

А.А. Назаров

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ
МАРКОВИЗИРУЕМЫХ
СИСТЕМ**

Томский государственный университет им. В.В.Куйбышева

А.А.Назаров

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАРКОВИЗИРУЕМЫХ
СИСТЕМ



Издательство Томского университета

Томск - 1991

УДК 519.2

Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. — 158 с. — 1 р. 10 к. — 500 экз. I402050000.

В монографии вводится понятие марковизируемой системы и предлагается метод ее анализа при различных асимптотических условиях. Исследованы различные классы случайных процессов, временных рядов и потоков событий, поведение статистик по зависимым выборкам. Рассмотрен метод асимптотического анализа и управления системами массового обслуживания. Построены математические модели функционирования локальных вычислительных сетей с протоколами случайного множественного доступа с их последующим анализом.

Для специалистов по исследованию операций.

Рецензент — доктор физико-математических наук
А.Ф.Терпугов

ISBN 5-7511-0156-1

И $\frac{I402050000}{I77(012)-91}$ 39-91

© Назаров А.А., 1991

ПРЕДИСЛОВИЕ

При анализе функционирования стохастических моделей различных систем многие исследователи используют метод, который получил название метода марковизации [1]. Идея его проста. Если случайный процесс, описывающий изменение во времени состояний исследуемой системы, является немарковским, то его следует изменить так, чтобы он стал марковским. Изменения должны иметь обратимый характер, т.е. результаты и выводы, полученные при исследовании построенного марковского процесса, помогают в исследовании исходного немарковского процесса. Наибольшее распространение методы марковизации получили в теориях массового обслуживания и надежности. Наиболее известными являются методы фаз Эрланга, вложенных цепей Маркова, дополнительных переменных, интегральных уравнений.

Метод фаз Эрланга заключается в следующем: если в рассматриваемой системе наряду с экспоненциальными распределениями встречаются также эрланговские, гиперэкспоненциальные и гиперэрланговские распределения, то те операции, которые имеют названные распределения, разбивают на фазы, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение. Здесь использован тот факт, что величину, имеющую распределение Эрланга порядка k с параметром μ , можно представить в виде суммы k независимых, одинаково распределенных экспоненциальных величин. В связи с этим соответствующую операцию можно моделировать как выполнение последовательности k стохастически независимых случайных фаз, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение. Из-за экспоненциального распределения каждой фазы свойство отсутствия памяти обеспечивает марковское свойство для стохастического процесса, описывающего функционирование всей системы.

Метод вложенных цепей Маркова состоит в том, что для случайного процесса, описывающего систему, сначала нужно найти такие моменты времени, в которые соответствующая последовательность его значений становится цепью Маркова. Если для этих моментов времени методами дискретных марковских цепей определить искомые величины или вероятности, характеризующие состояние системы, и преобразовать их в соответствующие величины исходного процесса, то цель анализа системы будет достигнута.

Суть метода дополнительных переменных определяется расширением пространства состояний исходного немарковского случайного процесса с помощью соответствующих дополнительных величин до приобретения им свойств марковского процесса, для анализа которого применяются достаточно хорошо разработанные методы. Метод фаз Эрланга является частным случаем метода дополнительных переменных.

Метод интегральных уравнений заключается в следующем: если в системе массового обслуживания входящий поток или обслуживание является рекуррентным, то изменение со временем числа требований в системе является процессом немарковским. Тогда процессы, описывающие изменение значения незавершенной работы или текущего времени ожидания требования, в данный момент стоящего в очереди первым либо на приборе, являются марковскими процессами. Если рекуррентно и то и другое, то цепь, вложенная в соответствующий процесс, оказывается марковской. При анализе любого из перечисленных процессов необходимо решить соответствующее интегральное уравнение, чем и обусловлено название метода.

Рассмотренные методы марковизации применяются в анализе не только систем массового обслуживания (СМО), но и потоков событий или статистик для оценки параметров трендов потоков событий, а также имеют и другие области приложения.

Используя метод марковизации, задачу анализа математической

модели рассматриваемой системы удастся свести к решению различных уравнений или систем уравнений. Обычно встречаются конечные и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, интегральные или интегродифференциальные уравнения, а также все возможные их комбинации. Найти точное аналитическое решение этих уравнений, как правило, практически невозможно. Довольно часто оказывается полезным знание хотя бы их приближенного решения, которое получается в асимптотическом случае, когда какой-либо из параметров исследуемой системы рассматривается в предельном случае. Обычно анализируются случаи, когда интервал наблюдения неограниченно возрастает либо растет число измерений наблюдаемого процесса. В СМО существенное значение имеет поведение загрузки системы, особенно когда загрузка стремится к критической. Асимптотический метод применяется, если интенсивность повторения заявки в системах с повторными вызовами стремится к нулю. Во всех случаях можно найти асимптотическую плотность распределения вероятностей основных стохастических параметров, обуславливающих функционирование исследуемой системы.

Предложенный асимптотический метод анализа марковизированных систем обычно имеет два этапа. На первом этапе удастся определить асимптотическое среднее исследуемых характеристик системы, а на втором - распределение вероятностей значений отклонений рассматриваемых характеристик от их асимптотических средних. На этом этапе, как правило, получается асимптотически нормальное распределение, что является аналогом известных в теории вероятностей законов больших чисел и центральных предельных теорем. Но наряду с названными законами распределения часто встречаются экспоненциальное, гамма-распределение и другие распределения вероятностей.

Всё вышесказанное определило название данной монографии и ее структуру. Работа имеет четные главы.

В главе I рассмотрены семь классов стохастических потоков однородных событий и для каждого из них определено либо асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) распределение числа $i(t)$ событий, наступивших за время t , либо распределение величины t_n - момента наступления n -го события при $n \rightarrow \infty$. Используя известное соотношение между величинами t_n и $i(t)$, нам удалось найти соотношение их асимптотических распределений.

Глава 2 посвящена анализу статистик для проверки гипотез о тренде потока и оценки значений его параметров, здесь показана асимптотическая нормальность рассматриваемых оценок, найдены числовые характеристики асимптотических распределений: средние, дисперсии, коэффициент корреляции, рассмотрено асимптотическое возрастание интервала наблюдения для T -планов либо объема выборки - для N -планов.

В главе 3 проведен асимптотический (при загрузке $\rho \uparrow 1$) анализ СМО с одним и двумя потоками требований. В первом случае, как правило, асимптотическое распределение оказывается экспоненциальным, а во втором - двумерным, асимптотически вырожденным, что указывает на асимптотически функциональную связь между компонентами векторных характеристик в СМО. Асимптотический метод анализа позволяет решить оптимизационные задачи для управления систем массового обслуживания.

В последней главе исследовано применение асимптотического метода для анализа математических моделей протоколов случайного множественного доступа к передающей среде в локальных вычислительных сетях. Здесь рассмотрены асимптотические условия, максимизирующие пропускную способность канала связи, определены ее величина и ряд основных характеристик протоколов доступа.

Изложенный материал требует подготовки по теории вероятностей и математической статистики, теории марковских процессов, знания основных идей и методов анализа СМО, основных понятий и принципов функционирования локальных вычислительных сетей и их протоколов множественного доступа.

Глава I

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Потоком однородных событий называется последовательность случайных величин $\{t_n\}$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве и удовлетворяющих условиям: а) в любой фиксированный интервал времени (a, b) с вероятностью 1 попадает конечное число этих величин; б) $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$.

Значения $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ называются моментами поступления требований. Будем считать, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k \geq 1$, $t_0 = 0$ — длина интервала между моментами поступления $(k-1)$ -го и k -го требований. Поток требований задан, если для каждого $n \geq 1$ задано совместное распределение случайных величин $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$.

Всякий поток требований определяет случайный процесс $N(t)$, равный числу требований потока, поступивших за время t . Соответствующий процесс $N(t)$ однозначно определяет последовательность $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$. Поскольку при любом $k \geq 1$, $t_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, то распределения векторов $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ позволяют однозначно определить друг друга, но в силу совпадения событий $t_k < t$ и $N(t) \geq k$ одномерное распределение процесса $N(t)$ определяет распределение k -й компоненты вектора $(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Аналогично определяются остальные распределения.

Заметим, что последовательность распределений величин $t_1, t_2, \dots$ определяется лишь одномерным распределением процесса $N(t)$, которые связаны соотношением

$$P(t_n < t) = P(N(t) \geq n).$$

Ниже будут определены асимптотические (при $n \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$) распределения величин t_n и $N(t)$.

1.1. Простейший поток

Поток однородных событий называется простейшим, если все величины ε_k независимы, одинаково распределены с экспоненциальной функцией распределения

$$P(\varepsilon_k < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ при } x \geq 0, \\ 0 & , \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Положительная величина $\lambda > 0$ называется параметром простейшего потока.

Очевидно, что простейший поток полностью определяется заданием своего параметра.

В [2] показано, что распределение числа событий, наступивших в простейшем потоке, подчинено закону Пуассона

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

а распределение момента наступления n -го события подчинено закону Эрланга порядка n с плотностью

$$G_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \quad (2)$$

для которой выполняется соотношение $P(t_n < t) = P(N(t) \geq n)$, имеющее следующий вид:

$$\int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Простейший поток является, пожалуй, единственным потоком, для которого можно в явном виде записать распределение числа требований, поступивших за время t , и распределение момента наступления n -го события (2). Но существует широкий класс потоков, для которых удастся найти асимптотические ($n \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$) распределения вероятностей t_n и $N(t)$.

1.2. Рекуррентный поток

Поток однородных событий называется рекуррентным, если все величины τ_k независимы и для всех $k \geq 2$ имеют одну и ту же функцию распределения $A(x) = P(\tau_k < x)$.

Особое положение величины τ_1 определяется тем, что τ_1 есть длина интервала от начала отсчета времени до момента поступления первого требования. При $k \geq 2$ τ_k — длина интервала между моментами поступления $(k-1)$ -го и k -го требований. Так как начало отсчета времени не совпадает с моментом поступления требования, то τ_1 имеет распределение, отличное от распределения τ_k при $k \geq 2$.

Простейший поток относится к классу рекуррентных, поэтому все выводы, сформулированные для рекуррентных потоков, справедливы и для простейшего потока.

При нахождении асимптотического распределения величины t_n при $n \rightarrow \infty$ для рекуррентного потока можно воспользоваться центральной предельной теоремой [4] и показать, что t_n — асимптотически нормальная случайная величина с асимптотическим средним

$$Mt_n = \alpha n \quad (1)$$

и асимптотической дисперсией

$$Dt_n = \sigma^2 n, \quad (2)$$

где $\alpha = M\tau_k = \int_0^\infty (1-A(x))dx$, $\sigma^2 = D\tau_k = \int_0^\infty (x-\alpha)^2 dA(x)$.

К процессу $N(t)$ нельзя применить классическую центральную предельную теорему, но можно воспользоваться теорией восстановления [3], так как в этом случае $N(t)$ является числом восстановления до момента t . В [3] показано, что если $a < \infty$, $\sigma^2 < \infty$, то $N(t)$ при $t \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна с асимптотическим средним

$$MN(t) = t/a \quad (3)$$

и асимптотической дисперсией

$$DN(t) = \sigma^2 t / a^3. \quad (4)$$

Из формул (1)-(4) и доказательства утверждения асимптотической нормальности величин t_n и $N(t)$ следует, что для асимптотического описания класса рекуррентных потоков достаточно знать лишь среднее a и дисперсию σ^2 по функции распределения $A(x)$ и нет необходимости иметь вид самой функции $A(x)$.

Так как простейший поток относится к классу рекуррентных, то сформулированные утверждения асимптотической нормальности t_n и $N(t)$ справедливы и для простейшего потока, при этом асимптотические характеристики (1)-(4) через λ выражаются следующим образом:

$$Mt_n = n/\lambda, \quad Dt_n = n/\lambda^2,$$

$$MN(t) = \lambda t, \quad DN(t) = \lambda t.$$

Утверждение асимптотической нормальности t_n и $N(t)$ для потоков однородных событий справедливо и для более широкого класса моделей, чем рекуррентных потоков, для которых справедливость этого утверждения доказывается центральной предельной теоремой и теорией восстановления.

1.3. Поток Вольда

Естественный способ обобщения рекуррентных потоков заключается в предположении, что последовательность интервалов между событиями $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ образует однородную марковскую цепь, определяемую некоторым начальным распределением и условной функцией распределения

$$A(z/x) = P(\tau_{n+1} < z / \tau_n = x). \quad (1)$$

Рассматриваемый класс включает и класс простейших, и класс рекуррентных потоков. В самом деле, если функция $A(z/x)$ двух переменных z и x постоянна по x , т.е. от x не зависит, то получим класс рекуррентных потоков. Если же функция $A(z)$ одного аргумента z — экспоненциальная, то получим класс простейших потоков.

Класс исследуемых потоков впервые введен Вольдом [3], указавшим на сложность исследования потока. Характеристики второго порядка числа событий ему не удалось найти из-за сложности определения плотности распределения суммы $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$.

Для рассматриваемых величин t_n и $N(t)$ докажем асимптотическую нормальность и найдем характеристики первого и второго порядка, т.е. асимптотические средние и дисперсии.

Найдем асимптотическое распределение величины t_n при $n \rightarrow \infty$. Вектор (τ_{n+1}, t_n) образует двумерную марковскую последовательность, распределение которой обозначим

$$P(z, n, u) = P(z \leq \tau_{n+1} < z + dz, u \leq t_n < u + du) / dz du.$$

Распределение $P(z, n, u)$ удовлетворяет уравнению

$$P(z, n, u) = \int_0^u P(v, n-1, u-v) a(z/v) dv, \quad (2)$$

где $a(z/v)$ - условная плотность по условной функции распределения $\mathcal{A}(z/v)$.

Событие $u \leq t_n < u + du$ является достоверным при условии, что $t_n = v$, $u - v \leq t_{n-1} < u - v + du$, а значение t_{n+1} (при известном t_n) не зависит от значения t_{n-1} , т.е. имеет место равенство

$$\begin{aligned} dx du P(z, n, u) &= P(z \leq t_{n+1} < z + dz, u \leq t_n < u + du) = \\ &= \int_0^u P(z \leq t_{n+1} < z + dz, u \leq t_{n-1} + t_n < u + du, v \leq t_n < v + dv) = \\ &= \int_0^u P(z \leq t_{n+1} < z + dz, v \leq t_n < v + dv, u - v \leq t_{n-1} < u - v + du) = \\ &= \int_0^u P(v \leq t_n < v + dv, u - v \leq t_{n-1} < u - v + du) \times \\ &\times P(z \leq t_{n+1} < z + dz / v \leq t_n < v + dv, u - v \leq t_{n-1} < u - v + du) = \\ &= \int_0^u dv du P(v, n-1, u-v) P(z \leq t_{n+1} < z + dz / t_n = v) = \\ &= du dz \int_0^u P(v, n-1, u-v) a(z/v) dv \end{aligned}$$

Здесь $P(z \leq t_{n+1} < z + dz / t_n = v) = a(z/v) dz$, где $a(z/v)$ - условная плотность распределения вероятностей от условной функции распределения $\mathcal{A}(z/v)$. Это уравнение аналогично одношаговому уравнению Колмогорова-Чепмена для цепей Маркова [4]. Решить уравнение (2) в замкнутой форме практически невозможно, но удается решить асимптотически при $n \rightarrow \infty$.

Пусть ε - такой положительный бесконечно малый параметр, что $n\varepsilon = \tau$ - конечная, ненулевая величина.

В уравнении (2) сделаем замену переменных

$$n\varepsilon = \tau, \quad u\varepsilon = x, \quad P(z, n, u) = \mathcal{K}(z, \tau, x),$$

затем его перепишем

$$\mathcal{K}(z, \tau, x) = \int_0^{x/\varepsilon} \mathcal{K}(z, \tau - \varepsilon, x - \varepsilon v) a(z/v) dv. \quad (3)$$

Функцию $\mathcal{K}(z, \tau, x - \varepsilon z)$ разложим в ряд по степеням ε и ограничимся членами разложения порядка ε , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \tau, x) &= \int_0^{x/\varepsilon} [\mathcal{K}(v, \tau, x) - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{K}(v, \tau, x)}{\partial \tau} - \\ &- \varepsilon v \frac{\partial \mathcal{K}(v, \tau, x)}{\partial x}] a(z/v) dv = \int_0^{x/\varepsilon} \mathcal{K}(v, \tau, x) a(z/v) dv - \\ &- \varepsilon \int_0^{x/\varepsilon} \left(\frac{\partial \mathcal{K}(v, \tau, x)}{\partial \tau} + v \frac{\partial \mathcal{K}(v, \tau, x)}{\partial x} \right) a(z/v) dv. \end{aligned}$$

Левую и правую части этого равенства проинтегрируем по z в пределах $[0, \infty)$ и, обозначив $\int_0^\infty \mathcal{K}(z, \tau, x) dz = \mathcal{K}(\tau, x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\tau, x) &= \int_0^{x/\varepsilon} \mathcal{K}(v, \tau, x) dv - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{x/\varepsilon} \mathcal{K}(v, \tau, x) dv - \\ &- \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x/\varepsilon} v \mathcal{K}(v, \tau, x) dv + x \mathcal{K}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tau, x\right). \end{aligned}$$

Если $\int_0^\infty z^\kappa \mathcal{K}(z, \tau, x) dz = O(\varepsilon)$ для $\kappa = 0; 1$, то последнее равенство с точностью до ε запишем

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{K}(\tau, x)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty v \mathcal{K}(v, \tau, x) dv + O(\varepsilon) = 0$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\frac{\partial \mathcal{K}(\tau, x)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty v \mathcal{K}(v, \tau, x) dv = 0. \quad (4)$$

Чтобы интеграл $\int_0^\infty v \mathcal{K}(v, \tau, x) dv$ выразить через $\mathcal{K}(\tau, x)$, в уравнении (3) положим $\varepsilon = 0$, имеем равенство

$$\mathcal{K}(z, \tau, x) = \int_0^\infty \mathcal{K}(v, \tau, x) a(z/v) dv,$$

которое совпадает с уравнением Колмогорова-Чепмена для стационарной безусловной плотности распределения длин интервалов [3]. Его решение запишем

$$\mathcal{K}(z, \tau, x) = f(z) \mathcal{K}(\tau, x),$$

где $f(z)$ - стационарная плотность распределения марковской

последовательности $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$

Полученное выражение для $\mathcal{K}(z, \tau, x)$ подставим в (4), будем иметь

$$\frac{\partial \mathcal{K}(\tau, x)}{\partial \tau} + a \frac{\partial \mathcal{K}(\tau, x)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где $a = \int_0^\infty \nu \gamma(\nu) d\nu$ - стационарная средняя длина интервала между моментами наступления событий в рассматриваемом потоке.

Общее решение уравнения (5) имеет форму

$$\mathcal{K}(\tau, x) = \tilde{\Phi}(x - a\tau),$$

где $\tilde{\Phi}(z)$ - произвольная дифференцируемая функция, аналитическое выражение которой найдем из начальных условий.

Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ для конечных n величина $\varepsilon t_n \rightarrow 0$, то начальным условием можно считать $\mathcal{K}(0, x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, тогда $\mathcal{K}(\tau, x) = \delta(x - a\tau)$. Следовательно, асимптотическое распределение $\mathcal{K}(\tau, x)$ величины εt_n при $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ (так что $\varepsilon n = \tau$) вырождено: εt_n сходится к детерминированной величине $a\tau$, где $\tau = \varepsilon n$, т.е. асимптотически имеет место

$$t_n = an.$$

Полученное равенство определяет асимптотическое среднее величины t_n , равное сумме n слагаемых $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$, поэтому среднее от t_n равно произведению числа слагаемых n на среднее значение каждого слагаемого.

Для доказательства асимптотической нормальности величины отклонения t_n от асимптотического среднего an в исходном уравнении (2) произведем замену переменных

$$n\varepsilon = \tau, \quad (n - an)\sqrt{\varepsilon} = y, \quad P(z, n, u) = G(z, \tau, y),$$

предварительно (2) запишем

$$P(z, n+1, u) = \int_0^u P(v, n, u-v) a(z/v) dv,$$

получим

$$G(z, \tau + \varepsilon, y - a\sqrt{\varepsilon}) = \int_0^{a\tau + y/\sqrt{\varepsilon}} G(v, \tau, y - v\sqrt{\varepsilon}) a(z/v) dv.$$

Разложив функцию G в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ с точностью до ε , имеем

$$G(z, \tau, y) + \varepsilon \frac{\partial G(z, \tau, y)}{\partial \tau} - a\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(z, \tau, y)}{\partial y} + \frac{a^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(z, \tau, y)}{\partial y^2} = \\ = \int_0^{a\tau + y/\sqrt{\varepsilon}} (G(v, \tau, y) - v\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(v, \tau, y)}{\partial y} + \frac{v^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(v, \tau, y)}{\partial y^2}) a(z/v) dv. \quad (6)$$

Правую и левую части равенства (6) проинтегрируем по z , в правой части изменим порядок интегрирования, а в левой — порядок интегрирования по z и дифференцирования по τ и y , обозначив $\int_0^1 G(z, \tau, y) dz = G(\tau, y)$, последнее равенство запишем следующим образом:

$$G(\tau, y) + \varepsilon \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial \tau} - a\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial y} + \frac{a^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(\tau, y)}{\partial y^2} = \\ = \int_0^{a\tau + y/\sqrt{\varepsilon}} (G(v, \tau, y) - v\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(v, \tau, y)}{\partial y} + \frac{v^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(v, \tau, y)}{\partial y^2}) dv.$$

Если $\int_0^{a\tau + y/\sqrt{\varepsilon}} v^k G(v, \tau, y) dv = O(\varepsilon)$ при $k = 0; 1; 2$, то последнее равенство примет вид

$$G(\tau, y) + \varepsilon \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial \tau} - a\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial y} + \frac{a^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(\tau, y)}{\partial y^2} = \\ = G(\tau, y) - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\tau} v G(v, \tau, y) dv + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^{\tau} v^2 G(v, \tau, y) dv,$$

откуда будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial G(z, y)}{\partial z} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 G(z, y)}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^{\infty} v^2 G(v, z, y) dv \right] = \\ = \sqrt{\varepsilon} \left[a \frac{\partial G(z, y)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} v G(v, z, y) dv \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнения (6) найдем $G(v, z, y)$ с необходимой степенью точности и подставим в (7).

З левую часть уравнения (7) подставим решение (6) при $\varepsilon = 0$. В этом случае уравнение (6) примет вид

$$G(z, z, y) = \int_0^{\infty} G(v, z, y) \alpha(z/v) dv.$$

Оно имеет следующее решение:

$$G(z, z, y) = \gamma(z) G(z, y). \quad (8)$$

В правую часть (7) подставим решение (6), полученное с точностью до $\sqrt{\varepsilon}$. В результате этого уравнение (6) запишем

$$\begin{aligned} G(z, z, y) = \int_0^{\infty} G(v, z, y) \alpha(z/v) dv + \\ + \sqrt{\varepsilon} \left[a \frac{\partial G(z, z, y)}{\partial y} - \int_0^{\infty} v \frac{\partial G(v, z, y)}{\partial y} \alpha(z/v) dv \right], \end{aligned}$$

подставив в квадратные скобки значения (8), для $G(v, z, y)$ будем иметь

$$\begin{aligned} G(z, z, y) = \int_0^{\infty} G(v, z, y) \alpha(z/v) dv + \\ + \sqrt{\varepsilon} \left[a \gamma(z) - \int_0^{\infty} v \gamma(v) \alpha(z/v) dv \right] \frac{\partial G(z, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения найдем в форме

$$G(z, z, y) = \gamma(z) G(z, y) + \sqrt{\varepsilon} \varphi(z) \frac{\partial G(z, y)}{\partial y}. \quad (9)$$

Для неизвестной функции $\varphi(z)$ - имеем дополнительное условие

$$\int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 0 \text{ и уравнение}$$

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} \varphi(v) \alpha(z/v) dv + \alpha \gamma(z) - \int_0^{\infty} v \gamma(v) \alpha(z/v) dv,$$

которое относится к классу неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Его можно решить методом последовательных приближений [5], тогда для $\varphi(z)$ получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \gamma(z) - \int_0^{\infty} v \gamma(v) \alpha_k(z/v) dv), \quad (10)$$

$$\text{где } \alpha_1(z/v) = \alpha(z/v), \quad \alpha_{k+1}(z/v) = \int_0^{\infty} \alpha_1(z/w) \alpha_k(w/v) dw.$$

Подставляя (8) в левую часть уравнения (7), а (9) - в его правую часть, для неизвестной функции $G(z, y)$ получим уравнение

$$\frac{\partial G(z, y)}{\partial z} = \frac{1}{2} (\sigma^2 - 2 \int_0^{\infty} v \varphi(v) dv) \frac{\partial^2 G(z, y)}{\partial y^2}, \quad (11)$$

где $\sigma^2 = \int_0^{\infty} v^2 \gamma(v) dv - (\int_0^{\infty} v \gamma(v) dv)^2$ - стационарная дисперсия длины интервала между моментами наступления событий в рассматриваемом потоке.

Нормированным решением полученного одномерного уравнения диффузии [6] является плотность нормального распределения вероятностей с нулевым средним и дисперсией

$$\mathcal{N}^2 z = (\sigma^2 - 2 \int_0^{\infty} v \varphi(v) dv) z.$$

Тем самым асимптотическая нормальность величины t_n при $n \rightarrow \infty$ для потока Вольда доказана.

Определим вероятностный смысл величины $\mathcal{N}^2$.

Так как $\varphi(z)$ найдена в виде (10), то

$$\int_0^{\infty} v \varphi(v) dv = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \int_0^{\infty} v \gamma(v) dv - \int_0^{\infty} z \gamma(z) \int_0^{\infty} v \alpha_k(v/z) dv dz) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a^2 M \varepsilon_k \varepsilon_{k+1}) = - \sum_{k=1}^{\infty} M(\varepsilon_k - a)(\varepsilon_{k+1} - a) = - \sum_{k=1}^{\infty} \text{cov}(\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}).$$

Следовательно, ε^2 имеет вид

$$\varepsilon^2 = \sigma^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_{k+1}), \quad (12)$$

где $\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_{k+1}) = M(\varepsilon_1 - a)(\varepsilon_{k+1} - a)$.

Возвращаясь к переменным n и t_n , получим, что величина t_n при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна с асимптотически средним an и асимптотической дисперсией $\varepsilon^2 n$, где ε^2 определена соотношением (12).

Таким образом, величина t_n , равная моменту наступления n -го события в потоке Вольда, асимптотически нормальна с асимптотическим средним Mt_n и дисперсией Dt_n .

$$Mt_n = an, \quad Dt_n = \varepsilon^2 n, \quad (13)$$

где a - стационарное среднее значение последовательности ε_1 ,

$\varepsilon_2, \dots$; ε^2 определяется равенством (12). Заметим, что формула (13) данного раздела совпадает с формулами (1) и (2) разд.

I.2.

Используя равенство

$$P(N(t) \geq n) = P(t_n \leq t),$$

покажем, что из асимптотической (при $n \rightarrow \infty$) нормальности t_n следует асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) нормальность $N(t)$.

Так как $P(N(t) \geq n) = P(t_n \leq t) = P(t_n \varepsilon \leq t \varepsilon)$, то обозначив $t \varepsilon = x$, $n \varepsilon = x$, будем иметь

$$P(t_n \varepsilon \leq x) = P(N(\frac{x}{\varepsilon}) \geq \frac{x}{\varepsilon}) = P(\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon}) \geq x).$$

В силу асимптотической детерминированности $t_n \varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$,
 $\varepsilon \rightarrow 0$, $n\varepsilon \rightarrow \tau$

$$P(t_n \varepsilon < x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a\tau, \\ 1, & \text{если } x > a\tau, \end{cases}$$

тогда

$$P(\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon}) \geq \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau < x/a, \\ 0, & \text{если } \tau \geq x/a, \end{cases}$$

следовательно, при конечных x и τ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon})$ асимптотически детерминирована и равна

$$\varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon}) = \frac{x}{a},$$

т.е. имеет место асимптотическое равенство

$$N(t) = \frac{x}{a\varepsilon} = \frac{t\varepsilon}{a\varepsilon} = \frac{t}{a}.$$

Величина t/a является асимптотическим средним для $N(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Покажем асимптотическую нормальность отклонения $N(t)$ от асимптотического среднего t/a .

Так как $P(N(t) \geq n) = P(t_n \leq t) = P((t_n - an)\sqrt{\varepsilon} \leq (t - an)\sqrt{\varepsilon})$,
то, обозначив $(t - an)\sqrt{\varepsilon} = y$, получим $n = \frac{t}{a} - \frac{y}{a\sqrt{\varepsilon}}$, таким образом

$$\begin{aligned} P((t_n - an)\sqrt{\varepsilon} \leq y) &= P(N(t) \geq n) = P(N(t) \geq \frac{t}{a} - \frac{y}{a\sqrt{\varepsilon}}) = \\ &= P((N(t) - \frac{t}{a})a\sqrt{\varepsilon} \geq -y) = P((\frac{t}{a} - N(t))a\sqrt{\varepsilon} \leq y). \end{aligned}$$

Из асимптотической нормальности $(t_n - an)\sqrt{\varepsilon}$ с параметрами 0 и $\sigma^2 \tau$ следует

$$P((\frac{t}{a} - N(t))a\sqrt{\varepsilon} \leq y) = P((t_n - an)\sqrt{\varepsilon} \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2\tau}} dv,$$

где $\tau = n\varepsilon = (\frac{t}{a} - \frac{y}{a\sqrt{\varepsilon}})\varepsilon = \frac{t\varepsilon}{a} - \frac{y}{a}\sqrt{\varepsilon}$.

Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ $t\varepsilon$ - величина конечная, $y\sqrt{\varepsilon}$ - бесконечно малая, то с точностью до $\sqrt{\varepsilon}$ $z = \frac{t\varepsilon}{\alpha}$, тогда

$$P\left(\left(\frac{t}{\alpha} - N(t)\right)\alpha\sqrt{\varepsilon} \leq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{t\varepsilon}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\frac{y}{\alpha\sqrt{\varepsilon}}} e^{-\frac{v^2}{2\frac{t\varepsilon}{\alpha}}} dv.$$

В результате величина $\left(\frac{t}{\alpha} - N(t)\right)\alpha\sqrt{\varepsilon}$ - асимптотически нормальная с нулевым средним и дисперсией, равной

$$\varepsilon^2 \frac{t\varepsilon}{\alpha} = D\left(\frac{t}{\alpha} - N(t)\right)\alpha\sqrt{\varepsilon} = \alpha^2 \varepsilon DN(t),$$

следовательно, $DN(t) = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^3} t$.

Таким образом, из асимптотической нормальности величины t_n при $n \rightarrow \infty$ следует при $t \rightarrow \infty$ асимптотическая нормальность величины $N(t)$ с асимптотическим средним и дисперсией

$$MN(t) = \frac{t}{\alpha}; \quad DN(t) = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^3} t.$$

Полученные результаты совпадают с формулами (3) и (4) для рекуррентного потока разд. I.2.

В качестве примера потока Вольда рассмотрим поток с условной плотностью распределения

$$a(z/v) = \begin{cases} a_1(z) & , \text{ если } v < \theta, \\ a_2(z) & , \text{ если } v > \theta. \end{cases}$$

В этом случае стационарная плотность распределения длин интервалов $f(z)$ определится уравнением

$$f(z) = \int_0^\infty f(v) a(z/v) dv = a_1(z) \int_0^\theta f(v) dv + a_2(z) \int_\theta^\infty f(v) dv$$

и условием нормировки $\int_0^\infty f(v) dv = 1$. Обозначим $\int_0^\theta f(v) dv = \alpha$, тогда $\int_\theta^\infty f(v) dv = 1 - \alpha$, следовательно, плотность $f(z)$ представим

$$f(z) = \alpha a_1(z) + (1 - \alpha) a_2(z).$$

Значение α определится из уравнения

$$\alpha = \int_0^b \gamma(z) dz = \alpha \int_0^b a_1(z) dz + (1-\alpha) \int_0^b a_2(z) dz = \alpha A_1(b) + (1-\alpha) A_2(b),$$

из которого следует

$$\alpha = \frac{A_2(b)}{1 - A_1(b) + A_2(b)},$$

где $A_1(b)$, $A_2(b)$ - значения функций распределения, соответствующих плотностям $a_1(x)$ и $a_2(x)$ в точке b . Параметр α асимптотического нормального распределения определяется соотношением

$$\alpha = \int_0^\infty v \gamma(v) dv = \int_0^\infty v (\alpha a_1(v) + (1-\alpha) a_2(v)) dv = \alpha \alpha_1 + (1-\alpha) \alpha_2,$$

где α_1, α_2 - средние по функциям распределения $A_1(x)$ и $A_2(x)$.

Для определения параметра α^2 решим уравнение

$$\varphi(z) = \int_0^\infty \varphi(z/v) a(z/v) dv + \alpha \gamma(z) - \int_0^\infty v \gamma(v) a(z/v) dv$$

относительно $\varphi(z)$ при дополнительном условии

$$\int_0^\infty \varphi(z) dz = 0.$$

Найдем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v \gamma(v) a(z/v) dv &= a_1(z) \int_0^b v \gamma(v) dv + \\ &+ a_2(z) \int_b^\infty v \gamma(v) dv = \alpha \beta a_1(z) + (1-\beta) a_2(z), \end{aligned}$$

$$\text{здесь } \beta = \frac{1}{\alpha} \int_0^b v \gamma(v) dv = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha \int_0^b v a_1(v) dv + (1-\alpha) \int_0^b v a_2(v) dv \right),$$

$$\text{тогда } \alpha \gamma(z) - \int_0^\infty v \gamma(v) a(z/v) dv =$$

$$= \alpha [\alpha a_1(z) + (1-\alpha) a_2(z)] - \alpha [\beta a_1(z) + (1-\beta) a_2(z)] =$$

$$= \alpha (\alpha - \beta) a_1(z) - \alpha (1 - \beta) a_2(z) = \alpha (\alpha - \beta) (a_1(z) - a_2(z)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^{\infty} \varphi(v) a(x/v) dv + a(\alpha - \beta)(a_1(x) - a_2(x)) = \\ &= a_1(x) \int_0^{\beta} \varphi(v) dv + a_2(x) \int_{\beta}^{\infty} \varphi(v) dv + a(\alpha - \beta)(a_1(x) - a_2(x)) = \\ &= a_1(x) \gamma - a_2(x) \gamma + a(\alpha - \beta)(a_1(x) - a_2(x)) = (a_1(x) - a_2(x))(\gamma + a(\alpha - \beta)),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_0^{\beta} \varphi(v) dv = (\gamma + a(\alpha - \beta)) \int_0^{\beta} (a_1(x) - a_2(x)) dx = \\ &= (\gamma + a(\alpha - \beta))(A_1(\beta) - A_2(\beta)),\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{a(\alpha - \beta)(A_1(\beta) - A_2(\beta))}{1 - A_2(\beta) + A_1(\beta)}.$$

И наконец,

$$\int_0^{\infty} v \varphi(v) dv = (a_1 - a_2)(\gamma + a(\alpha - \beta)),$$

тогда

$$\mathfrak{K}^2 = \sigma^2 - 2(a_1 - a_2)(\gamma + a(\alpha - \beta)).$$

Итак, для рассматриваемого потока Вольда асимптотическое распределение определяется параметрами α и $\mathfrak{K}^2$, значения которых при заданных плотностях $a_1(x)$, $a_2(x)$ и параметре $\beta > 0$ равны

$$\alpha = \alpha a_1 + (1 - \alpha) a_2,$$

$$\mathfrak{K}^2 = \sigma^2 - 2(a_1 - a_2)(\gamma + a(\alpha - \beta)),$$

где

$$a_1 = \int_0^{\infty} v a_1(v) dv, \quad a_2 = \int_0^{\infty} v a_2(v) dv,$$

$$\alpha = \frac{A_2(b)}{1-A_1(b)+A_2(b)}, \quad \beta = \frac{1}{a} \left(\alpha \int_0^b v a_1(v) dv + (1-\alpha) \int_0^b v a_2(v) dv \right),$$

$$\gamma = \frac{\alpha(\alpha-\beta)(A_1(b)-A_2(b))}{1-A_1(b)+A_2(b)},$$

$$\sigma^2 = \alpha \int_0^\infty v^2 a_1(v) dv + (1-\alpha) \int_0^\infty v^2 a_2(v) dv - \alpha^2.$$

1.4. Полумарковский поток

Полумарковский поток – такой поток однородных событий, моменты наступления которых совпадают с моментами изменения состояний некоторого полумарковского процесса $\xi(t)$ с дискретным множеством состояний, определяемого полумарковской матрицей

$$Q_{ij}(x).$$

Пусть в момент времени t произошло изменение значения полумарковского процесса, тогда $Q_{ij}(x)$ определим как

$$Q_{ij}(x) = P(\xi(t+\theta)=j, \tau_j < x/\xi(t-\theta)=i),$$

где τ_j – время пребывания полумарковского процесса в j -м состоянии, в которое он попал в момент перехода из i -го состояния.

Возможна и другая интерпретация:

$$Q_{ij}(x) = P(\xi(t+\tau_i)=j, \tau_i < x/\xi(t+\theta)=i),$$

где τ_i – время пребывания полумарковского процесса в i -м состоянии, куда он попал в момент перехода.

Два различных толкования полумарковской матрицы $Q_{ij}(x)$ позволяют рассматривать два различных полумарковских процесса, марковизацию которых следует осуществлять следующим образом. При расширении фазового пространства в первом случае добавляется компонента $x(t)$, равная длине интервала от момента t до момента

первого изменения состояния процесса $\xi(t)$ в будущем, тогда процесс $(\xi(t), z(t))$ является марковским.

Во втором случае необходимо определить компоненту $y(t)$, равную длине интервала от момента последнего в прошлом изменения значения $\xi(t)$ до момента t , тогда процесс $(\xi(t), y(t))$ тоже является марковским.

В дальнейшем мы будем рассматривать полумарковскую матрицу $Q_{ij}(x)$ лишь в первой интерпретации, соответствующий полумарковский процесс $\xi(t)$ и способ его маркоизации $(\xi(t), z(t))$.

Заметим, что при любой интерпретации $Q_{ij}(\infty) = q_{ij}$ имеет смысл вероятности перехода из состояния i в состояние j для цепи Маркова, вложенной в полумарковский процесс $\xi(t)$ по моментам изменения его состояний.

Для анализа полумарковского потока, аналогично потоку Вольда, исследуем последовательность t_n моментов наступления событий потока. Эта последовательность не является марковской, поэтому рассмотрим двумерную последовательность (i_n, t_n) , где i_n — состояние полумарковского процесса $\xi(t)$ в момент, предшествующий изменению его состояния, т.е. $i_n = \xi(t_n - 0)$.

Нетрудно показать, что двумерная цепь (i_n, t_n) является марковской с дискретным множеством состояний по первой компоненте i и непрерывным — по второй.

Распределение вероятностей значений двумерной цепи (i_n, t_n) в момент n обозначим

$$P(i, n, u) = P(i_n = i, u \leq t_n < u + du) / du$$

и получим уравнение, которому оно удовлетворяет.

Так как

$$du P(j, n+1, u) = P(i_{n+1} = j, u \leq t_{n+1} < u + du) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \int_0^u P(i_{n+1}=j, u \leq t_n + \tau_{n+1} < u + du, i_n=i, v \leq \tau_{n+1} < v + dv) = \\
 &= \sum_i \int_0^u P(i_{n+1}=j, v \leq \tau_{n+1} < v + dv, i_n=i, u-v \leq t_n < u-v+du) = \\
 &= \sum_i \int_0^u P(i_{n+1}=j, v \leq \tau_{n+1} < v + dv / i_n=i) P(i_n=i, u- \\
 &\quad - v \leq t_n < u-v+du) = \sum_i \int_0^u du P(i, n, u-v) dQ_{ij}(v) = \\
 &= du \sum_i \int_0^u P(i, n, u-v) dQ_{ij}(v),
 \end{aligned}$$

то $P(i, n, u)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$P(j, n+1, u) = \sum_i \int_0^u P(i, n, u-v) dQ_{ij}(v). \quad (1)$$

В построенном уравнении произведем замену переменных [18, 19]

$$n\varepsilon = \tau, \quad u\varepsilon = x, \quad P(i, n, u) = \mathcal{P}(i, \tau, x),$$

получим

$$\mathcal{P}(j, \tau + \varepsilon, x) = \sum_i \int_0^{x/\varepsilon} \mathcal{P}(i, \tau, x - \varepsilon v) dQ_{ij}(v). \quad (2)$$

Раскладывая функцию $\mathcal{P}$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь членами разложения порядка ε , будем иметь

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(j, \tau, x) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{P}(j, \tau, x)}{\partial \tau} &= \sum_i \int_0^{x/\varepsilon} [\mathcal{P}(i, \tau, x - \varepsilon v) - \varepsilon v \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}] dQ_{ij}(v) = \\
 &= \sum_i \left[\mathcal{P}(i, \tau, x) \int_0^{x/\varepsilon} dQ_{ij}(v) - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{P}(i, \tau, x)}{\partial x} \int_0^{x/\varepsilon} v dQ_{ij}(v) \right].
 \end{aligned}$$

Левую и правую части полученного равенства просуммируем по j ,
и обозначив $\sum_j \mathcal{P}(j, \tau, x) = \mathcal{P}(\tau, x)$, имеем

$$\mathcal{P}(\tau, x) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{P}(\tau, x)}{\partial \tau} = \sum_i \mathcal{P}(i, \tau, x) \int_0^{x/\varepsilon} dQ_i(v) - \varepsilon \sum_i \frac{\partial \mathcal{P}(i, \tau, x)}{\partial x} \int_0^{x/\varepsilon} v dQ_i(v),$$

где $\sum_j Q_{ij}(x) = Q_i(x)$ — функция распределения длины того интервала до изменения состояния, в который попадает полумарковский процесс при переходе из состояния i .

Если $\int_0^\infty v dQ_i(v) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то последнее уравнение представим

$$\mathcal{P}(\tau, x) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{P}(\tau, x)}{\partial \tau} = \mathcal{P}(\tau, x) - \varepsilon \sum_i a_i \frac{\partial \mathcal{P}(i, \tau, x)}{\partial x},$$

где $a_i = \int_0^\infty v dQ_i(v)$, откуда получаем равенство

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\tau, x)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_i a_i \mathcal{P}(i, \tau, x) = 0. \quad (3)$$

Чтобы сумму $\sum_i a_i \mathcal{P}(i, \tau, x)$ выразить через $\mathcal{P}(\tau, x)$, считая в уравнении (2) $\varepsilon = 0$, имеем равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(j, \tau, x) &= \sum_i \mathcal{P}(i, \tau, x) \int_0^\infty dQ_{ij}(v) = \\ &= \sum_i \mathcal{P}(i, \tau, x) \int_0^\infty dQ_{ij}(v) = \sum_i q_{ij} \mathcal{P}(i, \tau, x), \end{aligned} \quad (4)$$

которое совпадает с уравнением Колмогорова для стационарного безусловного распределения состояний цепи Маркова. Его решение запишем в виде

$$\mathcal{P}(j, \tau, x) = f(j) \mathcal{P}(\tau, x),$$

где $f(j)$ — стационарное распределение состояний цепи Маркова.

Полученное выражение для $\mathcal{P}(j, \tau, x)$ подставим в (3), будем иметь

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\tau, x)}{\partial \tau} + a \frac{\partial \mathcal{P}(\tau, x)}{\partial x} = 0,$$

где $a = \sum_i a_i \gamma(i)$ - стационарное среднее значение длины интервала между моментами наступления событий в рассматриваемом потоке.

Полученное уравнение и его решение совпадает с уравнением (5) разд. 1.3. Следовательно, для полумарковского потока величина εt_n сходится при $n \rightarrow \infty$ к детерминированному значению $a\varepsilon$, т.е. асимптотически имеет место равенство

$$t_n = an.$$

Для доказательства асимптотической нормальности величины отклонения t_n от асимптотического среднего an в исходном уравнении (1) произведем замену переменных

$$n\varepsilon = \tau, \quad (u - an)\sqrt{\varepsilon} = y, \quad P(j, n, u) = G(j, \tau, y),$$

будем иметь

$$G(j, \tau + \varepsilon, y - a\sqrt{\varepsilon}) = \sum_i \int_0^{an + y/\sqrt{\varepsilon}} G(i, \tau, y - v\sqrt{\varepsilon}) dQ_{ij}(v).$$

Разложив функцию G в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ с точностью до ε , получим

$$\begin{aligned} G(j, \tau, y) + \varepsilon \frac{\partial G(j, \tau, y)}{\partial \tau} - a\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(j, \tau, y)}{\partial y} + \frac{a^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(j, \tau, y)}{\partial y^2} = \\ = \sum_i \int_0^{an + y/\sqrt{\varepsilon}} (G(i, \tau, y) - v\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(i, \tau, y)}{\partial y} + \frac{v^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(i, \tau, y)}{\partial y^2}) dQ_{ij}(v). \end{aligned} \quad (5)$$

Просуммируем по j правую и левую части полученного равенства, обозначим $\sum_j G(j, \tau, y) = G(\tau, y)$, последнее равенство запишем

$$G(\tau, y) + \varepsilon \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial \tau} - a\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial y} + \frac{a^2 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 G(\tau, y)}{\partial y^2} =$$

$$= \sum_i \int_0^{a\pi y/\sqrt{\epsilon}} (G(i, x, y) - v\sqrt{\epsilon} \frac{\partial G(i, x, y)}{\partial y} + \frac{v^2 \epsilon}{2} \frac{\partial^2 G(i, x, y)}{\partial y^2}) dQ_i(v).$$

Если $G(i, x, y) \int_0^{a\pi y/\sqrt{\epsilon}} v^k dQ_i(v) = O(\epsilon)$ при $k = 0; 1; 2$, то последнее равенство примет вид

$$\begin{aligned} G(x, y) + \epsilon \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} - a\sqrt{\epsilon} \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} + \frac{a^2 \epsilon}{2} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y^2} = \\ = G(x, y) - \sqrt{\epsilon} \sum_i \frac{\partial G(i, x, y)}{\partial y} \int_0^\infty v dQ_i(v) + \frac{\epsilon}{2} \sum_i \frac{\partial^2 G(i, x, y)}{\partial y^2} \int_0^\infty v^2 dQ_i(v). \end{aligned}$$

Обозначим $\int_0^\infty v^2 dQ_i(v) = b_i^2$. Так как $\int_0^\infty v dQ_i(v) = \alpha_i$, то последнее равенство запишем

$$\begin{aligned} \epsilon \left[\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} + \frac{a^2 \epsilon}{2} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_i b_i^2 G(i, x, y) \right] = \\ = \sqrt{\epsilon} \left[a \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial G(i, x, y)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично методу решения уравнения (7) разд. 1.3 используем (5) для решения последнего уравнения.

При $\epsilon = 0$ уравнение (5) примет вид

$$G(j, x, y) = \sum_i \int_0^\infty G(i, x, y) dQ_{ij}(v) = \sum_i G(i, x, y) q_{ij},$$

совпадающий с (4), следовательно, его решение найдем в форме

$$G(j, x, y) = \gamma(j) G(x, y). \quad (7)$$

С точностью до $\sqrt{\epsilon}$ уравнение (5) запишем следующим образом:

$$G(j, x, y) = \sum_i \int_0^\infty G(i, x, y) dQ_{ij}(v) + \sqrt{\epsilon} \left[a \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} - \sum_i \int_0^\infty v \frac{\partial G(i, x, y)}{\partial y} dQ_{ij}(v) \right].$$

В квадратные скобки подставив (7) для $G(j, \tau, y)$, получим уравнение

$$G(j, \tau, y) = \sum_i G(i, \tau, y) q_{ij} + \sqrt{\epsilon} \left[a_j(j) - \sum_i r(i) \int_0^\tau v dQ_{ij}(v) \right] \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial y},$$

решение которого найдем в виде

$$G(j, \tau, y) = r(j) G(\tau, y) + \sqrt{\epsilon} \varphi(j) \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial y}, \quad (8)$$

где неизвестная $\varphi(j)$ определяется условием $\sum_j \varphi(j) = 0$ и уравнением

$$\varphi(j) = \sum_i \varphi(i) q_{ij} + a_j(j) - \sum_i r(i) a_{ij}, \quad (9)$$

где
$$a_{ij} = \int_0^\infty v dQ_{ij}(v).$$

Подставляя (7) в левую часть уравнения (6), а (8) - в его правую часть, получим

$$\frac{\partial G(\tau, y)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2 \sum_i a(i) \varphi(i)}{2} \frac{\partial^2 G(\tau, y)}{\partial y^2},$$

где
$$\sigma^2 = \sum_i r(i) \delta_i^2 - a^2.$$

Нормированным решением этого уравнения является плотность нормального распределения с нулевым средним и дисперсией

$$\partial \epsilon^2 \tau = (\sigma^2 - 2 \sum_i a_i \varphi(i)) \tau.$$

Тем самым асимптотическая нормальность величины t_n при $n \rightarrow \infty$ доказана для полумарковского потока, определяемого полумарковской матрицей $Q_{ij}(x)$.

Возвращаясь от переменной τ и n , получим: t_n , равная моменту наступления n -го события, в полумарковском потоке асимптотически нормальна (при $n \rightarrow \infty$) с асимптотическим средним

Mt_n и дисперсией Dt_n , равными

$$Mt_n = an, \quad Dt_n = \kappa^2 n,$$

где $a = \sum_i \alpha_i f(i)$, $\alpha_i = \int_0^\infty v dQ_i(v)$, $Q_i(v) = \sum_j Q_{ij}(v)$,
величина $f(i)$ определяется системой уравнений

$$f(j) = \sum_i f(i) q_{ij}$$

и условием нормировки $\sum_i f(i) = 1$, $q_{ij} = Q_{ij}(\infty)$. Величина
 $\kappa^2 = \sigma^2 - 2 \sum_i \alpha_i \varphi(i)$, $\sigma^2 = \sum_i f(i) \beta_i^2 - a^2$, а $\varphi(i)$ опреде-
ляется системой уравнений

$$\varphi(j) = \sum_i \varphi(i) q_{ij} + a f(j) - \sum_i f(i) \alpha_{ij},$$

где $\alpha_{ij} = \int_0^\infty v dQ_{ij}(v)$.

Аналогично доказанному свойству для потока Вольда, из асимптоти-
ческой нормальности t_n для полумарковского потока следует
асимптотическая нормальность считающего процесса $N(t)$ с асимп-
тотическими характеристиками

$$MN(t) = t/a, \quad DN(t) = \kappa^2 t/a^3,$$

где a и κ^2 были определены выше.

1.5. Дважды-стохастический поток, управляемый марковскими процессами

Дважды-стохастический поток, или пуассоновский поток со слу-
чайной интенсивностью, спределим как такой пуассоновский поток,
для которого интенсивность $\lambda(t)$ является реализацией случайного
процесса с непрерывным временем. Ниже рассмотрим лишь такие
дважды-стохастические потоки, которые управляются стационарными
марковскими процессами: а) с дискретным множеством состояний

[20]; б) чисто разрывными марковскими процессами [21]; в) диффузионными процессами.

1.5.1. Поток, управляемый марковским процессом с дискретным множеством состояний

Рассмотрим дважды-стохастический поток однородных событий, управляемый дискретным марковским процессом, т.е. такой пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ является реализацией стационарного марковского процесса, принимающего значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Задана матрица интенсивностей перехода β_{ij}

$$P(\lambda(t+\Delta t) = \lambda_j | \lambda(t) = \lambda_i) = \beta_{ij} \Delta t + O(\Delta t)$$

для всех $i \neq j$.

Найдем асимптотическое распределение числа требований $N(t)$, поступивших в рассматриваемом потоке за время t при $t \rightarrow \infty$.

Обозначим $i(t)$ номер состояния, в котором находится процесс $\lambda(t)$ в момент времени t , тогда двумерный процесс $(i(t), N(t))$ является марковским, его распределение

$$P(i, n, t) = P(i(t) = i, N(t) = n)$$

удовлетворяет уравнению

$$P'(i, n, t) + (\lambda_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}) P(i, n, t) = \lambda_i P(i, n-1, t) + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} P(j, n, t). \quad (1)$$

В этом уравнении произведем замену переменных

$$n\varepsilon = x, \quad t\varepsilon = \tau, \quad P(i, n, t) = \mathcal{P}(i, x, \tau),$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(i, x, \tau)}{\partial \tau} + (\lambda_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}) \mathcal{T}(i, x, \tau) = \\ = \lambda_i \mathcal{T}(i, x - \varepsilon, \tau) + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} \mathcal{T}(j, x, \tau).$$

Разлагая $\mathcal{T}(i, x - \varepsilon, \tau)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь членами порядка ε , получим

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(i, x, \tau)}{\partial \tau} + (\lambda_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}) \mathcal{T}(i, x, \tau) = \lambda_i \mathcal{T}(i, x, \tau) - \\ - \lambda_i \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(i, x, \tau)}{\partial x} + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} \mathcal{T}(j, x, \tau). \quad (2)$$

Уничтожая подобные слагаемые, суммируя левую и правую части по i , обозначив $\sum_i \mathcal{T}(i, x, \tau) = \mathcal{T}(x, \tau)$, имеем

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \sum_i \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \mathcal{T}(i, x, \tau) = \\ = -\varepsilon \sum_i \lambda_i \frac{\partial \mathcal{T}(i, x, \tau)}{\partial x} + \sum_i \sum_{j \neq i} \beta_{ji} \mathcal{T}(j, x, \tau),$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial \mathcal{T}(i, x, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2), считая $\varepsilon = 0$, получим уравнение

$$\left(\sum_{j \neq i} \beta_{ij} \right) \mathcal{T}(i, x, \tau) = \sum_{j \neq i} \beta_{ji} \mathcal{T}(j, x, \tau), \quad (4)$$

решение которого представим в следующем виде:

$$\mathcal{T}(j, x, \tau) = f(j) \mathcal{T}(x, \tau),$$

где $f(j)$ — стационарное распределение вероятностей значений дискретного марковского процесса $\lambda(t)$.

Подставляя найденные значения $\mathcal{F}(j, x, \tau)$ в (3), имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, \tau)}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}(x, \tau)}{\partial x} = 0,$$

где $\lambda = \sum_i \lambda_i \delta(i)$ — стационарное среднее значение процесса $\lambda(t)$. Это уравнение совпадает с уравнением (5) разд. 1.3.

Следовательно, для дважды-стохастического потока, управляемого дискретным марковским процессом, величина $\varepsilon N(\frac{\tau}{\varepsilon})$ сходится к детерминированному значению $\lambda \tau$, т.е. асимптотически имеет место равенство

$$N(t) = \lambda t.$$

Для доказательства асимптотической нормальности величины отклонения $N(t)$ от асимптотического среднего λt в исходном уравнении (I) сделаем замену переменных

$$t\varepsilon = \tau, \quad (n - \lambda t)\sqrt{\varepsilon} = y, \quad P(i, n, t) = G(i, y, \tau),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial G(i, y, \tau)}{\partial \tau} - \lambda \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(i, y, \tau)}{\partial y} + (\lambda_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}) G(i, y, \tau) = \\ = \lambda_i G(i, y - \sqrt{\varepsilon}, \tau) + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} G(j, y, \tau). \end{aligned}$$

Разлагая $G(i, y - \sqrt{\varepsilon}, \tau)$ в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и ограничиваясь членами порядка ε , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial G(i, y, \tau)}{\partial \tau} - \lambda \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(i, y, \tau)}{\partial y} + (\lambda_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}) G(i, y, \tau) = \\ = \lambda_i G(i, y, \tau) - \sqrt{\varepsilon} \lambda_i \frac{\partial G(i, y, \tau)}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{2} \lambda_i \frac{\partial^2 G(i, y, \tau)}{\partial y^2} + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} G(j, y, \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Сократив подобные, просуммируем правую и левую части этого уравнения по i , обозначив $\sum_i G(i, y, \tau) = G(y, \tau)$, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial G(y, z)}{\partial z} - \lambda \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} + \sum_i \sum_{j \neq i} \beta_{ij} G(i, y, z) = \\ = -\sqrt{\varepsilon} \sum_i \lambda_i \frac{\partial G(i, y, z)}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 G(i, y, z)}{\partial y^2} + \\ + \sum_i \sum_{j \neq i} \beta_{ji} G(j, y, z), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial G(y, z)}{\partial z} - \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 G(i, y, z)}{\partial y^2} \right] = \\ = \sqrt{\varepsilon} \left[\lambda \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial G(i, y, z)}{\partial y} \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Аналогично методу решения уравнений (7) разд. I.3 и (6) разд. I.4 используем (5) для решения уравнения (6). При $\varepsilon = 0$ уравнение (5) представим

$$\left(\sum_{j \neq i} \beta_{ij} \right) G(i, y, z) = \sum_{j \neq i} \beta_{ji} G(j, y, z). \quad (7)$$

Аналогично решению (4) решение уравнения (7) имеет следующий вид:

$$G(i, y, z) = \gamma(y) G(y, z). \quad (8)$$

С точностью до $\sqrt{\varepsilon}$ (5) запишем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \neq i} \beta_{ij} \right) G(i, y, z) = \sum_{j \neq i} \beta_{ji} G(j, y, z) + \sqrt{\varepsilon} \left[\lambda \frac{\partial G(i, y, z)}{\partial y} - \right. \\ \left. - \lambda_i \frac{\partial G(i, y, z)}{\partial y} \right] = \sum_{j \neq i} \beta_{ji} G(j, y, z) + \sqrt{\varepsilon} (\lambda - \lambda_i) \gamma(y) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} \end{aligned}$$

Решение этого уравнения найдем в форме

$$G(j, y, z) = \gamma(j) G(y, z) + \sqrt{\varepsilon} \varphi(j) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y}, \quad (9)$$

где неизвестная $\varphi(j)$ определяется условием $\sum_j \varphi(j) = 0$ и уравнением

$$\left(\sum_{j \neq i} \beta_{ij}\right) \varphi(i) = \sum_{j \neq i} \beta_{ji} \varphi(j) + (\lambda - \lambda_i) \gamma(i). \quad (10)$$

Подставляя (8) в левую часть (6), а (9) - в его правую часть, получим уравнение для $G(y, \tau)$

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda - 2 \sum_i \lambda_i \varphi(i)}{2} \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2}.$$

Нормированным решением этого уравнения является плотность нормального распределения с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 \tau = (\lambda - 2 \sum_i \lambda_i \varphi(i)) \tau.$$

Тем самым доказана асимптотическая нормальность $N(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для дважды-стохастического потока, управляемого дискретным марковским процессом.

Возвращаясь от переменной τ к t , доказываем, что $N(t)$ имеет следующие асимптотическое среднее и дисперсию

$$MN(t) = \lambda t, \quad DN(t) = (\lambda - 2 \sum_i \lambda_i \varphi(i)) t,$$

где $\varphi(i)$ определяется условием $\sum_i \varphi(i) = 0$ и системой линейных алгебраических уравнений (10), в которой $\gamma(i)$ - стационарное распределение вероятностей состояний дискретного марковского процесса $\lambda(t)$ с матрицей интенсивностей перехода β_{ij} .

Используя равенство

$$P(N(t) \geq n) = P(t_n \leq t),$$

покажем, что из асимптотической нормальности $N(t)$ (при $t \rightarrow \infty$) следует асимптотическая нормальность t_n (при $n \rightarrow \infty$).

Так как $P(t_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = P(\varepsilon N(t) \geq \varepsilon n)$,

то, обозначив $t\varepsilon = \tau$, $n\varepsilon = x$, получим

$$P(\varepsilon N(\tau/\varepsilon) \geq x) = P(\varepsilon t_n \leq \tau).$$

В силу асимптотической детерминированности $\varepsilon N(\tau/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$P(\varepsilon N(\tau/\varepsilon) \geq x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq \lambda\tau, \\ 0, & \text{если } x > \lambda\tau, \end{cases}$$

тогда

$$P(\varepsilon t_n \leq \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < x/\lambda, \\ 1, & \text{если } \tau \geq x/\lambda. \end{cases}$$

Следовательно, при конечных x и τ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина εt_n асимптотически детерминирована и равна

$$\varepsilon t_n = x/\lambda,$$

т.е. имеет место асимптотическое равенство

$$t_n = \frac{x}{\varepsilon\lambda} = \frac{n\varepsilon}{\varepsilon\lambda} = \frac{n}{\lambda}.$$

Значение n/λ является асимптотическим средним для t_n при $n \rightarrow \infty$.

Покажем асимптотическую нормальность отклонений t_n от асимптотического среднего n/λ .

Так как

$$P(t_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = P((N(t) - \lambda t)\sqrt{\varepsilon} \geq (n - \lambda t)\sqrt{\varepsilon}),$$

то, обозначив $(n - \lambda t)\sqrt{\varepsilon} = y$, имеем $t = \frac{n}{\lambda} - \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}\lambda}$, и следовательно,

$$\begin{aligned} P((N(t) - \lambda t)\sqrt{\varepsilon} \geq y) &= P(t_n \leq t) = P(t_n \leq \frac{n}{\lambda} - \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}\lambda}) = \\ &= P((t_n - \frac{n}{\lambda})\lambda\sqrt{\varepsilon} \leq -y) = P((\frac{n}{\lambda} - t_n)\lambda\sqrt{\varepsilon} \geq y). \end{aligned}$$

Из асимптотической нормальности $(N(t) - \lambda t) \sqrt{\varepsilon}$ с параметрами 0 и $\varepsilon^2 \tau$ следует

$$P\left(\left(\frac{n}{\lambda} - t_n\right) \lambda \sqrt{\varepsilon} \geq y\right) = P\left((N(t) - \lambda t) \sqrt{\varepsilon} \geq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon} \int_y^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\varepsilon^2 \tau}} dv,$$

где $v = t\varepsilon = \left(\frac{n}{\lambda} - \frac{y}{\lambda\sqrt{\varepsilon}}\right)\varepsilon = \varepsilon \frac{n}{\lambda} - \frac{y}{\lambda} \sqrt{\varepsilon}$.

Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ $n\varepsilon$ - величина конечная, $y\sqrt{\varepsilon}$ - бесконечно малая, то с точностью до $\sqrt{\varepsilon}$ $v = \frac{n\varepsilon}{\lambda}$, тогда

$$P\left(\left(\frac{n}{\lambda} - t_n\right) \lambda \sqrt{\varepsilon} \geq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{n\varepsilon}{\lambda}} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\varepsilon^2 \frac{n\varepsilon}{\lambda}}} dv.$$

Таким образом, величина $\left(\frac{n}{\lambda} - t_n\right) \lambda \sqrt{\varepsilon}$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией

$$\varepsilon^2 \frac{n\varepsilon}{\lambda} = D\left(\frac{n}{\lambda} - t_n\right) \lambda \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon^2 D t_n,$$

следовательно,

$$D t_n = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^3} n.$$

Из асимптотической нормальности $N(t)$ при $t \rightarrow \infty$ следует асимптотическая нормальность t_n (при $n \rightarrow \infty$) с асимптотическим средним и дисперсией, равными:

$$M t_n = n/\lambda, \quad D t_n = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^3} n.$$

1.5.2. Поток, управляемый чисто разрывным марковским процессом

Дважды-стохастический поток однородных событий, управляемый чисто разрывным марковским процессом с непрерывным множеством состояний - такой пуассоновский поток, интенсивность которого

$\lambda(t)$ является реализацией стационарного чисто разрывного марковского процесса с непрерывным множеством состояний, определяемый двумя функциями $\alpha(\lambda)$ и $g(\lambda/v)$. Функция $\alpha(\lambda)$ имеет смысл интенсивности вероятности перехода: $\alpha(\lambda)\Delta t + o(\Delta t)$ — есть вероятность того, что $\lambda(t)$ претерпит случайное изменение в интервале $(t, t + \Delta t)$, если $\lambda(t) = \lambda$, тогда $1 - \alpha(\lambda)\Delta t + o(\Delta t)$ — вероятность того, что такого изменения не произойдет за время Δt . Функция $g(\lambda/v)$ есть условная плотность распределения вероятностей значений $\lambda(t + 0)$ при условии, что в момент t произошло изменение значения $\lambda(t)$, которое до этого было равно v .

Аналогично можно показать, что асимптотическое распределение вероятностей значений $N(t)$ (при $t \rightarrow \infty$) подчиняется нормальному закону, а также найти его среднее и дисперсию. Используя асимптотическую нормальность $N(t)$, можно показать и асимптотическую нормальность t_n (при $n \rightarrow \infty$).

Для доказательства этого утверждения обозначим

$$P(\lambda \leq \lambda(t) < \lambda + d\lambda, N(t) = n) / d\lambda = P(\lambda, n, t).$$

Так как двумерный процесс $(\lambda(t), N(t))$ — марковский, то его распределение $P(\lambda, n, t)$ удовлетворяет интегродифференциальному конечно-разностному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\lambda, n, t)}{\partial t} = & \lambda P(\lambda, n-1, t) + \int_0^\infty P(v, n, t) \alpha(v) g(\lambda/v) dv - \\ & - (\lambda + \alpha(\lambda)) P(\lambda, n, t), \end{aligned} \quad (I)$$

которое после замены

$$n \in x, \quad t \in \tau, \quad P(\lambda, n, t) = \mathcal{T}(\lambda, x, \tau)$$

можно привести к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где $\mathcal{T}(x, \tau) = \int \mathcal{T}(\lambda, x, \tau) d\lambda = \mathcal{T}(\lambda, x, \tau) / f(\lambda)$; α - стационарное среднее значение процесса $\lambda(t)$; $f(\lambda)$ - стационарное распределение вероятностей значений $\lambda(t)$, определенное интегральным уравнением Феллера

$$\alpha(\lambda) f(\lambda) = \int_0^\infty f(v) \alpha(v) g(\lambda/v) dv.$$

Решая уравнение (2), получим: величина $x(\tau) = \varepsilon N(\tau/\varepsilon)$ асимптотически детерминирована и принимает значение $\alpha \tau$.

В уравнении (1) произведем замену

$$(n - \alpha t) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad t\varepsilon = \tau, \quad P(\lambda, n, t) = G(\lambda, y, \tau),$$

тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2}, \quad (3)$$

где $x^2 = \alpha - 2 \int \lambda \varphi(\lambda) d\lambda$, $G(y, \tau) = \int G(\lambda, y, \tau) d\lambda$, функция $\varphi(\lambda)$ определяется условием $\int \varphi(\lambda) d\lambda = 0$ и неоднородным интегральным уравнением

$$\alpha(\lambda) \varphi(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(v) \alpha(v) g(\lambda/v) dv + (\alpha - \lambda) \varphi(\lambda). \quad (4)$$

Таким образом, из уравнений (2) и (3) следует, что $N(t)$ - асимптотически нормальная случайная величина (при $t \rightarrow \infty$) с асимптотическими средним и дисперсией вида

$$MN(t) = \alpha t, \quad DN(t) = (\alpha - 2 \int \lambda \varphi(\lambda) d\lambda) t,$$

где $\varphi(\lambda)$ определяется уравнением (4) и условием $\int \varphi(\lambda) d\lambda = 0$.

1.5.3. Поток, управляемый диффузионным процессом

Дважды-стохастический поток, управляемый диффузионным процессом, — такой поток, интенсивность $\lambda(t)$ которого является реализацией стационарного диффузионного процесса, принимающего значения в интервале $(0, \infty)$ с коэффициентами переноса $b(\lambda)$ и диффузии $a(\lambda)$.

Покажем, что $N(t)$ — асимптотически нормальная случайная величина (при $t \rightarrow \infty$), для распределения $P(\lambda, n, t)$ двумерного процесса $(\lambda(t), N(t))$ напомним уравнение

$$\frac{\partial P(\lambda, n, t)}{\partial t} = \lambda P(\lambda, n-1, t) - \lambda P(\lambda, n, t) - \\ - \frac{\partial (b(\lambda) P(\lambda, n, t))}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a(\lambda) P(\lambda, n, t))}{\partial \lambda^2},$$

которое заменой

$$n - \lambda t = x, \quad t = \tau, \quad P(\lambda, n, t) = \mathcal{T}(\lambda, x, \tau)$$

приводится к виду

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial x} = 0,$$

а заменой

$$(n - \alpha t) \sqrt{\epsilon} = y, \quad t = \tau, \quad P(\lambda, n, t) = G(\lambda, y, \tau)$$

— к уравнению вида

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2},$$

в котором $\alpha = \int_0^\infty \lambda f(\lambda) d\lambda$, $\alpha^2 = \alpha - 2 \int_0^\infty \lambda \varphi(\lambda) d\lambda$,

где $f(\lambda)$ стационарная плотность распределения значений диффузионного процесса, заданного параметрами $b(\lambda)$ и $a(\lambda)$.

Функция $\varphi(\lambda)$ определяется условием $\int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda = 0$ и неоднород-

ним дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(\alpha(\lambda)\varphi(\lambda))}{d\lambda^2} - \frac{d(\beta(\lambda)\varphi(\lambda))}{d\lambda} = (\lambda - \alpha)\gamma(\lambda).$$

Аналогично проводится анализ более сложных дважды-стохастических потоков [16].

1.6. Нестационарный пуассоновский поток

До сих пор мы рассматривали такие потоки, у которых для каждого $k \geq 1$, любого набора чисел $t_1, t_2, \dots, t_k$ и всякого t_0 совместное распределение случайных величин $N(t_0+t_1)-N(t_0)$, $N(t_0+t_2)-N(t_0), \dots, N(t_0+t_k)-N(t_0)$ не зависит от t_0 , т.е. стационарные потоки.

Во многих задачах статистического анализа приходится рассматривать нестационарные потоки, характеризуемые явлением тренда в интенсивности потока событий $\lambda_0(t)$. Будем исследовать лишь случай медленного тренда, представленного в виде

$$\lambda_0(t) = \lambda(\varepsilon t),$$

где $\lambda(\tau)$ — некоторая заданная функция, а ε — бесконечно малый положительный параметр, который может быть обратным длине интервала наблюдения за анализируемым потоком событий либо числу измеренных значений выборочных данных.

Рассмотрим нестационарный пуассоновский поток, параметр λ которого является медленно меняющейся функцией времени

$$\lambda = \lambda_0(t) = \lambda(\varepsilon t).$$

Покажем асимптотическую нормальность числа требований $N(t)$, поступивших в потоке за время t при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ таким образом, что $\varepsilon t = \tau$. Распределение $P(n, t) = P(N(t) = n)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = \lambda_0(t) P(n-1, t) - \lambda_0(t) P(n, t). \quad (1)$$

Сделаем в нем замену

$$t\varepsilon = \tau, \quad n\varepsilon = x, \quad \lambda_0(t) = \lambda(\varepsilon t) = \lambda(\tau), \quad P(n, t) = \mathcal{T}(x, \tau),$$

будем иметь

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda(\tau) \mathcal{T}(x-\varepsilon, \tau) - \lambda(\tau) \mathcal{T}(x, \tau).$$

Раскладывая $\mathcal{T}(x-\varepsilon, \tau)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь двумя членами разложения, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \lambda(\tau) \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

решение которого имеет вид

$$\mathcal{T}(x, \tau) = \Phi\left(x - \int_0^\tau \lambda(s) ds\right).$$

Используя начальные условия $\mathcal{T}(x, 0) = \delta(x)$, получим: при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\varepsilon N(\tau/\varepsilon)$ асимптотически детерминирована и равна

$$M\varepsilon N(\tau/\varepsilon) = \int_0^\tau \lambda(s) ds. \quad (3)$$

Так как

$$\int_0^{\tau/\varepsilon} \lambda(s) ds = \varepsilon \int_0^{\tau/\varepsilon} \lambda(v\varepsilon) dv = \varepsilon \int_0^{\tau/\varepsilon} \lambda_0(v) dv,$$

то асимптотически при $t \rightarrow \infty$

$$MN(t) = \int_0^t \lambda_0(v) dv.$$

В уравнении (1) произведем замену переменных

$$t\varepsilon = \tau, \quad (n - \int_0^t \lambda_0(v) dv) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad \lambda_0(t) = \lambda(\tau), \quad P(n, t) = G(y, \tau)$$

имеем

$$\varepsilon \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} - \lambda(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} = \lambda(\tau) G(y - \sqrt{\varepsilon}, \tau) - \lambda(\tau) G(y, \tau).$$

Раскладывая $G(y - \sqrt{\varepsilon}, \tau)$ в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и ограничиваясь членами порядка ε , получим уравнение

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2}, \quad (4)$$

нормированное решение которого запишем

$$G(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varpi(\tau)} e^{-\frac{y^2}{2\varpi^2(\tau)}}, \quad (5)$$

где $\varpi^2(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) ds$.

Из уравнения (2), равенств (3) и (5) следует, что $N(t)$ для нестационарного пуассоновского потока является асимптотически нормальной величиной (при $t \rightarrow \infty$) со средним и дисперсией

$$MN(t) = \int_0^t \lambda_0(s) ds, \quad DN(t) = \int_0^t \lambda_0(s) ds.$$

Используя асимптотическую (при $t \rightarrow \infty$) нормальность $N(t)$, покажем асимптотическую (при $n \rightarrow \infty$) нормальность t_n и найдем её среднее значение и дисперсию.

Так как $\varepsilon N(\frac{t}{\varepsilon})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически детерминирована, то в силу равенства

$$P(N(t) \geq n) = P(t_n \leq t)$$

величина εt_n также асимптотически детерминирована и её среднее $T(x)$ определяется равенством

$$x = \int_0^{T(x)} \lambda(v) dv,$$

т.е. $M\varepsilon t_{x/\varepsilon} = T(x)$,

тогда

$$Mt_n = \frac{1}{\varepsilon} T(n\varepsilon) - A(n).$$

Значение $A(n)$ определяется равенством

$$n = \int_0^{A(n)} \lambda_0(v) dv.$$

Таким образом, асимптотическое среднее $A(n)$ величин t_n можно найти, решив уравнение

$$n = \int_0^{A(n)} \lambda_0(v) dv.$$

Так как

$$\begin{aligned} P(t_n \leq t) &= P(N(t) \geq n) = P\left((N(t) - \int_0^t \lambda_0(v) dv) \sqrt{\varepsilon} \geq \right. \\ &\geq (n - \int_0^t \lambda(v) dv) \sqrt{\varepsilon}) = P\left((N(t) - \int_0^t \lambda_0(v) dv) \sqrt{\varepsilon} \geq y\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varphi(\varepsilon)} \int_y^\infty e^{-\frac{w^2}{2\varphi^2(\varepsilon)}} dw, \end{aligned}$$

где

$$v = t\varepsilon, \quad y = (n - \int_0^t \lambda_0(v) dv) \sqrt{\varepsilon} = \frac{x - \int_0^t \lambda(u) du}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Но $P(t_n \leq t)$ также можно представить следующим образом:

$$P(t_n \leq t) = P((t_n - A(n)) \sqrt{\varepsilon} \leq (t - A(n)) \sqrt{\varepsilon}) = P((t_n - A(n)) \sqrt{\varepsilon} \leq z).$$

$$\text{Здесь } z = (t - A(n)) \sqrt{\varepsilon} = (t - A(x/\varepsilon)) \sqrt{\varepsilon} = \frac{\varepsilon t - \varepsilon A(x/\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{v - T(x)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Откуда $v = T(x) + \sqrt{\varepsilon} z$, следовательно, $\varphi(z) = \varphi(T(x))$

$$\begin{aligned} \text{и } y &= \frac{x - \int_0^t \lambda(u) du}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\int_{T(x)}^{T(x) + \sqrt{\varepsilon} z} \lambda(u) du - \int_0^{T(x)} \lambda(u) du}{\sqrt{\varepsilon}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{T(x)}^{T(x) + \sqrt{\varepsilon} z} \lambda(u) du = -z \lambda(T(x)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P((t_n - H(n))\sqrt{\varepsilon} \leq z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} x(\varepsilon)} \int_y^\infty e^{-\frac{w^2}{2x^2(\varepsilon)}} dw = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} x(T(x))} \int_{-z\lambda(T(x))}^\infty e^{-\frac{w^2}{2x^2(T(x))}} dw = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} x(T(x))\lambda(T(x))} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{u^2}{2x^2(T(x))\lambda^2(T(x))}\right\} du. \end{aligned}$$

Таким образом, случайная величина $(t_n - H(n))\sqrt{\varepsilon} = \frac{\varepsilon t_n - T(x)}{\sqrt{\varepsilon}}$ является нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией, равной $D(x) = x^2(T(x))/\lambda^2(T(x))$, где $x^2(T(x)) = x$, окончательно имеем

$$D(x) = \frac{x}{\lambda^2(T(x))}.$$

1.7. Обобщенный рекуррентный поток

Обобщенным рекуррентным потоком назовем такой поток однородных событий, для которого величины t_n образуют цепь Маркова с заданной условной функцией распределений

$$A(z/t) = P(\tau_{n+1} < z/t_n = t).$$

Рассматриваемая модель может служить обобщением модели рекуррентного потока для нестационарного случая.

Для нестационарного пуассоновского потока с кусочно-постоянным параметром $\lambda(t)$, интервалы постоянства которого совпадают с интервалами между моментами поступления требований,

$$A(z/t) = 1 - e^{-\lambda(t)z}.$$

В более общем случае

$$A(z/t) = F(\lambda_0(t)z),$$

где $F(u)$ — такая заданная функция распределения, при которой первый момент равен единице. Тренд интенсивности $\lambda_0(t)$ является медленно меняющимся, т.е. $\lambda_0(t) = \lambda(\varepsilon t)$.

Покажем, что величина $N(t)$ является асимптотически нормальной (при $t \rightarrow \infty$). Пусть $Z(t)$ — длина интервала от момента t до наступления первого события в рассматриваемом потоке после момента t .

Двумерный процесс $(Z(t), N(t))$ является марковским, его распределение вероятностей

$$P(Z, n, t) = P(Z(t) < z, N(t) = n)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(z, n, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0, n-1, t)}{\partial z} A(z/t) - \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z}, \quad (1)$$

где $\frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$ — значение производной в нуле.

В уравнении (1) произведем замену переменных

$$ze = x, \quad te = \tau, \quad P(Z, n, t) = \mathcal{K}(z, x, \tau),$$

тогда уравнение (1) перепишем

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{K}(z, x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathcal{K}(z, x, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{K}(0, x - \varepsilon, \tau)}{\partial z} F(\lambda(\tau)z) - \frac{\partial \mathcal{K}(0, x, \tau)}{\partial z}. \quad (2)$$

Разлагая в $\mathcal{K}(0, x - \varepsilon, \tau)$ и ряд по степеням ε и ограничиваясь членами порядка ε , уравнение (2) представим в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, \tau)}{\partial z} - (1 - F(\lambda(\tau)z)) \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial x \partial z} F(\lambda(\tau)z). \quad (3)$$

При $z \rightarrow \infty$ $\mathcal{T}(\infty, x, \tau) = \mathcal{T}(x, \tau)$ есть асимптотическое распределение величины $N(t)$, в этом случае уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial x \partial z} = 0. \quad (4)$$

Для определения $\frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z}$ из уравнения (3), считая $\varepsilon = 0$, получим

$$\frac{\partial \mathcal{T}(z, x, \tau)}{\partial z} = (1 - F(\lambda(\tau)z)) \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z},$$

откуда

$$\mathcal{T}(z, x, \tau) = \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} \int_0^z (1 - F(\lambda(\tau)v)) dv.$$

При $z \rightarrow \infty$

$$\mathcal{T}(x, \tau) = \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} \int_0^\infty (1 - F(\lambda(\tau)v)) dv.$$

Так как $\int_0^\infty (1 - F(\lambda(\tau)z)) dz = 1/\lambda(\tau)$, то

$$\frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} = \lambda(\tau) \mathcal{T}(x, \tau),$$

следовательно, уравнение (4) имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} + \lambda(\tau) \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial x} = 0.$$

совпадающий с уравнением (2) разд. I.6, тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\varepsilon N(\tau/\varepsilon)$ асимптотически детерминирована и равна

$$M \varepsilon N(\tau/\varepsilon) = \int_0^\tau \lambda(s) ds,$$

откуда при $t \rightarrow \infty$ имеем асимптотическое равенство

$$MN(t) = \int_0^t \lambda_0(v) dv. \quad (5)$$

В уравнении (I) сделаем замену переменных

$$(n - \int_0^t \lambda_0(v) dv) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad t\varepsilon = \tau, \quad P(x, n, t) = G(x, y, \tau).$$

тогда уравнение (I) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial G(0, y - \sqrt{\varepsilon}, \tau)}{\partial x} F(\lambda(\tau)x) - \frac{\partial G(0, y, \tau)}{\partial x}.$$

Раскладывая $G(0, y - \sqrt{\varepsilon}, \tau)$ в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и ограничиваясь членами порядка ε , последнее равенство перепишем

$$\varepsilon \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} - (1 - F(\lambda(\tau)x)) \frac{\partial G(0, y, \tau)}{\partial x} - \\ - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial^2 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y} F(\lambda(\tau)x) + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^3 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y^2} F(\lambda(\tau)x). \quad (6)$$

При $x \rightarrow \infty$ это уравнение примет вид

$$\varepsilon \left(\frac{\partial G(y, z)}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(0, y, z)}{\partial z \partial y^2} \right) = \\ = \sqrt{\varepsilon} (\lambda(z) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial^2 G(0, y, z)}{\partial z \partial y}). \quad (7)$$

Из уравнения (6) при $\varepsilon = 0$ получим

$$\frac{\partial G(z, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)),$$

откуда

$$\frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} = \lambda(z) G(y, z). \quad (8)$$

Найденное выражение подставим в левую часть уравнения (7).

В правую часть уравнения (7), имеющую множитель $\sqrt{\varepsilon}$, необходимо подставить более точное выражение для $\frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z}$, чем полученное в (8), поэтому в (6) сохраним слагаемые порядка $\sqrt{\varepsilon}$, тогда будем иметь уравнение

$$\frac{\partial G(z, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)) + \\ + \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 G(0, y, z)}{\partial z \partial y} F(\lambda(z)z) - \lambda(z) \frac{\partial G(z, y, z)}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)) + \\ + \sqrt{\varepsilon} \lambda(z) [F(\lambda(z)z) - \lambda(z) \int_0^z (1 - F(\lambda(\tau)\tau)) d\tau] \frac{\partial G(y, z)}{\partial y},$$

откуда

$$G(x, y, z) = \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial x} \int_0^x (1 - F(\lambda(\tau)v)) dv + \\ + \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} \int_0^x [F(\lambda(\tau)u) - \lambda(\tau) \int_0^u (1 - F(\lambda(\tau)v)) dv] du.$$

При $z = \infty$ получим

$$\frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} = \lambda(\tau) G(y, z) + \\ + \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} \int_0^\infty [\lambda(\tau) \int_0^v (1 - \\ - F(\lambda(\tau)v)) dv - F(\lambda(\tau)u)] du = \lambda(\tau) G(y, z) + \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \times \\ \times \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} \int_0^\infty [\int_0^x (1 - F(s)) ds - F(x)] dx.$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (7), а (8) - в его левую часть, имеем

$$\frac{\partial G(y, z)}{\partial z} = \frac{\lambda(\tau) x^2}{2} \frac{\partial^2 G(y, z)}{\partial y^2}, \quad (9)$$

здесь

$$x^2 = 1 - 2 \int_0^\infty [\int_0^x (1 - F(s)) ds - F(x)] dx = \\ = 1 - 2 \left[\int_0^\infty (1 - F(x)) dx - \int_0^\infty \left(1 - \int_0^\infty (1 - F(s)) ds \right) dx \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -1 + 2 \left[x \left(1 - \int_0^x (1-F(s)) ds \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty x d \left(1 - \int_0^x (1-F(s)) ds \right) = \\
 &= -1 + 2 \int_0^\infty x (1-F(x)) dx = -1 + \int_0^\infty (1-F(x)) dx = \\
 &= -1 + x^2 (1-F(x)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty x^2 d(1-F(x)) = \\
 &= -1 + \int_0^\infty x^2 dF(x) = \int_0^\infty x^2 dF(x) - 1,
 \end{aligned}$$

т.е. $\mathcal{E}^2$ является дисперсией случайной величины с функцией распределения $F(x)$.

Нормированное решение уравнения (9) имеет вид

$$G(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \lambda(\tau)} \mathcal{E}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2 \lambda(\tau) \mathcal{E}^2} \right\},$$

где $\lambda(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) ds$.

Следовательно, отклонение значения $N(t)$ от асимптотического среднего (5) асимптотически нормально с нулевым средним и асимптотической дисперсией

$$\sigma^2(\tau) = \mathcal{E}^2 \int_0^\tau \lambda(s) ds.$$

Возвращаясь к переменной t , получим

$$MN(t) = \int_0^t \lambda_0(s) ds, \quad DN(t) = \mathcal{E}^2 \int_0^t \lambda_0(s) ds.$$

Покажем, что из асимптотической нормальности $N(t)$ следует асимптотическая нормальность t_n .

Так как $\mathcal{E}N(\tau/\mathcal{E})$ - асимптотически детерминировано со сред

ним $\int_0^x \lambda(z) dz$, то и $\varepsilon t_{x/\varepsilon}$ - асимптотически детерминировано и его среднее $T(x)$ определяется равенством

$$\int_0^{T(x)} \lambda(z) dz = x. \quad (10)$$

Тогда асимптотическое среднее t_n запишем

$$Mt_n = \frac{1}{\varepsilon} T(\varepsilon n) = A(n),$$

значение которого $\frac{1}{\varepsilon} T(\varepsilon n)$ определится равенством

$$\int_0^{A(n)} \lambda_0(z) dz = n. \quad (11)$$

Если в равенстве (10) сделать замену $x = n\varepsilon$, $\lambda(z) = \lambda_0(z/\varepsilon)$, то получим уравнение (11).

Аналогично нестационарному потоку Пуассона

$$P(t_n \leq t) = P(N(t) \geq n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\tau)} \int_y^\infty \exp \left\{ -\frac{w^2}{2\sigma^2(\tau)} \right\} dw,$$

где $\tau = t\varepsilon$, $y = (n - \int_0^t \lambda_0(z) dz) \sqrt{\varepsilon} = (x - \int_0^\tau \lambda(u) du) / \sqrt{\varepsilon}$,
 $\sigma^2(\tau) = \varepsilon^2 \int_0^\tau \lambda(u) du$,

также $P(t_n \leq t) = P((t_n - A(n)) \sqrt{\varepsilon} \leq z)$,

где $z = (t - A(n)) \sqrt{\varepsilon} = (\tau - T(x)) / \sqrt{\varepsilon}$.

Следовательно,

$$P((t_n - A(n)) \sqrt{\varepsilon} \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\tau)} \int_y^\infty \exp \left\{ -\frac{w^2}{2\sigma^2(\tau)} \right\} dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(T(x))/\lambda(T(x))} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2(T(x))/\lambda^2(T(x))} \right\} du.$$

Здесь $T(x)$ является решением уравнения

$$\int_0^{T(x)} \lambda(u) du = x,$$

поэтому $\sigma^2(T(x)) = x^2 \int_0^{T(x)} \lambda(u) du = x^2 x$.

Таким образом, случайная величина $(t_n - A(n))\sqrt{E}$ для обобщенного рекуррентного потока распределена нормально с нулевым средним и дисперсией

$$D(x) = x^2 \cdot \frac{x}{\lambda^2(T(x))}.$$

Глава 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИК ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ТРЕНДАХ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ

В настоящей главе рассматриваются методы асимптотического анализа оценок тренда (изменения во времени) интенсивности потока событий. Основной целью является изучение гипотезы о наличии тренда. Нам важно проверить, действительно ли имеет место кажущееся изменение интенсивности, и достигается это путем сравнения с нулевой гипотезой об отсутствии тренда. Для решения основной задачи выбирается вид тренда (линейный, гиперболический, логарифмически линейный и т.д.), строятся оценки параметров, для которых проводится статистическое исследование на несмещенность, состоятельность, эффективность. Определяющую роль при этом играет распределение достаточных статистик. Также большое внимание уделяется пороговым критериям, которые определяются знанием распределений некоторых статистик от наблюдаемых данных с использованием асимптотических методов.

При решении поставленных задач следует применять два способа описания наблюдений: T -планы, в них фиксируется интервал наблюдения и число измерений является случайным; и N -планы, когда фиксируется число измерений, а интервал времени, в течение которого они произведены, — случайный.

2.1. Анализ оценок параметров тренда пуассоновского потока

Рассмотрим нестационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda_0(t) = \lambda(\varepsilon t)$, где $\lambda(\varepsilon)$ – некоторая заданная функция; ε – малый положительный параметр, равный $\frac{1}{T}$ в T -планах и $\frac{1}{N}$ – в N -планах. Тренд $\lambda(\varepsilon)$ задан с точностью до параметров, значения которых требуется определить в интервале $[0, T]$. Наблюдаются моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_n$, причем число событий N – случайное. Оценки параметров тренда строятся по значениям $t_1, t_2, \dots, t_n$. Линейные оценки параметров относительно статистик вида $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \phi(\frac{t_i}{T})$ были предложены в работах [8, 9], найдем их асимптотическое распределение вероятностей значений при $T \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \phi(\varepsilon t_i), \quad (1)$$

где n – число требований рассматриваемого потока, поступивших в интервале $[0, t]$, $t \leq T$.

Пусть $P(u \leq \xi(t) < u + du)/du = P(u, t)$, тогда

$P(u, t + \Delta t) = \lambda_0(t) \Delta t P(u - \phi(\varepsilon t), t) + (1 - \lambda_0(t) \Delta t) P(u, t)$, следовательно, распределение $P(u, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(u, t)}{\partial t} = \lambda_0(t) P(u - \phi(\varepsilon t), t) - \lambda_0(t) P(u, t). \quad (2)$$

В уравнении (2) сделаем замену переменных

$$t\varepsilon = \tau, \quad u\varepsilon = x, \quad P(u, t) = \mathcal{T}(x, \tau),$$

будем иметь

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda(\tau) \mathcal{T}(x - \varepsilon \phi(\tau), \tau) - \lambda(\tau) \mathcal{T}(x, \tau).$$

Раскладывая $\mathcal{K}(x - \varepsilon f(\tau), \tau)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь членами порядка ε , получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, \tau)}{\partial \tau} + \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial \mathcal{K}(x, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

совпадающее с уравнением (5) разд. I.3, следовательно, асимптотическое распределение $\mathcal{K}(x, \tau)$ величины $\varepsilon \xi(\tau/\varepsilon)$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$) вырождено, т.е. $\varepsilon \xi(\tau/\varepsilon)$ сходится к детерминированному значению $\int_0^{\tau} \lambda(s) f(s) ds$, т.е. асимптотически имеет место равенство

$$M \varepsilon \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \int_0^{\tau} \lambda(s) f(s) ds,$$

возвращаясь к переменной t , имеем асимптотическое равенство

$$M \xi(t) = \int_0^t \lambda_0(v) f(\varepsilon v) dv. \quad (4)$$

Так как исследуемая статистика равна $\varepsilon \xi(T)$, то

$$M \varepsilon \xi(T) = \varepsilon \int_0^T \lambda_0(v) f(\varepsilon v) dv.$$

Найдем распределение отклонения $\xi(t)$ от асимптотического среднего (4), для этого в уравнении (2) произведем замену

$$t\varepsilon = \tau, \quad (u - \int_0^t \lambda_0(v) f(\varepsilon v) dv) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad P(u, t) = G(y, \tau),$$

получим

$$\varepsilon \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} = \lambda(\tau) G(y - \sqrt{\varepsilon} f(\tau), \tau) - \lambda(\tau) G(y, \tau).$$

Раскладывая $G(u - \sqrt{\varepsilon} f(\tau), \tau)$ в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и ограничиваясь членами порядка ε , будем иметь:

$$\varepsilon \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} = \lambda(\tau) G(y, \tau) -$$

$$-\sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{2} \lambda(\tau) f^2(\tau) \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2} - \lambda(\tau) G(y, \tau).$$

Затем, преобразуя подобные, получим уравнение

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda(\tau) f^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2},$$

совпадающее с уравнением (4) разд. 1.6, следовательно, его нормированное решение имеет вид (5) разд. 1.6.

$$G(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\tau)} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2(\tau)}},$$

где $\sigma^2(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) f^2(s) ds.$

Таким образом, отклонение значения $\xi(t)$ от асимптотического среднего (4) асимптотически нормально и в силу асимптотической детерминированности $\frac{1}{\varepsilon} \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ величину $\xi(t)$ можно считать асимптотически нормальной со средним (4) и дисперсией

$$D\xi(t) = \int_0^t \lambda_0(v) f^2(\varepsilon v) dv. \quad (5)$$

При оценивании многомерных параметров трендов потоков событий приходится исследовать многомерные статистики, поэтому рассмотрим метод нахождения асимптотического распределения двумерной статистики

$$\xi = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{t_i}{T}\right), \quad \eta = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \varphi\left(\frac{t_i}{T}\right). \quad (6)$$

Для этого исследуем двумерный случайный процесс $(\xi(t), \eta(t))$ с компонентами

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon t_i), \quad \eta(t) = \sum_{i=1}^n \varphi(\varepsilon t_i).$$

Пусть $P(u \leq \xi(t) < u+du, v \leq \eta(t) < v+dv) / du dv = P(u, v, t),$

$$\text{тогда } P(u, v, t + \Delta t) = \lambda_0(t) \Delta t P(u - f(\varepsilon t), v - \varphi(\varepsilon t), t) + \\ + (1 - \lambda_0(t) \Delta t) P(u, v, t),$$

следовательно, двумерное распределение $P(u, v, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(u, v, t)}{\partial t} = \lambda_0(t) P(u - f(\varepsilon t), v - \varphi(\varepsilon t), t) - \lambda_0(t) P(u, v, t),$$

в котором произведем замену переменных

$$\varepsilon t = \tau, \quad (u - \int_0^t \lambda_0(v) f(\varepsilon v) dv) \sqrt{\varepsilon} = x, \\ (v - \int_0^t \lambda_0(v) \varphi(\varepsilon v) dv) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad P(u, v, t) = G(x, y, \tau),$$

будем иметь

$$\varepsilon \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} = \\ = \lambda(\tau) G(x - \sqrt{\varepsilon} f(\tau), y - \sqrt{\varepsilon} \varphi(\tau), \tau) - \lambda(\tau) G(x, y, \tau).$$

Раскладывая функцию $G(x - \sqrt{\varepsilon} f(\tau), y - \sqrt{\varepsilon} \varphi(\tau), \tau)$ в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ с точностью до ε и приводя подобные, получим уравнение

$$\frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda(\tau) f^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \\ + \frac{\lambda(\tau) \varphi^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, \tau)}{\partial y^2} + \lambda(\tau) f(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial^2 G(x, y, \tau)}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

решение которого будем искать в виде двумерного преобразования Фурье

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} G(x, y, \tau) dx dy,$$

для него получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (\lambda(\tau) f^2(\tau) \alpha^2 + \lambda(\tau) \varphi^2(\tau) \beta^2 + 2\lambda(\tau) f(\tau) \varphi(\tau) \alpha \beta) \Phi(\alpha, \beta, \tau),$$

решение которого

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\alpha^2 \int_0^\tau \lambda(s) f^2(s) ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta^2 \int_0^\tau \lambda(s) \varphi^2(s) ds + 2\alpha\beta \int_0^\tau \lambda(s) f(s) \varphi(s) ds \right] \right\}$$

имеет вид двумерного преобразования Фурье для плотности нормального распределения с дисперсиями $\sigma_1^2(\tau)$, $\sigma_2^2(\tau)$ и ковариацией $K(\tau)$ вида

$$\sigma_1^2(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) f^2(s) ds, \quad \sigma_2^2(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) \varphi^2(s) ds, \\ K(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) \varphi(s) f(s) ds. \quad (8)$$

Так как оценки модифицированного метода наименьших квадратов [9] линейны относительно исследованных здесь статистик, то эти оценки являются асимптотически нормальными, что позволяет не только проверять их несмещенность, состоятельность и эффективность, но и строить для них доверительные интервалы.

2.2. Анализ оценок параметров тренда обобщенного рекуррентного потока

При анализе тренда интенсивности обобщенного рекуррентного потока (см. разд. 1.7) для построения оценок параметров будем использовать уже известные нам статистики (6) разд. 2.1

$$\xi = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{t_i}{T}\right), \quad \varphi = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \varphi\left(\frac{t_i}{T}\right).$$

Рассмотрим процессы

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon t_i), \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^n \varphi(\varepsilon t_i),$$

где n - число требований рассматриваемого потока, поступивших в интервале $[0, t]$, $t \leq T$.

Пусть $Z(t)$ - длина интервала от момента t до наступления первого события после момента t .

Обозначим

$$P(z(t) < z, u \leq \xi(t) < u + du) / du = P(z, u, t),$$

тогда

$$P(z, u, t + \Delta t) = P(z + \Delta t, u, t) - P(\Delta t, u, t) + \\ + P(\Delta t, u - f(\epsilon t), t) F(\lambda_0(t) z),$$

где $\lambda_0(t) = \lambda(\epsilon t)$ - интенсивность обобщенного рекуррентного потока с функцией распределения $F(\lambda_0(t) z)$ длин интервалов между моментами поступления требований. Следовательно, распределение $P(z, u, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(z, u, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0, u - f(\epsilon t), t)}{\partial z} F(\lambda_0(t) z). \quad (1)$$

В (1) сделаем замену

$$t\epsilon = \tau, \quad u\epsilon = x, \quad P(z, u, t) = \mathcal{T}(z, x, \tau),$$

получим

$$\epsilon \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} + \\ + \frac{\partial \mathcal{T}(0, x - \epsilon f(\tau), \tau)}{\partial z} F(\lambda(\tau) z) = \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, \tau)}{\partial z} - \\ - \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z} F(\lambda(\tau) z) - \\ - \epsilon f(\tau) \frac{\partial^2 \mathcal{T}(0, x, \tau)}{\partial z \partial x} F(\lambda(\tau) z).$$

Для определения асимптотического распределения $\mathcal{T}(z, x, v)$ будем иметь уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, v)}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{T}(z, x, v)}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z} (1 - F(\lambda(v)z)) - \\ - \varepsilon f(v) \frac{\partial^2 \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z \partial x} F(\lambda(v)z). \quad (2)$$

При $z = \infty$ имеем $\mathcal{T}(\infty, x, v) = \mathcal{T}(x, v)$, для которого из уравнения (2) получим

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, v)}{\partial v} + f(v) \frac{\partial^2 \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z \partial x} = 0. \quad (3)$$

Функцию $\frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z}$ найдем из (2), считая в нем $\varepsilon = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial \mathcal{T}(z, x, v)}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z} (1 - F(\lambda(v)z)),$$

откуда

$$\mathcal{T}(z, x, v) = \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z} \int_0^z (1 - F(\lambda(v)v)) dv,$$

при $z = \infty$

$$\mathcal{T}(x, v) = \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z} \int_0^\infty (1 - F(\lambda(v)v)) dv = \\ = \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z} \frac{1}{\lambda(v)} \int_0^\infty (1 - F(w)) dw = \frac{1}{\lambda(v)} \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z},$$

$$\text{т.о.} \quad \frac{\partial \mathcal{T}(0, x, v)}{\partial z} = \lambda(v) \mathcal{T}(x, v).$$

Подставив это выражение в (3), получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, v)}{\partial v} + \lambda(v) f(v) \frac{\partial \mathcal{T}(x, v)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

совпадающее с уравнением (3) разд. 2.1. В связи с этим величина

$e^{\xi(\tau/\varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически детерминирована и сходится к величине $\int_0^{\tau} \lambda(s) f(s) ds$, поэтому асимптотическое среднее $\xi(\tau)$ имеет вид (4) разд. 2.1.

Чтобы найти распределение отклонения $\xi(\tau)$ от асимптотического среднего, в уравнении (1) сделаем замену

$$t\varepsilon = \tau, \quad (u - \int_0^{\tau} \lambda_0(v) f(v) dv) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad P(x, u, t) = G(x, y, \tau),$$

получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} - \lambda(\tau) f(\tau) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial G(0, y, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial G(0, y - \sqrt{\varepsilon} f(\tau), \tau)}{\partial x} F(\lambda(\tau)x) = \\ & = \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial G(0, y, \tau)}{\partial x} (1 - F(\lambda(\tau)x)) - \\ & - \sqrt{\varepsilon} f(\tau) \frac{\partial^2 G(0, y, \tau)}{\partial y \partial x} F(\lambda(\tau)x) + \frac{\varepsilon}{2} f^2(\tau) \frac{\partial^3 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y^2} F(\lambda(\tau)x). \end{aligned} \quad (5)$$

При $x = \infty$ из этого равенства будем иметь

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} = \\ & = -\sqrt{\varepsilon} f(\tau) \frac{\partial^2 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y} + \frac{\varepsilon}{2} f^2(\tau) \frac{\partial^3 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{f^2(\tau)}{2} \frac{\partial^3 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ & = \sqrt{\varepsilon} \left(\lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} - f(\tau) \frac{\partial^2 G(0, y, \tau)}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (5) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial G(z, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)), \quad (7)$$

следовательно,

$$\frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} = \lambda(z) G(y, z). \quad (8)$$

Это выражение подставим в левую часть уравнения (6).

Запишем уравнение (5) с точностью до $\sqrt{\varepsilon}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, y, z)}{\partial z} = & \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)) + \\ & + \sqrt{\varepsilon} \left(f(z) \frac{\partial^2 G(0, y, z)}{\partial z \partial y} F(\lambda(z)z) - \lambda(z) f(z) \frac{\partial G(z, y, z)}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Используя (7) и (8), последнее равенство перепишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, y, z)}{\partial z} = & \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)) + \\ & + \sqrt{\varepsilon} \left(\lambda(z) f(z) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} F(\lambda(z)z) - \lambda(z) f(z) \lambda(z) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y} \times \right. \\ & \times \int_0^z (1 - F(\lambda(v)v)) dv \Big) = \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(z)z)) + \\ & + \sqrt{\varepsilon} \lambda(z) f(z) (F(\lambda(z)z) - \lambda(z) \int_0^z (1 - F(\lambda(v)v)) dv) \frac{\partial G(y, z)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Интегрируя правую и левую части по z и полагая, что $z = \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} G(y, z) = & \frac{\partial G(0, y, z)}{\partial z} \frac{1}{\lambda(z)} + \sqrt{\varepsilon} \lambda(z) f(z) \int_0^\infty (F(\lambda(v)v) - \\ & - \lambda(v) \int_0^v (1 - F(\lambda(v)v)) dv) dv \frac{\partial G(y, z)}{\partial y}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \lambda(\tau) G(y, \tau) - \sqrt{\epsilon} \lambda^2(\tau) f(\tau) \int_0^{\infty} (F(\lambda(\tau) u) - \lambda(\tau) \int_0^u (1 - F(\lambda(\tau) v)) dv) du + \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y}.$$

Так как $\lambda(\tau) \int_0^{\infty} (F(\lambda(\tau) u) - \lambda(\tau) \int_0^u (1 - F(\lambda(\tau) v)) dv) du =$
 $= \lambda(\tau) \int_0^{\infty} (F(\lambda(\tau) u) - \int_0^{\lambda(\tau) u} (1 - F(w)) dw) du =$
 $= \int_0^{\infty} (F(x) - \int_0^x (1 - F(w)) dw) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1,$

то

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \lambda(\tau) G(y, \tau) - \sqrt{\epsilon} \lambda^2(\tau) f(\tau) \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1 \right) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y}.$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (5), а (8) - в его левую часть, получим

$$\epsilon \left(\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{f^2(\tau)}{2} \lambda(\tau) \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2} \right) = \sqrt{\epsilon} \left(\lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} - f(\tau) \left(\lambda(\tau) \frac{\partial G(y, \tau)}{\partial y} - \sqrt{\epsilon} \lambda^2(\tau) f(\tau) \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1 \right) \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2} \right) \right),$$

откуда имеем уравнение

$$\frac{\partial G(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 \lambda^2(\tau) f^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(y, \tau)}{\partial y^2}, \quad (9)$$

где $\sigma^2 = \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1$ - дисперсия, соответствующая распределению $F(x)$, для которого $\int_0^{\infty} x dF(x) = f$. Это уравнение совпадает с аналогичным уравнением для нестационарного пуассоновского потока, таким образом, отклонение $f(t)$ для обобщенного рекур-

рентного потока от асимптотического среднего (так же как и для пуассоновского потока) асимптотически нормально с дисперсией

$$D\xi(t) = \sigma^2 \int_0^t \lambda_0(v) f^2(\varepsilon v) dv. \quad (10)$$

При оценивании двумерных параметров трендов обобщенных рекуррентных потоков возникает необходимость рассмотрения двумерных статистик вида

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon t_i) \quad \text{и} \quad \eta(t) = \sum_{i=1}^n \varphi(\varepsilon t_i)$$

и соответствующих им двумерных асимптотических распределений.

Пусть

$$P(z(t) < z, u \leq \xi(t) < u + du, v \leq \eta(t) < v + dv) / du dv = P(z, u, v, t),$$

тогда

$$P(z, u, v, t + \Delta t) = P(z + \Delta t, u, v, t) - P(\Delta t, u, v, t) + \\ + P(\Delta t, u - f(\varepsilon t), v - \varphi(\varepsilon t), t) F(\lambda_0(t)z),$$

следовательно, трехмерное распределение $P(z, u, v, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(z, u, v, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z, u, v, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, u, v, t)}{\partial z} + \\ + \frac{\partial P(0, u - f(\varepsilon t), v - \varphi(\varepsilon t), t)}{\partial z} F(\lambda_0(t)z).$$

Произведем в нем замену переменных

$$\varepsilon t = \tau, \quad (u - \int_0^t \lambda_0(v) f(\varepsilon v) dv) \sqrt{\varepsilon} = x,$$

$$(v - \int_0^t \lambda_0(v) \varphi(\varepsilon v) dv) \sqrt{\varepsilon} = y,$$

$$P(z, u, v, t) = G(z, x, y, \tau),$$

получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial G(z, x, y, z)}{\partial z} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(z, x, y, z)}{\partial x} - \\ & - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial G(z, x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial G(z, x, y, z)}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial G(0, x, y, z)}{\partial z} (1 - F(\lambda(\tau)z)) - \sqrt{\varepsilon} f(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial x} F(\lambda(\tau)z) - \\ & - \sqrt{\varepsilon} \varphi(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial y} F(\lambda(\tau)z) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} f^2(\tau) \frac{\partial^3 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial x^2} F(\lambda(\tau)z) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \varphi^2(\tau) \frac{\partial^3 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial y^2} F(\lambda(\tau)z) + \\ & + \varepsilon f(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial^3 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial x \partial y} F(\lambda(\tau)z). \end{aligned} \quad (II)$$

При $z = \infty$ имеем уравнение для определения двумерного асимптотического распределения

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} - \frac{f^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial x^2} - \frac{\varphi^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial y^2} - \right. \\ & \left. - f(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial x \partial y} \right) = \sqrt{\varepsilon} (\lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x} + \\ & + \lambda(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial y} - f(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial x} - \varphi(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, z)}{\partial z \partial y}). \end{aligned} \quad (I2)$$

Будем решать (I2) аналогично уравнению (6), используя уравнение (II), считая в котором $\varepsilon = 0$, имеем

$$\frac{\partial G(z, x, y, \tau)}{\partial z} = \frac{\partial G(0, x, y, \tau)}{\partial z} (1 - F(\lambda(\tau)z)),$$

откуда следует

$$\frac{\partial G(0, x, y, \tau)}{\partial z} = \lambda(\tau) G(x, y, \tau). \quad (13)$$

Запишем уравнение (II) с точностью до $\sqrt{\epsilon}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, x, y, \tau)}{\partial z} &= \frac{\partial G(0, x, y, \tau)}{\partial z} (1 - F(\lambda(\tau)z)) + \\ &+ \sqrt{\epsilon} \left(f(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, \tau)}{\partial z \partial x} F(\lambda(\tau)z) + \varphi(\tau) \frac{\partial^2 G(0, x, y, \tau)}{\partial z \partial y} F(\lambda(\tau)z) - \right. \\ &- \lambda(\tau) f(\tau) \frac{\partial G(z, x, y, \tau)}{\partial x} - \lambda(\tau) \varphi(\tau) \frac{\partial G(z, x, y, \tau)}{\partial y} \Big) = \\ &= \frac{\partial G(0, x, y, \tau)}{\partial z} (1 - F(\lambda(\tau)z)) + \sqrt{\epsilon} \left(f(\tau) \lambda(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} F(\lambda(\tau)z) + \right. \\ &+ \varphi(\tau) \lambda(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} F(\lambda(\tau)z) - \lambda(\tau) f(\tau) \lambda(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} \int_0^z (1 - \\ &- F(\lambda(\tau)u)) du - \lambda(\tau) \varphi(\tau) \lambda(\tau) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} \int_0^z (1 - F(\lambda(\tau)u)) du \Big). \end{aligned}$$

Интегрируя правую и левую части полученного уравнения по z и полагая $z = \infty$, будем иметь

$$G(x, y, z) = \frac{\partial G(a, x, y, z)}{\partial z} \frac{1}{\lambda(z)} + \sqrt{\varepsilon}(\lambda(z) f(z) \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x} \times \\ \times \int_0^{\infty} (F(\lambda(z)z) - \lambda(z)) \int_0^z (1 - F(\lambda(z)v)) dv) dz + \\ + \lambda(z) \varphi(z) \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial y} \int_0^{\infty} (F(\lambda(z)z) - \lambda(z)) \int_0^z (1 - F(\lambda(z)v)) dv) dz).$$

Так как

$$\int_0^{\infty} (F(\lambda(z)z) - \lambda(z)) \int_0^z (1 - F(\lambda(z)v)) dv) dz = \frac{1}{\lambda(z)} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1 \right),$$

то

$$\frac{\partial G(a, x, y, z)}{\partial z} = \lambda(z) G(x, y, z) - \sqrt{\varepsilon} \lambda(z) \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1 \right) \times \\ \times \left(f(z) \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial y} \right).$$

Подставляя полученное выражение в правую часть уравнения (12),

а (13) - в его левую часть, имеем

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} - \frac{f^2(z)}{2} \lambda(z) \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial x^2} - \frac{\varphi^2(z)}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial y^2} -$$

$$- f(z) \varphi(z) \lambda(z) \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial x \partial y} = \lambda(z) \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - 1 \right) \times$$

$$\times \left(f^2(z) \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial x^2} + 2 f(z) \varphi(z) \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + \varphi^2(z) \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial y^2} \right),$$

откуда получим уравнение

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} = \frac{x^2 \lambda(z) f^2(z)}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial x^2} + \\ + \frac{x^2 \lambda(z) \varphi^2(z)}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial y^2} + x^2 \lambda(z) f(z) \varphi(z) \frac{\partial^2 G(x, y, z)}{\partial x \partial y},$$

совпадающее с уравнением (7) разд. 2.1, решением которого является двумерное нормальное распределение с нулевым средним, дисперсиями $\sigma_1^2(z)$, $\sigma_2^2(z)$ и ковариацией $K(z)$ вида (8) разд.

2.1.

$$\sigma_1^2(z) = x^2 \int_0^z \lambda(s) f^2(s) ds, \quad \sigma_2^2(z) = x^2 \int_0^z \lambda(s) \varphi^2(s) ds, \\ K(z) = x^2 \int_0^z \lambda(s) f(s) \varphi(s) ds.$$

Здесь дисперсии совпадают с дисперсией (10) для соответствующей одномерной случайной величины. Использование оценок параметров тренда обобщенного рекуррентного потока, линейно зависящих от рассмотренных статистик, позволяет строить для них доверительные интервалы с применением нормальности распределения.

2.3. Анализ статистик для проверки гипотезы о стационарности пуассоновского потока

При необходимости проверки гипотезы об отсутствии тренда интенсивности пуассоновского потока имеет место сравнение нулевой гипотезы $H_0: \lambda_0(t) = \lambda_0 - const$ о том, что тренда нет, с альтернативной $H_1: \lambda_0(t) \neq const$ - имеется значимый тренд интенсивности. Для проверки этих гипотез используются критерии, основанные на S_j - статистиках вида

$$S_j = \frac{N^{j-1}}{T^j} \sum_{i=1}^N x_i^j,$$

где ν – произвольная величина большая единицы; T – длина интервала наблюдения за потоком; τ_i – длины интервалов между моментами поступления требований в поток $i = 1, 2, \dots, N$; N – число требований, поступивших за время T .

Пусть интенсивность потока – медленно меняющаяся функция времени

$$\lambda_0(t) = \lambda(\varepsilon t),$$

где ε – малый положительный параметр, обратный значению T .

Для решения задачи различения гипотез найдем (при $T \rightarrow \infty$) асимптотическое распределение статистики S_ν , которую представим в виде произведения

$$S_\nu = \left(\frac{N}{T}\right)^{\nu-1} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \tau_i^\nu. \quad (1)$$

Рассмотрим двумерную случайную величину

$$\eta(t) = n, \quad \xi(t) = \sum_{i=1}^n \varphi(\tau_i), \quad (2)$$

где n – число требований, поступивших в поток за время t .

Покажем, что двумерная случайная величина

$$(\varepsilon \eta(\frac{t}{\varepsilon}), \varepsilon \xi(\frac{t}{\varepsilon})) \quad (3)$$

асимптотически нормальна (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Пусть $z(t)$ – длина интервала от момента поступления n -го требования (последнего к моменту t) до момента t , введем распределение

$$P(z(t) < z, \eta(t) = n, u \leq \xi(t) < u + du) / du = P(z, n, u, t).$$

В силу марковости трехмерного процесса $(z(t), \eta(t), \xi(t))$ распределение $P(z, n, u, t)$ удовлетворяет уравнению

$$P(z, n, u, t + \Delta t) - P(z, n, u, t) = (1 - \lambda_0(t) \Delta t) P(z - \Delta t, n, u, t),$$

$$P(\Delta t, n, u, t + \Delta t) = \lambda_0(t) \Delta t \int_0^U P(dv, n-1, u - \varphi(v), t),$$

где U - решение уравнения $\varphi(U) = u$, из полученных равенств имеем

$$\frac{\partial P(z, n, u, t)}{\partial t} + \frac{\partial P(z, n, u, t)}{\partial z} + \lambda_0(t) P(z, n, u, t) = \frac{\partial P(0, n, u, t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P(0, n, u, t)}{\partial z} = \lambda_0(t) \int_0^U P(dv, n-1, u - \varphi(v), t).$$

Эту систему приведем к единому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, n, u, t)}{\partial t} + \frac{\partial P(z, n, u, t)}{\partial z} + \lambda_0(t) P(z, n, u, t) = \\ = \lambda_0(t) \int_0^U P(dv, n-1, u - \varphi(v), t). \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) произведем замену переменных

$$t\varepsilon = \tau, \quad n\varepsilon = y, \quad u\varepsilon = x, \quad P(z, n, u, t) = \mathcal{T}(z, y, x, \tau),$$

получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(z, y, x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{T}(z, y, x, \tau)}{\partial z} + \lambda(\tau) \mathcal{T}(z, y, x, \tau) = \\ = \lambda(\tau) \mathcal{T}(y, x, \tau) - \varepsilon \lambda(\tau) \frac{\partial \mathcal{T}(y, x, \tau)}{\partial y} - \varepsilon \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \varphi(v) \mathcal{T}(dv, y, x, \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

При $z = \infty$ будем иметь

$$\frac{\partial \mathcal{T}(y, x, \tau)}{\partial \tau} + \lambda(\tau) \frac{\partial \mathcal{T}(y, x, \tau)}{\partial y} + \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \varphi(v) \mathcal{T}(dv, y, x, \tau) = 0. \quad (6)$$

Из (5), считая $\varepsilon = 0$, следует уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(z, y, x, \tau)}{\partial z} + \lambda(\tau) \mathcal{T}(z, y, x, \tau) = \lambda(\tau) \mathcal{T}(y, x, \tau), \quad (7)$$

решение которого с начальным условием $\mathcal{T}(0, y, x, \tau) = 0$ имеет вид

$$\mathcal{T}(z, y, x, \tau) = \mathcal{T}(y, x, \tau) (1 - e^{-\lambda(\tau)z}). \quad (8)$$

Подставив его в (6), получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(y, x, \tau)}{\partial \tau} + \lambda(\tau) \frac{\partial \mathcal{T}(y, x, \tau)}{\partial y} + \lambda(\tau) \alpha(\lambda(\tau)) \frac{\partial \mathcal{T}(y, x, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где $\alpha(\lambda(\tau)) = \int_0^\infty \varphi(v) \lambda(\tau) e^{-\lambda(\tau)v} dv$.

Из (9) следует, что двумерная случайная величина (3) асимптотически детерминирована с асимптотическими средними

$$\begin{aligned} M\varepsilon \eta\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) &= \int_0^\tau \lambda(s) ds, \\ M\varepsilon \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= \int_0^\tau \lambda(s) \alpha(\lambda(s)) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы найти асимптотическое распределение отклонения двумерной случайной величины (3) от асимптотического среднего (10), в уравнении (4) произведем замену переменных

$$t\varepsilon = \tau, \quad \left(n - \int_0^t \lambda_0(v) dv\right) \sqrt{\varepsilon} = y, \quad \left(u - \int_0^t \lambda_0(v) \alpha(\lambda_0(v)) dv\right) \sqrt{\varepsilon} = x,$$

$$P(z, n, u, t) = G(z, y, x, \tau),$$

получим

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial y} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) a(\lambda(\tau)) \times \\
 & \times \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial z} + \lambda(\tau) G(z, y, x, \tau) = \\
 & = \lambda(\tau) G(y, x, \tau) - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial y} - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \varphi(\tau) G(d\tau, y, x, \tau) + \varepsilon \frac{\lambda(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(y, x, \tau)}{\partial y^2} + \\
 & + \varepsilon \frac{\lambda(\tau)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty \varphi^2(\tau) G(d\tau, y, x, \tau) + \\
 & + \varepsilon \lambda(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^\infty \varphi(\tau) G(d\tau, y, x, \tau). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Считая $z = \infty$, будем иметь уравнение

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \left(\frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\lambda(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(y, x, \tau)}{\partial y^2} - \frac{\lambda(\tau)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty \varphi^2(\tau) G(d\tau, y, x, \tau) - \right. \\
 & \left. - \lambda(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^\infty \varphi(\tau) G(d\tau, y, x, \tau) \right) = \\
 & = \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \left(a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \varphi(\tau) G(d\tau, y, x, \tau) \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

В левую часть этого уравнения подставим решение уравнения (11),
при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial z} + \lambda(\tau) G(z, y, x, \tau) = \lambda(\tau) G(y, x, \tau).$$

Так как полученное уравнение совпадает с (7), то его решение имеет вид

$$G(z, y, x, \tau) = G(y, x, \tau) \left(1 - e^{-\lambda(\tau)z} \right). \quad (13)$$

Запишем уравнение (II) с точностью до $\sqrt{\epsilon}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial z} + \lambda(\tau) G(z, y, x, \tau) = \lambda(\tau) G(y, x, \tau) + \\ & + \sqrt{\epsilon} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial y} + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial y} - \int_0^{\infty} \varphi(v) \frac{\partial G(dv, y, x, \tau)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Используя равенство (13), последнее соотношение перепишем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G(z, y, x, \tau)}{\partial z} + \lambda(\tau) G(z, y, x, \tau) = \lambda(\tau) G(y, x, \tau) - \\ & - \sqrt{\epsilon} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial y} + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} \right) e^{-\lambda(\tau)z}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} G(z, y, x, \tau) &= G(y, x, \tau) \left(1 - e^{-\lambda(\tau)z} \right) - \\ & - \sqrt{\epsilon} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial y} + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} \right) z e^{-\lambda(\tau)z}. \end{aligned}$$

Подставив это решение в правую часть уравнения (12), получим

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) (a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \varphi(v) G(\tau v, y, x, \tau) dv) = \\
 & = \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) (a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \varphi(v) (G(y, x, \tau) \lambda(\tau) e^{-\lambda(\tau)v} - \\
 & - \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \left(\frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial y} + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} \right) (v e^{-\lambda(\tau)v})'_v dv) = \\
 & = \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) (a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} - a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} + \\
 & + \sqrt{\varepsilon} \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial y} + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial G(y, x, \tau)}{\partial x} \right) \int_0^{\infty} \varphi(v) dv e^{-\lambda(\tau)v}) = \\
 & = \varepsilon \lambda^2(\tau) \left(\frac{\partial^2 G(y, x, \tau)}{\partial y \partial x} + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial^2 G(y, x, \tau)}{\partial x^2} \right) \times \\
 & \times \left(\int_0^{\infty} v e^{-\lambda(\tau)v} \varphi(v) dv \right) = -\varepsilon \lambda(\tau) \left(\frac{\partial^2 G(y, x, \tau)}{\partial y \partial x} + \right. \\
 & \left. + a(\lambda(\tau)) \frac{\partial^2 G(y, x, \tau)}{\partial x^2} \right) \int_0^{\infty} \varphi(v) v \lambda(\tau) e^{-\lambda(\tau)v} dv.
 \end{aligned}$$

Используя полученное равенство и подставляя (13) в левую часть уравнения (12), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G(y, x, z)}{\partial z} - \frac{\lambda(z)}{2} \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial y^2} - \frac{\lambda(z)}{2} \int_0^\infty \varphi^2(v) \lambda(z) e^{-\lambda(z)v} dv x \\ & \times \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial x^2} - \lambda(z) a(\lambda(z)) \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial y \partial x} = -\lambda(z) \int_0^\infty \varphi'(v) v \lambda(z) \times \\ & \times e^{-\lambda(z)v} dv \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial y \partial x} - \\ & - \lambda(z) a(\lambda(z)) \int_0^\infty \varphi'(v) v \lambda(z) e^{-\lambda(z)v} dv \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

т.е. $G(y, x, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(y, x, z)}{\partial z} &= \frac{\lambda(z)}{2} \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial y^2} + \frac{\lambda(z)}{2} \left(\int_0^\infty \varphi^2(v) \lambda(z) e^{-\lambda(z)v} dv - \right. \\ & \left. - 2a(\lambda(z)) \int_0^\infty \varphi'(v) v \lambda(z) e^{-\lambda(z)v} dv \right) \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial x^2} + \\ & + \lambda(z) \left(a(\lambda(z)) - \int_0^\infty \varphi'(v) v \lambda(z) e^{-\lambda(z)v} dv \right) \frac{\partial^2 G(y, x, z)}{\partial y \partial x}, \end{aligned}$$

которое совпадает с уравнением (7) разд. 2.1, поэтому его решением будет двумерная нормальная плотность распределения с дисперсиями $\sigma_1^2(z)$, $\sigma_2^2(z)$ и ковариацией $\kappa(z)$ вида

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(z) &= \int_0^z \lambda(s) ds, \\ \sigma_2^2(z) &= \int_0^z \lambda(s) \left(\int_0^\infty \varphi^2(v) \lambda(s) e^{-\lambda(s)v} dv - 2a(\lambda(s)) \int_0^\infty \varphi'(v) v \lambda(s) e^{-\lambda(s)v} dv \right) ds, \end{aligned}$$

$$\kappa(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \lambda(s) (a(\lambda(s)) - \int_0^{\infty} \varphi'(v) v \lambda(s) e^{-\lambda(s)v} dv) ds.$$

Пусть $\varphi(x) = x^{\nu}$, тогда

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x^{\nu} \lambda e^{-\lambda x} dx = \Gamma(\nu+1) / \lambda^{\nu},$$

$$\int_0^{\infty} \varphi^2(x) \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x^{2\nu} \lambda e^{-\lambda x} dx = \Gamma(2\nu+1) / \lambda^{2\nu},$$

$$\int_0^{\infty} \varphi'(x) x \lambda e^{-\lambda x} dx = \nu \int_0^{\infty} x^{\nu} \lambda e^{-\lambda x} dx = \nu \Gamma(\nu+1) / \lambda^{\nu}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{T} N = \bar{A} + \sqrt{\varepsilon} A,$$

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \tau_i^{\nu} = \bar{B} + \sqrt{\varepsilon} B,$$

где $\varepsilon = 1/T$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ - средние соответствующих величин при $t = T$,

$$\bar{A} = \int_0^1 \lambda(s) ds; \quad \bar{B} = \int_0^1 \lambda(s) a(\lambda(s)) ds = \Gamma(\nu+1) \int_0^1 \frac{ds}{\lambda^{\nu+1}(s)}.$$

Величины A и B имеют дисперсии $\sigma_1^2(I)$, $\sigma_2^2(I)$ и ковариацию $\kappa(I)$, при $\varphi(x) = x^{\nu}$, σ_1^2 , σ_2^2 , κ имеют следующий вид:

$$\sigma_1^2 = \int_0^1 \lambda(s) ds,$$

$$\sigma_2^2 = (\Gamma(2\nu+1) - 2\nu \Gamma^2(\nu+1)) \int_0^1 \frac{ds}{\lambda^{2\nu+1}(s)},$$

$$\kappa = (1-\nu) \Gamma(\nu+1) \int_0^1 \frac{ds}{\lambda^{\nu+1}(s)}.$$

Так как $S_y = (\bar{A} + \sqrt{\varepsilon} A)^{j-1} (\bar{B} + \sqrt{\varepsilon} B) = \bar{A}^{j-1} \bar{B} + \sqrt{\varepsilon} (\bar{A}^{j-2} \bar{B} A + \bar{A}^{j-1} B)$,

$$\text{то } MS_y = \bar{A}^{j-1} \bar{B} = \Gamma(j+1) \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{j-1}(\lambda)} \left(\int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \right)^{j-1},$$

$$DS_y = \varepsilon ((\bar{A}^{j-2} \bar{B})^2 D A + \bar{A}^{2(j-1)} D B + 2 \bar{A}^{j-3} \bar{B} \cos(AB)) =$$

$$= \varepsilon ((\bar{A}^{j-2} \bar{B})^2 \sigma_1^2 + \bar{A}^{2(j-1)} \sigma_2^2 + 2 \bar{A}^{j-3} \bar{B} \kappa) =$$

$$= \varepsilon \bar{A}^{2j-3} (\bar{A}^{-1} \bar{B}^2 \sigma_1^2 + \bar{A} \sigma_2^2 + 2(j-1) \bar{B} \kappa) =$$

$$= \varepsilon \left(\left(\int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \right)^{2j-3} \left(\Gamma(j+1) \left(\int_0^1 \frac{1}{\lambda^{j-1}(\lambda)} d\lambda \right)^2 + \int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \left(\Gamma(2j+1) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2j \Gamma^2(j+1) \right) \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{2j-1}(\lambda)} \right) + 2(j-1) \Gamma(j+1) \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{j-1}(\lambda)} (1-j) \Gamma(j+1) \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{j-1}(\lambda)} \right).$$

Таким образом, статистика S_y асимптотически нормальна с параметрами

$$MS_y = \Gamma(j+1) \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{j-1}(\lambda)} \left(\int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \right)^{j-1},$$

$$DS_y = \frac{1}{j} \left(\int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \right)^{2j-3} \left(\Gamma(2j+1) \int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{2j-1}(\lambda)} - \right. \\ \left. - \Gamma^2(j+1) (2(j-1)^2 - 1) \left(\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{j-1}(\lambda)} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2j \int_0^1 \lambda(\lambda) d\lambda \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{2j-1}(\lambda)} \right).$$

2.4. Анализ статистики для проверки гипотезы о совпадении трендов двух пуассоновских потоков

Пусть имеются два пуассоновских потока с медленно меняющимися во времени интенсивностями $\lambda(\varepsilon t)$ и $\mu(\varepsilon t)$. При необходимости проверки гипотезы о совпадении трендов этих потоков, производится сравнение нулевой гипотезы $H_0: \lambda(\tau) \equiv \mu(\tau)$ о том, что интенсивности потоков совпадают, с альтернативной $H_1: \lambda(\tau) \neq \mu(\tau)$ о том, что имеется значимое различие интенсивностей. Для наблюдения доступна величина разности между числом требований, поступивших за время t в первом потоке, и числом требований второго потока $\kappa(t)$.

Для проверки сформулированных гипотез рассматривается статистика $S^\vee$ вида

$$S = \int_0^T \varphi(\sqrt{\varepsilon} \kappa(s)) ds, \quad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, обратный величине T — длине интервала наблюдений; $\varphi(x)$ — произвольная функция, выбираемая исследователем.

Рассмотрим $\xi(t) = \int_0^t \varphi(\sqrt{\varepsilon} \kappa(s)) ds$

и покажем, что при $\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ эта величина асимптотически нормальна.

Пусть $P(\kappa, u, t) = P(\kappa(t) = \kappa, u \leq \xi(t) < u + du) / du$.

В силу того, что двумерный процесс $(\kappa(t), \xi(t))$ является марковским, функция $P(\kappa, u, t)$ при $\lambda(\tau) \equiv \mu(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(\kappa, u, t)}{\partial t} + \varphi(\sqrt{\varepsilon} \kappa) \frac{\partial P(\kappa, u, t)}{\partial u} + 2\lambda(\varepsilon t) P(\kappa, u, t) =$$

$$= \lambda(\varepsilon t) (P(\kappa-1, u, t) + P(\kappa+1, u, t)), \quad (2)$$

точное аналитическое решение которого практически невозможно из-за его сложности, но асимптотическое решение удастся найти при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, если в нем сделать замену переменных

$$\varepsilon t = \tau, \quad \sqrt{\varepsilon} \kappa = x, \quad \varepsilon u = y, \quad P(\kappa, u, t) = \mathcal{T}(x, y, \tau),$$

тогда уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(x, y, \tau)}{\partial \tau} + \varphi(x) \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(x, y, \tau)}{\partial y} + 2\lambda(\tau) \mathcal{T}(x, y, \tau) = \\ = \lambda(\tau) (\mathcal{T}(x - \sqrt{\varepsilon}, y, \tau) + \mathcal{T}(x + \sqrt{\varepsilon}, y, \tau)). \end{aligned}$$

Раскладывая $\mathcal{T}(x \pm \sqrt{\varepsilon}, y, \tau)$ в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ с точностью до ε , получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \lambda(\tau) \frac{\partial^2 \mathcal{T}(x, y, \tau)}{\partial x^2} - \varphi(x) \frac{\partial \mathcal{T}(x, y, \tau)}{\partial y}, \quad (3)$$

которое определяет асимптотическую плотность распределения вероятностей $\mathcal{T}(x, y, \tau)$ двумерной нормированной случайной величины $(\kappa(t), \xi(t))$ при $\lambda(\tau) \equiv \mu(\tau)$. Решение уравнения (3) определяет полный асимптотический анализ гипотезы H_0 .

При проверке справедливости гипотезы H_1 , когда $\lambda(\tau) \neq \mu(\tau)$, статистику S необходимо несколько изменить и записать следующим образом:

$$S_t = \int_0^t \varphi(\varepsilon \kappa(z)) dz.$$

Рассмотрим величину $\eta(t) = \int_0^t \varphi(\varepsilon \kappa(z)) dz$.

Двумерный процесс $(\kappa(t), \eta(t))$ — марковский, поэтому его распределение вероятностей

$$P(\kappa, \eta, t) = P(\kappa(t) = \kappa, \eta \leq \eta(t) < \eta + d\eta) / d\eta$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\kappa, \eta, t)}{\partial t} + \varphi(\varepsilon \kappa) \frac{\partial P(\kappa, \eta, t)}{\partial \eta} + (\lambda(\varepsilon t) + \mu(\varepsilon t)) P(\kappa, \eta, t) = \\ = \lambda(\varepsilon t) P(\kappa-1, \eta, t) + \mu(\varepsilon t) P(\kappa+1, \eta, t), \end{aligned} \quad (4)$$

решать которое асимптотическим методом будем в два этапа.

На первом этапе произведем замену переменных

$$\varepsilon t = \tau, \quad \varepsilon \kappa = u, \quad \varepsilon \eta = v, \quad P(\kappa, \eta, t) = \mathcal{T}(u, v, \tau),$$

тогда уравнение (4) запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(u, v, \tau)}{\partial \tau} + \varphi(u) \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}(u, v, \tau)}{\partial v} + (\lambda(\tau) + \mu(\tau)) \mathcal{T}(u, v, \tau) = \\ = \lambda(\tau) \mathcal{T}(u - \varepsilon, v, \tau) + \mu(\tau) \mathcal{T}(u + \varepsilon, v, \tau), \end{aligned}$$

раскладывая $\mathcal{T}(u \pm \varepsilon, v, \tau)$ в ряд по ε с точностью до ε , получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(u, v, \tau)}{\partial \tau} + \varphi(u) \frac{\partial \mathcal{T}(u, v, \tau)}{\partial v} + (\lambda(\tau) - \mu(\tau)) \frac{\partial \mathcal{T}(u, v, \tau)}{\partial u} = 0,$$

решение которого представим

$$\mathcal{T}(u, v, \tau) = \Phi(u - \int_0^\tau (\lambda(s) - \mu(s)) ds, v - \int_0^\tau \varphi(u - \int_0^s (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha) ds),$$

где $\Phi(x, y)$ - функции двух переменных.

С учетом начальных условий можно утверждать, что нормированная двумерная величина $(\kappa(t), \eta(t))$ при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ асимпто-

тически вырождена, т.е. сходится к двумерной детерминированной величине

$$\left(\int_0^{\tau} (\lambda(s) - \mu(s)) ds, \int_0^{\tau} \varphi \left(\int_0^s (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) ds \right).$$

Асимптотическое среднее величин $\kappa(t)$ и $\eta(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} M\kappa(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} (\lambda(s) - \mu(s)) ds, \\ M\eta(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} \varphi \left(\int_0^s (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

На втором этапе найдем распределение вероятностей значений отклонений величин $(\kappa(t), \eta(t))$ от их асимптотических средних (5). Для этого в уравнении (4) сделаем замену переменных

$$\left(\kappa - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} (\lambda(s) - \mu(s)) ds \right) \sqrt{\varepsilon} = x, \left(\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} \varphi \left(\int_0^s (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) ds \right) \sqrt{\varepsilon} = y,$$

$$t\varepsilon = \tau, \quad P(\kappa, \eta, t) = G(x, y, \tau),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial x} (\lambda(\tau) - \mu(\tau)) - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} \times \\ &\times \varphi \left(\int_0^{\tau} (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y} \varphi \left(\int_0^{\tau} (\lambda(s) - \mu(s)) ds + \sqrt{\varepsilon} x \right) + \\ &+ (\lambda(\tau) + \mu(\tau)) G(x, y, \tau) = \lambda(\tau) G(x - \sqrt{\varepsilon}, y, \tau) + \mu(\tau) G(x + \sqrt{\varepsilon}, y, \tau). \end{aligned}$$

Раскладывая здесь все функции по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ с точностью ε , получим уравнение

$$\frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda(\tau) + \mu(\tau)}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, \tau)}{\partial x^2} - x \varphi' \left(\int_0^{\tau} (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial y}, \quad (6)$$

которое определяет асимптотическое распределение вероятностей $G(x, y, z)$ для величин отклонений $\kappa(t), \eta(t)$ от их асимптотических средних (5).

Заметим, что полученное уравнение совпадает по виду с уравнением (3), определяющим асимптотическое распределение статистики S , но коэффициент при производной по y в уравнении (6) линейно зависит от x , что позволяет найти решение (6) в явном виде. Оказывается, что его решением является двумерная нормальная плотность распределения со среднеквадратическими отклонениями $\sigma_1^2(z)$, $\sigma_2^2(z)$ и коэффициентом корреляции $z(z)$ вида

$$\begin{aligned}\sigma_1^2(z) &= \int_0^z (\lambda(s) + \mu(s)) ds, \\ \sigma_2^2(z) &= \int_0^z (\lambda(s) + \mu(s)) \left(\int_s^z \varphi' \left(\int_0^v (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) dv \right)^2 ds, \\ z(z) &= \int_0^z (\lambda(s) + \mu(s)) \int_s^z \varphi' \left(\int_0^v (\lambda(\alpha) - \mu(\alpha)) d\alpha \right) dv ds / \sigma_1(z) \sigma_2(z).\end{aligned}\tag{7}$$

Таким образом, статистика S_z является асимптотически нормальной с характеристиками (5), (7). Распределение статистики S определяется уравнением (3).

Глава 3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Асимптотические методы позволяют исследовать широкий класс систем массового обслуживания (СМО), анализ которых другими методами выполнить невозможно из-за сложности уравнений, описывающих функционирование таких систем [10]. Существует несколько способов марковизации СМО. К ним относятся: метод мнимых фаз Эрланга, метод Кендалла (вложенных цепей Маркова), а также интегральный метод, который позволяет построить уравнения, описывающие функционирование системы с рекуррентным потоком и обслуживанием.

Наиболее мощным методом марковизации является метод дополнительного события, приводящего к кусочно-линейным и линейчатым марковским процессам.

Согласно вышеизложенным асимптотическим методам асимптотика рассматривалась либо по времени, либо по числу событий. В системах обслуживания асимптотика главным образом будет рассматриваться по загрузке системы, т.е. предполагается, что СМО функционирует в стационарном режиме и загрузка системы $\rho < 1$. Предлагаемый нами асимптотический метод позволит находить распределения вероятностей состояний системы (число требований, время ожидания, незавершенная работа и т.д.) асимптотически при $\rho \uparrow 1$.

Исследование СМО начнем с простейшей системы, далее рассмотрим наиболее простую марковизируемую модель, т.е. систему с рекуррентным обслуживанием, которую можно марковизировать не только методом дополнительного события, но и методом вложенных цепей Маркова и интегральным с применением в этих случаях асимптотического метода. Методически целесообразно идею метода представить сначала на простой системе, а затем перейти к системам, исследование которых другими методами (кроме асимптотического метода анализа марковизируемых систем) провести невозможно [26].

3.1. Простейшая система

Рассмотрим СМО с одним потоком и одним обслуживающим прибором. Требования, заставшие прибор занятым, становятся в очередь. Заявки из очереди обслуживаются в порядке поступления. Состояние системы в момент t определяется числом требований, находящихся в данный момент в системе $i(t)$. Требуется определить стационарное распределение вероятностей состояний $P(i) = P(i(t) = i)$. Если входящий поток — простейший с параметром $\lambda = \lambda_0(i)$, а обслуживание — экспоненциальное с интенсивностью $\mu = \mu_0(i)$, то случайный процесс $i(t)$ является марковским и нет необходимости проводить его марковизацию. В этом случае, как известно [2], вероятности $P(i)$ удовлетворяют системе уравнений

$$(\lambda_0(i) + \mu_0(i))P(i) = \lambda_0(i-1)P(i-1) + \mu_0(i+1)P(i+1), \text{ при } i = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_0(0)P(0) = \mu_0(1)P(1), \quad (I)$$

решение которой достаточно просто и имеет следующий вид:

$$P(i) = P(0) \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_0(k)}{\mu_0(k+1)}, \text{ при } i = 1, 2, \dots$$

$$P(0) = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_0(k)}{\mu_0(k+1)} \right).$$

Стационарное распределение $P(i)$ для рассматриваемой СМО существует, если сходится ряд

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_0(k)}{\mu_0(k+1)}.$$

При $\lambda_0(k) = \lambda(1 - \varepsilon \lambda(\varepsilon k))$, $\mu_0(k) = \mu(1 + \varepsilon \mu(\varepsilon k))$, где ε — малый положительный параметр, представляет интерес при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическое решение системы (I). Чтобы найти асимптотическое решение, в системе (I) сделаем замену

$$k\varepsilon = x, \quad P(k) = \mathcal{T}(x),$$

здесь $\mathcal{T}(x)$ имеет смысл асимптотической плотности распределения вероятностей значений нормированного числа требований. Система (I) примет вид

$$\lambda(2 + \varepsilon(\mu(x) - \lambda(x)))\mathcal{T}(x) = \lambda(1 - \varepsilon\lambda(x - \varepsilon))\mathcal{T}(x - \varepsilon) + \mu(1 + \varepsilon\mu(x + \varepsilon))\mathcal{T}(x + \varepsilon).$$

Раскладывая $\lambda, \mu, \mathcal{T}$ в ряд по степеням ε с точностью до ε^2 , получим

$$(\mathcal{T}'(x) + (\lambda(x) + \mu(x))\mathcal{T}(x))' = 0.$$

Теперь с условием $\mathcal{T}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ будем иметь уравнение

$$\mathcal{T}'(x) + (\lambda(x) + \mu(x))\mathcal{T}(x) = 0,$$

решение которого представим

$$\mathcal{T}(x) = C \exp \left\{ - \int_0^x (\lambda(z) + \mu(z)) dz \right\}. \quad (2)$$

Чтобы решение $\mathcal{T}(x)$ имело смысл плотности распределения, достаточно того, чтобы сходился интеграл

$$S = \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \int_0^x (\lambda(s) + \mu(s)) ds \right\} dx,$$

в этом случае нормирующая константа C будет иметь вид $C = 1/S$

Заметим, что если $\lambda(s) + \mu(s) = \text{const}$, то асимптотическая плотность $\mathcal{P}(x)$ является экспоненциальной. В общем случае выражение (2) описывает достаточно широкий класс асимптотических распределений.

3.2. Система с рекуррентным обслуживанием

Рассмотрим систему при рекуррентном обслуживании с функцией распределения $B(x)$. В силу произвольности (неэкспоненциальности) обслуживания процесс изменения числа требований с течением времени $i(t)$ — немарковский, а двумерный процесс $\{i(t), z(t)\}$, где $z(t)$ — длина интервала от момента t до момента окончания обслуживания требования, стоящего в момент t на приборе, является марковским, стационарное распределение которого

$$P(i, z) = P(i(t) = i, z(t) < z),$$

удовлетворяет уравнению

$$\lambda P(i, z) + \frac{\partial P(i, 0)}{\partial z} = \lambda P(i-1, z) + \frac{\partial P(i, z)}{\partial z} + B(z) \frac{\partial P(i+1, 0)}{\partial z}. \quad (1)$$

В полученном уравнении произведем замену [22, 23]

$$i\varepsilon = x, \quad P(i, z) = \mathcal{P}(x, z),$$

здесь ε — малый положительный параметр, смысл которого определим ниже. Тогда (1) примет вид

$$\lambda \mathcal{T}(x, z) + \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z} = \lambda \mathcal{T}(x - \varepsilon, z) + \frac{\partial \mathcal{T}(x, z)}{\partial z} + B(z) \frac{\partial \mathcal{T}(x + \varepsilon, 0)}{\partial z}.$$

Раскладывая здесь $\mathcal{T}(x \pm \varepsilon, z)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь членами порядка ε^2 , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) = & \frac{\partial \mathcal{T}(x, z)}{\partial z} + \varepsilon \left(B(z) \frac{\partial^2 \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z \partial x} - \lambda \frac{\partial \mathcal{T}(x, z)}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(B(z) \frac{\partial^3 \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z \partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \mathcal{T}(x, z)}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

При $z = \infty$ это уравнение запишем

$$\varepsilon \left(\lambda \mathcal{T}'(x) - \frac{\partial^2 \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z \partial x} \right) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\lambda \mathcal{T}''(x) + \frac{\partial^3 \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z \partial x^2} \right), \quad (3)$$

где $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(x, \infty)$ — асимптотическая плотность распределения вероятностей состояний системы $x = i\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из уравнения (2), считая $\varepsilon = 0$, имеем уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, z)}{\partial z} = (1 - B(z)) \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z},$$

решением которого является

$$\mathcal{T}(x, z) = \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z} \int_0^z (1 - B(s)) ds, \quad (4)$$

и при $z = \infty$ получим

$$\mathcal{T}(x) = \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z} \int_0^\infty (1 - B(s)) ds = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z},$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial z} = \mu \mathcal{T}(x), \quad (5)$$

где μ - величина, обратная среднему времени обслуживания. Запишем (2) с точностью до ε

$$\frac{\partial \pi(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial \pi(x, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) + \varepsilon \left(\lambda \frac{\partial \pi(x, z)}{\partial x} - B(z) \frac{\partial^2 \pi(x, 0)}{\partial z \partial x} \right).$$

Используя (4), (5), последнее равенство представим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(x, z)}{\partial z} &= \frac{\partial \pi(x, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) + \varepsilon (\lambda \mu \pi'(x) \int_0^z (1 - B(s)) ds - \\ &- B(z) \mu \pi'(x)) = \frac{\partial \pi(x, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) + \varepsilon \mu \pi'(x) \left(\lambda \int_0^z (1 - B(s)) ds - B(z) \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\pi(x, z) = \frac{\partial \pi(x, 0)}{\partial z} \int_0^z (1 - B(s)) ds + \varepsilon \mu \pi'(x) \int_0^z \left(\lambda \int_0^u (1 - B(s)) ds - B(u) \right) du.$$

Рассмотрим случай функционирования СМО в условиях большой загрузки, т.е. $\lambda \uparrow \mu$, тогда в последнем равенстве λ заменим на μ и, считая $z = \infty$, имеем

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \pi(x, 0)}{\partial z} + \varepsilon \mu \pi'(x) \int_0^\infty \left(\mu \int_0^u (1 - B(s)) ds - B(u) \right) du. \quad (6)$$

Для $J = \int_0^\infty \left(\mu \left(\int_0^u (1 - B(s)) ds - B(u) \right) \right) du$ будем иметь

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (1 - B(u)) du - \int_0^\infty (1 - \mu \int_0^u (1 - B(s)) ds) du = \\ &= \frac{1}{\mu} - \left(1 - \mu \int_0^\infty (1 - B(s)) ds \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty u d \left(1 - \mu \int_0^u (1 - B(s)) ds \right) = \\ &= \frac{1}{\mu} - \mu \int_0^\infty u (1 - B(u)) du = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{2} \int_0^\infty (1 - B(u)) du^2 = \\ &= \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{2} u^2 (1 - B(u)) \Big|_0^\infty + \frac{\mu}{2} \int_0^\infty u^2 d(1 - B(u)) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} u^2 dB(u) = \frac{1}{\mu} - \mu \frac{\beta^2}{2},$$

где β^2 - второй момент распределения $B(\lambda)$.

Используя (6), запишем

$$\frac{\partial \pi(x, 0)}{\partial x} = \mu \pi(x) + \varepsilon \mu \pi'(x) \left(\frac{\mu^2 \beta^2}{2} - 1 \right).$$

Подставляя это выражение в левую часть (3), а (5) - в его правую часть, получим

$$\frac{\varepsilon^2}{2} (\mu^3 \beta^2 - (\mu - \lambda)) \pi''(x) + \varepsilon (\mu - \lambda) \pi'(x) = 0.$$

Пусть $\varepsilon = 1 - \rho$, где $\rho = \lambda/\mu$ - загрузка СМО, тогда последнее уравнение при $\varepsilon \rightarrow 0$ примет вид

$$\frac{\mu^2 \beta^2}{2} \pi''(x) + \pi'(x) = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию нормировки $\int_0^{\infty} \pi(x) dx = 1$, имеет следующую форму

$$\pi(x) = \frac{2}{\mu^2 \beta^2} \exp \left\{ - \frac{2}{\mu^2 \beta^2} x \right\}. \quad (8)$$

Следовательно, в условиях большой загрузки $\rho \uparrow 1$ асимптотическое распределение числа требований в СМО с рекуррентным обслуживанием является экспоненциальным (8) с параметром $2/\mu^2 \beta^2$. С использованием метода вложенных цепей Маркова найдена производящая функция распределения вероятностей числа требований в системах в стационарном режиме [7]

$$P(y) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i) y^i = (1 - \rho) \frac{\beta(\lambda(1-y))}{1 - \frac{\beta(\lambda(1-y))}{1-y}}, \quad (9)$$

где $\beta(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dB(t)$.

Сделав в (9) замену $ie = x$; $P(i) = G(x)\varepsilon$; $y = 1 - \alpha\varepsilon$,
получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i)y^i = \sum G(x)(1-\alpha\varepsilon)^{x/\varepsilon} \varepsilon = \int_0^{\infty} G(x)e^{-\alpha x} dx,$$

$$\begin{aligned} (1-\rho) \frac{\beta(\lambda(1-y))}{1 - \frac{1-\beta(\lambda(1-y))}{1-y}} &= \varepsilon \frac{\beta(\lambda\alpha\varepsilon)}{1 - \frac{1-\beta(\lambda\alpha\varepsilon)}{\alpha\varepsilon}} = \varepsilon \frac{\alpha\varepsilon\beta(\lambda\alpha\varepsilon)}{\alpha\varepsilon - 1 + \beta(\lambda\alpha\varepsilon)} = \\ &= \varepsilon \frac{\alpha\varepsilon\beta(\lambda\alpha\varepsilon)}{\alpha\varepsilon - 1 + 1 - \lambda \frac{\alpha\varepsilon}{\mu} + \frac{\lambda^2\alpha^2\varepsilon^2}{2}\beta^2} = \varepsilon \frac{1}{1 - \rho + \varepsilon \frac{\lambda^2\alpha}{2}\beta^2} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2\beta^2}{2}\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\mu^2\beta^2}{2}\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} G(x)e^{-\alpha x} dx = 1 / \left(1 + \frac{\mu^2\beta^2}{2}\alpha\right).$$

Если преобразование Лапласа плотности распределения $G(x)$ имеет вид $1/(1 + \alpha/\gamma)$, то $G(x)$ является экспоненциальной функцией

$$G(x) = \gamma e^{-\gamma x},$$

следовательно, в рассматриваемом случае получим асимптотическую плотность $G(x)$ вида

$$G(x) = \frac{2}{\mu^2\beta^2} e^{-\frac{2}{\mu^2\beta^2}x}.$$

3.3. Система массового обслуживания с полумарковским потоком и обслуживанием

Исследуя изложенный метод, рассмотрим однолинейную СМО, на вход которой поступает полумарковский поток требований, определяемый матрицей A_{ij} (1). Обслуживание является полумарковским, определяется матрицей B_{ij} (1). Поток и обслуживание независимы. Система с ожиданием функционирует в стационарном режиме, который определяется стационарным распределением $P(i)$.

Построим марковский процесс

$$(i(t), j(t), u(t), z(t), v(t)),$$

где $j(t)$ – значение в момент t полумарковского процесса, определяющего длину интервала между моментами поступления требований во входящем потоке; $z(t)$ – значение в момент t полумарковского процесса, определяющего продолжительность обслуживания требования, в данный момент стоящего на приборе; $u(t)$ – длина интервала от момента t до поступления требования; $v(t)$ – длина интервала от момента t до окончания обслуживания.

Стационарное распределение

$$P(i, j, u, z, v) = P(i(t)=i, j(t)=j, u(t)<u, z(t)=z, v(t)<v)$$

построенного процесса удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P(i, j, u, z, v)}{\partial u} + \frac{\partial P(i, j, u, z, v)}{\partial v} = \frac{\partial P(i, j, u, z, v)}{\partial u} + \\ & + \frac{\partial P(i, j, u, z, v)}{\partial v} + \sum_j \frac{\partial P(i-1, j, u, z, v)}{\partial u} A_{jv}(u) + \\ & + \sum_k \frac{\partial P(i+1, j, u, k, v)}{\partial v} B_{kz}(v). \end{aligned}$$

В полученном уравнении произведем замену $i\epsilon = x$, $P(i, \nu, u, z, \nu) = \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)$ и, раскладывая $\mathcal{H}(x \pm \epsilon, \nu, u, z, \nu)$ в ряд по ϵ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)}{\partial \nu} + \\ &+ \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}(x, j, u, z, \nu)}{\partial u} - \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}(x, j, u, z, \nu)}{\partial u \partial x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^3 \mathcal{H}(x, j, u, z, \nu)}{\partial u \partial x^2} \right) A_{j\nu} + \sum_\kappa \left(\frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, \kappa, 0)}{\partial \nu} + \right. \\ &+ \left. \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}(x, \nu, u, \kappa, 0)}{\partial \nu \partial x} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^3 \mathcal{H}(x, \nu, u, \kappa, 0)}{\partial \nu \partial x^2} \right) B_{\kappa 2}(\nu). \quad (I) \end{aligned}$$

Обозначив $\sum_\nu \sum_\epsilon \mathcal{H}(x, \nu, \infty, z, \infty) = \mathcal{H}(x)$, просуммировав все уравнения (I) по ν и z и, считая $u = \infty$, $\nu = \infty$, имеем уравнение

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(x, 0)}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{H}(x, 0)}{\partial \nu} \right) = \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(x, 0)}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{H}(x, 0)}{\partial \nu} \right), \quad (2)$$

где
$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, 0)}{\partial u} = \sum_{\nu, z} \frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)}{\partial u} \Big|_{\substack{u=0 \\ \nu=\infty}};$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, 0)}{\partial \nu} = \sum_{\nu, z} \frac{\partial \mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu)}{\partial \nu} \Big|_{\substack{u=\infty \\ \nu=0}}.$$

Решение уравнения (I) при $\epsilon = 0$ будем искать в виде

$$\mathcal{H}(x, \nu, u, z, \nu) = \mathcal{H}(x) F(\nu, u) H(z, \nu),$$

тогда $F(\nu, u)$ и $H(z, \nu)$ определяется уравнениями

$$\frac{\partial F(\nu, u)}{\partial u} = \frac{\partial F(\nu, u)}{\partial \nu} + \sum_j \frac{\partial F(j, 0)}{\partial u} A_{j\nu}(u), \quad (3)$$

$$\frac{\partial H(z, v)}{\partial v} = \frac{\partial H(z, v)}{\partial v} + \sum_{\kappa} \frac{\partial H(\kappa, v)}{\partial v} B_{\kappa z}(v) \quad (4)$$

и начальными условиями $F(v, 0) = 0$, $H(z, 0) = 0$, которые решаются следующим образом. При $u \rightarrow \infty$ первое уравнение обращается в систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F(v, v)}{\partial u} = \sum_j \frac{\partial F(j, v)}{\partial u} a_{jv},$$

где $a_{jv} = A_{jv}(\infty)$ — переходные вероятности цепи Маркова, вложенной в полумарковский процесс. Эта система совпадает с системой уравнений для стационарных вероятностей a_j цепи Маркова, поэтому ее решение имеет вид

$$\frac{\partial F(v, v)}{\partial u} = \lambda a_v,$$

где λ — произвольная постоянная, значение которой определим ниже.

Решение уравнения (3) запишем

$$F(v, u) = \lambda \int_0^u (a_v - \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds \quad (5)$$

и константу λ найдем из условия нормировки

$$1 = \sum_v F(v, \infty) = \lambda \int_0^\infty (1 - \sum_v \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds$$

в виде

$$\lambda = 1 / \int_0^\infty (1 - \sum_v \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds.$$

Решение уравнения (4) определим аналогично (5)

$$H(z, v) = \mu \int_0^v (b_z - \sum_{\kappa} b_{\kappa} B_{\kappa z}(s)) ds.$$

Следовательно, решение $\pi(x, y, u, z, v)$ уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ запишем

$$\pi(x, y, u, z, v) = \pi(x) \lambda \int_0^u (a_j - \sum_j a_j A_{jv}(z)) dz \mu \int_0^v (b_z - \sum_k b_k B_{kz}(v)) dv. \quad (6)$$

Теперь уравнение (1) представим с точностью до ε

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \pi(x, y, 0, z, v)}{\partial u} + \frac{\partial \pi(x, y, u, z, 0)}{\partial v} = \\ & = \frac{\partial \pi(x, y, u, z, v)}{\partial u} + \frac{\partial \pi(x, y, u, z, v)}{\partial v} + \\ & + \sum_j \frac{\partial \pi(x, j, 0, z, v)}{\partial u} A_{jv}(u) + \sum_k \frac{\partial \pi(x, y, u, k, 0)}{\partial v} B_{kz}(v) - \\ & - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_j \frac{\partial \pi(x, j, 0, z, v)}{\partial u} A_{jv}(u) - \sum_k \frac{\partial \pi(x, y, u, k, 0)}{\partial v} B_{kz}(v) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (6), решение уравнения (7) найдем в виде

$$\begin{aligned} \pi(x, y, u, z, v) = & \pi(x) \lambda \int_0^u (a_j - \sum_j a_j A_{jv}(z)) dz \mu \int_0^v (b_z - \\ & - \sum_k b_k B_{kz}(v)) dv + \varepsilon \pi'(x) \Phi(y, u, z, v), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Phi(y, u, z, v)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi(y, u, z, v)}{\partial u} + \frac{\partial \Phi(y, u, z, v)}{\partial v} = \frac{\partial \Phi(y, 0, z, v)}{\partial u} + \\ & + \frac{\partial \Phi(y, u, z, 0)}{\partial v} - \sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0, z, v)}{\partial u} A_{jv}(u) - \end{aligned}$$

$$\sum_k \frac{\partial \Phi(v, u, k, 0)}{\partial v} B_{k2}(v) + \lambda \mu \sum_j a_j A_{jv}(u) \int_0^v (b_k -$$

$$- \sum_k b_k B_{k2}(v)) dv - \lambda \mu \sum_k b_k B_{k2}(v) \int_0^v (a_v - \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds. \quad (9)$$

Подставляя (8) в левую часть уравнения (2), а (6) - в его правую часть, получим

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\lambda T(x) + \varepsilon T'(x)) \frac{\partial \Phi(0)}{\partial u} - \mu T(x) - \varepsilon T'(x) \frac{\partial \Phi(0)}{\partial v} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda T(x) + \mu T(x)),$$

откуда при $\mu - \lambda = \mu \varepsilon$ будем иметь уравнение

$$T''(x) + \gamma T'(x) = 0.$$

для асимптотической плотности $\tilde{T}(x)$ распределения вероятностей значений числа требований в системе с параметром γ вида

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu + \partial \Phi(0)/\partial u - \partial \Phi(0)/\partial v},$$

где

$$\frac{\partial \Phi(0)}{\partial u} = \sum_{j, z} \frac{\partial \Phi(v, u, z, v)}{\partial u} \Big|_{\substack{u=0 \\ v=\infty}},$$

$$\frac{\partial \Phi(0)}{\partial v} = \sum_{j, z} \frac{\partial \Phi(v, u, z, v)}{\partial v} \Big|_{\substack{u=\infty \\ v=0}}$$

определяются решением $\Phi(v, u, z, v)$ уравнения (9). Из него, считая $v = \infty$ и просуммировав по z , получим систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi(v, u)}{\partial u} = \frac{\partial \Phi(v, 0)}{\partial u} - \sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0)}{\partial u} A_{jv}(u) +$$

$$+ \lambda \sum_j a_j A_{jv}(u) - \lambda \mu \int_0^u (a_v - \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds, \quad (10)$$

которая при $u = \infty$ обращается в систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi(v, 0)}{\partial u} = \sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0)}{\partial u} a_{jv} - \lambda a_v + \lambda \mu \int_0^\infty (a_v - \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds, \quad (11)$$

определяющую решение с точностью до константы, значение которой найдем из дополнительного уравнения, получаемого следующим образом.

В уравнении (10) $\frac{\partial \Phi(v, 0)}{\partial u}$ заменим правой частью уравнения (11), получим

$$\frac{\partial \Phi(v, u)}{\partial u} = \sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0)}{\partial u} (a_{jv} - A_{jv}(u)) - \lambda \sum_j a_j (a_{jv} -$$

$$- A_{jv}(u)) + \lambda \mu \int_u^\infty (a_v - \sum_j a_j A_{jv}(s)) ds.$$

Отсюда следует

$$\Phi(v, \infty) = \sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0)}{\partial u} \int_0^\infty (a_{jv} - A_{jv}(u)) du -$$

$$- \lambda \sum_j a_j \int_0^\infty (a_{jv} - A_{jv}(u)) du +$$

$$+ \int_0^\infty u (a_v - \sum_j a_j A_{jv}(u)) du.$$

Так как $\sum_j \Phi(j, \infty) = 0$, то имеет место дополнительное к системе (II) уравнение

$$\sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0)}{\partial u} \int_0^{\infty} (1 - \sum_j A_{jv}(u)) du =$$

$$(12)$$

$$= \lambda \sum_j \alpha_j \int_0^{\infty} (1 - \sum_j A_{jv}(u)) du - \int_0^{\infty} u (1 - \sum_j \sum_j \alpha_j A_{jv}(u)) du.$$

Таким образом, используя систему (II), (12), будем иметь

$$\frac{\partial \Phi(0)}{\partial u} = \sum_j \frac{\partial \Phi(j, 0)}{\partial u}.$$

Аналогично определив $\partial \Phi(0) / \partial v$, найдем параметр γ экспоненциального распределения

$$\pi(x) = \gamma e^{-\gamma x}$$

асимптотической плотности $\pi(x)$ распределения вероятностей значений числа требований в СМО с полумарковским входящим потоком и обслуживанием. Здесь значение γ определится соотношением

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu + \partial \Phi(0) / \partial v - \partial \Phi(0) / \partial u},$$

где $\partial \Phi(0) / \partial v$ и $\partial \Phi(0) / \partial u$ обозначены выше.

3.4. Системы с повторными вызовами

Системы с повторными вызовами образуют специфический класс СМО, характеризующихся наличием источников повторных заявок. Эти модели часто используются при исследовании систем связи, поэтому разработка методов анализа таких СМО представляет значительный интерес [24, 25]. Здесь асимптотика рассматривается при $\rho \uparrow \rho_0$. В следующей главе аналогичные задачи решаются при конечных нагруз-

ках, но с асимптотикой по интенсивности повторения вызовов.

Рассмотрим $\mathcal{V}$ – канальную систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток первичных требований интенсивности λ . Если в момент прихода первичного требования имеется хотя бы один свободный канал, оно немедленно начинает обслуживаться; если все обслуживающие приборы (каналы) заняты, то с вероятностью $1 - N_1$ это требование теряется, не оказывая никакого влияния на дальнейшее функционирование системы, а с вероятностью N_1 оно образует источник повторных вызовов. Каждый источник посылает пуассоновский поток повторных вызовов интенсивности σ . Если в момент поступления повторного вызова имеется хотя бы один свободный канал, то этот вызов начинает обслуживаться, а источник, из которого этот вызов поступил, ликвидируется; если же свободных каналов нет, то с вероятностью $1 - N_2$ соответствующий источник отказывается от дальнейших попыток получения обслуживания и покидает систему, а с вероятностью N_2 состояние системы не меняется. Время обслуживания распределено по одному и тому же показательному закону как для первичных, так и для повторных вызовов с интенсивностью μ [36].

При $N_2 = 1$ источник повторных вызовов называется абсолютно настойчивым, при $N_2 < 1$ – неабсолютно настойчивым. В первом случае стационарный режим функционирования системы существует при $\lambda < \nu\mu$, а во втором – при любых λ и $\mu > 0$. Условия большой загрузки различаются: в первом случае им является $\lambda \rightarrow \nu\mu$, а во втором – $\lambda \rightarrow \infty$.

Пусть $i(t)$ – число источников повторных вызовов в момент t . Рассмотрим систему в стационарном режиме. Наша цель – определение асимптотического (при соответствующем условии) распределения вероятностей значения величины $i(t)$. Для марковизации системы определим $j(t)$ – число каналов, занятых обслуживанием

в момент t , тогда двумерный процесс $(i(t), j(t))$ является марковским с дискретным множеством состояний.

Рассмотрим

$$P_j(i) = P(i(t)=i, j(t)=j)$$

и выпишем уравнения статистического равновесия для стационарного распределения

$$(\lambda + i\sigma) P_0(i) = \mu P_1(i),$$

$$(\lambda + \nu\mu + i\sigma) P_j(i) = \lambda P_{j-1}(i) + (i+1)\sigma P_{j+1}(i+1) + (\nu+1)\mu P_{j+1}(i),$$

$$(\lambda + \nu\mu) P_0(i) = \lambda P_{0-1}(i) + (i+1)\sigma P_{0+1}(i+1) + \lambda P_0(i-1). \quad (1)$$

Для асимптотического (при $\lambda \uparrow \nu\mu$) решения системы в (1) сделаем замену

$$i\varepsilon = x, P_j(i) = c \mathcal{T}_j(x),$$

где ε - положительный малый параметр, значение которого будет определено ниже; c - некоторый постоянный множитель. Тогда (1) примет вид

$$(\varepsilon\lambda + x\sigma) \mathcal{T}_0(x) = \varepsilon\mu \mathcal{T}_1(x),$$

$$(\varepsilon\lambda + \varepsilon\nu\mu + i\sigma) \mathcal{T}_j(x) = \varepsilon\lambda \mathcal{T}_{j-1}(x) + \sigma(x+\varepsilon) \mathcal{T}_{j+1}(x+\varepsilon) + \varepsilon(\nu+1)\mu \mathcal{T}_{j+1}(x),$$

$$(\varepsilon\lambda + \varepsilon\nu\mu) \mathcal{T}_0(x) = \varepsilon\lambda \mathcal{T}_{0-1}(x) + \sigma(x+\varepsilon) \mathcal{T}_{0+1}(x+\varepsilon) + \varepsilon\lambda \mathcal{T}_0(x-\varepsilon). \quad (2)$$

Из (2), предполагая непрерывность функций $\mathcal{T}_j(x)$, получим соотношения малости для этих функций

$$x\sigma \mathcal{T}_0(x) = \varepsilon\mu \mathcal{T}_1(x),$$

$$\begin{aligned}x\sigma \pi_{\nu}(x) &= \varepsilon(\nu+1)\mu \pi_{\nu+1}(x), \\x\sigma \pi_{\nu-1}(x) &= \varepsilon\nu\mu \pi_{\nu}(x).\end{aligned}\quad (3)$$

Следовательно, с точностью до ε имеет место равенство

$$\pi(x) = \sum_{j=0}^{\nu} \pi_j(x) = \pi_{\nu}(x), \quad (4)$$

т.е. чтобы найти асимптотическое распределение вероятностей $\pi(x)$ числа источников повторных вызовов, достаточно из системы (2) определить вид функции $\pi_{\nu}(x)$. Для этого используем три уравнения:

$$\begin{aligned}(\varepsilon\lambda + \varepsilon\nu\mu)\pi_{\nu}(x) &= \varepsilon\lambda\pi_{\nu-1}(x) + \sigma(x+\varepsilon)\pi_{\nu-1}(x+\varepsilon) + \varepsilon\lambda\pi_{\nu}(x-\varepsilon), \\(\varepsilon\lambda + \varepsilon(\nu-1)\mu + x\sigma)\pi_{\nu-1}(x) &= \varepsilon\lambda\pi_{\nu-2}(x) + \sigma(x+\varepsilon)\pi_{\nu-2}(x+\varepsilon) + \varepsilon\nu\mu\pi_{\nu}(x), \\(\varepsilon\lambda + \varepsilon(\nu-2)\mu + x\sigma)\pi_{\nu-2}(x) &= \varepsilon\lambda\pi_{\nu-3}(x) + \sigma(x+\varepsilon)\pi_{\nu-3}(x+\varepsilon) + \varepsilon(\nu-1)\mu\pi_{\nu-1}(x).\end{aligned}$$

В последнее из этих уравнений входит функция $\pi_{\nu-3}(x)$, которую, используя соотношения малости (3), выразим через $\pi_{\nu-2}(x)$. Тогда для трех неизвестных функций $\pi_{\nu}(x)$, $\pi_{\nu-1}(x)$, $\pi_{\nu-2}(x)$ будем иметь систему трех уравнений, из которой, исключая $\pi_{\nu}(x)$ и $\pi_{\nu-2}(x)$, достаточно просто получить уравнение для $\pi_{\nu-1}(x)$

$$\varepsilon\sigma \frac{\nu\mu + \lambda}{2} (x\pi_{\nu-1}(x))'' + \varepsilon\sigma(\nu\mu - \lambda)x\pi_{\nu-1}(x)' + \varepsilon^2(\nu\mu(\nu-1)\mu - \lambda^2)\pi_{\nu-1}'(x) = 0,$$

считая в котором $I - \lambda/\nu\mu = \varepsilon$, будем иметь

$$x\pi_{\nu-1}'(x) + (1+x-\mu/\sigma)\pi_{\nu-1}(x) = 0,$$

т.е. $\pi_{\nu-1}(x)$ представим

$$\pi_{\nu-1}(x) = C_1 x^{\frac{\nu}{\sigma}-1} e^{-x},$$

где C - произвольная постоянная. Из соотношения (3) следует

$$\mathcal{T}_y(x) = \frac{C}{\varepsilon \nu \mu} x \mathcal{T}_{y-1}(x) = C x^{\mu/\varepsilon} e^{-x}, \quad (5)$$

так как $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}_y(x)$, то асимптотическое распределение числа источников повторных вызовов в многолинейной системе с абсолютной настойчивостью принадлежит гамма-распределению (5), в котором константа C определяется условием нормировки. Рассмотрим исходную систему массового обслуживания при $\rho'_2 < 1$ и произвольном $0 < H_1 \leq 1$. В этом случае система уравнений (I), определяющая стационарное распределение $P_y(i)$, отличается лишь последним уравнением, которое имеет вид

$$\begin{aligned} (\lambda H_1 + i\sigma(1-H_2) + \nu\mu) P_y(i) &= \lambda P_{y-1}(i) + \lambda H_1 P_y(i-1) + \\ &+ (i+1)\sigma P_{y-1}(i+1) + (i+1)\sigma(1-H_2) P_y(i+1), \end{aligned} \quad (6)$$

и значением параметра $\lambda = \bar{\lambda}$.

В этой системе произведем замену переменных

$$\bar{\lambda} \varepsilon = \lambda, \quad i \varepsilon = x, \quad P_y(i) = \mathcal{T}_y(x).$$

В условиях большой загрузки $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ выберем такой малый положительный параметр ε , чтобы величина $\lambda = \bar{\lambda} \varepsilon$ была конечной, ненулевой, тогда систему (I), (6) перепишем

$$\begin{aligned} (\lambda + x\sigma) \mathcal{T}_0(x) &= \mu \varepsilon \mathcal{T}_1(x), \\ (\lambda + x\sigma + \varepsilon \nu \mu) \mathcal{T}_y(x) &= \lambda \mathcal{T}_{y-1}(x) + \sigma(x+\varepsilon) \mathcal{T}_{y-1}(x+\varepsilon) + (\nu+1) \mu \varepsilon \mathcal{T}_{y+1}(x), \\ (\lambda H_1 + x\sigma(1-H_2) + \varepsilon \nu \mu) \mathcal{T}_y(x) &= \lambda \mathcal{T}_{y-1}(x) + \sigma(x+\varepsilon) \mathcal{T}_{y-1}(x+\varepsilon) + \\ &+ \lambda H_1 \mathcal{T}_y(x-\varepsilon) + \sigma(x+\varepsilon)(1-H_2) \mathcal{T}_y(x+\varepsilon). \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения малости (3) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}(\lambda + x\sigma) \mathcal{T}_0(x) &= \rho \in \mathcal{T}_1(x), \\(\lambda + x\sigma) \mathcal{T}_j(x) &= (j+1) \rho \in \mathcal{T}_{j+1}(x), \\(\lambda + x\sigma) \mathcal{T}_{j-1}(x) &= \nu \rho \in \mathcal{T}_j(x).\end{aligned}\tag{8}$$

С точностью до ε последнее равенство системы (7) можно записать

$$\begin{aligned}(\lambda H_1 + x\sigma(1-H_2) + \varepsilon \nu \rho) \mathcal{T}_j(x) &= \lambda \mathcal{T}_{j-1}(x) + x\sigma \mathcal{T}_{j-1}(x) + \\&+ \lambda H_1 \mathcal{T}_j(x - \varepsilon) + (x + \varepsilon)\sigma \mathcal{T}_j(x + \varepsilon),\end{aligned}$$

но так как $(\lambda + x\sigma) \mathcal{T}_{j-1}(x) = \nu \rho \in \mathcal{T}_j(x)$, то

$$(\lambda H_1 + x\sigma(1-H_2)) \mathcal{T}_j(x) = \lambda H_1 \mathcal{T}_j(x - \varepsilon) + \sigma(1-H_2)(x + \varepsilon) \mathcal{T}_j(x + \varepsilon),$$

откуда, раскладывая $\mathcal{T}_j(x \pm \varepsilon)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь двумя слагаемыми, для $\mathcal{T}_j(x)$ будем иметь уравнение

$$\lambda H_1 \mathcal{T}_j'(x) = \sigma(1-H_2)(x \mathcal{T}_j(x))',$$

т.е. имеет место равенство

$$(\lambda H_1 - \sigma(1-H_2)x) \mathcal{T}_j(x) = 0,$$

из которого следует, что

$$\mathcal{T}_j(x) = c \delta \left(x - \frac{\lambda H_1}{\sigma(1-H_2)} \right).$$

Из соотношения малости (8), аналогично (4), с точностью до ε имеет место равенство

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}_j(x) = \mathcal{T}_0(x).$$

Таким образом, асимптотическое распределение числа источников повторных вызовов вырождено, т.е. это число асимптотически детерминировано, поэтому асимптотическое среднее $Mz(t)$ можно считать равным

$$M i(t) = \frac{\lambda H_1}{\sigma(1-H_2)}$$

Это равенство совпадает с результатом работы [12].

Зная асимптотическое среднее, найдем распределение вероятностей значений отклонения $i(t)$ от его среднего. Для этого в исходной системе уравнений (1), (6) сделаем замену переменных

$$\lambda \varepsilon = \lambda, \left(i - \frac{\lambda H_1}{\sigma(1-H_2)}\right) \sqrt{\varepsilon} = y, P_v(i) = G_v(y),$$

будем иметь

$$\left(\lambda \frac{1-H_2+H_1}{1-H_2} + \sigma y \sqrt{\varepsilon}\right) G_0(y) = \mu \varepsilon G_1(y),$$

$$\left(\lambda \frac{1-H_2+H_1}{1-H_2} + \sigma y \sqrt{\varepsilon}\right) G_v(y) = \lambda G_{v-1}(y) +$$

$$+ \left(\lambda \frac{H_1}{1-H_2} + \sigma y \sqrt{\varepsilon}\right) G_{v-1}(y + \sqrt{\varepsilon}) + (\lambda + 1) \mu \varepsilon G_{v+1}(y),$$

$$(2\lambda H_1 + y\sigma(1-H_2)\sqrt{\varepsilon} + \nu\mu\varepsilon) G_v(y) = \lambda G_{v-1}(y) +$$

$$+ (\lambda H_1/(1-H_2) + y\sigma\sqrt{\varepsilon} + \sigma\varepsilon) G_{v-1}(y + \sqrt{\varepsilon}) + \lambda H_1' G_v(y - \sqrt{\varepsilon}) +$$

$$+ (\lambda H_1 + y\sigma(1-H_2)\sqrt{\varepsilon} + \sigma(1-H_2)\varepsilon) G_v(y + \sqrt{\varepsilon}). \quad (9)$$

Из этой системы получим соотношения малости для функций $G_v(y)$

$$\lambda \frac{1-H_2+H_1}{1-H_2} G_0(y) = \mu \varepsilon G_1(y);$$

$$\lambda \frac{1-H_2+H_1}{1-H_2} G_{\nu}(y) = (\nu+1)\mu \varepsilon G_{\nu+1}(y);$$

$$\lambda \frac{1-H_2+H_1}{1-H_2} G_{\nu-1}(y) = \nu\mu \varepsilon G_{\nu}(y). \quad (10)$$

Рассмотрим два последних уравнения системы (9). Используя соотношения малости (10), из первого уравнения определим

$$\left(\lambda \frac{1-H_2+H_1}{1-H_2} + \sigma y \sqrt{\varepsilon} \right) G_{\nu-1}(y) = \sigma \mu \varepsilon G_{\nu}(y).$$

Используя его в последнем уравнении системы (9), для функции $G_{\nu}(y)$ получим уравнение

$$\frac{\lambda H_1}{1-H_2} G_{\nu}''(y) + \sigma y G_{\nu}'(y) + \sigma G_{\nu}(y) = 0. \quad (11)$$

С точностью до ε из (10) имеем

$$G(y) = \sum_{\nu=0}^{\nu} G_{\nu}(y) = G_{\nu}(y),$$

следовательно, асимптотическое распределение вероятностей $G(y)$ значений отклонения $z(t)$ от его асимптотического среднего удовлетворяет уравнению (11), решением которого является плотность нормального распределения

$$G(y) = C \exp \left\{ -y^2/2 \frac{\lambda H_1}{\sigma(1-H_2)} \right\},$$

где C — нормирующий множитель.

Таким образом, число источников повторных вызовов в многолинейной системе с неабсолютно настойчивыми абонентами является асимптотически нормальным (при $\lambda \rightarrow \infty$) со средним M_i и дисперсией D_i вида

$$M_i = \lambda \frac{H_1}{\sigma(1-H_2)}, \quad D_i = \lambda \frac{H_1}{\sigma(1-H_2)}. \quad (12)$$

Полученный вид дисперсии (I2) совпадает с результатом, приведенным в [11].

3.5. Система с детерминированным динамическим приоритетом

Рассмотрим однолинейную СМО с динамическими приоритетами [13], на вход которой поступают два простейших потока требований с параметрами λ_1 для первого потока и λ_2 - для второго. Интенсивность обслуживания требований первого потока равна μ_1 , а требований второго потока - μ_2 . В этом случае загрузка системы $\rho = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}$. Система функционирует в стационарном режиме $\rho < 1$. Состояние системы определим вектором (i, j) , где i - число требований первого типа, а j - второго типа в очереди. Процесс $(i(t), j(t))$ - немарковский. Будем считать $\nu(t) = 0$, если прибор свободен; $\nu(t) = 1$, если он занят обслуживанием требования первого типа; $\nu(t) = 2$ при обслуживании требования второго типа. В таком случае будем иметь марковский трехмерный процесс $(i(t), j(t), \nu(t))$, когда правило выбора требований на обслуживание определяется относительным динамическим приоритетом $\delta(i, j)$. Здесь $\delta(i, j)$ - условная вероятность того, что в момент окончания обслуживания на прибор выбирается требование первого типа при условии, что СМО находится в состоянии (i, j) независимо от типа обслуженного требования.

Пусть $P_\nu(i, j) = P(i(t) = i, j(t) = j, \nu(t) = \nu)$.

Распределение $P_\nu(i, j)$ удовлетворяет уравнению.

При $\nu = 1$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)P_1(i, j) = \lambda_1 P_1(i-1, j) + \lambda_2 P_1(i, j-1) + \delta(i+1, j)(\mu_1 P_1(i+1, j) + \mu_2 P_2(i+1, j)). \quad (I)$$

При $v = 2$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P_2(i, j) = \lambda_1 P_2(i-1, j) + \lambda_2 P_2(i, j-1) + \\ + (1 - \delta(i, j+1)) (\mu_1 P_1(i, j+1) + \mu_2 P_2(i, j+1)).$$

Будем рассматривать динамические приоритеты вида

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i > \mu_1 f(\kappa), j < \mu_2 (\kappa - f(\kappa)) \\ 0, & \text{если } i < \mu_1 f(\kappa), j > \mu_2 (\kappa - f(\kappa)). \end{cases} \quad (2)$$

Как показано в [10], оптимальные динамические приоритеты принадлежат классу детерминированных, т.е. $\delta(i, j)$ равно 1 либо 0, так что выбор $\delta(i, j)$ в виде (2) достаточно обоснован, здесь $f(\kappa)$ определяет границу изменения управления.

При произвольной функции $f(\kappa)$ решение системы (1) практически невозможно. В частности, для $f(\kappa) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \kappa$ (что соответствует выбору из более длинной очереди) найдено решение методом производящих функций [12]. При произвольной функции $f(\kappa)$ систему (1) решим асимптотическим методом, для этого в ней сделаем замену переменных [27, 28]

$$i\varepsilon = x, \quad j\varepsilon = y, \quad P_v(i, j) = \mathcal{P}_v(x, y);$$

будем иметь для каждой из областей (x, y) :

$$\text{при } \delta(x, y) = 1$$

$$\mathcal{P}_2(x, y) = 0,$$

$$(\mu_1 - \lambda_1) \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, y)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, y)}{\partial y} = 0,$$

$$\text{при } \delta(x, y) = 0$$

$$\mathcal{P}_1(x, y) = 0,$$

$$(\mu_2 - \lambda_2) \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, y)}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, y)}{\partial y} = 0.$$

в решении полученных уравнений используем граничные условия: в первом случае - $\delta(x, 0) = 1$, $\pi_1(x, 0) = 0$, во втором - $\delta(0, y) = 0$, $\pi_2(0, y) = 0$. Имеем $\pi_0(x, y) = 0$ во всей области $x \geq 0$, $y \geq 0$ за исключением точек кривой

$$\begin{cases} x = \mu_1 f(z), \\ y = \mu_2 (z - f(z)), \end{cases} \quad (3)$$

на которой двумерная плотность распределения $\pi(x, y) = \pi_1(x, y) + \pi_2(x, y)$ принимает δ -образные значения. Следовательно, в асимптотике длины очередей в системе с приоритетом (2) оказываются функционально зависимы, их связь определяется параметрической функцией (3), поэтому для полного асимптотического анализа рассматриваемой СМО достаточно найти асимптотическое распределение случайной величины

$$K = i/\mu_1 + j/\mu_2, \quad (4)$$

которая имеет смысл величины незавершенной работы $U(t)$ по обслуживанию всех требований, находящихся в системе в данный момент времени.

Как известно, величина незаконченной работы не зависит от дисциплины обслуживания, не допускающей простоя прибора при наличии требований. В связи с этим для асимптотического исследования величины (4) рассмотрим однолинейную СМО, на вход которой поступает простейший поток требований с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, а обслуживание является рекуррентным с гиперэкспоненциальной функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания

$$B(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-\mu_1 x}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-\mu_2 x}). \quad (5)$$

Плотность распределения $P(u) = P(u \leq U(t) < u + du) / du$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\lambda P(u) = P'(u) + \lambda \int_0^u P(u-z) b(z) dz, \quad (6)$$

где $b(z)$ — плотность распределения времени обслуживания.

В условиях большой загрузки произведем замену

$$ue = x, \quad P(u) = \pi(x),$$

затем уравнение (6) перепишем

$$\lambda \pi(x) = e \pi'(x) + \lambda \int_0^{\infty} \pi(x - ez) b(z) dz,$$

откуда получим

$$e \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \pi'(x) + \frac{e^2}{2} \lambda b^2 \pi''(x) = 0,$$

где $1/\mu$ и b^2 — среднее и второй момент времени обслуживания соответственно.

При $e = 1 - \lambda/\mu$ будем иметь

$$\frac{\lambda b^2}{2} \pi''(x) + \pi'(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\pi(x) = \frac{2}{\lambda b^2} \exp \left\{ -\frac{2x}{\lambda b^2} \right\}. \quad (7)$$

Из (5) следует

$$b^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{2}{\mu_1^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{2}{\mu_2^2}. \quad (8)$$

Таким образом, величина (4) имеет асимптотически экспоненциальное распределение (7) с параметрами (8) и $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Итак, асимптотическое распределение числа требований в системе с детерминированным динамическим приоритетом имеет вид

$$\pi(x, y) = c e^{-\frac{2}{\lambda \delta^2} \left(\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} \right)} \delta \left(x - \mu_1 \left(\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} \right) \right),$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. δ^2 определяется соотношением (8), а константа — условием нормировки.

Более точное решение этой задачи приведено в работе [14]. Рассматривая двумерный процесс незаконченной работы по обслуживанию всех требований первого типа, а также всех требований второго типа, асимптотическим методом в условиях большой загрузки можно исследовать СМО с рекуррентным произвольным обслуживанием. Если за состояние системы взять время ожидания требования, стоящего первым в каждой очереди, то эту же задачу можно решить и для системы с рекуррентным потоком. Используя метод дополнительного события, можно решить задачу о динамических приоритетах, когда и поток, и обслуживание — рекуррентные. Чтобы найти более точное асимптотическое решение, была использована идея метода пограничного слоя для анализа эллиптического дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных с границей разрыва коэффициентов внутри области определения решения [14]. К такому виду уравнений приводит асимптотический анализ системы (I).

3.6. Система с недетерминированным динамическим приоритетом

Рассмотрим однолинейную СМО, на вход которой поступают два простейших потока требований с параметрами λ_1 для первого и λ_2 для второго потока. Для требований того и другого типа обслуживание будет экспоненциальным с интенсивностью μ . Если требование в момент своего поступления застаёт прибор свободным, оно начинает немедленно обслуживаться. Если прибор занят, то

поступившее требование образует источник повторных вызовов (ИПВ), т.е. оно вновь обращается к прибору через случайный интервал времени, который будет распределенным по экспоненциальному закону с параметром σ_1 для требований первого и σ_2 - для требований второго потока.

Найдем асимптотическое, при большой загрузке стационарное распределение вектора $(i(t), j(t))$, где $i(t)$ и $j(t)$ - число ИПВ требований первого и второго потока в момент времени t соответственно.

Стационарный режим существует при $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 < \mu$. Условие, при котором $\mu - \lambda_1 - \lambda_2 = \varepsilon \mu$ (ε - малый положительный параметр), назовем условием большой загрузки. В данном случае нет необходимости определять состояние прибора, так как он почти всегда занят и процесс $(i(t), j(t))$ является марковским, стационарное распределение $P(i, j)$ которого с условием нормировки определяется системой уравнений

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) P(i, j) = \lambda_1 P(i-1, j) + \lambda_2 P(i, j-1) + \mu (\delta(i+1, j) P(i+1, j) + (1-\delta(i, j+1)) P(i, j+1)). \quad (1)$$

Для $P(i, 0)$ и $P(0, j)$ имеем

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) P(i, 0) = \lambda_1 P(i-1, 0) + \mu P(i+1, 0) + \mu (1-\delta(i, 1)) P(i, 1), \quad (2)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) P(0, j) = \lambda_2 P(0, j-1) + \mu P(0, j+1) + \mu \delta(1, j) P(1, j). \quad (3)$$

Здесь $\delta(i, j)$ - вероятность того, что после окончания обслуживания очередного требования повторное требование первого типа обратится к прибору раньше всех повторных требований второго типа и будет принято для обслуживания, если система находится в состоянии (i, j) .

Можно показать, что $\delta(i, j)$ имеет вид

$$\delta(i, j) = \sigma_i / (\sigma_i + \sigma_2 j).$$

Для решения системы (I)-(3) воспользуемся асимптотическим методом [34]. Обозначим

$$i\varepsilon = x, \quad j\varepsilon = y, \quad P(i, j) = \pi(x, y),$$

тогда систему (I)-(3) можно представить

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \pi(x, y) = \lambda_1 \pi(x - \varepsilon, y) + \lambda_2 \pi(x, y - \varepsilon) + \mu (\delta(x + \varepsilon, y) \pi(x + \varepsilon, y) + (1 - \delta(x, y + \varepsilon)) \pi(x, y + \varepsilon)), \quad (4)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \pi(x, 0) = \lambda_1 \pi(x - \varepsilon, 0) + \mu \pi(x + \varepsilon, 0) + \mu (1 - \delta(x, \varepsilon)) \pi(x, \varepsilon), \quad (5)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \pi(0, y) = \lambda_2 \pi(0, y - \varepsilon) + \mu \pi(0, y + \varepsilon) + \mu \delta(\varepsilon, y) \pi(\varepsilon, y), \quad (6)$$

$$\text{где } \delta(x, y) = \sigma_i x / (\sigma_i x + \sigma_2 y).$$

Разложим $\pi(x \pm \varepsilon, y \pm \varepsilon)$ и $\delta(x \pm \varepsilon, y \pm \varepsilon)$ в ряд по степеням ε . Ограничимся рассмотрением членов ряда не выше ε . Используя равенство $\mu - \lambda_1 - \lambda_2 = \mu\varepsilon$, считая $\mu = 1$ и устремляя ε к нулю, получим, что функция $\pi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$(\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y) \frac{\partial \pi}{\partial x} - (\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y) \frac{\partial \pi}{\partial y} = - \frac{\sigma_1 \sigma_2 (x + y)}{\sigma_1 x + \sigma_2 y} \pi \quad (7)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \pi(x, 0) &= 0, \\ \pi(0, y) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (7) имеет особенность при $\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y = 0$, поэтому рассмотрим его решение в области, ограниченной осью Ox и прямой $\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y = 0$.

Здесь $\mathcal{K}(x, y) = \varphi(x+y) \frac{\sigma_1 x + \sigma_2 y}{\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y}$,

так как $\mathcal{K}(x, 0) = 0$, то $\varphi(x) = 0$, следовательно, в рассматриваемой области

$$\mathcal{K}(x, y) = 0.$$

Аналогично можно показать, что $\mathcal{K}(x, y) = 0$ в области, ограниченной осью OY и прямой $\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y = 0$.

Таким образом, плотность $\mathcal{K}(x, y)$ в области $x \geq 0, y \geq 0$ имеет вид

$$\mathcal{K}(x, y) = \varphi(x+y) \delta(\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y),$$

где $\delta(z)$ - дельта-функция Дирака, а $\varphi(z)$ найдем из условия

$$\int_0^z \mathcal{K}(x, z-x) dx = e^{-z}, \quad (8)$$

в котором левая часть есть выражение плотности распределения суммарного числа повторных требований первого и второго потока через двумерную плотность, а правая - явное выражение этой одномерной асимптотической плотности распределения. Из последнего равенства получим

$$\varphi(z) = (\sigma_1 \lambda_2 + \sigma_2 \lambda_1) e^{-z},$$

следовательно,

$$\mathcal{K}(x, y) = (\sigma_1 \lambda_2 + \sigma_2 \lambda_1) e^{-(x+y)} \delta(\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y). \quad (9)$$

Более точные результаты могут быть найдены при использовании второго приближения разложения функций $\mathcal{K}(x, y)$ и $\delta(x, y)$. Разложим функции $\mathcal{K}(x|\epsilon, y|\epsilon)$ и $\delta(x|\epsilon, y|\epsilon)$ в ряд по

степеням ε . В отличие от метода первого приближения в данном случае ограничимся рассмотрением членов ряда порядка ε^2 . Это позволит увеличить точность решения системы (4)–(6). Используя равенство $\mu - \lambda_1 - \lambda_2 = \varepsilon \mu$, при $\mu = 1$, после некоторых преобразований уравнение (4) запишем

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(1 - \lambda_2 + \frac{\sigma_1 x}{\sigma_1 x + \sigma_2 y} \right) \mathcal{T}(x, y) \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\left(1 + \lambda_2 - \frac{\sigma_1 x}{\sigma_1 x + \sigma_2 y} \right) \mathcal{T}(x, y) \right) + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y}{\sigma_1 x + \sigma_2 y} \mathcal{T}(x, y) \right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y}{\sigma_1 x + \sigma_2 y} \mathcal{T}(x, y) \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) представляет собой однородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции $\mathcal{T}(x, y)$ [6]. Для решения этого уравнения произведем замену

$$t = \frac{\sigma_1 \lambda_2 x - \sigma_2 \lambda_1 y}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad z = x + y, \quad G(t, z) = \mathcal{T}(x, y).$$

Отсюда следует

$$x = \frac{\lambda_1 \sigma_2 z + \sqrt{\varepsilon} t}{\lambda_1 \sigma_2 + \lambda_2 \sigma_1}, \quad y = \frac{\lambda_2 \sigma_1 z - \sqrt{\varepsilon} t}{\lambda_1 \sigma_2 + \lambda_2 \sigma_1}.$$

Частные производные функции $\mathcal{T}(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} &= \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{\lambda_2 \sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}, & \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \frac{(\lambda_2 \sigma_1)^2}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} &= \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{(-\lambda_1 \sigma_2)}{\sqrt{\varepsilon}}, & \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \frac{(\lambda_1 \sigma_2)^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований уравнение (10) представим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha z \frac{\partial G}{\partial t} + tG) = 0, \quad (11)$$

где
$$\alpha = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \lambda_1 \lambda_2 (\sigma_2^2 \lambda_1 + \sigma_1^2 \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_2)}{(\sigma_2 \lambda_1 + \sigma_1 \lambda_2)^2}.$$

Из (11) следует, что

$$\alpha z \frac{\partial G}{\partial t} + tG = C_1(z).$$

Откуда

$$G(t, z) = \frac{C_1(z)}{\alpha z} e^{-\frac{t^2}{2\alpha z}} \int_0^t e^{\frac{u^2}{2\alpha z}} du + C_2(z) e^{-\frac{t^2}{2\alpha z}}.$$

Найдем коэффициенты $C_1(z)$ и $C_2(z)$. Воспользуемся уже известным соотношением (8). Тогда запишем

$$\int_0^z \pi(x, z-x) dx = \frac{\sqrt{E}}{\sigma_2 \lambda_1 + \sigma_1 \lambda_2} \int_0^{\beta} G(t, z) dt = e^{-z}.$$

Откуда будем иметь

$$\int_0^{\beta} G(t, z) dt = \frac{\sigma_2 \lambda_1 + \sigma_1 \lambda_2}{\sqrt{E}} e^{-z}. \quad (12)$$

Изменение пределов интегрирования от $\alpha = -\frac{\sigma_2 \lambda_1 z}{\sqrt{E}}$, $\beta = \frac{\sigma_1 \lambda_2 z}{\sqrt{E}}$ на $(\alpha = \infty)$, $\beta = \infty$ в (12) практически не влияет на знак равенства. Поэтому можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t, z) dt = \frac{\sigma_2 \lambda_1 + \sigma_1 \lambda_2}{\sqrt{E}} e^{-z}. \quad (13)$$

Заметим, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\alpha z}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2\alpha z}} du dt$ расходится.

Чтобы выполнялось соотношение (13), коэффициент $C_1(z)$ должен быть равен нулю. С учетом этого получим

$$C_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha z}} \frac{G_2\lambda_1 + G_1\lambda_2}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-z}.$$

Следовательно,

$$G(t, z) = \frac{G_2\lambda_1 + G_1\lambda_2}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha z}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha z}}.$$

Перейдем к переменным x, y . Имеем

$$\pi(x, y) = \frac{G_2\lambda_1 + G_1\lambda_2}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-(x+y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(x+y)}} e^{-\frac{(G_1\lambda_2 x - G_2\lambda_1 y)^2}{2\alpha(x+y)\varepsilon}} \quad (14)$$

Найденная функция $\pi(x, y)$ в виде (9) либо в ее более точном приближении (14) решает задачу анализа СМО с двумя потоками требований и источниками повторных вызовов. Эта система была исследована здесь как СМО с динамическими недетерминированными приоритетами $S(i, j) = G_i i / (G_i i + G_2 j)$.

3.7. Система с формированием очередей

Изучение СМО с применением асимптотического метода завершим анализом двулинейной системы с формированием очередей, на вход которой поступает простейший поток требований с параметром λ . Время обслуживания этого потока будет экспоненциальным с параметром μ_1 для первого и μ_2 - для второго прибора. Каждое требование, поступившее в систему с вероятностью $S(i, j)$, ставится для обслуживания в очередь к первому прибору, а с вероят-

ностью $I - \delta(i, j)$ - ко второму, i - число требований в первой подсистеме, а j - во второй. Состояние системы определим вектором (i, j) . Процесс $(i(t), j(t))$ - марковский, его стационарное распределение

$$P(i, j) = P(i(t) = i, j(t) = j)$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P(i, j) = & \lambda (\delta(i-1, j) P(i-1, j) + \\ & + (1 - \delta(i, j-1)) P(i, j-1)) + \mu_1 P(i+1, j) + \mu_2 P(i, j+1). \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим правило формирования очередей $\delta(i, j)$ вида

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i < f(\kappa), j > \kappa - f(\kappa), \\ 0, & \text{если } i > f(\kappa), j < \kappa - f(\kappa), \end{cases} \quad (2)$$

где $f(\kappa)$ - монотонно возрастающая функция положительного параметра κ .

Как показано в [10, 29], оптимальное правило формирования очередей $\delta(i, j)$ относится к классу детерминированных управлений, т.е. $\delta(i, j)$ равно 1 либо 0, так что выбор $\delta(i, j)$ в виде (2) достаточно обоснован.

Так как решение системы (1) для произвольной функции $f(\kappa)$ практически невозможно, рассмотрим ее асимптотическое решение. В (1) произведем замену [30, 31]

$$i\varepsilon = x, j\varepsilon = y, P(i, j) = \pi(x, y),$$

$$\begin{aligned} \text{получим } (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi(x, y) = & \lambda (\delta(x, y) \pi(x - \varepsilon, y) + \\ & + (1 - \delta(x, y)) \pi(x, y - \varepsilon)) + \mu_1 \pi(x + \varepsilon, y) + \mu_2 \pi(x, y + \varepsilon). \end{aligned}$$

Раскладывая $\pi(x \pm \varepsilon, y)$ и $\pi(x, y \pm \varepsilon)$ в ряд по степеням ε с точностью ε^2 , будем иметь

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi(x, y) = & \lambda \left(\delta(x, y) \left(\pi(x, y) - \varepsilon \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial x^2} \right) + (1 - \delta(x, y)) \left(\pi(x, y) - \varepsilon \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial y^2} \right) \right) + \\ & + \mu_1 \left(\pi(x, y) + \varepsilon \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial x^2} \right) + \mu_2 \left(\pi(x, y) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

откуда получим уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\lambda \delta(x, y) + \mu_1}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\lambda(1 - \delta(x, y)) + \mu_2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial y^2} + \\ + \varepsilon(\mu_1 - \lambda \delta(x, y)) \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial x} + \varepsilon(\mu_2 - \lambda(1 - \delta(x, y))) \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

которое для области $\{(x, y): \delta(x, y) = 0\}$ запишем в виде

$$\varepsilon^2 \frac{\mu_1}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\lambda + \mu_2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial y^2} + \varepsilon \mu_1 \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial x} + \varepsilon(\mu_2 - \lambda) \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

а для области $\{(x, y): \delta(x, y) = 1\}$ -

$$\varepsilon^2 \frac{\lambda + \mu_1}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\mu_2}{2} \frac{\partial^2 \pi(x, y)}{\partial y^2} + \varepsilon(\mu_1 - \lambda) \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial x} + \varepsilon \mu_2 \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Разделив уравнение (4) на ε и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$ в условиях большой загрузки $\rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2) \uparrow 1$, для первой области имеем

$$\frac{\partial \pi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \pi(x, y)}{\partial y} = 0,$$

следовательно,

$$\pi(x, y) = \Phi(x + y).$$

Используя граничное условие для $P(i, 0)$, получим $\pi(x, 0) = 0$. Таким образом, $\pi(x, y) = 0$ в области $\{(x, y): \delta(x, y) = 0\}$ и во второй области. Асимптотическая плотность $\pi(x, y) = 0$ для всех $x \geq 0, y \geq 0$ кроме точек кривой

$$\begin{cases} x = \varphi(z), \\ y = z - \varphi(z), \end{cases} \quad (6)$$

на которой двумерная плотность распределения $\pi(x, y)$ принимает δ -образное значение. Следовательно, в асимптотике $\rho \uparrow 1$ количества требований в первой и второй подсистемах в системе формирования очередей оказываются функционально зависимы, связь которых определяется параметрической функцией (6), поэтому для полного асимптотического анализа рассматриваемой СМО достаточно найти асимптотическое распределение случайной величины $K = i + j$, которая является суммарным числом требований в рассматриваемой двулинейной системе.

Чтобы найти асимптотическое распределение суммарного числа требований в исследуемой СМО, решение уравнения (3) найдем в виде

$$\pi(x, y) = \Phi(x + y) = \Phi(z),$$

получим

$$\varepsilon^2 \frac{\lambda + \mu_1 + \mu_2}{2} \Phi''(z) + \varepsilon(\mu_1 + \mu_2 - \lambda) \Phi'(z) = 0. \quad (6)$$

Пусть $\varepsilon = 1 - \lambda/(\mu_1 + \mu_2)$, тогда в условиях большой загрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \uparrow 1 \quad \text{уравнение (6) представим в виде}$$

$$\Phi''(z) + \Phi'(z) = 0$$

решением которого является

$$\Phi(z) = \exp\{-z\}.$$

Таким образом, асимптотическое распределение числа требований в системе с формированием очередей запишем

$$\pi(x, y) = c e^{-(x+y)} \delta(x - \ell(x+y)). \quad (7)$$

Найденный результат можно уточнить, если непосредственно решить уравнение (3), которое относится к классу сингулярно возмущенных эллиптических дифференциальных уравнений. Сначала решим уравнение (5), сделаем в нем замену [32]

$$x + y = z, \quad \frac{\ell(z) - x}{\varepsilon} = t, \quad \pi(x, y) = \pi_1(t, z),$$

отбрасывая бесконечно малые слагаемые, уравнение (5) в условиях

$\lambda = \mu_1 + \mu_2$ перепишем следующим образом:

$$\frac{(2\mu_1 + \mu_2)(\ell'(z) - 1)^2 + \mu_2 \ell''(z)}{2} \frac{\partial^2 \pi_1(t, z)}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial \pi_1(t, z)}{\partial t} = 0.$$

Для решения $\pi_1(t, z)$ имеем

$$\pi_1(t, z) = A(z) \exp\{-\alpha_1(z)t\},$$

$$\text{где } \alpha_1(z) = \frac{2\mu_2}{(2\mu_1 + \mu_2)(f'(z) - 1)^2 + \mu_2 f'^2(z)} \quad (8)$$

Аналогично сделаем в уравнении (4) замену $x+y=z$, $\frac{x-f(z)}{\varepsilon} = t$, $\mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}_0(t, z)$, получим

$$\mathcal{P}_0(t, z) = B(z) \exp\{-\alpha_0(z)t\},$$

$$\text{где } \alpha_0(z) = \frac{2\mu_1}{\mu_1(f'(z) - 1)^2 + (2\mu_2 + \mu_1)^2 f'^2(z)} \quad (9)$$

Функции $A(z)$ и $B(z)$ определим из условий сшивания $\mathcal{P}_0(t, z)$ и $\mathcal{P}_1(t, z)$ на границе $t = 0$. Из условия непрерывности $\mathcal{P}(x, y)$ на границе $x = f(z)$, $y = z - f(z)$ имеем $\mathcal{P}_0(0, z) = \mathcal{P}_1(0, z)$, т.е. $A(z) = B(z)$. Во втором условии $\int_0^z \mathcal{P}(x, z-x) dx = e^{-z}$, слева от знака равенства стоит распределение суммарного числа требований в рассматриваемой СМО, а справа – асимптотическая плотность распределения числа требований в двулинейной системе с одним потоком требований. Из приведенного уравнения получим

$$A(z) = e^{-z/\varepsilon} \left(\frac{1}{\alpha_0(z)} + \frac{1}{\alpha_1(z)} \right). \quad (10)$$

Таким образом, асимптотическая плотность распределения $\mathcal{P}(x, y)$ имеет вид

$$\mathcal{P}(x, y) = \begin{cases} A(x+y) \exp\left(-\alpha_0(x+y) \frac{x-f(x+y)}{\varepsilon}\right), & \text{если } x > f(x+y), \\ A(x+y) \exp\left(-\alpha_1(x+y) \frac{f(x+y)-x}{\varepsilon}\right), & \text{если } x < f(x+y), \end{cases} \quad (11)$$

где $\alpha_1(z)$, $\alpha_0(z)$, $A(z)$ определены соотношениями (8)–(10). Соотношение (11) при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в более грубое равенство (7).

Глава 4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОТОКОЛОВ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

Протоколы случайного множественного доступа к передающей среде в локальных вычислительных сетях [15,17] являются тем объектом, для изучения которого необходимо применять метод математического моделирования. В этом случае мы обращаемся к задачам теории массового обслуживания, так как достаточно адекватными математическими моделями локальных вычислительных сетей являются СМО с дисциплинами обслуживания, описываемыми соответствующими протоколами доступа [33,34,35].

Нами исследованы четыре класса протоколов, построены соответствующие СМО, проведен их асимптотический анализ. Асимптотика определяется не по загрузке системы, а по интенсивности повторения вызова, когда эта интенсивность стремится к нулю. Производительность сети при этом достигает максимального значения, т.е. асимптотический анализ в этом случае позволяет определить предельные (по производительности) возможности рассматриваемых протоколов доступа и получить аналитические выражения, определяющие зависимости для их основных числовых характеристик.

4.1. Простая АЛОНА

Исследуем моноканальную локальную вычислительную сеть (ЛВС), каждая абонентская станция которой начинает передачу своего пакета в момент его появления независимо от наличия передачи в канале связи от других узлов (абонентских станций). Если два или большее число узлов одновременно осуществляют передачу, то их сообщения, накладываясь друг на друга, искажаются. Пакеты, искаженные во время конфликта, передаются повторно через случайные интервалы времени и могут вновь попадать в конфликтные передачи. Если во время передачи не произошла передача других сообщений, то исходное сообщение считается переданным успешно и не возвращается на повторные передачи [17].

Наиболее простой математической моделью протокола "простая АЛОНА" может служить следующая система массового обслуживания. Требования простейшего с параметром λ потока поступают для обслуживания на прибор, имеющий экспоненциальное с параметром μ время обслуживания. Одновременно может обслуживаться неограниченное количество требований. Требование, поступившее на пустой прибор и обслуженное без искажения другими требованиями, покидает систему, в противном случае образует источник повторных вызовов (ИПВ). Интенсивность каждого источника равна σ . Каждый из ИПВ предпринимает попытки успешного обслуживания, после которого требование покидает систему, а ИПВ прекращает существование.

Пусть $i(t)$ – число ИПВ в момент t ; $j(t)$ – число требований на обслуживании в момент времени t ; $H(i)$ – вероятность того, что в системе i источников повторных требований, на приборе всего одно требование, за время обслуживания которого другие требования не обслуживались; $G(i)$ – вероятность того,

что обслуживается единственное, но ранее искаженное в результате конфликта требование, в системе i ИПВ, $P_j(i) = P(i(t) = i, \nu(t) = \nu), \nu = 0; \nu = 2, 3, \dots$

Предполагается, что система функционирует в стационарном режиме, поэтому вероятности $H, G, P_j(i)$ от t не зависят и удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$(\lambda + \mu + iG)H(i) = \lambda P_0(i) + (i+1)G P_0(i+1),$$

$$(\lambda + iG)P_0(i) = \mu (H(i) + G(i-1)),$$

$$(\lambda + \mu + iG)G(i) = 2\mu P_2(i-1),$$

$$(\lambda + 2\mu + iG)P_2(i) = \lambda G(i) + \lambda H(i) + (i+1)G G(i+1) + (i+1)G H(i+1) + 3\mu P_3(i-1),$$

$$(\lambda + \nu\mu + iG)P_\nu(i) = \lambda P_{\nu-1}(i) + (i+1)G P_{\nu-1}(i+1) + (\nu+1)\mu P_{\nu+1}(i-1), \quad (1)$$

точное аналитическое решение которой практически невозможно.

Пропускная способность рассматриваемой СМО возрастает от нуля при $G = \infty$ до максимального значения при $G \rightarrow 0$. Проведем асимптотический (при $G \rightarrow 0$) анализ рассматриваемой СМО.

Обозначим $G = \varepsilon, i\varepsilon = x, H(i) = H(x), G(i) = G(x), P_j(i) = P_j(x)$.

Тогда систему (1) представим в виде

$$(\lambda + \mu + x)H(x) = \lambda P_0(x) + (x+\varepsilon)P_0(x+\varepsilon),$$

$$(\lambda + x)P_0(x) = \mu H(x) + \mu G(x-\varepsilon),$$

$$(\lambda + \mu + x)G(x) = 2\mu\pi_2(x),$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu + x)\pi_2(x) &= \lambda G(x) + \lambda H(x) + (x + \varepsilon)G(x + \varepsilon) + \\ &+ (x + \varepsilon)H(x + \varepsilon) + 3\mu\pi_3(x - \varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \nu\mu + x)\pi_\nu(x) &= \lambda\pi_{\nu-1}(x) + (x + \varepsilon)\pi_{\nu-1}(x + \varepsilon) + \\ &+ (\nu + 1)\mu\pi_{\nu+1}(x - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь обозначим

$$H(x) + G(x) + \sum_{\nu \neq 1} \pi_\nu(x) = T(x); \quad H(x) + G(x) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu\pi_\nu(x) = F(x).$$

Просуммируем все уравнения системы (2), получим

$$\begin{aligned} (\lambda + x)T(x) + \mu F(x) &= \lambda T(x) + (x + \varepsilon)T(x + \varepsilon) + \\ &+ \mu(F(x - \varepsilon) - H(x - \varepsilon)) + \mu H(x). \end{aligned}$$

Раскладывая $T(x + \varepsilon)$, $F(x - \varepsilon)$, $H(x - \varepsilon)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь двумя слагаемыми, имеем

$$\begin{aligned} xT(x) + \mu F(x) &= xT(x) + \varepsilon T(x) + \varepsilon xT'(x) + \\ &+ \mu F(x) + \mu H(x) - \mu H(x) - \varepsilon \mu F'(x) + \varepsilon \mu H'(x), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } (xT(x))' - \mu F'(x) + \mu H'(x) = 0,$$

откуда следует

$$xT(x) - \mu F(x) + \mu H(x) = C. \quad (3)$$

В системе (2), считая $\varepsilon = 0$, будем иметь

$$(\lambda + \mu + x)H(x) = \lambda\pi_0(x) + x\pi_0(x),$$

$$(\lambda + x)\pi_0(x) = \mu H(x) + \mu G(x),$$

$$(\lambda + \mu + x) G(x) = 2\mu \pi_2(x),$$

$$(\lambda + 2\mu + x) \pi_2(x) = (\lambda + x)(H(x) + G(x)) + 3\mu \pi_3(x),$$

$$(\lambda + \nu\mu + x) \pi_\nu(x) = (\lambda + x) \pi_{\nu-1}(x) + (\nu+1)\mu \pi_{\nu+1}(x).$$

Отсюда получим

$$H(x) = \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} \pi(x),$$

$$G(x) = \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} \frac{\lambda + x}{\mu} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} \pi(x),$$

$$\pi_0(x) = e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} \pi(x),$$

$$\pi_\nu(x) = \left(\frac{\lambda + x}{\mu}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} \pi(x). \quad (4)$$

Итак,

$$F(x) = H(x) + G(x) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \pi_\nu(x) = \frac{\lambda + x}{\mu} \pi(x).$$

Подставив полученные значения $H(x)$ и $F(x)$ в (3), имеем

$$\left(x - \mu \frac{\lambda + x}{\mu} + \mu \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}}\right) \pi(x) = C.$$

Таким образом, асимптотическая (при $\sigma \rightarrow 0$) плотность распределения $\pi(x)$ нормированного числа σi источников повторных вызовов имеет вид

$$\pi(x) = C / \left(\mu \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} - \lambda\right), \quad (5)$$

где C – постоянная, определяемая условием нормировки.

Если в рассматриваемой СМО будет неограниченное число мест для ожидания, то не выполняется необходимое условие нормировки для плотности $\mathcal{T}(x)$, так как при $x \rightarrow \infty \mathcal{T}(x) \rightarrow C/(-\lambda)$. Следовательно, при неограниченном числе мест для ожидания не существует стационарного режима функционирования изучаемой СМО при любых соотношениях между параметрами λ и μ .

Рассмотрим систему с ограниченным числом мест для ожидания. Пусть N – объем бункера и в асимптотике $G \rightarrow 0$ $N \in$ обозначим A , таким образом, $0 \leq x \leq A$. Ограниченность объема бункера предполагает возможность потери части требований, поступивших в момент, когда заняты все места для ожидания, причем вероятность потери требования будет тем больше, чем больше значение $\mathcal{T}(A)$. Соотношение (5) определяет асимптотическую плотность $\mathcal{T}(x)$ с точностью до постоянного множителя, значение которого определяется условием нормировки.

При анализе плотности $\mathcal{T}(x)$ определяющее значение имеет уравнение

$$\mu \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} = \lambda. \quad (6)$$

Если это уравнение не имеет положительных решений, т.е. для всех $x \geq 0$,

$$\lambda > \mu \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}}, \quad (7)$$

то константа

$$C = 1 / \int_0^A dx / \left(\mu \frac{\lambda + x}{\lambda + \mu + x} e^{-\frac{\lambda + x}{\mu}} - \lambda \right) \quad (8)$$

и в этом случае $\mathcal{F}(x)$ полностью определена соотношениями (5), (8).

Найдем такое значение $\rho = \lambda/\mu$, для которого выполняется соотношение (7). Обозначим $\bar{x} = (\lambda + x)/\mu$, тогда (7) будет иметь следующий вид:

$$\rho > \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \mu} e^{-\bar{x}}.$$

При $\bar{x} = (\sqrt{5} - 1)/2$ правая часть последнего неравенства получает максимальное значение для всех $\bar{x} \geq 0$, поэтому

$$\rho > \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \rho^*.$$

Приближенное значение $\rho^* = 0,206$.

При $\rho = \rho^*$ существует единственный корень x^* уравнения (6). Значение x^* найти нетрудно: $x^* = \mu((\sqrt{5} - 1)/2 - \rho^*)$. В этом случае соотношение (5) при $x = x^*$ не определено, но в любой окрестности этой точки интеграл от $\mathcal{F}(x)$ расходится для любой константы $C \neq 0$, следовательно, $C = 0$ и $\mathcal{T}(x) = 0$ для всех $x \neq x^*$. Таким образом, в случае $\rho = \rho^*$ асимптотическая плотность $\mathcal{T}(x)$ примет вид

$$\mathcal{T}(x) = \delta(x - x^*), \quad (9)$$

предполагается, что $x^* < A$.

При $\rho < \rho^*$ уравнение (6) имеет два положительных корня x_1, x_2 , и пусть $x_1 < x_2$. В этом случае соотношение (5) не определено в двух точках $x = x_1, x = x_2$, в любых окрестностях которых при $C \neq 0$ интеграл от $\mathcal{F}(x)$ расходится, а $C = 0$ и $\mathcal{T}(x) = 0$ для всех $x \neq x_1, x \neq x_2$. Таким образом, в случае $\rho < \rho^*$ асимптотическая плотность $\mathcal{T}(x)$ составит

$$\mathcal{T}(x) = \alpha \delta(x - x_1) + (1 - \alpha) \delta(x - x_2), \quad (10)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, $x_1 < x_2 < A$.

Вопрос об определении значения α остается открытым, хотя вполне вероятно утверждение, что $\alpha = 1$.

Соотношения (4), (5), (8)–(10) решают поставленную задачу анализа математической модели протокола случайного множественного доступа "простая АЛОНА". Важнейшими характеристиками изучаемого протокола являются:

- а) среднее число источников повторных вызовов; б) среднее число сообщений, одновременно передаваемых по каналу связи;
- в) среднее число повторных попыток на одну успешную передачу;
- г) среднее время ожидания кадра до его успешной передачи.

Рассмотрим ЛВС, функционирующую при $\rho = \rho^*$. Такая загрузка канала связи обеспечивает его максимальную производительность при незначительной доле потерянных требований, так как в этом случае асимптотически $\mathcal{T}(A) = 0$ в силу формулы (9).

Среднее число источников повторных вызовов $\bar{L}$ определяется следующим образом:

$$\bar{L} = \frac{1}{E} \int_0^A x \mathcal{T}(x) dx = \frac{x^*}{C} = \frac{\mu}{C} ((\sqrt{5}-1)/2 - \rho^*).$$

Среднее число сообщений $\bar{V}$, одновременно передаваемых по каналу связи, определяется распределением

$$q_v = \int_0^A \mathcal{T}_v(x) dx = \left(\frac{\lambda + x^*}{\mu} \right)^v \cdot \frac{1}{v!} e^{-\frac{\lambda + x^*}{\mu}} \quad \text{при } v \neq 1,$$

$$q_1 = \int_0^A (H(x) + G(x)) dx = \frac{\lambda + x^*}{\mu} e^{-\frac{\lambda + x^*}{\mu}},$$

следовательно,

$$\bar{v} = \frac{\lambda + x^*}{\mu} = \rho^* + (\sqrt{5}-1)/2 - \rho^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Значение $\bar{e} + \bar{v}$ можно интерпретировать как среднее число активных абонентских станций.

Так как вероятность потери сообщения в рассматриваемой ситуации можно пренебречь, то за единицу времени осуществляется λ успешных передач и производится $\bar{e}$ попыток повторного обращения к каналу связи, таким образом, среднее число $\bar{\kappa}$ повторных попыток на одну успешную передачу составляет

$$\bar{\kappa} = \bar{e} / \lambda = \frac{(\sqrt{5}-1)/2}{\rho^*} - 1.$$

Средняя длина интервала между повторными попытками равна $1/\mu + 1/\bar{e}$, в результате этого будем иметь среднее время ожидания T кадра до успешной передачи

$$T = (1/\mu + 1/\bar{e}) \bar{\kappa} = \frac{(\bar{e} + \mu)((\sqrt{5}-1)/2 - \rho^*)}{\bar{e}\lambda}.$$

Полученные формулы для $\bar{e}$, $\bar{v}$, $\bar{\kappa}$, T определяют основные числовые характеристики протокола "простая АЛОНА".

4.2. Синхронная АЛОНА

Для анализа протокола "синхронная АЛОНА" [37] рассмотрим СМО, на вход которой поступает простейший поток с параметром λ . Каждое требование, поступившее в систему, становится в очередь, длину которой обозначим $\bar{z}$. Функционирование обслуживающего прибора синхронизировано, т.е. генерируется серия последовательных временных сегментов, длины которых случайны, независимы и одинаково распределены с функцией распределения $B(x)$. Каждое требование из очереди с вероятностью q поступает в начале вре-

менного сегмента на обслуживающий прибор, так что одновременно обслуживается ν требований. Если $\nu = 1$, то в конце временного сегмента обслуженное требование покидает систему; если $\nu > 1$, то в конце временного сегмента все требования возвращаются в очередь и вновь повторяют попытку обслуживания. При $\nu = 0$ прибор простаивает в течение всего временного сегмента, даже если в очереди имеются требования.

Пусть $i(t)$ - число требований в очереди; $\nu(t)$ - число требований на обслуживании; $z(t)$ длина интервала от момента t до окончания текущего временного сегмента;

$$P_\nu(i, z) = P(i(t) = i, \nu(t) = \nu, z \leq z(t) < z + dz) / dz.$$

Распределение $P_\nu(i, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda P_\nu(i, z) = \frac{\partial P_\nu(i, z)}{\partial z} + \lambda P_\nu(i-1, z) +$$

$$+ b_{i+1} C_{i+\nu}^\nu q^\nu (1-q)^2 (P_\nu(i+\nu, 0) + P_\nu(i+\nu, 0) + \sum_{k=2}^{i+\nu} P_k(i+\nu-k)). \quad (1)$$

Пропускная способность исследуемой СМО возрастает от нуля при $q = 1$ до максимального значения при $q \rightarrow 0$, поэтому проведем асимптотический (при $q \rightarrow 0$) анализ этой системы. Обозначим

$$q = \varepsilon, i\varepsilon = x, P_k(i, z) = \pi_k(x, z), \pi(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(x, z),$$

$$\pi_k(x) = \int_0^{\infty} \pi_k(x, z) dz, \pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(x). \quad (2)$$

Рассмотрим

$$C_{i+\nu}^\nu q^\nu = \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+\nu)}{\nu!} \varepsilon^\nu = \frac{(x+\varepsilon)\dots(x+\nu\varepsilon)}{\nu!} = \frac{q_\nu(x, \varepsilon)}{\nu!},$$

$$\ln q_{\nu}(x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\nu} \ln(x + k\varepsilon) = \ln x^{\nu} + \sum_{k=1}^{\nu} \ln\left(1 + \frac{k\varepsilon}{x}\right) =$$

$$= \ln x^{\nu} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k\varepsilon}{x} = \ln x^{\nu} + \frac{\varepsilon}{x} \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \ln x^{\nu} e^{\frac{\varepsilon}{x} \frac{\nu(\nu+1)}{2}}$$

$$g_{\nu}(x, \varepsilon) = x^{\nu} e^{\frac{\varepsilon}{x} \frac{\nu(\nu+1)}{2}} - x^{\nu} \left(1 + \varepsilon \frac{\nu(\nu+1)}{2x}\right)$$

$$C_{i+\nu}^{\nu} q^{\nu} = \frac{x^{\nu}}{\nu!} \left(1 + \varepsilon \frac{\nu(\nu+1)}{2x}\right).$$

Для $(1-q)^i$ имеем

$$(1-q)^i = (1-\varepsilon)^{\frac{x}{\varepsilon}} = f(x, \varepsilon),$$

$$\ln f(x, \varepsilon) = \frac{x}{\varepsilon} \ln(1-\varepsilon) = \frac{x}{\varepsilon} \left(-\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = -x - \varepsilon \frac{x}{2},$$

$$f(x, \varepsilon) = e^{-x} e^{-\varepsilon \frac{x}{2}} = e^{-x} \left(1 - \varepsilon \frac{x}{2}\right)$$

$$(1-q)^i = e^{-x} \left(1 - \varepsilon \frac{x}{2}\right).$$

Таким образом, для биномиального распределения асимптотически получим

$$C_{i+\nu}^{\nu} q^{\nu} (1-q)^i = \frac{x^{\nu}}{\nu!} \left(1 + \varepsilon \frac{\nu(\nu+1)}{2x}\right) e^{-x} \left(1 - \varepsilon \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{x^{\nu}}{\nu!} e^{-x} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2x} - \frac{x}{2}\right)\right). \quad (4)$$

Определим асимптотику для суммы

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{v+1} P_k (v+1-k, 0) &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{T}_k (x+\varepsilon(v-k), 0) = \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{T}_k (x, 0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} (v-k) \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x} = \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{T}_k (x, 0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x} - \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим исходное уравнение (1) и произведем в нем замену (2). Используя полученные выше приближения (4) и (5), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathcal{T}_v (x, z) &= \frac{\partial \mathcal{T}_v (x, z)}{\partial z} + \lambda \mathcal{T}_v (x-\varepsilon, z) + \\
 &+ b(z) e^{-x} \frac{x^v}{v!} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{v(v+1)}{2x} - \frac{x}{2} \right) \right) (\mathcal{T}_0 (x+\varepsilon v, 0) + \\
 &+ \mathcal{T}_1 (x+\varepsilon v, 0) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{T}_k (x, 0) + \\
 &+ \varepsilon v \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x} - \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x}).
 \end{aligned}$$

Раскладывая $\mathcal{T}_v (x \pm \varepsilon, z)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь двумя слагаемыми, получим

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathcal{T}_v (x, z) &= \frac{\partial \mathcal{T}_v (x, z)}{\partial z} + \lambda \mathcal{T}_v (x, z) - \varepsilon \lambda \frac{\partial \mathcal{T}_v (x, z)}{\partial x} + \\
 &+ b(z) e^{-x} \frac{x^v}{v!} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{v(v+1)}{2x} - \frac{x}{2} \right) \right) (\mathcal{T}_0 (x, 0) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{T}_0 (x, 0)}{\partial x} + \\
 &+ \mathcal{T}_1 (x, 0) + \varepsilon v \frac{\partial \mathcal{T}_1 (x, 0)}{\partial x} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{T}_k (x, 0) + \\
 &+ \varepsilon v \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x} - \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{\partial \mathcal{T}_k (x, 0)}{\partial x}).
 \end{aligned}$$

тогда следует

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial z} - \varepsilon \lambda \frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial x} + b(z) e^{-x} \frac{x^\nu}{\nu!} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2x} - \frac{x}{2} \right) \right) \times \\ & \times (\mathcal{T}(x, 0) + \varepsilon \nu \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial x} - \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} \kappa \frac{\partial \mathcal{T}_k(x, 0)}{\partial x}) = 0, \\ & \frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial z} - \varepsilon \lambda \frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial x} + b(z) e^{-x} \frac{x^\nu}{\nu!} (\mathcal{T}(x, 0) + \varepsilon \nu \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial x} - \\ & - \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} \kappa \frac{\partial \mathcal{T}_k(x, 0)}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2x} - \frac{x}{2} \right) \mathcal{T}(x, 0)) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial z} + b(z) e^{-x} \frac{x^\nu}{\nu!} \mathcal{T}(x, 0) + \varepsilon \left(-\lambda \frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + b(z) e^{-x} \frac{x^\nu}{\nu!} \left(\nu \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial x} - \sum_{k=2}^{\infty} \kappa \frac{\partial \mathcal{T}_k(x, 0)}{\partial x} + \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2x} - \frac{x}{2} \right) \mathcal{T}(x, 0) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученное уравнение, при $\varepsilon = 0$, запишем

$$\frac{\partial \mathcal{T}_\nu(x, z)}{\partial z} + b(z) e^{-x} \frac{x^\nu}{\nu!} \mathcal{T}(x, 0) = 0,$$

откуда для распределения $\mathcal{T}_\nu(x, z)$ получим

$$\mathcal{T}_\nu(x, z) = C_\nu(x) - \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x} \mathcal{T}(x, 0) b(z).$$

Так как $\mathcal{T}_\nu(x, z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, то $C_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x} \mathcal{T}(x, 0)$,

т.е.

$$\mathcal{T}_\nu(x, z) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x} \mathcal{T}(x, 0) (1 - b(z)),$$

$$\mathcal{T}_j(x) = \frac{x^j}{j!} e^{-x} \mathcal{T}(x, 0) \int_0^\infty (1 - B(z)) dz = \frac{x^j}{j!} e^{-x} \mathcal{T}(x, 0) \frac{1}{\mu},$$

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}_j(x) = \mathcal{T}(x, 0) \frac{1}{\mu}, \quad \mathcal{T}(x, 0) = \mu \mathcal{T}(x)$$

$$\mathcal{T}_j(x, z) = \frac{x^j}{j!} e^{-x} \mathcal{T}(x) \mu (1 - B(z)). \quad (7)$$

Просуммируем по j все уравнения системы (6), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{T}(x, z)}{\partial z} + b(z) \mathcal{T}(x, 0) + \varepsilon \left(-\lambda \frac{\partial \mathcal{T}(x, z)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + b(z) \left(x \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial x} - \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{\partial \mathcal{T}_k(x, 0)}{\partial x} + \left(\frac{x^2 + 2x}{2x} - \frac{x}{2} \right) \mathcal{T}(x, 0) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее уравнение по z , в результате этого будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(x, \infty) - \mathcal{T}(x, 0) + \mathcal{T}(x, 0) + \varepsilon \left(-\lambda \mathcal{T}'(x) + \right. \\ & \left. + x \frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial x} - \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{\partial \mathcal{T}_k(x, 0)}{\partial x} + \mathcal{T}(x, 0) \right) = 0, \\ & \mathcal{T}(x, \infty) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (7), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_j(x, 0) &= \frac{x^j}{j!} e^{-x} \mathcal{T}(x) \mu, \\ \sum_{k=2}^{\infty} k \mathcal{T}_k(x, 0) &= \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{x^k}{k!} e^{-x} \mathcal{T}(x) \mu = \\ &= \mu \mathcal{T}(x) (x - x e^{-x}) = \mu x (1 - e^{-x}) \mathcal{T}(x), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}_j(x, 0) = \mu \mathcal{T}'(x).$$

Подставим найденные выражения в (8)

$$-\lambda \mathcal{T}'(x) + \mu x \mathcal{T}'(x) - \mu (x(1-e^{-x}) \mathcal{T}(x))' + \mu \mathcal{T}(x) = 0,$$

откуда, поделив на μ и обозначив $\lambda/\mu = \rho$, имеем

$$(\rho \mathcal{T}(x) - x \mathcal{T}'(x) + x(1-e^{-x}) \mathcal{T}(x))' = 0,$$

следовательно,

$$(\rho - x e^{-x}) \mathcal{T}(x) = C,$$

где C - произвольная постоянная.

Так как $\mathcal{T}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $C = 0$ во всех точках, где $\rho \neq x e^{-x}$. В тех точках x , в которых $x e^{-x} = \rho$, плотность распределения вероятностей $\mathcal{T}(x)$ принимает δ -образные значения.

Максимальное значение ρ , при котором можно решить уравнение $\rho = x e^{-x}$, достигается при $x = 1$, тогда $\rho = e^{-1}$. В этом случае плотность $\mathcal{T}(x)$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{T}(x) = \delta(x-1). \quad (9)$$

При этом максимальная производительность сети составляет 37 %. Учитывая (9) и максимальное значение ρ , аналогично протоколу "простая АЛОНА" можно найти основные числовые характеристики протокола "синхронная АЛОНА".

Исследованные протоколы не требуют контроля состояния передающей среды, который технически осуществим, часто используется в протоколах доступа и приводит к существенному повышению производительности сетей.

4.3. Протокол q - настойчивого доступа с контролем несущей

Рассмотрим моноканальную вычислительную сеть, каждая абонентская станция которой прослушивает передающую среду и определяет наличие передачи с других станций. Если передающая среда занята, то активная станция, имеющая готовое для передачи сообщение, ожидает освобождения моноканала. В момент его освобождения начинается интервал обнаружения отсутствия передачи, в течение которого прибор остается не занятым. По окончании этого интервала каждая активная станция с вероятностью q начинает передачу своего сообщения и производит ее полностью.

Если в результате такого разыгрывания канал захватывается одной-единственной активной станцией, то ее сообщение передается без искажений и покидает ЛВС. Если канал захвачен двумя или большим количеством активных станций, то все передаваемые сообщения испорчены в результате их наложения и каждое из них по окончании передачи возвращается в очередь для повторной передачи в момент полного освобождения канала связи. Если же канал в результате розыгрыша оказывается свободным, то все активные станции повторяют попытку захвата передающей среды после окончания интервала обнаружения отсутствия передачи в канале.

Ниже мы построим математическую модель исследуемого протокола множественного доступа, проведем ее анализ, получим аналитические выражения, определяющие зависимости для основных ее характеристик.

Достаточно адекватной математической моделью рассматриваемого протокола может служить следующая СМО. Требования простейшего потока с параметром λ поступают в систему обслуживания. Заявка, заставшая прибор свободным, начинает немедленно обслужи-

ваться с интенсивностью μ в соответствии с экспоненциальным законом. В момент окончания обслуживания заявка покидает систему и в дальнейшем не рассматривается. Если прибор занят, то поступившее требование становится в очередь для ожидания. В момент освобождения прибора начинается интервал обнаружения отсутствия передачи, который имеет экспоненциальное с параметром σ распределение вероятностей своей длины. По окончании этого интервала выбирается ν требований с вероятностью $q(\nu/i)$ из i , стоящих в очереди для одновременного обслуживания на приборе. Для рассматриваемой системы распределение вероятностей $q(\nu, i)$ имеет следующий вид:

$$q(\nu/i) = C_i^\nu q^\nu (1-q)^{i-\nu}. \quad (1)$$

Если $\nu = i$, т.е. на прибор поставлено единственное требование, то по окончании обслуживания оно покидает систему; если $\nu > 1$ то по окончании обслуживания каждого из этих требований они возвращаются в очередь для повторных попыток обслуживания. Если прибор оказывается не занятым, т.е. $\nu = 0$, что происходит с вероятностью $q(0/i)$, то в этом состоянии прибор находится в течение экспоненциально распределенного интервала с параметром σ (интервал обнаружения отсутствия передачи). В конце этого интервала все активные станции повторяют попытку захвата прибора. Если в течение этого интервала требование поступает во входящий поток, оно становится на прибор и начинает немедленно обслуживаться.

Пусть $i(t)$ и $\nu(t)$ – число требований в очереди и обслуживаемых в момент времени t соответственно. Также обозначим $H(i)$, $G(i)$ и $Q(i)$ вероятности того, что в очереди i требований: $H(i)$ – на приборе одно требование, за время обслуживания которого другие требования не обслуживались; $G(i)$ – на приборе

обслуживается единственное, но ранее искаженное требование;

$Q(i)$ – прибор пуст; все станции находятся в режиме обнаружения отсутствия передачи в канале связи, $P_j(i) = P(i, t = i, j(t) = j)$, $j = 2, 3, 4, \dots$. Предполагается, что система функционирует в стационарном режиме, поэтому вероятности $Q(i)$, $G(i)$, $H(i)$, $P_j(i)$ от t не зависят и удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$(\lambda + G)Q(i) = GQ(i)q(0/i) + \mu(H(i) + G(i-1)),$$

$$(\lambda + \mu)H(i) = \lambda H(i-1) + \lambda Q(i) + GQ(i+1)q(1/i+1),$$

$$(\lambda + \mu)G(i) = \lambda G(i-1) + 2\mu P_2(i-1),$$

$$(\lambda + j\mu)P_j(i) = \lambda P_j(i-1) + (j+1)\mu P_{j+1}(i-1) + GQ(i+j)q(j/i+j), \quad (2)$$

точное аналитическое решение которой практически невозможно.

Пропускная способность рассматриваемой СМО возрастает от нуля при $q = 1$ до максимального значения при $q \rightarrow 0$. Решим систему (2) при $q \rightarrow 0$, для этого воспользуемся следующей модификацией асимптотического метода.

Обозначим

$$q = \varepsilon, \quad i\varepsilon = x, \quad Q(i) = Q(x), \quad G(i) = G(x), \quad H(i) = H(x), \\ P_j(i) = P_j(x), \quad q(j/i+j) = q_j(x) + \varepsilon f_j(x) + o(\varepsilon),$$

тогда систему (2) перепишем

$$(\lambda + G)Q(x) = GQ(x)(q_0(x) + \varepsilon f_0(x)) + \mu(H(x) + G(x-\varepsilon)),$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) H(x) &= \lambda H(x-\varepsilon) + \lambda Q(x) + \varepsilon Q(x+\varepsilon)(q_1(x) + \varepsilon f_1(x)), \\
 (\lambda + \mu) G(x) &= \lambda G(x-\varepsilon) + 2\mu f_2(x-\varepsilon), \\
 (\lambda + \nu\mu) \mathcal{T}_\nu(x) &= \lambda \mathcal{T}_\nu(x-\varepsilon) + (\nu+1)\mu \mathcal{T}_{\nu+1}(x-\varepsilon) + \\
 &\quad + \varepsilon Q(x+\varepsilon\nu)(q_\nu(x) + \varepsilon f_\nu(x)).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $Q(x) + H(x) + G(x) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \mathcal{T}_\nu(x) = \mathcal{T}(x)$,

$$H(x) + G(x) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \mathcal{T}_\nu(x) = F(x).$$

Просуммируем все уравнения системы (3), получим

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathcal{T}(x) + \varepsilon Q(x) + \mu F(x) &= \lambda (\mathcal{T}(x-\varepsilon) - Q(x-\varepsilon)) + \\
 + \lambda Q(x) + \mu (F(x-\varepsilon) - H(x-\varepsilon)) &+ \mu H(x) + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} Q(x-\nu\varepsilon)(q_\nu(x) + \varepsilon f_\nu(x)).
 \end{aligned}$$

Раскладывая $\mathcal{T}(x-\varepsilon)$, $Q(x-\varepsilon)$, $F(x-\varepsilon)$, $H(x-\varepsilon)$, $Q(x+\nu\varepsilon)$ в ряд по степеням ε и ограничиваясь двумя слагаемыми, запишем

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathcal{T}(x) + \varepsilon Q(x) + \mu F(x) &= \lambda \mathcal{T}(x) - \varepsilon \lambda \mathcal{T}'(x) - \lambda Q(x) + \\
 + \lambda \varepsilon Q'(x) + \lambda Q(x) + \mu F(x) - \varepsilon \mu F'(x) - \mu H(x) &+ \varepsilon \mu H'(x) + \\
 + \mu H(x) + \varepsilon G(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(x) + \varepsilon G'(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu q_\nu(x) &+ \varepsilon G(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Найдем явные выражения для $q_\nu(x)$ и $f_\nu(x)$, используя (I) при $q \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$ таких, что $i q = x$

$$\begin{aligned}
 q(\nu/i + \nu) &= C_{i+\nu}^\nu q^\nu (1-q)^i = \\
 = q_\nu(x) + \varepsilon f_\nu(x) &= \frac{x^\nu e^{-x}}{\nu!} \left(1 - \varepsilon \frac{x}{2}\right) \left(1 + \varepsilon \frac{\nu(\nu+1)}{2x}\right),
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$q_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x}, \quad f_\nu(x) = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2x} - \frac{x}{2} \right) \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x}. \quad (5)$$

Используя полученные выражения, можно определить

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(x) = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu q_\nu(x) = x, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) = 1,$$

таким образом, равенство (4) перепишем

$$\lambda T'(x) - \lambda Q'(x) + \mu F(x) - \mu H'(x) - G(x)Q(x) = 0.$$

Отсюда, при условии $\lambda/\mu = \rho$, $G/\mu = \alpha$, получим

$$\rho T(x) - (\rho + \alpha x)Q(x) + F(x) - H(x) = C, \quad (6)$$

где C — произвольная постоянная, определяемая условием нормировки.

Считая в системе (3) $\varepsilon = 0$, $\lambda/\mu = \rho$, $G/\mu = \alpha$, выразим $Q(x)$, $H(x)$ и $F(x)$ через $T(x)$, будем иметь

$$H(x) = (\rho + \alpha q_1(x))Q(x),$$

$$G(x) = \alpha \sum_{k=2}^{\infty} q_k(x)Q(x),$$

$$T_\nu(x) = \alpha \rho \sum_{k=\nu}^{\infty} q_k(x)Q(x),$$

В результате

$$F(x) = (\rho + \alpha x)Q(x),$$

$$T(x) = (1 + \rho + \alpha(1 - q_0(x)) +$$

$$+ \alpha \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{\infty} q_k(x))Q(x).$$

(7)

Обозначим

$$f(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{\infty} q_k(x) = e^{-x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= -f(x) + e^{-x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = -f(x) + \\ &+ e^{-x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{k=j}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) = -f(x) + \frac{e^{-x}}{x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j!} + \\ &+ e^{-x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = -f(x) + f(x) + \frac{e^{-x}}{x} (e^x - x - 1) = \\ &= (1 - e^{-x})/x - e^{-x}. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) = e^{-x} + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt + c$,

а так как $f(0) = 0$, то $c = -1$.

Из (7) следует $Q(x) = \pi(x)/(1 + \rho + \alpha \varphi(x))$,

где $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.

Таким образом, для $Q(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $\pi_j(x)$, $F(x)$ имеем

$$Q(x) = \pi(x) \frac{1}{1 + \rho + \alpha \varphi(x)},$$

$$H(x) = \pi(x) \frac{\rho + \alpha q_1(x)}{1 + \rho + \alpha \varphi(x)},$$

$$G(x) = \pi(x) \frac{\alpha \sum_{k=2}^{\infty} q_k(x)}{1 + \rho + \alpha \varphi(x)},$$

$$\mathcal{T}_j(x) = \mathcal{T}(x) \frac{\alpha \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x)/\lambda}{1 + \rho + \alpha \varphi(x)},$$

$$F(x) = \mathcal{T}(x) \frac{\rho + \alpha x}{1 + \rho + \alpha \varphi(x)}. \quad (8)$$

Возвращаясь к соотношению (6) для асимптотической плотности распределения вероятностей $\mathcal{T}(x)$ значений нормированного числа iq требований в очереди, в рассматриваемой СМО получим

$$\mathcal{T}(x) = C / \left(\rho \frac{\rho + \alpha x e^{-x}}{1 + \rho + \alpha \varphi(x)} \right) = C \frac{1 + \rho + \alpha \varphi(x)}{\rho^2 + \rho \alpha \varphi(x) - \alpha x e^{-x}}, \quad (9)$$

где C — постоянная, определяемая условием нормировки, а

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

Если число мест для ожидания данной СМО будет неограниченным, то не выполняется необходимое условие нормировки для плотности $\mathcal{T}(x)$, так как при $x \rightarrow \infty$, $\mathcal{T}(x) \rightarrow C/\rho$. Значит, при неограниченном числе мест для ожидания не существует стационарного режима функционирования СМО при любых соотношениях между параметрами λ и μ .

Исследуем СМО с ограниченным числом мест для ожидания. Пусть N — объем бункера и в асимптотике $q \rightarrow 0$ Nq обозначим A , тогда $0 \leq x \leq A$. Ограниченность объема бункера предполагает возможность потери части требований, поступивших в момент занятости всех мест ожидания. Вероятность потери требования будет тем больше, чем больше значение $\mathcal{T}(A)$.

Соотношение (9) определяет асимптотическую плотность $\mathcal{T}(x)$ с точностью до постоянного множителя C , значение которого определяется условием нормировки.

При анализе плотности $\mathcal{T}(x)$ определяющее значение имеет

уравнение

$$\rho^2 + \rho \alpha \varphi(x) - \alpha x e^{-x} = 0. \quad (10)$$

Если (10) не имеет положительных решений $x > 0$, то константа

$$C = 1 / \int_0^{\infty} \frac{1 + \rho - \alpha \varphi(x)}{\rho^2 + \rho \alpha \varphi(x) - \alpha x e^{-x}} dx, \quad (11)$$

в этом случае $\mathcal{T}(x)$ полностью определяется соотношениями (9), (11).

Если уравнение (10) имеет единственное решение $x = x^*$, которое выполняется при условии

$$\rho = \rho^* = \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq A} (\sqrt{4\alpha^2 \varphi^2(x) + 4\alpha x e^{-x} - \alpha \varphi(x)}), \quad (12)$$

то соотношение (9) не определено при $x = x^*$, но в любой окрестности этой точки интеграл от $\mathcal{F}(x)$, определяемый соотношением (9), расходится при любом ненулевом значении константы C , следовательно, $C = 0$ и $\mathcal{T}(x) = 0$ для всех $x \neq x^*$.

Таким образом, при $\rho = \rho^*$ асимптотическая плотность $\mathcal{T}(x)$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{T}(x) = \delta(x - x^*), \quad (13)$$

где δ - дельта-функция, а x^* определяется из равенства (12), с помощью которого нетрудно показать, что при $\alpha = 10$

$$\rho^* = 0.65; \quad x^* = 0.25. \quad (14)$$

При $0 < \rho < \rho^*$ уравнение (10) имеет два положительных корня x_1, x_2 , и пусть $x_1 < x_2$. В этом случае соотношение (9) не определено в двух точках $x = x_1, x = x_2$, в любых окрестностях

которых при $C \neq 0$ интеграл от $\mathcal{T}(x)$ расходится, следовательно, $C = 0$ и $\mathcal{T}(x) = 0$ для всех $x \neq x_1, x \neq x_2$. Таким образом, в случае $0 < \rho < \rho^*$ асимптотическую плотность $\mathcal{T}(x)$ представим

$$\mathcal{T}(x) = \xi \delta(x - x_1) + (1 - \xi) \delta(x - x_2).$$

Здесь $0 < x_1 < x_2 < A$, но $\xi = 1$, так как точка $x = x_2$ является неустойчивой, значит

$$\mathcal{T}(x) = \delta(x - x_1). \quad (15)$$

Соотношения (8)–(15) решают поставленную задачу анализа математической модели $\mathcal{Q}$ – настойчивого протокола случайного множественного доступа с контролем несущей. Зная распределение (15), нетрудно определить основные числовые характеристики протокола $\mathcal{Q}$ – настойчивого доступа с контролем несущей.

Предельная производительность сети ρ^* для исследуемого протокола определяется величиной $\beta = 1/\alpha$ – отношением среднего времени обнаружения молчания канала к среднему времени передачи сообщения, этой же величиной определяется и нормированное число требований в очереди x^* . Связь рассмотренных величин β, x, ρ параметрически определим в виде

$$\rho^* = \frac{e^{-x}(1-x)x}{1-e^{-x}}, \quad \beta = \frac{xe^{-x}-\rho(x)\varphi(x)}{\rho^2(x)},$$

а их численные значения приведем ниже:

β	0,05	0,10	0,20	0,50
x^*	0,20	0,26	0,31	0,41
ρ^*	0,72	0,65	0,56	0,45

Таким образом, производительность сети для исследуемого протокола повышается от 45 до 72 % в зависимости от накладных расхо-

дов, связанных с затратами времени на обнаружение молчания канала.

4.4. Протокол доступа с контролем несущей и обнаружением конфликтов

Предлагаемый для изучения протокол предоставляет абонентским станциям возможность прослушивать канал как до начала, так и во время передачи своего сообщения, и обнаруживать конфликт после его возникновения, не ожидая окончания сеанса связи. Прекращение передачи в момент обнаружения конфликта улучшает вероятностно-временные характеристики локальных сетей за счет более быстрого освобождения канала [17].

Протокол назовем ненастойчивым, если попытка передачи готового сообщения откладывается на случайный интервал, когда канал занят передачей других сообщений. Можно рассматривать и φ - настойчивый доступ, когда происходит ожидание освобождения канала, а затем с вероятностью φ начинается передача сообщения в канал.

Рассмотрим ненастойчивый доступ. Достаточно адекватной математической моделью этого протокола может служить следующая СМО. На вход однолинейной СМО поступает простейший с параметром λ поток требований. Обслуживание каждого требования будет двухэтапным, с экспоненциальным распределением времени прохождения каждого этапа с параметрами μ_1 для первого и μ_2 - для второго этапа.

Если прибор свободен, то поступившее требование начинает немедленно обслуживаться на первом этапе. Если в это время поступает другое требование, то оно также ставится на прибор и по окончании первого этапа оба требования возвращаются в систему, образуя источники повторных вызовов. Когда во время пребывания на первом этапе одновременно двух требований поступает еще одно,

оно мгновенно возвращается в систему в качестве источника повторных вызовов. Если первый этап обслуживания окончен без конфликтов, то требование переходит к обслуживанию на втором этапе, в течение которого конфликты невозможны, т.е. поступающие требования мгновенно образуют источники повторных вызовов, не влияя на обслуживание. После окончания обслуживания на втором этапе требование покидает систему. Источник повторных вызовов через случайные интервалы, распределенные по экспоненциальному закону с параметром σ , обращается к прибору с заявкой на обслуживание, в результате чего вышеописанная процедура повторяется, т.е. на первом этапе возникает конфликт, а на втором обслужива-ние проходит без конфликта.

Пусть состояние системы определяется вектором $(i(t), j(t))$, где $i(t)$ - число ИПВ в момент t ; $j(t)$ - состояние прибора в момент t ; $j(t) = 0$ - прибор свободен; $j(t) = 1$ - на приборе находится единственное требование, обслуживаемое на первом этапе; $j(t) = 2$ - на приборе два требования, находящиеся в состоянии конфликта; $j(t) = 3$ - на приборе единственное требование, обслуживаемое на втором этапе.

Процесс $(i(t), j(t))$ - марковский, его распределение

$$P_j(i) = P(i(t)=i, j(t)=j).$$

удовлетворяет система уравнений

$$(\lambda + i\sigma) P_0(i) = \mu_1 P_2(i-2) + \mu_2 P_3(i),$$

$$(\lambda + \mu_1 + i\sigma) P_1(i) = \lambda P_0(i) + (i+1)\sigma P_0(i+1),$$

$$(\lambda + \mu_1) P_2(i) = \lambda P_2(i-1) + \lambda P_1(i) + (i+1)\sigma P_1(i+1),$$

$$(\lambda + \mu_2) P_3(i) = \lambda P_3(i-1) + \mu_1 P_1(i),$$

(I)

решить аналитически которую практически невозможно, но можно решить асимптотически при $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$.

Для этого в системе (I) произведем замену

$$\mathcal{G} = \varepsilon, \quad i\varepsilon = x, \quad P_j(i) = \mathcal{T}_j(x),$$

получим

$$\begin{aligned} (\lambda + x)\mathcal{T}_0(x) &= \mu_1 \mathcal{T}_2(x - 2\varepsilon) + \mu'_2 \mathcal{T}_3(x), \\ (\lambda + \mu_1 + x)\mathcal{T}_1(x) &= \lambda \mathcal{T}_0(x) + (x + \varepsilon)\mathcal{T}_0(x + \varepsilon), \\ (\lambda + \mu_1)\mathcal{T}_2(x) &= \lambda \mathcal{T}_2(x - \varepsilon) + \lambda \mathcal{T}_1(x) + (x + \varepsilon)\mathcal{T}_1(x + \varepsilon), \\ (\lambda + \mu_2)\mathcal{T}_3(x) &= \lambda \mathcal{T}_3(x - \varepsilon) + \mu_1 \mathcal{T}_1(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Раскладывая функции $\mathcal{T}_j(x \pm \varepsilon)$ в ряд по степеням ε с точностью до ε и суммируя все уравнения системы (2), имеем

$$(x\mathcal{T}_0(x) + x\mathcal{T}_1(x) - (\lambda + 2\mu_1)\mathcal{T}_2(x) - \lambda\mathcal{T}_3(x))' = 0. \quad (3)$$

Считая в (2) $\varepsilon = 0$, выразим $\mathcal{T}_j(x)$ через функцию $\mathcal{T}(x) = \sum_{j=0}^3 \mathcal{T}_j(x)$ и получим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(x) &= \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda + \mu_1 + x)}{f(x)} \mathcal{T}(x), \\ \mathcal{T}_1(x) &= \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda + x)}{f(x)} \mathcal{T}(x), \\ \mathcal{T}_2(x) &= \frac{\mu_2 (\lambda + x)^2}{f(x)} \mathcal{T}(x), \\ \mathcal{T}_3(x) &= \frac{\mu_1^2 (\lambda + x)}{f(x)} \mathcal{T}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi(x) = \mu_1 \mu_2 (2\lambda + 2x + \mu_1) + (\lambda + x)(\mu_1^2 + \mu_2(\lambda + x))$.

От (3) перейдем к уравнению

$$x(\mathcal{T}_0(x) + \mathcal{T}_1(x)) - (\lambda + 2\mu_1)\mathcal{T}_2(x) - \lambda\mathcal{T}_3(x) = 0,$$

в которое подставим (4), получим

$$\frac{\mu_1 \mu_2 x (2\lambda + 2x + \mu_1) - (\lambda + 2\mu_1) \mu_2 (\lambda + x)^2 - \lambda \mu_1^2 (\lambda + x)}{\varphi(x)} \mathcal{T}(x) = 0.$$

Так как $\varphi(x) > 0$, то $\mathcal{T}(x) = 0$ во всех точках x , в которых

$$\mu_1 \mu_2 x (2\lambda + 2x + \mu_1) - (\lambda + 2\mu_1) \mu_2 (\lambda + x)^2 - \lambda \mu_1^2 (\lambda + x) \neq 0. \quad (5)$$

Так как левая часть этого соотношения представляет собой квадратный трехчлен относительно x , то могут существовать лишь две точки x_1, x_2 , в которых $\mathcal{T}(x) \neq 0$, следовательно, имеет вид δ -функции, точки x_1, x_2 ненулевого значения которой определяются квадратным уравнением

$$\begin{aligned} \lambda \mu_2 x^2 + (\lambda^2 \mu_2 + 2\lambda \mu_1 \mu_2 + \lambda \mu_1^2 + \lambda \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2) x + \\ + \lambda^2 (\lambda \mu_2 + 2\mu_1 \mu_2 + \mu_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы полученное уравнение имело хотя бы одно решение, необходимо выполнить неравенство

$$(\lambda - \mu_2)(\mu_1(\lambda - \mu_2) + 4\lambda \mu_2) \geq 0. \quad (7)$$

Так как $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$, то $\lambda < \mu_2 \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$,

таким образом, $\lambda < \mu_2$, поэтому для выполнения (7) достаточно выполнения неравенства

$$\lambda \mu_1 + 4\lambda \mu_2 \leq \mu_1 \mu_2,$$

которое, обозначив $\lambda/\mu_1 = \rho_1$, перепишем в виде

$$\rho_2 + 4\rho_1 \leq 1. \quad (8)$$

Величина $\rho = \rho_1 + \rho_2$ характеризует полезную нагрузку сети, связанную с передачей сообщения, ρ_1 — характеризует нагрузку сети, связанную с обнаружением и разрешением конфликтов. В силу неравенства (8) для рассматриваемого протокола доступа нагрузка сети ограничена соотношением

$$\rho + 3\rho_1 \leq 1,$$

и максимальная производительность сети ρ^* определяется равенством

$$\rho^* = 1 - 3\rho_1, \quad (9)$$

где ρ_1 есть отношение среднего времени обнаружения и разрешения конфликта к средней длине интервала между моментами первичных обращений абонентских станций к передающей среде. Из равенства (9) следует, что ρ_1 не может превышать $1/3$, а при ее малых значениях ρ^* близка к 1.

Таким образом, в данной монографии представлен метод асимптотического анализа марковизируемых систем, которые служат математическими моделями широкого класса реальных объектов, исследованы различные потоки, статистики, СМО и ЛВС с протоколами случайного множественного доступа. Для перечисленных объектов построены математические модели в виде марковизируемых систем.

Идея асимптотического анализа заключается в изучении предельного поведения исследуемой модели, когда один из ее параметров стремится к критическому значению: время и число наблюдений — к бесконечности в потоках и статистиках, интенсивность или вероятность повторения сеанса связи в ЛВС — к нулю, а загрузка в СМО — к критическому значению.

В уравнениях, определяющих законы функционирования построенных моделей, удается произвести такие замены переменных величин, которые приводят к уравнениям более простых классов: обыкновенным дифференциальным либо уравнениям математической физики. Для них даны решения в явном виде, которые интерпретируются как асимптотические законы функционирования соответствующих моделей.

Полученные предложенным методом результаты имеют аналоги в теории вероятностей, математической статистики, теории массового обслуживания, сетеметрии. Это известные факты закона больших чисел, центральной предельной теоремы, асимптотических свойств статистик, непрерывной и диффузионной аппроксимации. Эти разнородные результаты получены единым методом асимптотического анализа марковизируемых систем.

В данной монографии представлены не все доступные исследуемому методу результаты и многообразие объектов исследования. Это объясняется широтой класса марковизируемых систем и множеством их параметров, допускающих разумную интерпретацию асимптотического поведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кениг Д., Штоян Д. Методы теории массового обслуживания. М.: Радио и связь, 1981. 127 с.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
3. Кокс Д., Лейкс П. Статистический анализ последовательностей событий. М.: Мир, 1969. 312 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М.: Мир, 1984. 527 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 831 с.
6. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 286 с.
7. Скитович В.П. Элементы теории массового обслуживания. Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1976. 95 с.
8. Марголис Н.Ю. Оценка интенсивности флуктуирующего пуассоновского потока методом полиномиальной аппроксимации // Управляемые системы массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984. С. 73-81.
9. Тривоженко Б.Е. Оценка интенсивности нестационарного пуассоновского потока // Поиск сигнала в многоканальных системах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985. С. 169-174.
10. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.
11. Фалин Г.И. О сильно загруженных системах с повторными вызовами // Изв. АН СССР. Техн.киберн. 1986. № 1. С. 180-184.
12. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Дисциплина обслуживания с выбором из большей очереди // Изв. АН СССР. Техн.киберн. 1975. № 2. С. 103-105.

13. Назаров А.А., Чекуменев В.А. Анализ и оптимизация СМО с динамическими по числу требований приоритетами при большой загрузке // Автоматика и телемеханика. 1984. № 10. С.78-87.
14. Назаров А.А., Чекуменев В.А. Нахождение оптимального управления в СМО при больших нагрузках методом пограничного слоя // Управляемые системы массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. С.113-126.
15. Флинт Д. Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986. 359 с.
16. Назаров А.А., Никифоров Е.С. Асимптотический анализ дважды стохастических потоков, управляемых полумарковскими процессами // Техника средств связи. Сер. С.С. 1989. Вып. 7. С. 71-76.
17. Самойленко С.И. Сети ЭВМ. М.: Наука, 1986. 159 с.
18. Назаров А.А., Никифоров Е.С. Асимптотический анализ полумарковских потоков // Оптимальное управление. Геометрия и анализ. Кемерово, 1988. С.123.
19. Назаров А.А., Никифоров Е.С. Асимптотический анализ характеристик полумарковского потока // Методы исследования информационно-вычислительных систем. Минск, 1989. С.88-89.
20. Назаров А.А., Никифоров Е.С. Асимптотический анализ дважды стохастического потока событий, управляемого альтернирующим марковским процессом // Совершенствование методов исследования потоков событий и систем массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. С.122.
21. Назаров А.А., Никифоров Е.С. Асимптотический анализ дважды стохастических потоков, управляемых марковскими процессами // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск, 1988. С. 78-85.

22. Назаров А.А. Асимптотический анализ системы с рекуррентным обслуживанием в марковской случайной среде // Методы исследования информационно-вычислительных систем. Минск, 1989. С.86-87.
23. Зоркальцев А.В., Назаров А.А. Асимптотический анализ задержки эшелона кадров в информационном канале сети ЭВМ с коммутацией пакетов // Автоматика и вычислительная техника. 1986. № 5. С. 19-25.
24. Вайндер М.Ш., Назаров А.А. Асимптотический метод исследования СМО с повторными требованиями и рекуррентным обслуживанием // Методы исследования информационно-вычислительных систем. Минск, 1989. С.27.
25. Вайндер М.Ш., Назаров А.А. Асимптотический анализ СМО с повторными требованиями // Совершенствование методов исследования потоков событий и систем массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. С.83.
26. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем // Совершенствование методов исследования потоков событий и систем массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. С.35-48.
27. Назаров А.А., Чекменев В.А. Анализ и оптимизация систем массового обслуживания с динамическими по времени ожидания приоритетами для рекуррентных потоков при большой загрузке // Управляемые системы массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. С.124-132.
28. Назаров А.А., Чекменев В.А. Назначение асимптотически оптимальных динамических приоритетов в СМО при большой загрузке // Применение случайного поиска при решении прикладных задач. Кемерово, 1982. С.92-105.

29. Назаров А.А. Оптимальное формирование очередей в многоканальных системах массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. 1975. № 8. С.36-39.
30. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Асимптотически оптимальное формирование очередей в многоканальных системах массового обслуживания при больших нагрузках // Автоматика и телемеханика. 1977. № 9. С. 53-57.
31. Назаров А.А. Асимптотически оптимальное правило формирования очередей по косвенным наблюдениям // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1978. № 6. С. III-II7.
32. Назаров А.А., Чекунов В.А. Асимптотически оптимальные с гистерезисом правила формирования очередей при большой нагрузке // Применение случайного поиска. Кемерово, 1982. С.23-25.
33. Вайндер М.Ш., Назаров А.А. Анализ модели учрежденческой локальной вычислительной сети в условиях большой нагрузки: Тез.докл. У Всесоюз.конф. КОМПАК-87, Рига, 1987. С.89-92.
34. Вайндер М.Ш., Назаров А.А. Асимптотический анализ математической модели моноканальной ЛВС с методом доступа МДКН/ОК // Поиск сигнала в многоканальных системах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. С.20-28.
35. Вайндер М.Ш., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Асимптотический метод исследования кольцевой локальной вычислительной сети // Кибернетика и вуз. Томск, 1987. С.149-156.
36. Назаров А.А. Асимптотический анализ многолинейных систем массового обслуживания с повторными вызовами // Автоматика и вычислительная техника. 1990. № 3. С.65-71.
37. Назаров А.А. Анализ математической модели локальной сети с протоколами множественного доступа "синхронная АЛОНА": Труды международной конф. "Локсет-90", Рига, 1990. С.42-46.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ	8
1.1. Простейший поток	9
1.2. Рекуррентный поток	10
1.3. Поток Вольфа	12
1.4. Полумарковский поток	24
1.5. Дважды-стохастический поток, управляемый марковскими процессами	31
1.5.1. Поток, управляемый марковским процессом с дискретным множеством состояний	32
1.5.2. Поток, управляемый разрывным марковским процессом	38
1.5.3. Поток, управляемый диффузионным процессом	41
1.6. Нестационарный пуассоновский поток	42
1.7. Обобщенный рекуррентный поток	46
Глава 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИК ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ТРЕНДАХ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ	55
2.1. Анализ оценок параметров тренда пуассоновского потока	56
2.2. Анализ оценок параметров тренда обобщенного рекуррентного потока	60
2.3. Анализ статистик для проверки гипотезы о ста- ционарности пуассоновского потока	70
2.4. Анализ статистик для проверки гипотезы о совпадении трендов двух пуассоновских потоков	80

Глава 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	85
3.1. Простейшая система	86
3.2. Система с рекуррентным обслуживанием	88
3.3. Система массового обслуживания с полумар- ковским потоком и обслуживанием	93
3.4. Системы с повторными вызовами	99
3.5. Система с детерминированным динамическим приоритетом	107
3.6. Система с недетерминированным динамическим приоритетом	111
3.7. Система с формированием очередей.	117
Глава 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОТОКОЛОВ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА	123
4.1. Простая АЛОНА	124
4.2. Синхронная АЛОНА	131
4.3. Протокол g - настойчивого доступа с контролем несущей	138
4.4. Протокол доступа с контролем несущей и обнаружением конфликтов	147
Литература	153

Анатолий Андреевич Назаров

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
МАРКОВИЗМУБНЫХ СИСТЕМ

ИБ 2412

Редактор Т.В.Зибарева

Подписано и печать 21.12.90. Размер 60x84 1/16. Печать офсетная.
Бел. л. 10. Усл.печ. л. 9,3. Уд.-изд. л. 7. Тираж 500 экз. Заказ 129.
Цена 36.10к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул.Никитина, 4.

Межвузовская типография ОмИИ.



1 р. 10 к.

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00528167