясно, что введенный порядок на $\Omega(A)$ согласуется с порядком на $\Omega(A)$ в обычном смысле. Далее считаем, что $\Omega(A)$ вполне упорядочено (по убыванию) вышеуказанным способом.

Пусть $A = \sum_{\tau \in \Omega_1(A)}^{\oplus} A^{(\tau)}$ - однородно разложимая сепарабельная группа, каждое прямое слагаемое которой почти делимо, где $A^{(\tau)}$ - однородные группы типа τ , $\Omega_1(A) \subseteq \Omega(A)$. Покажем, что $\Omega_1(A) = \Omega(A)$. Если A' - прямое слагаемое ранга I типа $\tau' \in \Omega(A)$ и $0 \neq a' \in A'$, то $a' = a_1 + \dots + a_\kappa$, где $a_i \in A^{(\tau_i)}$, $\tau_i \in \Omega_1(A)$, $i = 1, \dots, \kappa$. Получаем, что A' - прямое слагаемое вполне разложимой группы $\langle a_1 \rangle_* \oplus \dots \oplus \langle a_\kappa \rangle_*$ [4, с. 141] и, следовательно, $\tau' \in \Omega_1(A)$. Заметим, что разложение $A = \sum_{\tau \in \Omega_1(A)}^{\oplus} A^{(\tau)}$ единственно с точностью до изоморфизма [4, с. 212].

Пусть теперь B - такая сепарабельная группа, что $E(A) \cong E(B)$. Покажем, что $\Omega(A) = \Omega(B)$. Пусть $B = B' \oplus B''$, где B' - группа ранга I, тогда $A = A' \oplus A''$ и $E(A') \cong E(B')$.

[4, с. 257]. Так как A' - сепарабельная группа, то ранг её равен 1. Наконец, так как A' - почти делимая группа, то $A' \cong B'$. Следовательно, $\Omega(B) \cong \Omega(A)$. Аналогично получаем обратное включение. Итак, $\Omega(A) = \Omega(B)$.

Пусть τ_1 - наибольший тип из $\Omega(A)$. Тогда $A = A^{(\tau_1)} \oplus \bar{A}^{(\tau_1)}$, $B = B^{(\tau_1)} \oplus \bar{B}^{(\tau_1)}$ и $E(A^{(\tau_1)}) \cong E(B^{(\tau_1)})$, $E(\bar{A}^{(\tau_1)}) \cong E(\bar{B}^{(\tau_1)})$. Согласно предыдущему абзацу $\Omega(B^{(\tau_1)}) = \Omega(A^{(\tau_1)})$ и $\Omega(\bar{B}^{(\tau_1)}) = \Omega(\bar{A}^{(\tau_1)})$. Используя [5], имеем $A^{(\tau_1)} \cong B^{(\tau_1)}$. Во множестве $\Omega(A) \setminus \tau_1$ снова выбираем наибольший тип τ_2 . Имеем $\bar{A}^{(\tau_1)} = A^{(\tau_2)} \oplus \bar{A}^{(\tau_2)}$, $\bar{B}^{(\tau_1)} = B^{(\tau_2)} \oplus \bar{B}^{(\tau_2)}$, где $A^{(\tau_2)} \cong B^{(\tau_2)}$ и $E(\bar{A}^{(\tau_2)}) \cong E(\bar{B}^{(\tau_2)})$. Следовательно, $B' = \sum_{i=1,2,\dots} \oplus B^{(\tau_i)}$ - такая сепарантная подгруппа группы B , что $B' \cong A$. Покажем, что $B = B'$. Действительно, если b - произвольный элемент из B , то согласно введенной упорядоченности типов существует такое n , что $B = B^{(\tau_1)} \oplus \dots \oplus B^{(\tau_n)} \oplus \bar{B}^{(\tau_n)}$ и для некоторого p имеем $p \bar{B}^{(\tau_n)} \neq \bar{B}^{(\tau_n)}$, но $p < b_* = \langle b \rangle_*$. Следовательно, $b \in B^{(\tau_1)} \oplus \dots \oplus B^{(\tau_n)} \subseteq B'$ и $B = B' \cong A$.

Литература

1. Себельдин А.М. Об определяемости абелевых групп без кручения своими кольцами и группами эндоморфизмов. Группы и модули. Томск, 1976, 78-85.
2. W. May, E. Toubassi, *Endomorphisms of Abelian groups and the Theorem of Bear and Karlanski*, J. Algebra, 1976, 43, N1, 1-13.
3. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы. Т.1. "Мир", 1973.
4. Фуко Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. "Мир", 1977.
5. G. J. Hauptfleisch, *Torsion-free Abelian groups with isomorphic endomorphism rings*, Arch. Math., 1973, 24, N3, 269-273.

Поступило

28 октября 1977

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАСЩЕПЛЯЕМОСТЬ И СЛАБО ЖЕСТКИЕ СИСТЕМЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ. Беккер И.Х., Росошек С.К. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 3-13.

На абелевой группе G без кручения вводится естественным образом структура $\mathbb{Z}[x]$ -модуля ${}^{\alpha}G$, где α - фиксированный эндоморфизм группы G . Если для любого эндоморфизма φ группы G $\mathbb{Z}[x]$ -модуль ${}^{\alpha}G$ периодичен, то G называется полиномиально периодической. Группа G называется полиномиально расщепляемой, если ее полиномиально периодическая часть $Tor\ G$ выделяется в ней прямым слагаемым. В работе выделены классы полиномиально периодических и полиномиально расщепляемых групп. Установлен критерий полиномиальной периодичности прямых сумм групп G конечного ранга, почти изоморфных группам полужесткой системы. Дано описание $Tor\ G$, где G - прямое произведение групп без кручения конечного ранга, почти изоморфных группам полужесткой системы.

Библи. 3.

УДК 519.4

ЛОКАЛИЗАЦИИ В КАТЕГОРИИ ФУНКТОРОВ. Григорян А.Г. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 14-28.

Теория колец и модулей частных в смысле Габриэля переносится на случай малой предаддитивной категории $\mathcal{T}$ и категории $Ab^{\mathcal{T}}$ ковариантных аддитивных функторов из $\mathcal{T}$ в категорию Ab абелевых групп. На категории $\mathcal{T}$ определяется радикальный фильтр. Для радикального фильтра $\mathcal{F}$ на $\mathcal{T}$ и любого функтора $M \in Ab^{\mathcal{T}}$ строится функтор частных $M_{\mathcal{F}}$ относительно $\mathcal{F}$, в частности, категория частных $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Изучается категория частных $\mathcal{T}_D$ относительно радикального фильтра D плотных правых идеалов категории $\mathcal{T}$. Находятся необходимые и достаточные условия регулярности (по фон Нейману) и классической полупростоты категории $\mathcal{T}_D$.

Библ. 11.

УДК 519.4

ПРИМАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПО ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОДГРУППАМ. Гриншпун С.Я. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 29-36.

Две группы G и G' называются эквивалентными по вполне характеристическим подгруппам, если каждая из них изоморфна вполне характеристической подгруппе другой группы. Всякая вполне характеристическая подгруппа вполне транзитивной примарной абелевой группы допускает описание с помощью последовательности, составленной из целых неотрицательных чисел и символов ∞ . В работе дается полный ответ на вопрос, когда пара таких последовательностей определенного вида задает эквивалентность примарных абелевых групп по вполне характеристическим подгруппам, и показывается, что всегда существуют неизоморфные примарные абелевы группы, соответствующие такой эквивалентности.

Библ. 1.

УДК 519.4

О ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ. Гриншпун С.Я. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 37-44.

В статье получено полное описание вполне характеристических подгрупп вполне разложимых абелевых групп без кручения в терминах типов. Изучение вполне характеристических подгрупп ведется с помощью введенного понятия гомоморфной оболочки. Отмечается также ряд свойств гомоморфных оболочек.

Библ. 3.

УДК 519.4

КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫЕ ГРУППЫ. Добрусин Ю.Ф. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 45-63.

Изучаются свойства квазисервантно инъективных абелевых групп, то есть таких групп, для которых любой гомоморфизм сервантной подгруппы в саму группу можно продолжить до эндоморфизма группы. Получено структурное описание квазисервантно инъективных групп, принадлежащих следующим классам групп: 1) периодические группы; 2) сепарабельные группы без кручения; 3) прямые произведения групп без кручения ранга 1; 4) группы, содержащие такую подгруппу из классов 2, 3, что факторгруппа по ней ограничена; 5) однородные группы без кручения; 6) группы без кручения, представимые в виде полной прямой суммы групп, каждая сервантная подгруппа которых сильно неразложима и множество всех различных типов элементов удовлетворяет условию максимальности.

Библ. 10.

УДК 519.4

СЕРВАНТНО КОРРЕКТНЫЕ И РЕГУЛЯРНО КОРРЕКТНЫЕ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ. Добрусин Ю.Б., Иванов А.В. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 64-86.

Изучается строение таких вполне разложимых абелевых групп G без кручения, которые обладают следующим свойством: для любой вполне разложимой абелевой группы A из того, что $A \cong A'$, $G \cong G'$, где A' , G' - сервантные (регулярные) подгруппы групп G и A соответственно, следует $A \cong G$. Получены необходимые и достаточные, не совпадающие в общем случае условия на инварианты группы G для того, чтобы она обладала указанным свойством. В ряде случаев полученные условия являются и необходимыми, и достаточными.

Библ. 4.

УДК 519.4

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Кожухов С.Ф.
Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 87-94.

Рассматриваются абелевы группы, не имеющие ненулевых нильпотентных эндоморфизмов (свободные от нильпотентностей). Дается описание периодических и смешанных свободных от нильпотентностей групп. Далее, рассматривается класс $\mathcal{O}$ групп G без кручения, содержащих подгруппы $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i$, в которых A_i сервантны в G , являются сильно неразложимыми конечного ранга, а G/A ограничена (A - полное квазиразложение группы G). Дается описание свободных от нильпотентностей групп из $\mathcal{O}$. Показано, что: 1) свободная от нильпотентностей группа $G \in \mathcal{O}$ обладает единственным полным квазиразложением $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i$; 2) каждое сервантное квазиислагаемое B есть сервантная оболочка некоторого семейства групп A_i и вполне характеристично в G ; 3) каждое квазиразложение с сервантными квазиислагаемыми продолжается до полного.

Библи. 6.



УДК 519.4

РЕГУЛЯРНО ЗАМКНУТЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ. Кожухов С.Ф.
Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 95-103.

Изучаются регулярно замкнутые абелевы группы без кручения, то есть группы G , у которых совокупность всех регулярных автоморфизмов вместе с тождественным автоморфизмом ε образует подгруппу в группе всех автоморфизмов $\text{Aut}(G)$. Рассматривается класс $\mathcal{O}$ групп G без кручения, содержащих подгруппы $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i$, в которых A_i сервантны в G , являются сильно неразложимыми группами конечного ранга, а фактор-группа G/A ограничена. Доказывается, что группа G из класса $\mathcal{O}$ регулярно замкнута тогда и только тогда, когда она либо регулярно полна (т.е. когда все ее автоморфизмы, кроме ε , регулярны), либо регулярно проста (т.е. когда $-\varepsilon$ - единственный ее регулярный автоморфизм). Далее рассматриваются регулярно простые группы из класса $\mathcal{O}$. Показано, что группа автоморфизмов регулярно простой группы из класса $\mathcal{O}$ является 2-группой, а также, что для многих подклассов групп из класса $\mathcal{O}$ их регулярная простота эквивалентна тому, что их группы автоморфизмов изоморфны прямому произведению групп типа $Z(2)$. Дается описание групп, группы автоморфизмов которых изоморфны прямому произведению групп типа $Z(2)$. Тем

не менее, существуют регулярно простые группы, группы автоморфизмов которых не разлагаются в прямые произведения подгрупп типа $Z(2)$.

Библи. 6.

УДК 519.4

ГРУППА ГОМОМОРФИЗМОВ В ГРУППУ БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1.

Крылов П.А. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 104-121.

Основные результаты работы касаются естественного гомоморфизма $\varphi: M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$, где M и A - абелевы группы без кручения, причем A - группа ранга 1. Находятся необходимые и достаточные условия того, чтобы φ осуществлял изоморфное вложение M в $\text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$ в качестве сервантной подгруппы. Затем при некоторых ограничениях на мощность группы M выясняется, когда φ будет изоморфизмом. Особо рассматривается случай, когда A имеет идемпотентный тип. Кроме того, получен ряд результатов о группах гомоморфизмов в группы без кручения определенного вида, в частности, в однородные сепарабельные группы.

Библи. 7.

УДК 519.4

О СЕРВАНТНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ ЦЕЛЫХ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ.

Крылов П.А. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 122-126.

Изучаются сервантные подгруппы группы целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и их кольца эндоморфизмов. Оказывается, что если такая подгруппа совпадает с псевдоцокелем, то она обладает многими свойствами сервантных подгрупп в $\mathbb{Z}_p$ конечного ранга. Например, каждый эндоморфизм такой подгруппы есть целое кратное некоторого ее автоморфизма, ее кольцо эндоморфизмов есть кольцо дискретного нормирования. В заключение доказывается, что сервантная подгруппа в $\mathbb{Z}_p$ конечного коранга совпадает с псевдоцокелем.

Библи. 3.

УДК 519.48

КОРРЕКТНЫЕ И ЧИСТО КОРРЕКТНЫЕ МОДУЛИ. Росов-к С.К. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 127-142.

В работе выясняется, какие модули и над какими кольцами являются корректными (строго корректными) и чисто корректными (строго чисто корректными). Результаты работы собраны в таблицах, которые показывают, когда вопрос о корректности (строгой корректности) и чисто корректности (строгой чисто корректности) может быть решен положительно или отрицательно.

Библи. 17, табл. 2.

УДК 519.4

СТРОГО ЧИСТО КОРРЕКТНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ. Росов-к С.К. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 143-150.

Устанавливаются связи между полиномиально периодическими и строго чисто корректными абелевыми группами без кручения.

Библи. 5.

УДК 519.4

ПОЛНЫЕ ПРЯМЫЕ СУММЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1 С ИЗОМОРФНЫМИ ГРУППАМИ ИЛИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ, II. Себелдин А.М. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 151-156.

Говорят, что абелева группа G определяется своим кольцом эндоморфизмов $E(G)$ (своей группой эндоморфизмов $End\ G$) в классе абелевых групп $\mathcal{O}$, если для любой группы $H \in \mathcal{O}$ из изоморфизма $E(G) \cong E(H)$ ($End\ G \cong End\ H$) следует изоморфизм $G \cong H$. Пусть $\mathcal{L}$ - класс полных прямых сумм групп без кручения ранга 1, G - редуцированная группа из этого класса, причем $|G|$ - кардинал нулевой меры. Получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы группа G определялась своим кольцом (своей группой) эндоморфизмов в классе $\mathcal{L}$.

Библи. 11.

УДК 519.4

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С ИЗОМОРФНЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Себелдин А.М. Абелевы группы и модули. Изд-во Томского ун-та, 1979, 157-162.

В работе показано, что вопрос об определяемости абелевой груп-

пы без кручения своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп сводится к этому же вопросу в классе всех абелевых групп без кручения. Найдено необходимое условие определяемости абелевой группы без кручения своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп без кручения. Доказано, что для определяемости однородно разложимой сепарабельной группы без кручения своим кольцом эндоморфизмов в классе всех сепарабельных групп без кручения оно является необходимым и достаточным.

Библи. 5.

СОДЕРЖАНИЕ

И.Х.Беккер, С.К.Росошек. Полиномиальная расщепляемость и слабо жесткие системы абелевых групп без кручения . . .	3
А.Г.Григорян. Локализации в категории функторов	14
С.Я.Гриншпон. Примарные абелевы группы, эквивалентные по вполне характеристическим подгруппам	29
С.Я.Гриншпон. О вполне характеристических подгруппах вполне разложимых абелевых групп без кручения	37
Ю.Б.Добрусин. Квазисервантно инъективные группы	45
Ю.Б.Добрусин, А.В.Иванов. Сервантно корректные и регулярно корректные вполне разложимые абелевы группы без кручения	64
С.Ф.Кожухов. Абелевы группы без нильпотентных эндоморфизмов	87
С.Ф.Кожухов. Регулярно замкнутые абелевы группы без кручения	95
П.А.Крылов. Группа гомоморфизмов в группу без кручения ранга 1	104
П.А.Крылов. О сервантных подгруппах группы целых p -адических чисел	122
С.И.Росошек. Корректные и чисто корректные модули . . .	127
С.К.Росошек. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения	143
А.М.Себельдин. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов II	151
А.М.Себельдин. Абелевы группы без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов	157
Рефераты опубликованных статей	163

Абелевы группы и
модули

Редактор В.Г.Лихачёва

КВ	02013	Подписано к печати	29/1-79
Формат	60×84 1/16	Бум. типогр.	Б 3
П.л.	10,5;	уч.-изд. л.	9; усл. п. л. 9,7
Заказ	203	Тираж	500 экз. Цена 1 руб. 30 коп.

ИБ 484

Издательство ТГУ, Томск, 29, Никитина, 17.