

И. Б. БОГОРЯД

ДИНАМИКА
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ

Томск
1980

И. Б. БОГОРЯД

ДИНАМИКА
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1980

УДК 532.516+533.6.013.42

Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью.
Богоряд И. Б. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1980.

В книге рассматриваются вопросы движения вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд. При постановке задачи главное внимание уделяется формулировке граничных условий на твердой стенке, учитывающих реальные процессы в пристеночной зоне и зоне трехфазного контакта жидкость — газ — твердая стенка. Обосновываются конечно-разностные схемы решения задачи. Описаны конкретные алгоритмы и приводятся результаты численного исследования свободных колебаний ограниченного объема вязкой жидкости со свободной поверхностью.

Книга рассчитана на специалистов в области механики жидко-наполненных конструкций, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Библ. 52, табл. 4, ил. 18.

Редактор — Л. В. Комаровский

Б 20403
177(012)-80

© Издательство Томского университета, 1980 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью составляют один из сложных и важных для практики разделов механики. Особенно большие трудности возникают при решении тех задач, в постановке которых учитываются реальные свойства жидкости и, прежде всего, ее вязкость.

Главные результаты в теории колебаний вязкой жидкости достигнуты в тех случаях, когда вязкость мала, и в математической формулировке задачи, отражающей эту физическую особенность процесса, появляется малый параметр и имеется вследствие этого возможность построения асимптотических решений. При этом эффективно используется то известное свойство течений маловязкой жидкости, что напряжения трения проявляются в основном в пристеночной зоне, которая имеет толщину пограничного слоя. Таким образом, производится пространственное разделение течения на подобласть пограничного слоя и подобласть основного потока. Построению теории колебаний маловязкой жидкости, использующей гипотезу пограничного слоя, посвящен ряд исследований, например, [8], [27], [31], а также известная монография Ф. Л. Черноушко [42].

В последние годы началась разработка теории и методов исследования задач динамики ограниченного объема жидкости, когда на величину вязкости ограничения не накладываются. В этом случае практически единственным возможным подходом к ее решению является применение конечно-разностных методов. Очевидно, первым опытом решения задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью методом конечных разностей является работа [48], в которой использует-

ся созданный Ф. Харлоу MAC-метод. Имеется еще ряд работ, в основе которых лежит численное решение двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса [28], [41], [49].

Концепция Ф. Харлоу, включающая поэтапное использование эйлеровых и лагранжевых переменных, оказала значительное влияние на эволюцию разностных методов и нашла свое развитие, например, в методе «крупных частиц» [1], лагранжево-эйлеровом [41], LiNC-методе [49] и т. д.

Несмотря на свою универсальность, метод Ф. Харлоу имеет ряд особенностей, затрудняющих его применение. Главная из них заключена в точности выполнения граничных условий на свободной поверхности, так как форма свободной поверхности известна с точностью до размера эйлеровой ячейки. Б. Николс [28] улучшил в этом отношении метод Ф. Харлоу, введя дополнительно специальную совокупность частиц для индикации свободной поверхности.

Во всех этих исследованиях на свободной поверхности удовлетворяются не все граничные условия, в частности, игнорируется условие отсутствия касательных напряжений. В связи с этим интересно отметить работу [7], где обеспечивается точное выполнение разностных аналогов граничных условий на свободной поверхности.

Несмотря на то, что по теории разностных методов решения задач математической физики имеется ряд фундаментальных работ [6], [32], [34], [44], для рассматриваемых в этой книге задач уровень разработки теоретических вопросов и особенно опыт реализации на вычислительных машинах нельзя считать достаточным. Более того, ограниченные возможности современных вычислительных машин по быстродействию и объему памяти не позволяют эффективно решать трехмерные нестационарные задачи с достаточной точностью. Поэтому создание экономичных численных методов и соответствующих алгоритмов для задач, в которых учитываются реальные свойства жидкости, является актуальным направлением исследований.

В этой книге не ставится задача ответить на все вопросы, которые возникают при исследовании динамики ограниченного объема вязкой жидкости со свободной поверхностью. Это сложная и не реализуемая в настоящее время задача. Более того, эта книга не

претендует на систематическое изложение современного состояния проблемы.

В книге рассмотрены только те вопросы, которыми в данном направлении занимался автор и сотрудники лаборатории динамики деформируемых систем научно-исследовательского института прикладной математики и механики при Томском университете.

Книга состоит из четырех глав. В первой главе, посвященной постановке задачи, основное внимание обращается на исследование течения в пристеночной зоне и зоне трёхфазного контакта жидкость — газ — твердая стенка и формулировку граничных условий на твердой стенке, которые опираются на эти исследования.

Во второй главе для постановки задачи и построения прямых методов ее решения применяется вариационный принцип Лагранжа. Этим достигается единый подход к рассматриваемой задаче с наиболее общих позиций, на что указывал еще Ж. Лагранж [15], выполняя задачу «... объединить динамику и гидродинамику как ветви единого принципа и как выводы из единой общей формулы».

Третья глава содержит разработку и обоснование алгоритмов решения линеаризованной задачи гравитационных колебаний вязкой жидкости, основанных на конечно-разностной аппроксимации задачи. Причем основное внимание уделяется схеме решения в дробных шагах.

Глава четвертая включает в себя решение конкретных задач о колебаниях вязкой жидкости со свободной поверхностью, а также исследование, проведенное на физическом уровне строгости, зависимости декремента гравитационных колебаний от некоторых входных параметров задачи.

Часть результатов, связанных главным образом с обоснованием модели течения в пристеночной зоне и качественным исследованием зависимости коэффициента затухания колебаний жидкости от некоторых определяющих параметров задачи, публикуется впервые.

Автор выражает благодарность проф. В. И. Вилкову за ряд ценных советов и замечаний и Г. З. Дружининой, Н. П. Лавровой и Г. В. Христенко за участие в некоторых совместных исследованиях и расчет приведенных в книге задач.

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§ 1.1. Уравнения движения

1.1.1. В основе механики вязкой жидкости лежит гипотеза Ньютона в такой формулировке [29]: «Сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости, при прочих одинаковых условиях предполагается пропорциональным скорости, с которою частицы жидкости разъединяются друг с другом».

Математически гипотеза представляется известной формулой — законом трения Ньютона

$$\sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1.1)$$

и выделяет среди реальных жидкостей ньютоновские жидкости, рассмотрением которых ограничивается круг задач в настоящей работе.

В общей теории жидкостей показывается, что при деформации элемента реальной жидкости с реологией (1.1.1) возникают вязкие напряжения такого же рода, как и в твердых телах, с той только разницей, что эти напряжения пропорциональны в этом случае скоростям деформаций, а не деформациям, как в твердых телах.

Поэтому, используя известные из теории упругости [19] компоненты тензора напряжений и формулу трения Ньютона (1.1.1), получим тензор вязких напряжений σ с компонентами

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.1.2)$$

где μ — коэффициент вязкости; $u_i(\bar{x}, t)$ — составляющая скорости частицы жидкости в точке \bar{x} вдоль координаты x_i ; $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Уравнения движения в форме Эйлера получим суммируя в соответствии с принципом Даламбера инерционные, внешние силы, силы, обусловленные неоднородностью поля давления, а также силы вязкого трения

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{u}. \quad (1.1.3)$$

При выводе этого уравнения учитывается, что течение жидкости подчиняется уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0. \quad (1.1.4)$$

Если ввести в рассмотрение тензор полных напряжений \mathcal{T} , компоненты которого есть

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}p + \sigma_{ij}, \quad (1.1.5)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то уравнения Навье-Стокса могут быть записаны в виде

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f} + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (1.1.6)$$

или

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f} + \operatorname{div} \mathcal{T}. \quad (1.1.7)$$

Уравнения движения в форме (1.1.7) известны в механике сплошных сред как уравнения Коши и применимы, вообще говоря, для среды с произвольной реологией.

В случае ньютоновских жидкостей $\nabla \cdot \mathcal{T} = \operatorname{div} \mathcal{T}$ — вектор с компонентами

$$\mathcal{T}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3).$$

1.1.2. Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$t_* = t \cdot T^{-1}; \quad x_* = x \cdot R^{-1},$$

где T, R — характерные масштаб времени и линейный размер течения.

В результате, переходя к безразмерным переменным, уравнение неразрывности своего вида не изменит, а уравнение движения будет

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + \bar{u}_* \cdot \nabla \bar{u}_* - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{u}_* + \nabla p_* = \bar{f}_*.$$

Здесь $\bar{u}_* = \bar{u} \cdot \frac{T}{R}$; $p_* = \frac{p}{\rho u^2}$ — безразмерные скорость и давление; $\text{Re} = \frac{uR}{\nu}$; $\text{Fr} = \frac{u^2}{jR}$ — критерии Рейнольдса] и Фруда; $\bar{f}_* = \frac{\bar{f}}{\rho \text{Fr} j}$ — безразмерная сила; j — ускорение поля массовых сил.

В задачах о колебаниях жидкости в сосудах за характерный масштаб времени обычно [24] принимается частота колебаний ω^{-1} , поэтому числа Re и Fr записываются в другом виде

$$\text{Re} = \frac{\omega R^2}{\nu}; \quad \text{Fr} = \frac{\omega^2 R}{j},$$

следовательно

$$u_* = \frac{u}{R\omega}, \quad p_* = \frac{p}{\rho \omega^2 R^2}.$$

В дальнейшем индекс (*) в формулах, записанных в безразмерных переменных, будем опускать, отличая размерные от безразмерных выражений по наличию в них критериев подобия (Re , Fr и др., которые будут вводиться далее по мере необходимости).

Использование безразмерных переменных часто оказывается удобным, так как из решения краевой задачи при, например, фиксированных числах Re и Fr , можно построить три семейства течений путем такого перебора трех из пяти параметров ρ , ω , R , ν , j , чтобы числа Re и Fr оставались неизменными.

§ 1.2. Условия на свободной поверхности

Только граничные условия выделяют конкретные физические особенности задачи из всего класса задач течения реальной жидкости. Поэтому правильность задания граничных условий предопределяет, как правило, соответствие решения реальному процессу.

Основные математические трудности решения задач о движении жидкости со свободной поверхностью связаны с тем, что граничные условия задаются на заранее не известных переменных во времени поверхностях, которые должны быть определены в процессе решения задачи. Более того, в общем случае переменной во времени является также область определения функции свободной поверхности.

1.2.1. Пусть свободная поверхность соприкасается с газом, давление которого постоянно и равно p_0 .

Если уравнение свободной поверхности Σ представить в виде

$$F(\bar{x}, t) = 0 \text{ или } x_1 = H + \zeta(x_2, x_3, t), \quad (1.2.1)$$

то проекции скорости частицы жидкости, принадлежащей свободной поверхности, будут

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt};$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt}; \quad u_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

и, следовательно,

$$u_n = -\frac{1}{|\nabla F|} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \text{ или } u_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \zeta. \quad (1.2.2)$$

Соотношение (1.2.2) — кинематическое граничное условие на свободной поверхности.

Предположим теперь, что свободная поверхность подвержена действию сил поверхностного натяжения. В рассматриваемой задаче силы поверхностного натяжения проявляются ещё по границе раздела жидкость — твердая стенка и на линии трехфазного контакта (ЛТК) жидкость — газ — твердая граница. Первой из этих сил будем пренебрегать, а вторую рассмотрим ниже.

Пусть γ — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкость — газ и R_2 и R_3 — радиусы главных кривизн свободной поверхности

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2}}{V[1 + (\nabla \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{1}{R_3} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3^2}}{V[1 + (\nabla \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.2.3)$$

определенные с точностью до величин третьего порядка малости $\left(\text{если } \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \text{ (} i = 2, 3 \text{) — величины первого порядка малости} \right)$.

Тогда дополнительное напряжение Δp , действующее по нормали к свободной поверхности и обусловленное силами поверхностного натяжения, представляется формулой

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Условие равновесия ЛТК под действием сил поверхностного натяжения приводит к соотношению для угла контакта свободной и смоченной поверхности

$$\cos \Theta = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma}, \quad (1.2.4)$$

где γ_1, γ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения на границах раздела сосуд — газ и стенка — жидкость.

Динамические граничные условия на свободной поверхности отражают проистекающую из законов сохранения непрерывность изменения параметров течения при переходе через границу раздела.

Таким образом, предполагая, что динамические напряжения в газовой среде над жидкостью отсутствуют, касательные напряжения на свободной поверхности равны нулю, а нормальные уравниваются статическими силами поверхностного натяжения и давления в газе, получим

$$\tau_{nn} = p_0 + \Delta p, \quad \tau_{n\tau} = \tau_{\tau n} = 0. \quad (1.2.5)$$

Условия (1.2.5) можно переписать в форме Коши

$$(p_0 + \Delta p)\bar{n} = \bar{n} \cdot \mathcal{T}. \quad (1.2.6)$$

Здесь n, τ_1, τ_2 — орты нормали и касательных к свободной поверхности.

Учет сил поверхностного натяжения играет важную роль не только в тех случаях, когда они сравнимы с силами инерционными и вязкими.

Учет поверхностного натяжения при реализации численных методов решения в ряде случаев делает процесс вычислений более устойчивым. Кроме того, задание

контактного угла Θ часто бывает полезным для определения решения в угловых точках, что приводит к улучшению аппроксимации решения в этих точках. Это особенно важно при исследовании течения вязкой жидкости, когда на границе контакта жидкость — твердая поверхность — газ в решении задачи в силу условий прилипания возникают особенности.

§ 1.3. Условия на твердой границе

1.3.1. Для постановки краевой задачи требуется еще задать граничные условия на смоченной поверхности.

Как и в любом случае перехода через границу раздела, при задании краевых условий на твердой стенке требуется непрерывность вектора напряжений. Граничные условия такого рода называются условиями прилипания и имеют вид

$$u_n = 0; u_{\tau_1} = 0; u_{\tau_2} = 0. \quad (1.3.1)$$

1.3.2. В гидромеханике неоднократно возвращались к вопросу о правильности условия прилипания для касательной составляющей скорости u_{τ} . Обсуждался, в частности, вопрос о том, приводит ли взаимодействие молекул на поверхности раздела жидкость — твердая стенка к переносу количества движения такой же природы, как перенос на поверхности внутри жидкости.

Эти вопросы возникали в связи с тем, что в ряде случаев условия прилипания приводят к результатам физически трудно объяснимым.

В частности, Н. Е. Жуковский в работе «О трении жидкости при большой разности скорости её струй» [11], где описаны опыты по подъему воды в вертикальной трубе при протягивании в ней шнура, писал: «То обстоятельство, что с уменьшением толщины ведущего шнура до очень малых размеров p (давление) не стремится к определенному пределу, дает важное заключение для теории явления, так как вследствие этого нельзя принять, что жидкость, прилегающая к шнуру, движется со скоростью шнура».

В работе [40] приводятся данные о том, что если поверхность твердой границы не смачиваема для протекающей жидкости, то возможно заметное проскальзывание. В известной работе [12] Н. Е. Жуковский так формулирует граничное условие на смоченной

поверхности: «... мы должны ещё стеснить относительное течение жидкости при поверхности полости, выражая, что поверхностное трение уравнивается тангенциальной составляющей внутреннего трения. Сила поверхностного трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости v , и выражается, вообще говоря, некоторою функциею $f(v)$ ».

Возможность применения в различных задачах механики вязкой жидкости граничных условий, отличных от условия прилипания, отмечается Г. Ламбом [16], Стоксом [51], Дж. Серрином [36] и др.

В задаче о колебаниях жидкости в сосуде мы также используем граничные условия на смоченной поверхности, отличные от условий прилипания, построив некоторую модель течения жидкости в пристеночной зоне.

Причины, которые побуждают к этому, следующие.

1. Хорошо известные экспериментальные данные Г. Н. Микишева и Н. Я. Дорожкина [23] по определению логарифмического декремента малых колебаний реальной жидкости дают значение на 40% большие, чем расчеты с использованием теории погранслоя. Этот факт позволяет говорить о том, что и в случае маловязких жидкостей рассеяние энергии колебаний происходит не только в погранслое, имеют место и другие явления, ответственные за рассеяние энергии жидкости.

Условия прилипания, например, не учитывают физико-механических свойств поверхности твердой границы (смачиваемость, шероховатость и т. д.).

2. Для ряда задач, связанных, например, с движением в слабых гравитационных полях, которые индуцируют относительно малые числа Рейнольдса, необходимо использовать более точные чем погранслои, теории движения, в частности, уравнения Навье-Стокса. Использование в этом случае условия прилипания приводит к возникновению в решении задачи в области ЛТК особенности [10], избежать которой можно только отказавшись от условия прилипания в этой области.

Непосредственные наблюдения показывают, что при колебательном движении жидкость, смочив в первый период стенки сосуда, при следующих циклах совершает движение по поверхности, покрытой пленкой жидкости малой толщины δ . Это имеет место для частичного или полного смачивания поверхности. Как правило, время стекания пленки существенно больше периода колебаний жидкости. Наличие такой пленки яв-

ляется результатом взаимодействия на молекулярном уровне жидкости и твердой поверхности. Отношение $\frac{\delta}{R}$, где R — характерный размер течения, является малым параметром задачи. Существование в задаче двух характерных размеров (δ, R) и малого параметра $\left(\frac{\delta}{R}\right)$ говорит о её принадлежности к задаче особых возмущений. С физической точки зрения, наличие пристеночной пленки приводит к возникновению больших градиентов скоростей и смещений на длине δ (как в пограничном слое).

1.3.2. Чтобы избежать свойственных условиям прилипания математических особенностей в решении, учитывая необходимость введения в математическую модель параметра, который описывал бы свойства поверхности твердой границы и другие не учтенные в модели факторы, рассмотрим одну из возможных физических моделей движения жидкости вблизи твердой границы. Эта модель рассчитана в первую очередь на задачи исследования колебаний жидкости со свободной поверхностью.

Очевидно, что модель, свободная от названных выше недостатков и не противоречащая установившемуся в гидромеханике понятию прилипания, будет иметь следующий вид.

В процессе движения жидкость вначале смачивает твердую границу тонкой пленкой, толщина которой мала и зависит от конкретных свойств жидкости, поверхности твердой границы и параметров течения. В дальнейшем движение жидкости происходит по этой пленке, причем в плоскости контакта возникают касательные напряжения трения, пропорциональные касательной составляющей скорости и некоторому коэффициенту трения β

$$\mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial n} = \beta u_z. \quad (1.3.2)$$

С математической точки зрения, эта модель означает пространственное разделение области течения на подобласть пристеночной пленки и подобласть основного потока, которое становится возможным благодаря наличию малого параметра задачи δ . Здесь полная аналогия с теорией пограничного слоя.

С физической точки зрения, рассматриваемая модель объединяет в себе условия прилипания (внешняя сторона пленки прилипает к смоченной поверхности) и гипотезу проскальзывания с трением. Эта модель отражает реально существующие процессы, если, во-первых, пристеночная пленка достаточно тонкая, чтобы можно было пренебречь ее толщиной и снести граничные условия с поверхности твердой границы на внутреннюю поверхность пленки, и, во-вторых, процессы, которые происходят внутри пристеночной пленки, не оказывают существенного влияния на напряжения трения или в первом приближении могут быть учтены усредненным значением коэффициента β .

Обычный критериальный анализ показывает, что

$$Nu = f(Re, Bo, Fr),$$

где $Nu = \frac{\beta R}{\rho \nu}$ — динамическое число Нуссельта.

Естественной была бы постановка специального эксперимента для получения наиболее достоверных и полных сведений о коэффициенте трения. В этом случае коэффициент β учитывал бы не только свойства жидкости и параметры течения, но и характеристики смачиваемой поверхности.

Однако чисто экспериментальный подход к построению теории коэффициента трения нужно было бы рассматривать как недостаток предлагаемой теории. Поэтому ниже излагается один из возможных вариантов построения аналитической теории, в которой учитываются лишь некоторые параметры задачи, заведомо определяющие течение в пристеночной пленке. Принятый физический уровень строгости позволяет получить лишь качественную картину процессов и произвести оценочные расчеты.

1.3.3. Получим оценку толщины пристеночной пленки, рассматривая ее вначале с более общих (чем механика сплошных сред) позиций кинетической теории жидкостей. Мы будем предполагать, что толщина пристеночной пленки δ имеет порядок толщины поверхностного активного слоя, внутри которого происходит обмен количеством движения между молекулами твердой стенки и жидкости.

Определим прежде всего коэффициент вязкости ν как меру скорости ликвидации различия в макроскопическом движении соседних слоев [39]. Далее, следуя

опять работе [39], установим связь между коэффициентом вязкости ν и коэффициентом диффузии D , который является мерой скорости перемешивания частиц.

Сравнивая уравнение движения жидкости, когда

$$\frac{d\bar{u}}{dt} \approx \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}; \quad \nabla p = 0; \quad \bar{f} = 0,$$

которое в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \bar{u},$$

с уравнением диффузии

$$\frac{\partial K}{\partial t} = D \nabla^2 K,$$

где K — концентрация контрольных частиц, видим, что различие между ними только в том, что концентрация заменяется плотностью макроскопического количества движения и

$$D = \nu.$$

Таким образом, кинематический коэффициент вязкости можно интерпретировать как меру скорости перемешивания макрочастиц.

В соответствии с кинетической теорией

$$D \sim \frac{l^2}{\tau},$$

где l — средний путь теплового движения; τ — характерное время теплового движения.

Следовательно, по предположению

$$\nu \sim \frac{\delta^2}{\tau}.$$

Введем для сравнения толщину пограничного слоя [43]

$$\frac{\delta_{нс}^2}{R^2} \sim (\text{Re})^{-1}$$

и, замечая, что

$$(\text{Re})^{-1} \sim T\nu R^{-2},$$

где T — характерное время макропроцесса, получим

$$\frac{\delta}{\delta_{нс}} \sim \left(\frac{\tau}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 1.$$

Таким образом, с точки зрения кинетической теории жидкости толщина пристеночной пленки, если ее рассматривать как толщину поверхностного активного слоя, ответственного за взаимодействие жидкости и твердой стенки, значительно меньше толщины погранслоя.

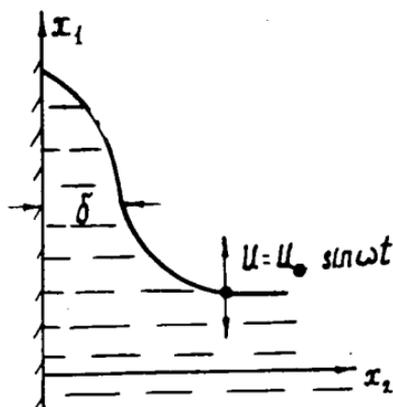


Рис. 1.3.1

Из этого следует, что применение уравнений Навье-Стокса для исследования процессов внутри пленки не является корректным, так как в этом случае процессы, происходящие в пленке, не могут быть описаны, исходя из непрерывных представлений о среде.

Однако очевидно, что разрывное движение жидкости реализуется лишь при определенных условиях, которые характеризуются большими градиентами напряжений, вихревой структурой течения и т. д. В частности, в [13], [21] для таких условий движения получены уравнения для дискретной среды. Поэтому полученную здесь оценку нужно рассматривать как предельную.

1.3.4. Получим теперь на примере двумерной постановки задачи оценку толщины пленки, опираясь на более подходящую для рассматриваемых течений гидромеханическую модель.

Будем для простоты предполагать (рис. 1.3.1), что твердая стенка вертикальная, что движение жидкости происходит по гармоническому закону $u = u_0 \sin \omega t$ с малой скоростью и что в области, достаточно удаленной от мениска, толщина пленки $\delta(x_1)$ мала и постоянна. В связи с этим движение жидкости будет одномерным

$$\bar{u} = u_1 \cdot \bar{e}_1, \quad u_2 = 0, \quad \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| \gg \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|$$

и краевая задача для течения в пленке при $\left| \frac{\partial p}{\partial x_1} \right| \ll j$ приобретает вид нестационарной задачи Прандтля

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + j = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0; \quad (1.3.3)$$

$$p = \text{const при } x_2 = \delta(x_1);$$

$$u_1 = 0 \text{ при } x_2 = 0.$$

Исходя из постановки этой задачи, введем в рассмотрение характерное время процесса

$$\frac{1}{T} \sim \frac{1}{T_\omega} + \frac{1}{T_j},$$

где

$$\frac{1}{T_\omega} = \omega, \quad \frac{1}{T_j} = \frac{j}{u_0},$$

т. е.

$$\frac{1}{T} \sim \omega + \frac{j}{u_0} \sim \omega + \frac{j}{\omega \langle \Delta A \rangle}, \quad (1.3.4)$$

где $\langle \Delta A \rangle$ — средняя за период амплитуда колебаний.

Движения жидкости назовем «медленными», если гравитационные силы много больше сил инерционных

$$\frac{\omega^2 \langle \Delta A \rangle}{j} \ll 1,$$

и «быстрыми» — в противном случае.

Последнее условие, представленное в виде

$$\frac{\omega^2 R}{j} \frac{\langle \Delta A \rangle}{R} = \text{Fr}' \ll 1,$$

где $\text{Fr}' = \text{Fr} \cdot \frac{\langle \Delta A \rangle}{R}$, назовем условием квазистационарности; оно показывает, что «медленное» движение реализуется для $j = \text{const}$ как при $\omega \rightarrow 0$, так и при $\Delta A \rightarrow 0$.

Так как

$$\omega^2 \approx \frac{j\lambda}{R},$$

где λ — частотный параметр, и если через $l = \frac{R}{\lambda}$ обозначить характерный размер, пропорциональный длине волны, то

$$\frac{1}{T} \sim \omega \left(1 + \frac{l}{\langle \Delta A \rangle} \right).$$

График $(T)^{-1}$ от ω приведен на рис. 1.3.2, из которого видно, что для «медленных» движений наблюдается

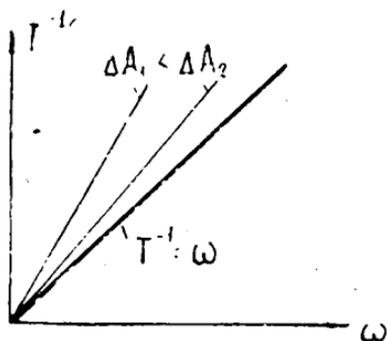


Рис. 1.3.2

сильная зависимость характерного времени от амплитуды колебаний. Поэтому наряду с величиной $\frac{\Delta A}{R}$ (или $\frac{\Delta A}{l}$), характеризующей течение жидкости в целом, введем ещё величину относительной толщины пленки $\frac{\delta}{\Delta A}$, характеризующую течение жидкости в окрестности линии трехфазного контакта.

Таким образом, при исследовании линеаризованного движения жидкости в окрестности ЛТК вводится промежуточная асимптотика вида

$$\frac{\Delta A}{R} \rightarrow 0 \text{ и } \frac{\delta}{\Delta A} \rightarrow 0.$$

Условие квазистационарности выполняется при

$$\lambda \cdot \Delta A \ll R,$$

т. е. для низших форм колебаний, когда $\frac{\Delta A}{R} \ll 1$.

Вследствие этого рассматриваются лишь те движения жидкости, для которых

$$\delta \ll \Delta A, \text{ но } \Delta A \ll R.$$

Движения с $\delta \sim \Delta A$ рассматриваться не будут также и потому, что условия прилипания в этом случае являются корректными, а понятие пристеночной пленки теряет смысл.

Из уравнения движения (1.3.3) для периодических движений имеет место оценка толщины пленки

$$\delta_{\max} \sim \left[\frac{\nu}{\omega \left(1 + \frac{j}{\omega^2 \langle \Delta A \rangle} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.5)$$

Эта оценка при медленных движениях принимает вид

$$\delta_{\max} \sim \left[\frac{\nu \omega \langle \Delta A \rangle}{j} \right]^{\frac{1}{2}}$$

и с точностью до константы совпадает с оценкой Л. Д. Ландау и В. Г. Левич [17] для течения, когда в пленке силы капиллярного давления много меньше сил вязкого трения. Оценки, совпадающие по порядку с приведенной, получены еще некоторыми авторами, например, [9], [46]. По Ландау, эта оценка имеет смысл оценки сверху, в то время как оценка снизу для δ получается, когда

$$u_0 \ll \frac{\gamma}{\rho \nu},$$

т. е. когда силы вязкого трения много меньше сил капиллярного давления. Эта оценка имеет вид [17]

$$\delta = 0,93 \frac{(u_0 \nu)^{2/3}}{j^{1/2} (\rho \gamma)^{1/6}}$$

и получена в результате решения краевой задачи (1.3.3). Таким образом будем полагать, что

$$\delta \approx c \cdot \delta_{\max} \left(\frac{u_0 \nu \rho}{\gamma} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (1.3.6)$$

где c — константа порядка 1, а δ_{\max} имеет вид (1.3.5).

Переходя в (1.3.6) к безразмерным переменным, получим

$$\frac{\delta}{R} \sim (\text{Re})^{-2,3} \cdot \left[1 - \frac{R}{\langle \Delta A \rangle} \text{Fr}^{-1} \right]^{-1,2} \cdot \text{Bo}^{1,6} \left(\frac{\langle \Delta A \rangle}{R} \right)^{1,95}, \quad (1.3.7)$$

где $\text{Bo} = \frac{\rho \omega^2 R^3}{j}$ — число Бонда,

откуда видно, что имеют место следующие предельные оценки относительных толщины пристеночной пленки:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\delta}{R} = 0; \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\delta}{\Delta A} = \infty.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \delta = 0.$$

1.3.5. Основываясь на оценках, полученных выше, и используя граничное условие (1.3.2), можно оценить величину коэффициента трения β . Эта оценка будет получена при тех же предположениях, которые введены в предыдущем пункте.

Из сравнения порядков величин, входящих в краевое условие (1.3.2), следует, что

$$\beta \sim \rho \frac{\nu}{\delta}.$$

Таким образом, коэффициент трения для течений, в которых силы вязкого трения много больше сил капиллярного давления, имеет вид

$$\beta_T \sim a_T \nu^{1/2},$$

а для течений, в которых силы капиллярного давления превосходят силы вязкого трения, $\beta_T \sim a_T \nu^{1/3}$.

В последнем случае оценка для величины безразмерного коэффициента трения есть

$$\begin{aligned} \beta_* &= \frac{\beta R}{\rho \nu} \sim \frac{R}{\delta} \sim \text{Re}^{2/3} \left(1 + \frac{R}{\langle \Delta A \rangle} \text{Fr}^{-1} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\text{Bo} \frac{\langle \Delta A \rangle}{R} \right)^{-1/6}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Выражение (1.3.8) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \beta_* &\sim \text{Re}^{1/2} \left(1 + \frac{R}{\langle \Delta A \rangle} \text{Fr}^{-1} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{\langle \Delta A \rangle} \right)^{1/3} \times \\ &\times \left(\frac{\omega R \rho \nu}{\gamma} \right)^{-1/6}. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

В диапазоне изменения параметров, характерных для многих практически интересных задач и входящих в безразмерный комплекс

$$g = \left(\frac{\omega R \rho \nu}{\gamma} \right)^{-1/6} = \left(\frac{\text{Bo}}{\text{Re}} \right)^{-1/6},$$

его величина мало изменяется и имеет значение порядка 1. Для примера в табл. 1.3.1 приведены численные

значения g -при $j = 10^3 \text{ см/с}^2$, $R = 10^2 \text{ см}$, $\lambda = 1,841$. Расчеты выполнены для жидкостей, удовлетворяющих в этих условиях критерию

$$\frac{\rho \nu \omega_0}{\gamma} \ll 1.$$

Таблица 1.3.1

Жидкость	Вода	Ацетон	Этиловый спирт	Жидкий водород	Ртуть
g	1,56	1,63	1,90	2,30	2,51

Поэтому наряду с формулой (1.3.9) в дальнейшем будет использоваться приближенная формула

$$\beta \sim \text{Re}^{1/2} \left(1 + \frac{R}{\langle \Delta A \rangle} \text{Fr}^{-1} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{\langle \Delta A \rangle} \right)^{1/3}. \quad (1.3.10)$$

Формулы (1.3.9) и (1.3.10) обнаруживают сильную зависимость коэффициента трения от амплитуды колебаний. Так, при $\frac{\Delta A}{R} \rightarrow 0$ $\beta_* \rightarrow \infty$ и граничное условие

(1.3.2) вырождается в обычное условие прилипания. С точки зрения механики процесса, это очевидно. Из (1.3.10) следует, что для быстрых движений

$$\beta_* \sim a_1 \left(\frac{\langle \Delta A \rangle}{R} \right)^{-1/3},$$

а для «медленных»

$$\beta_* \sim a_2 \left(\frac{\langle \Delta A \rangle}{R} \right)^{-2/3},$$

т. е. в условиях квазистационарности влияние амплитуды проявляется наиболее отчетливо.

1.3.6. Приведем ещё оценку изменения во времени толщины пристеночной пленки в связи с тем, что β_* сильно зависит от δ .

Рассмотрим элемент пленки (рис. 1.3.3), ограниченный твердой стенкой ($x_2 = 0$), свободной поверхностью,

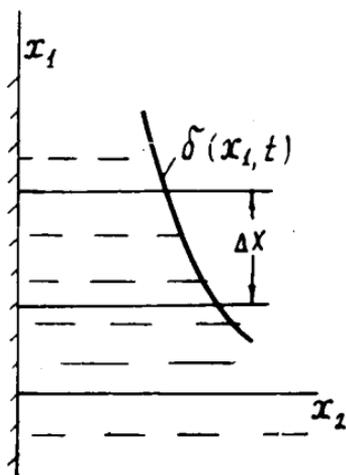


Рис. 1.3.3

уравнение которой $\delta = \delta(x_1, t)$, и некоторыми контрольными поверхностями $x_1 = x_{10}$ и $x_1 = x_{11}$, расположенными достаточно близко друг к другу. Пусть течение жидкости описывается стационарными уравнениями Прандтля

$$-\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + j = 0; \quad (1.3.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0; \quad p = -\gamma \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_1^2} \quad \text{при } x_2 = \delta(x_1, t); \quad (1.3.12)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0.$$

На контрольных поверхностях зададим расходы жидкости и свяжем их уравнением неразрывности вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{10}}^{x_{11}} \int_0^{\delta(x_1, t)} dx_1 \cdot dx_2 = \int_0^{\delta(x_{10}, t)} u_1(x_{10}, x_2, t) dx_2 -$$

$$- \int_0^{\delta(x_{11}, t)} u_1(x_{11}, x_2, t) dx_2.$$

Решение (1.3.11) при условиях (1.3.12) есть

$$u_1 = \frac{1}{\nu} \left(j - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \delta}{\partial x_1^3} \right) \left(\frac{x_2^2}{2} - x_2 \delta \right). \quad (1.3.13)$$

Из уравнения неразрывности имеем, рассматривая t как параметр:

$$\int_{x_{10}}^{x_{11}} \frac{\partial \delta}{\partial t} dx_1 = \int_0^{\delta(x_{10}, t)} [u_1(x_{10}, x_2, t) - u_1(x_{11}, x_2, t)] dx_2 -$$

$$- \int_{\delta(x_{10}, t)}^{\delta(x_{11}, t)} u_1(x_{11}, x_2, t) dx_2.$$

Переходя к пределу при $\Delta x = |x_{10} - x_{11}| \rightarrow 0$, осредняя на Δx величину $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ и предполагая, что $j \gg \frac{\gamma}{\rho} \times \left| \frac{\partial^3 \delta}{\partial x_1^3} \right|$, получим

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} \approx \frac{j \delta^2}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \quad (1.3.14)$$

или, используя оценку

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_1} \approx - \frac{\delta}{2 \langle \Delta A \rangle},$$

в окончательном виде

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} \approx - \frac{j \delta^3}{2 \nu \langle \Delta A \rangle}.$$

Таким образом, интегрируя от некоторого начального значения δ_0 , найдем

$$\frac{\delta}{\delta_0} \approx a_\delta \left(1 + \frac{j \delta_0^2 t}{\nu \langle \Delta A \rangle} \right)^{-1/2}.$$

В безразмерных переменных это уравнение имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta_0} \approx a_\delta \left[1 + 2\pi \frac{Re}{Fr} \left(\frac{\delta_0}{\langle \Delta A \rangle} \right)^2 \left(\frac{\langle \Delta A \rangle}{R} \right) \cdot \frac{t}{T} \right]^{-1/2} \quad (1.3.15)$$

Из рис. 1.3.4 видно, что за период колебаний T толщина пристеночной пленки уменьшается менее чем на

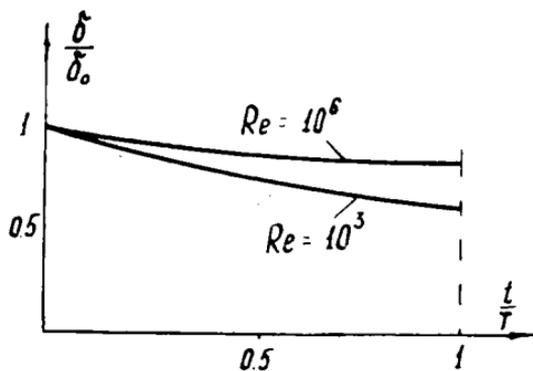


Рис. 1.3.4

порядок, что позволяет толщину пленки в процессе движения приближенно брать некоторым средним значением.

1.3.7. Качественную картину стекания пленки можно установить из приближенного решения уравнения (1.3.14) при заданной начальной форме свободной поверхности $\delta(x_1, 0)$, например, в виде линейной функции

$$\delta(x_1, 0) = \delta_0 + \varepsilon x_1. \quad (1.3.16)$$

Более сложное уравнение начальной формы свободной поверхности не позволяет провести аналитическое исследование нелинейного гиперболического уравнения (1.3.14).

Так как характеристики уравнения (1.3.14) есть

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{j}{\nu} \delta^2,$$

то решение, удовлетворяющее начальному условию (1.3.16), имеет вид

$$\delta = f\left(x_1 + \frac{j}{\nu} \delta^2 t\right),$$

где f — произвольная непрерывная функция.

Пусть

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \left(x_1 + \frac{j}{\nu} \delta^2 t\right).$$

Тогда

$$\delta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon \frac{j}{\nu} (\delta_0 + \varepsilon x_1) t}}{2\varepsilon \frac{j}{\nu} t}.$$

Если $\varepsilon > 0$, то при

$$t = \frac{\nu}{4j\varepsilon (\delta_0 + \varepsilon x_1)}$$

наступает градиентная катастрофа (пересечение характеристик), что означает разрыв решения. Однако случай $\varepsilon > 0$ соответствует физически нереализуемому в рассматриваемой задаче профилю пленки, когда ее начальная толщина уменьшается по мере приближения к мениску. Поэтому рассмотрим решение при $\varepsilon < 0$, когда

$$\delta = \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{j}{\nu} (\delta_0 - \varepsilon x_1) \cdot t} - 1}{2\varepsilon \frac{j}{\nu} t}.$$

Асимптотические решения при

$$t \ll \frac{\nu}{4\varepsilon j (\delta_0 - \varepsilon x_1)}$$

и при

$$t \gg \frac{\nu}{4\varepsilon j (\delta_0 - \varepsilon x_1)}$$

имеют вид соответственно

$$\delta = (\delta_0 - \varepsilon x_1) \left[1 - \frac{\varepsilon j}{4\nu} (\delta_0 - \varepsilon x_1) t + O(t^2) \right]$$

и

$$\delta = \left(\nu \frac{\delta_0 - \varepsilon x_1}{\varepsilon j t} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.17)$$

На рис. 1.3.5 представлена качественная картина изменения геометрии пристеночной пленки во времени.

Из (1.3.17) так же, как и из (1.3.15) следует, что за промежуток времени $\sim T$ толщина пленки изменяется примерно на 0,4 её первоначальной толщины. Следовательно, на такую же величину изменяется и коэффициент трения β при натекании жидкости на стенку по сравнению со стеканием. Однако это изменение нами в дальнейшем не учитывается, и коэффициент трения выбирается некоторым средним.

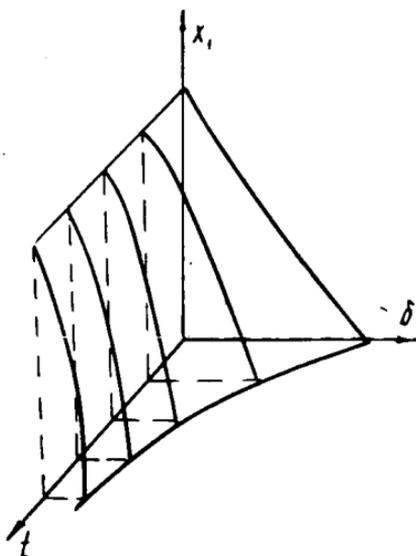


Рис. 1.3.5

1.3.8. Суммируя вышеизложенное, будем предполагать, что:

- а) пристеночная пленка имеет малую толщину;
- б) процессы, происходящие в пристеночной пленке, в предложенной модели учитываются некоторым средним значением коэффициента трения β . Время полного стекания пленки много больше характерного времени макропроцесса;

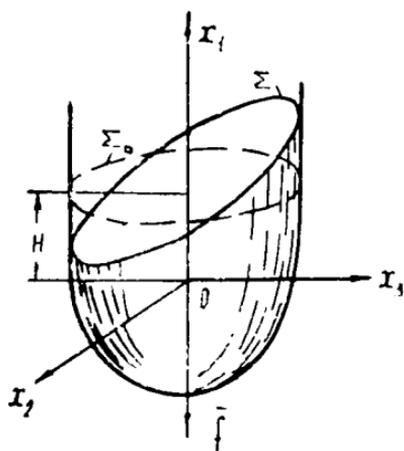
в) граничные условия на смоченной поверхности сносятся с поверхности твердой границы на внутреннюю поверхность пристеночной пленки и записываются в виде

$$u_n = 0; \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \beta_* u_\tau. \quad (1.3.18)$$

Граничные условия (1.3.18) при $\beta_* \rightarrow \infty$ асимптотически переходят в обычные условия прилипания (1.3.1). В таком переходе есть аналогия с теорией теплопроводности, где граничные условия первого рода можно рассматривать как предельный случай граничных условий третьего рода [20]. Аналогично с теплопроводностью можно продолжить и в таком плане. Известно, что при исследовании распространения тепла в составных телах для объяснения разрыва в температуре на поверхности контакта, который вызван, например, неплотностью подгонки, наличием воздушных зазоров, но никак не следует из математической модели задачи, вводится так называемый коэффициент термического сопротивления. Аналогично этому в нашей задаче коэффициент трения β в суммарном виде компенсирует не учтенные в постановке задачи эффекты в пристеночном слое жидкости.

§ 1.4. Краевая задача о движении жидкости, частично заполняющей полость

1.4.1. Если предположить, что сосуд неподвижен и давление газа над свободной поверхностью равно нулю,



то в связанной с сосудом системе координат o, x_1, x_2, x_3 , когда ось ox_1 ориентирована перпендикулярно плоскости невозмущенной свободной поверхности (рис. 1.4.1), краевая задача о движении жидкости, которое развивается из некоторого начального состояния

Рис. 1.4.1

$$\bar{u}(\bar{x}, t_0) = \bar{u}^0, p(\bar{x}, t_0) = p^0, \zeta(x_2, x_3, t_0) = \zeta^0 \quad (1.4.1)$$

и происходит под действием силы \bar{f} , имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}(\nabla \cdot \bar{u}) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{u} + \nabla p = \frac{\bar{f}}{\text{Fr}}; \quad (1.4.2)$$

$$\text{div } \bar{u} = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in Q; \quad (1.4.3)$$

$$u_n = 0, \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \beta u_\tau \quad \text{для } \bar{x} \in S; \quad (1.4.4)$$

$$u_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \zeta; \quad (1.4.5)$$

$$\tau_{nn} = \frac{1}{\text{Bo}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right), \quad (1.4.6)$$

$$\tau_{n\tau_i} = \tau_{n\tau_j} = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in \Sigma', \quad (1.4.7)$$

где

$$\tau_{nn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \cos(n, x_i) \cos(n, x_j);$$

$$\tau_{n\tau_m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \cos(n, x_i) \cos(\tau_m, x_j)$$

$$(m = 1, 2).$$

1.4.2. Будем считать, что жидкость совершает малые движения, т. е. предположим, что смещения частиц жидкости и их производные есть величины первого порядка малости. Проведем линеаризацию краевой задачи п. 1.4.1, пренебрегая величинами второго порядка малости. Линейная теория, кроме пренебрежения квадратами и произведениями скорости и смещений свободной поверхности, позволяет также с точностью до величин второго порядка малости граничные условия с неизвестной свободной поверхности $x_1 = H + \zeta(x_2, x_3, t)$ отнести на невозмущенную границу Σ_0 , уравнение которой есть

$$x_1 = H.$$

Таким образом, в линейной постановке краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{u} + \nabla p = \frac{\bar{f}}{\text{Fr}}, \quad (1.4.8)$$

$$\text{div } \bar{u} = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in Q;$$

$$u_n = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \beta u_\tau \quad \text{для } \bar{x} \in S: \quad (1.4.9)$$

$$-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\text{Fr}}{\text{Bo}} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right);$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0; \quad (1.4.10)$$

$$u_1(H, x_2, x_3, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{для } \bar{x} \in \Sigma_0;$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2}; \quad \frac{1}{R_3} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3^2}. \quad (1.4.11)$$

ГЛАВА II

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Известны различные методы приближенного и численного решения задач математической физики, каждый из которых в конкретных условиях имеет свои достоинства и недостатки.

Как правило, численные методы приводят краевую задачу к эквивалентной системе алгебраических уравнений определенного вида. По определению С. Л. Соболева [37], такие методы называются прямыми. При применении прямых методов исходная непрерывная система редуцируется к системе с конечным числом степеней свободы. Естественно, что при такой редукции должны сохраняться основные свойства задачи и решения.

Прямые методы решения задач математической физики можно в основном разделить на два класса.

1. Методы, основанные на разложении решения в ряд по функциям, заранее удовлетворяющим определенным требованиям.

2. Методы, основанные на дискретизации исходной краевой задачи и нахождении решения в конечно-разностном виде.

В работе Куранта [47] на примере для двумерного уравнения Лапласа было показано, что применение в вариационном методе кусочно-линейных базисных функций приводит к обычной пятиточечной конечно-разностной схеме.

Таким образом была указана фундаментальная связь между вариационными и конечно-разностными подходами в решении задач математической физики.

Поскольку основные проблемы механики подчиняются, как правило, некоторым вариационным принципам, то естественно сделать попытку построить еди-

ную сквозную теорию постановки и построения метода решения задачи о движении жидкости со свободной поверхностью на основе вариационных принципов и методов, не налагая предварительного ограничения на свойства жидкости (вязкая — невязкая) и характер течения (линейная — нелинейная теория).

В этой главе сначала рассматривается применение вариационного принципа Лагранжа для постановки задачи. Затем, следуя в основном работе Г. И. Марчука [22], с помощью минимизации вариационного уравнения Лагранжа формулируются вариационная, разностная и вариационно-разностная задача о движении жидкости со свободной поверхностью.

Такой подход, сохраняя единообразие в методологии постановки задачи и построения вычислительных процедур, обеспечивает в то же время определенную свободу в выборе конкретного метода решения задачи с учетом ее характерных особенностей.

§ 2.1. Вариационный принцип Лагранжа

2.1.1. Построение вариационного принципа для задач динамики реальной жидкости со свободной поверхностью основывается на фундаментальном исследовании Лагранжа. Нами будут использованы конкретные результаты, приведенные в монографии Дж. Серрина [36]. Известен еще ряд исследований, посвященных построению вариационных принципов для реальной жидкости, среди которых в первую очередь необходимо отметить работу В. В. Румянцева [33].

Переходя к формулировке вариационного принципа для вязких несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью, реология которых подчиняется уравнению (1.1.1), будем предполагать, что на твердых границах, взаимодействующих с жидкостью, выполняется условие прилипания

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in S.$$

Прежде всего получим выражение для вариации работы δA_1 , проводимой внешними силами \bar{f} и силами внутреннего трения, которые обусловлены вязкостью жидкости. Для упрощения выкладок будем предполагать, что силы поверхностного натяжения пренебрежимо малы по сравнению с инерционными и вязкими. В про-

тивном случае во всех выкладках необходимо было бы учитывать еще вариацию работы A_γ

$$\delta A_\gamma = \int_{\Sigma} \Delta p \bar{n} \cdot \delta \bar{x} ds,$$

где

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Если через $\delta \bar{x}(\bar{x}, t)$ обозначить виртуальное перемещение жидкой частицы, которая в момент времени t занимала положение $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, и если потребовать, чтобы $\delta \bar{x}$ была непрерывной и ограниченной в области $\bar{Q} = Q + S + \Sigma$ функцией, которая, кроме того, удовлетворяет условию

$$\delta \bar{x}(\bar{x}, t) = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in S, \quad (2.1.1)$$

то виртуальная работа жидкости δA_1 , на перемещении $\delta \bar{x}$ запишется в следующем виде:

$$\delta A_1 = \rho \int_Q (\bar{f}, \delta \bar{x}) dQ - \int_Q (\mathcal{T}; \nabla \cdot \delta \bar{x}) dQ, \quad (2.1.2)$$

где $\nabla \cdot \delta \bar{x}$ — тензор с компонентами $\frac{\partial \delta x_j}{\partial x_i} = (\nabla \cdot \delta \bar{x})_{ij}$, \mathcal{T} — тензор напряжений

$$\mathcal{T} = P + \sigma;$$

P — тензор давлений; σ — тензор скоростей деформации с компонентами (1.1.2); $(;)$ — скалярное произведение тензоров (первый инвариант).

Определим далее работу сил инерции на виртуальном перемещении $\delta \bar{x}$ формулой

$$\delta A_2 = -\rho \int_Q \left(\frac{d\bar{u}}{dt}, \delta \bar{x} \right) dQ \quad (2.1.3)$$

и в соответствии с принципом Даламбера приравняем нулю сумму

$$\delta(A_1 + A_2) = 0,$$

обозначив ее как вариацию некоторого функционала

$$\delta I_0 = \rho \int_Q \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dt} - \bar{f} \right) \cdot \delta \bar{x} + \frac{1}{\rho} \mathcal{T}; \nabla \cdot \delta \bar{x} \right] dQ. \quad (2.1.4)$$

Функционал I_0 уравнениями Эйлера имеет уравнения движения Навье-Стокса в форме Коши

$$\frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathcal{T} = \bar{f} \quad (2.1.5)$$

и динамические граничные условия на свободной поверхности

$$\tau_{nn} = 0, \quad \tau_{n\tau_1} = \tau_{n\tau_2} = 0.$$

Здесь n , τ_1 , τ_2 — нормаль и касательные к Σ .

Причем минимум функционала достигается на перемещениях $\delta\bar{x}$, удовлетворяющих условию (2.1.1). Следовательно, для того, чтобы функционал I_0 применить к исследованию движения жидкости, необходимо потребовать, чтобы перемещения $\delta\bar{x}$ удовлетворяли еще кинематическому граничному условию на свободной поверхности (1.2.2), а также уравнению неразрывности (1.1.4).

Эти требования к перемещениям $\delta\bar{x}$ можно ослабить, в частности, не требовать заранее выполнения условия непрерывности течения, если воспользоваться теорией множителей Лагранжа. Рассматривая уравнение неразрывности как голономную связь, наложенную на систему, сконструируем функционал вида

$$\delta I = \int_Q \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dt}, \delta\bar{x} \right) - (\bar{f}, \delta\bar{x}) - v(\sigma; \nabla \cdot \delta\bar{x}) - \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{div} \delta\bar{x} \right] dQ, \quad (2.1.6)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

В этой формуле член $\operatorname{div} \delta\bar{x}$ выполняет роль уравнения непрерывности, так как

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(\bar{x}, t).$$

Из (2.1.6) следуют, во-первых, уравнения движения

$$\frac{d\bar{u}}{dt} - v \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \lambda = \bar{f},$$

которые совпадают с (2.1.5), если λ имеет смысл давления (p), и, во-вторых, — динамические граничные условия на свободной поверхности. Присоединяя сюда

еще уравнение непрерывности (ограничение по Лагранжу), получим таким образом из (2.1.6)

$$\frac{d\bar{u}}{dt} - \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = \bar{f}; \quad (2.1.7)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in Q; \quad (2.1.8)$$

$$-\frac{P}{\rho} + 2\nu \sigma_{nn} = 0;$$

$$\sigma_{n\tau_1} = \sigma_{n\tau_2} = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in \Sigma. \quad (2.1.9)$$

Следовательно, функции, удовлетворяющие условиям прилипания на твердых границах (1.3.1) и кинематическому граничному условию — на свободной поверхности (1.2.2) и доставляющие стационарное значение вариационному уравнению (2.1.6), являются решением уравнений движения (2.1.7) и уравнения непрерывности (2.1.8) при динамических граничных условиях (2.1.9) на свободной поверхности.

В заключение важно отметить, что вариационный принцип (2.1.6) сформулирован для некоторого мгновенного состояния жидкости, которое характеризуется определенными полями скоростей и давления, а также фиксированной конфигурацией свободной и смоченной поверхности.

§ 2.2. Частные случаи

Ниже рассмотрены частные случаи сформулированного вариационного принципа (уравнения), когда, во-первых, задача линеаризована и, во-вторых, когда жидкость идеальная, а внешние силы обладают потенциалом и движение безвихревое.

2.2.1. Линеаризованная краевая задача о движении вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд, приведена в п. 1.4.2.

Вариация функционала, который своими уравнениями Эйлера имеет краевую задачу (1.4.8) — (1.4.10) при $\gamma \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ есть

$$\delta I = \int_Q \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \delta \bar{x} \right) + \nu (\sigma; \nabla \cdot \delta \bar{x}) - \frac{P}{\rho} \operatorname{div} \delta \bar{x} - \right. \\ \left. - (\bar{f}, \delta \bar{x}) \right] dQ = 0.$$

Причем здесь поверхность $S + \Sigma$, ограничивающая объем Q , занятый жидкостью, совпадает во все время движения $[t_1, t_2]$ с этой поверхностью в невозмущенном состоянии, и граничное условие со свободной поверхности $x_1 = H + \xi(x_2, x_3, t)$ сносится на поверхность $x_1 = H$. Следовательно, заранее удовлетворять кинематическому граничному условию на свободной поверхности не нужно.

2.2.2. Предположим теперь, что силами вязкого трения можно пренебречь по сравнению с инерционными силами. Тогда вариация функционала (2.1.6) есть

$$\delta I = \int_Q \left(\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\nabla p}{\rho} - \bar{f} \right) \cdot \delta \bar{x} dQ + \int_{\Sigma} \frac{p}{\rho} \delta \bar{x} \cdot d\bar{s} = 0. \quad (2.2.1)$$

Отсюда при условии, что течение удовлетворяет наложенным на него кинематическим связям и граничному условию на Σ , следуют уравнения движения

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = \bar{f} \quad \text{для } \bar{x} \in Q$$

и динамическое граничное условие на свободной поверхности

$$p = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in \Sigma.$$

Пусть теперь еще массовые силы обладают потенциалом

$$\bar{f} = \nabla U, \quad U = -jx_1$$

и течение жидкости безвихревое. Введем в связи с этим потенциал скоростей Φ

$$\bar{u} = \nabla \Phi(\bar{x}, t)$$

и потенциал смещений Ψ

$$\bar{x} = \nabla \Psi(\bar{x}, t).$$

Тогда, учитывая, что

$$\bar{u} \times (\nabla \times \bar{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{u}}{dt} = \nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right],$$

получим из (2.2.1) равенство

$$\int_Q \nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + jx_1 \right] \nabla \delta \Psi dQ +$$

$$+ \int_{\Sigma} \frac{p}{\rho} \nabla \delta \Psi d\bar{s} = 0,$$

из которого при условии

$$\frac{\partial \delta \Psi}{\partial n} = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in S$$

следуют уравнение для давления

$$\frac{p}{\rho} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + j x_1 \right] \quad \text{при } \bar{x} \in Q$$

и граничное условие на свободной поверхности

$$p = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in \Sigma.$$

Так как из уравнения непрерывности, когда $\bar{u} = \nabla \Phi$, следует

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in Q, \quad (2.2.2)$$

то на свободной поверхности имеет место условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + j z = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in \Sigma. \quad (2.2.3)$$

Таким образом, вариационное уравнение (2.1.6) в случае потенциального движения идеальной жидкости приводит к задаче нахождения гармонической в Q функции $\Phi(\bar{x}, t)$, которая удовлетворяет на свободной поверхности условию (2.2.3). Причем, как следует из п. 1.4.3, вариации потенциала Ψ должны быть предварительно согласованы с кинематическим граничным условием на свободной поверхности и условием непротекания на смоченной поверхности.

Очевидно, что если движения жидкости бесконечно малы и в этом случае выполняются соотношения

$$\nabla \Phi = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad \text{при } x_1 = H,$$

то вариационное уравнение (2.1.6) своими уравнениями Эйлера имеет соответствующую линейную краевую задачу, и не требуется накладывать никаких предварительных ограничений на варьируемые функции.

Кроме того, в этом случае следствием потенциальности поля скоростей является потенциальность поля давлений, т. е.

$$\nabla^2 p(\bar{x}, t) = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in Q.$$

§ 2.3. Вариационные принципы Гамильтона и Бейтмена в задачах о потенциальном движении идеальной жидкости

Математическая формулировка задачи о потенциальном движении идеальной жидкости сводится к красной задаче, выписанной в п. 2.2.2.

Непосредственное решение задачи в общем случае представляет непреодолимые и математические трудности в связи с тем, что:

- на свободной поверхности заданы нелинейные дифференциальные соотношения;
- оператор задачи терпит разрыв на ЛТК;
- решение задачи разыскивается на поверхности, область изменения функции которой заранее не известна.

К формулированию вариационных принципов, которые своими уравнениями Эйлера имели бы исходную краевую задачу, когда на варьируемые функции не наложены какие-либо ограничения кроме требований гладкости, ограниченности, общего подхода нет. Построение таких принципов, по словам Д. Уизема [38], — процедура, похожая на эксперимент.

В применении вариационных методов к решению краевых задач нужно иметь в виду две стороны вопроса: во-первых, выбор вариационного принципа, который обеспечил бы построение наиболее подходящего функционала, и, во-вторых, выбор наилучшего для данных условий метода минимизации функционала.

Очевидно, кроме того, что всегда важнейшей проблемой применения вариационных методов является обеспечение численной устойчивости задач линейной алгебры, к которым приводит тот или иной метод минимизации функционала.

Наиболее широко известный при исследовании движения потенциальных ньютоновых систем принцип Гамильтона не позволяет построить эффективные методы решения нелинейной задачи по тем же причинам, что рассмотренный выше принцип Лагранжа. Это вызвано тем, что заранее удовлетворить решение кинематическому граничному условию на свободной поверхности в общем случае нельзя. В связи с этим здесь наряду с принципом Гамильтона описан принцип Бейтмена, развитый для задач динамики жидкости со свободной поверхностью Льюком [50].

2.3.1. В соответствии с принципом Гамильтона действительное движение потенциальной системы за промежуток времени $t_2 - t_1$ является экстремалью функционала I_1 , когда функция Лагранжа есть действие по Гамильтону (разность кинетической и потенциальной энергии)

$$L_1 = T - \Pi.$$

Однако если построить функционал по Гамильтону

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt, \quad (2.3.1)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_Q (\nabla \Phi)^2 dQ;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho j \int_{\Sigma} \zeta^2 ds;$$

то от функций, его минимизирующих, необходимо потребовать, чтобы они были гармоническими, удовлетворяли кинематическому граничному условию на свободной поверхности, а условие на S должно быть однородным. В этом случае при вычислении вариации I_1 варьируется и область Q в связи с тем, что граница Σ является неизвестной. Вариационное уравнение, полученное из принципа Гамильтона, имеет при этом вид [30]

$$\delta I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_0} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + j \zeta \right] \delta \zeta ds dt = 0. \quad (2.3.2)$$

В связи с вариационным методом, который построен на основе принципа Гамильтона для нелинейной задачи, необходимо отметить два момента.

Во-первых, экстремали функционала (2.3.1), которые являются решением исходной задачи, должны быть выбраны из класса функций, удовлетворяющих кинематическому граничному условию на свободной поверхности. Это имеет принципиальное значение, поскольку это условие является очень сильным и фактически не позволяет использовать прямые методы для эффективного решения задачи в общем случае.

Во-вторых, вариационное уравнение (2.3.2) не учитывает кинематику растекания жидкости по смоченной поверхности. Это связано с тем, что в функционале (2.3.1) фактически не учитывается переменность области определения Σ , так как принцип Гамильтона приводит к уравнениям Эйлера, которые дают решение задачи в окрестности Σ_0 с точностью $O(\delta\xi^2)$, т. е. с той же точностью, которая обычно достигается при исследовании нелинейных колебаний жидкости в сосудах асимптотическими методами.

2.3.2. Если исходная краевая задача может быть линеаризована, когда кинематическое граничное условие является только уравнением для определения свободной поверхности, можно построить функционал, аналогичный функционалу по Гамильтону, который своими уравнениями Эйлера имеет исходную краевую задачу. Таким образом, минимизация этого функционала проводится на классе функций, на который не наложены никакие условия (кроме обычных условий для минимизирующих последовательностей).

Действительно, рассмотрим функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_Q (\nabla\Phi)^2 dQ - \frac{1}{2j} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 ds \right] dt. \quad (2.3.3)$$

Здесь Σ_0 — невозмущенная свободная поверхность.

Пусть Φ сообщает минимум функционалу $I[\Phi]$. Рассмотрим значение функционала для функции $\Phi + \alpha\eta$, где η — любая непрерывная вместе со своими производными в Q функция, обращающаяся в нуль на границах интервалов $[t_1, t_2]$. При малых α функция $\Phi + \alpha\eta$ сколь угодно близка к Φ и, кроме того,

$$I[\Phi] \leq I[\Phi + \alpha\eta].$$

Из определения вариации

$$\delta I = \left\{ \frac{d}{d\alpha} I[\Phi + \alpha\eta] \right\}_{\alpha=0} = 0$$

получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_Q \nabla^2\Phi \cdot \eta \cdot dQ - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \eta ds + \int_{\Sigma_0} \left(\frac{1}{j} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) \times \right. \\ \left. \times \eta ds \right] dt = 0. \quad (2.3.4)$$

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления [14] находим, что из (2.3.4) следует таким образом, что уравнениями Эйлера для функционала (2.3.3) является исходная краевая задача о малых гравитационных колебаниях ограниченного объема идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, когда силами поверхностного натяжения можно пренебречь.

Таким образом, нахождение решения исходной краевой задачи свелось к вариационной задаче вида: внутри некоторого класса допустимых функциональных аргументов найти функцию, экстремальную для функционала I .

2.3.3. Принцип Бейтмена [45], сформулированный для задач газовой динамики, оказался и наиболее общим вариационным принципом для задач потенциального течения несжимаемой жидкости со свободными поверхностями и имеет для этого случая вид [50]

$$\delta I_2 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_Q p dQ dt = 0. \quad (2.3.5)$$

Идейная сторона принципа Бейтмена строго удовлетворяет всем требованиям классических вариационных принципов, рассматриваемых аналитической механикой.

Во-первых, в принципе Бейтмена так же, как в аналитической механике, действительное движение на интервале времени $[t_1, t_2]$ выделяется из кинематически возможных как результат экстремальных свойств функционала (2.3.5). Во-вторых, из интеграла Бернулли следует, что

$$\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const},$$

т. е. давление можно интерпретировать как кинетическую энергию единицы объема.

И, наконец, из теоремы Кельвина о минимуме энергии [25] следует, что безвихревое движение в односвязной области происходит с минимальной по сравнению с другими движениями кинетической энергией.

Используя выражение для давления в жидкости при потенциальном течении, покажем, что функционал, основанный на применении принципа Бейтмена

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + j x_1 \right] dQ dt, \quad (2.3.6)$$

своими уравнениями Эйлера имеет нелинейную краевую задачу без каких-либо ограничений на виртуальные изменения $\delta\Phi$, $\delta\zeta$, кроме стандартных требований их непрерывности вместе со своими первыми производными, ограниченности и того, что

$$\delta\Phi = \delta\zeta = 0 \text{ при } t = t_1, t_2.$$

Варьируя (2.3.6) с учетом переменности Q , в силу того, что ζ — неизвестная функция, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_Q \nabla\Phi \cdot \nabla\delta\Phi dQ - \int_Q \frac{\partial\delta\Phi}{\partial t} dQ + \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + j\zeta \right] \delta\zeta ds \right\} dt = 0$$

или после интегрирования по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_Q \nabla^2 \Phi \cdot \delta\Phi dQ - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla\zeta \cdot \nabla\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right) \delta\Phi ds + \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + j\zeta \right] \delta\zeta ds \right\} dt = 0. \quad (2.3.7)$$

Так как $\delta\Phi$, $\delta\zeta$ могут быть выбраны произвольно и независимо, то из последнего выражения следует полная система уравнений и граничных условий для рассматриваемой краевой задачи.

2.3.4. Функции Лагранжа в принципе Гамильтона L_1 и в принципе Бейтмена L_2 отличаются следующим образом:

$$L_1 = -L_2 + \int_Q \frac{\partial\Phi}{\partial t} dQ,$$

и соответствующие функционалы будут равны только в том случае, если Φ есть решение рассматриваемой задачи, т. е. удовлетворяет законам сохранения, и если, кроме того, средними на интервале $[t_1, t_2]$ значениями

интегралов $\int_Q \frac{\partial\Phi}{\partial t} dQ$ и $\int_{\Sigma} \frac{\partial\zeta}{\partial t} \Phi ds$ можно пренебречь [38].

Интересно отметить, что линейризованная краевая задача следует из (2.3.7), если там пренебречь квадра-

тичными членами, однако принцип Бейтмена не приводит к правильному результату, если непосредственно в исходном выражении (2.3.6) использовать формулу для давления в линейном приближении

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - jx_1.$$

Вариационный принцип Лагранжа, обеспечивающий решение задачи для идеальной жидкости при более сильных ограничениях на вариации исходных функций, чем принцип Бейтмана, и при тех же ограничениях, что и принцип Гамильтона, имеет функционал, который в общем случае не приводится к функционалу Гамильтона. Функционалы по Лагранжу и Бейтмену эквивалентны только в случае малых движений жидкости, когда свободную поверхность можно заменить плоскостью.

В самом деле, заменим в (2.2.1) $\frac{d\bar{u}}{dt} \cdot \delta\bar{x}$ по формуле

$$\delta\bar{x} \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{u} \cdot \delta\bar{x}) - \frac{1}{2} \delta u^2$$

и, интегрируя по времени на интервале $[t_1, t_2]$, а также используя интегрирование по частям с учетом переменности границ области Q , получим

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_{\Sigma} (\bar{u} \cdot \delta\bar{x}) \frac{d\zeta}{dt} ds + \int_{\Sigma} p \delta\bar{x} \cdot d\bar{s} - \int_Q (\bar{u} \cdot \nabla) \times \right. \\ & \left. \times (\bar{u} \cdot \delta\bar{x}) dQ + \int_Q \left[-\frac{1}{2} \delta u^2 - \bar{f} \cdot \delta\bar{x} - \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \delta\bar{x} \right] dQ \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Будем предполагать далее, что

$$\bar{x} = \nabla \Psi, \quad \delta\bar{x} = \nabla \delta\Psi, \quad \delta\bar{u} = \nabla \delta\Phi;$$

$$\bar{f} = \nabla U, \quad U = -jx_1$$

и, кроме того,

$$\delta\Phi = 0; \quad \delta\bar{x} = 0 \quad \text{для } \bar{x} \in S \text{ и при } t = t_1, t_2.$$

В этом случае

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_Q \delta(\nabla\Phi)^2 dQ + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} (\nabla\Phi)^2 \delta\zeta ds;$$

$$\int_Q (u \cdot \nabla) (\bar{u} \cdot \delta \bar{x}) dQ = \int_{\Sigma} (\nabla \Phi \cdot \nabla \delta \Psi) \frac{\partial \zeta}{\partial t} ds;$$

$$\int_Q \nabla U \cdot \nabla \delta \Psi dQ = -\frac{1}{2} j \int_{\Sigma} \delta \zeta^2 ds,$$

и (2.3.8) приобретает вид

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta (T - \Pi) - \int_Q \nabla^2 p \cdot \delta \Psi dQ - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\nabla \Phi)^2 \delta \zeta ds \right] dt.$$

Таким образом, разность вариаций функционалов Гамильтона

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt$$

и Лагранжа

$$\delta I - \delta I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\nabla \Phi)^2 \delta \zeta ds + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + j \zeta \right) \delta \zeta ds \right] dt$$

обращается в нуль только при линейной постановке задачи. Аналогичный вывод следует и при сравнении вариаций функционалов Лагранжа и Бейтмена

$$\begin{aligned} \delta I - \delta I_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \left[2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2j \zeta + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] \delta \zeta ds dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + j \zeta \right) \delta \zeta ds dt. \end{aligned}$$

§ 2.4. Вариационный (проекционный) метод Галеркина

В этом параграфе мы остановимся на основных положениях вариационного метода Галеркина, который благодаря своей большой универсальности широко используется для решения краевых проблем математической физики и в связи с тем, что для решения многих задач механики сплошных сред (в частности, задачи

о течении жидкости со свободной поверхностью) он может рассматриваться как способ реализации вариационного принципа Лагранжа.

Т. е. если при вариационном подходе к исследованию краевой задачи принцип Лагранжа можно рассматривать как способ постановки задачи, то метод Галеркина является естественным продолжением этого исследования на этапе решения задачи.

2.4.1. Метод Галеркина решения дифференциального уравнения в частных производных

$$Lv - f = 0 \quad (2.4.1)$$

при определенных граничных условиях, где $v = v(x_1, x_2, \dots)$ — искомая, а $f(x_1, x_2, \dots)$ — известная функции, применяется для операторов L не обязательно самосопряженных и положительных [26].

Если решение (2.4.1) аппроксимировать в виде разложения искомой функции $v(\bar{x})$ в ряд

$$v(\bar{x}) = \sum_n a_n \omega_n(\bar{x}),$$

в котором элементы последовательности $\{\omega_n\}$ принадлежат области определения оператора задачи D_A , и ограничиться в этом ряде первыми N членами

$$v^{(N)}(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N a_n^{(N)} \omega_n(\bar{x}), \quad (2.4.2)$$

то решение задачи (2.4.1) по Галеркину означает ортогонализацию невязки

$$z^{(N)} = Lv^{(N)} - f,$$

вызванной заменой в (2.4.1) точного решения $v(\bar{x})$ приближенным (2.4.2), к элементам $\omega_n(\bar{x}) \in D_A$.

В результате решение исходной краевой задачи заменяется нахождением решения $a_n^{(N)}$ системы линейных алгебраических уравнений

$$(z^{(N)}, \omega_n) = \sum_{m=1}^N [a_m^{(N)} (L\omega_m, \omega_n) - (f, \omega_n)] = 0 \quad (2.4.3)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N).$$

Важно отметить, что последовательность функций $\{\omega_n\}$ выбирается в области определения оператора задачи A , т. е. функции $\omega_n(\bar{x})$ в этом случае обязатель-

по должны удовлетворять кинематическим (главным) граничным условиям, в то время как динамические (естественные) граничные условия заранее могут и не удовлетворяться.

Метод Галеркина распространяется и на нестационарные задачи. При этом неизвестные коэффициенты $a_n^{(N)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) в (2.4.2) нужно считать функциями времени, а система алгебраических уравнений (2.4.3) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $a_n^{(N)}(t)$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Необходимо при этом задать еще соответствующие начальные условия.

2.4.2. Между уравнениями (2.4.3) и вариационным уравнением Лагранжа (2.1.6) существует прямое взаимоотношение, несмотря на то, что первые получены из чисто математических соображений, а вторые — из рассмотрения одного из основных принципов механики — принципа Даламбера.

В самом деле, достаточно в (2.1.6) положить

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^N a_n^{(N)} \omega_n, \quad p = \sum_{n=N_1}^N a_n^{(N)} \omega_n$$

и воспользоваться соотношениями

$$\delta I = \sum_{n=1}^N \frac{\partial I}{\partial a_n^{(N)}} \delta a_n^{(N)}; \quad (2.4.4)$$

$$\delta \bar{x} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial \bar{x}}{\partial a_n^{(N)}} \delta a_n^{(N)}, \quad (2.4.5)$$

чтобы получить совпадение (2.1.6) и (2.4.3).

Следовательно, вариационный метод Галеркина можно рассматривать как метод минимизации вариационного соотношения Лагранжа (2.1.6).

§ 2.5. Построение вариационно-разностных и разностных схем решения на основе вариационного принципа Лагранжа

Ограничимся рассмотрением линейной задачи в двумерной нестационарной постановке. Все выкладки, проведенные в этом параграфе, могут быть распространены и на трехмерную постановку. Однако это потребует

громоздких выкладок и не приведет к принципиально новым результатам.

Математическая формулировка рассматриваемой здесь постановки сводится к следующей краевой задаче (§ 1.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{u} + \nabla p + \frac{\bar{e}_1}{\text{Fr}} &= 0; \\ \text{div } \bar{u} &= 0 \quad \text{в обл. } Q; \\ p - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= u_1 \quad \text{при } x_1 = H; \\ \bar{u} &= 0 \quad \text{при } \bar{x} \in S. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Вариационное уравнение (п. 2.2.1) для линейризованной задачи (2.5.1) тождественно совпадает с методом Б. Г. Галеркина, если воспользоваться определением вариации (2.4.5) и если решение разыскивается в виде ряда по координатным функциям, удовлетворяющим кинематическим граничным условиям. При этом необходимо еще добавить связь по Лагранжу — уравнение неразрывности

$$\int_Q \text{div } \bar{u} \cdot \delta x_1 \cdot dQ = 0$$

или

$$\int_Q \text{div } \bar{u} \cdot \delta x_2 \cdot dQ = 0.$$

2.5.1. Покроем область Q сеткой Q^h из одинаковых (для простоты) ячеек к форме многоугольников Q_s , например, квадратов, треугольников и т. д. Определим в каждой ячейке (конечном элементе) функции $\Omega_s(\bar{x})$ такие, что они непрерывны в Q_s и обращаются в нуль на его границе, а в вершине s $\Omega_s = 1$.

Эти функции обладают своеобразным свойством полноты в том смысле, что любая непрерывная в Q функция $\varphi(\bar{x}, t)$ может быть аппроксимирована разложением вида

$$\varphi(\bar{x}, t) = \sum_s \varphi_s(t) \Omega_s(\bar{x}),$$

где $\varphi_s(t)$ — значение функции φ в s -м узле сетки в момент времени t .

Будем разыскивать решение задачи в виде

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_s [\bar{e}_1 u_{1s}(t) + \bar{e}_2 u_{2s}(t)] \Omega_s(\bar{x}); \quad (2.5.2)$$

$$p(\bar{x}, t) = \sum_s p_s(t) \Omega_s(\bar{x}),$$

и пусть, кроме того,

$$\delta \bar{x} = \delta \sum_s [\bar{e}_1 x_{1s}(t) + \bar{e}_2 x_{2s}(t)] \Omega_s(\bar{x}). \quad (2.5.3)$$

После этого система алгебраических уравнений, полученная по Галеркину, определит решение задачи u_1, u_2, p в узлах сетки s на линейале, натянутом на базис пространства кусочно-линейных функций Ω_s . Эта система эквивалентна некоторой разностной схеме. Базисные функции Ω_s аппроксимируют при этом решение между узлами сетки, а выбор вида функций Ω_s определит характер аппроксимации.

Таким образом, реализация вариационного принципа Лагранжа приводит к построению вариационно-разностного метода (метода конечных элементов) решения задачи (2.5.1).

Вариационный принцип Лагранжа позволяет построить и конечно-разностную схему решения исходной дифференциальной задачи. Причем вид разностной схемы существенным образом зависит от топологии сетки. Для численного исследования конкретных задач рассмотрим два варианта построения конечно-разностных аппроксимаций исходной задачи.

2.5.2. Построим разностную аппроксимацию краевой задачи (2.5.1) с помощью вариационного подхода, когда сетка Q^h является квадратной с ячейкой размера h и когда базисные функции $\Omega_s(\bar{x})$ принадлежат пространству Соболева W_2^1 . В дальнейшем будет видно, что для рассматриваемой задачи достаточно, чтобы $\Omega_s(\bar{x}) \in W_2^1$. Пусть область Q — прямоугольник

$$0 \leq ih = x_{1i} \leq H; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad N = \frac{H}{h};$$

$$0 \leq jh = x_{2j} \leq 1; \quad j = 0, 1, \dots, M; \quad M = \frac{1}{h}.$$

Выберем функции $\Omega_{ij}(\bar{x})$ (в этом случае i, j — координаты s -го узла сетки в прямоугольной системе координат o, x_1, x_2) в виде (рис. 2.5.1)

$$\Omega_{ij}(\bar{x}) = \omega_1(x_{1i}) \cdot \omega_2(x_{2j}), \quad (2.5.4)$$

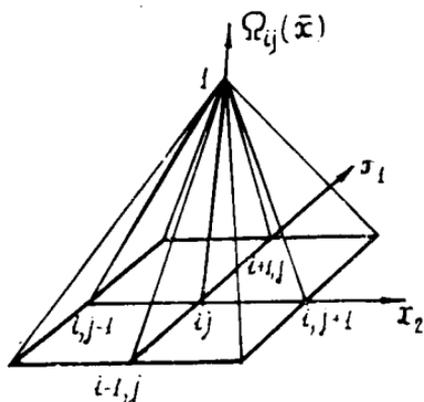


Рис. 2.5.1

где

$$\omega_1(x_{1i}) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x_1 \leq x_{1i-1}; \\ \vee & \\ \omega(x_{1i}) & \text{при } x_{1i-1} \leq x_1 \leq x_{1i}; \\ \wedge & \\ \omega(x_{1i}) & \text{при } x_{1i} \leq x_1 \leq x_{1i+1}; \\ 0 & \text{при } x_{1i+1} \leq x_1 \leq H; \end{cases}$$

$$\omega_2(x_{2j}) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x_2 \leq x_{2j-1}; \\ \vee & \\ \omega_2(x_{2j}) & \text{при } x_{2j-1} \leq x_2 \leq x_{2j}; \\ \wedge & \\ \omega_2(x_{2j}) & \text{при } x_{2j} \leq x_2 \leq x_{2j+1}; \\ 0 & \text{при } x_{2j+1} \leq x_2 \leq l; \end{cases}$$

$$\vee \omega_m = \frac{x_m - x_{m, l-1}}{x_{ml} - x_{m, l-1}};$$

$$\wedge \omega_m = \frac{x_m - x_{m, l+1}}{x_{ml} - x_{m, l+1}} \quad (m = 1, 2; l = i, j).$$

Используя решение в виде (2.5.2) и учитывая (2.4.5), получим из вариационного уравнения следующую систему обыкновенных дифференциальных урав-

нений относительно неизвестных функций времени $\bar{u}_s(t)$, $p_s(t)$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (\dot{u}_{mij} a_{ij}^{\kappa l} + u_{mij} b_{ij}^{\kappa l} + p_{ij} c_{mij}^{\kappa l} + f_{ij}) = 0 \quad (2.5.5)$$

($m = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, N-1$; $l = 1, 2, \dots, M-1$).

Здесь введены обозначения

$$a_{ij}^{\kappa l} = \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i+1}} \int_{x_{2,j-1}}^{x_{2,j+1}} \Omega_{ij} \Omega_{\kappa l} dx_1 dx_2; \quad (2.5.6)$$

$$b_{ij}^{\kappa l} = -\frac{1}{\text{Re}} \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i+1}} \int_{x_{2,j-1}}^{x_{2,j+1}} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{ij}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{ij}}{\partial x_2^2} \right) \Omega_{\kappa l} dx_1 dx_2;$$

$$c_{mij}^{\kappa l} = \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i+1}} \int_{x_{2,j-1}}^{x_{2,j+1}} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_m} \Omega_{\kappa l} dx_1 dx_2$$

($m = 1, 2$).

Учитывая свойства базисных функций (2.5.4), коэффициенты $b_{ij}^{\kappa l}$ с помощью формулы Грина можно представить в виде

$$b_{ij}^{\kappa l} = b_{ij}^{\kappa l} + b_{2ij}^{\kappa l};$$

$$b_{mij}^{\kappa l} = \frac{1}{\text{Re}} \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i+1}} \int_{x_{2,j-1}}^{x_{2,j+1}} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \Omega_{\kappa l}}{\partial x_m} dx_1 dx_2. \quad (2.5.7)$$

Коэффициенты (2.5.6.), (2.5.7) отличны от нуля только при одновременном выполнении условий

$$|i-k| < 1; \quad |j-l| < 1.$$

Из (2.5.7) видно, что для применения метода Галеркина при выборе базисных функций достаточно ограничиться требованием непрерывности только первых их производных. С другой стороны, для того, чтобы удовлетворить одновременно и уравнениям движения и динамическим граничным условиям на свободной поверхности, базисные функции должны выбираться из класса функций, удовлетворяющих (кроме названных выше

свойств) еще свойствам полноты на свободной поверхности.

Ниже приведены значения коэффициентов $a_{ij}^{\kappa l}$, $b_{mij}^{\kappa l}$, $c_{mij}^{\kappa l}$.

 $a_{ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	$\frac{h^2}{36}$	$\frac{h^2}{9}$	$\frac{h^2}{36}$
l	$\frac{h^2}{9}$	$\frac{4}{9} h^2$	$\frac{h^2}{9}$
$l + 1$	$\frac{h^2}{36}$	$\frac{h^2}{9}$	$\frac{h^2}{36}$

 $b_{ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
l	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$l + 1$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$

 $b_{2ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$
l	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
$l + 1$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$

 $c_{ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	$-\frac{h}{12}$	0	$\frac{h}{12}$
l	$-\frac{h}{3}$	0	$\frac{h}{3}$
$l + 1$	$\frac{h}{12}$	0	$\frac{h}{12}$

$c_{2ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	$-\frac{h}{12}$	$-\frac{h}{3}$	$\frac{h}{12}$
l	0	0	0
$l + 1$	$\frac{h}{12}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{12}$

Уравнения движения (2.5.5) в индексной форме с учетом значений коэффициентов, приведенных выше, имеют вид (например, для составляющей скорости u_1)

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{9} \dot{u}_{1ij} + \frac{2}{9} \cdot \frac{\dot{u}_{1,i+1,j} + \dot{u}_{1,i-1,j}}{2} + \frac{2}{9} \frac{\dot{u}_{1i,j+1} + \dot{u}_{1i,j-1}}{2} + \\
& + \frac{1}{18} \left(\frac{\dot{u}_{1,i+1,j+1} + \dot{u}_{1,i-1,j+1}}{2} + \frac{\dot{u}_{1,i+1,j-1} + \dot{u}_{1,i-1,j-1}}{2} \right) - \\
& - \operatorname{Re} \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{u_{1,i+1,j} - 2u_{1ij} + u_{1,i-1,j}}{h^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{1,i+1,j+1} - 2u_{1i,j+1} + u_{1,i-1,j+1}}{h^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{u_{1,i-1,j-1}}{h^2} \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{u_{1i,j+1} - 2u_{1ij} + u_{1i,j-1}}{h^2} + \frac{1}{6} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \frac{u_{1,i+1,j+1} - 2u_{1,i+1,j} + u_{1,i+1,j-1}}{h^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{1,i-1,j+1} - 2u_{1,i-1,j} + u_{1,i-1,j-1}}{h^2} \right) \right] + \frac{2}{3} \cdot \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h} + \\
& + \frac{1}{6} \cdot \frac{p_{i+1,j+1} - p_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{1}{6} \cdot \frac{p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h} + \\
& + f_{ij} = 0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что это выражение есть конечно-разностная аппроксимация по пространственным координатам первого из уравнений (2.5.5) (для $m = 2$ получается аналогичное выражение) на девятиточечном шаблоне, если в узлах сетки заранее приняты следующие аппроксимационные выражения для функции $\varphi(x_1, x_2)$ и ее производных:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{1i}, x_{2j}) &= \frac{4}{9} \varphi_{ij} + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j}}{2} + \frac{2}{9} \times \\ &\times \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1}}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j-1}}{4} + \frac{1}{9} \times \\ &\times \frac{\varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i+1,j+1}}{4}; \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2j}}} = \frac{2}{3} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \varphi_{i,j+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{i,j-1}}{\partial x_1} \right);$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2j}}} = \frac{2}{3} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \varphi_{i+1,j}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{i-1,j}}{\partial x_2} \right);$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2j}}} = \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{i,j+1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i,j-1}}{\partial x_1^2} \right);$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2j}}} = \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial x_2^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{i+1,j}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i-1,j}}{\partial x_2^2} \right).$$

Таким же образом выписывается разностный аналог уравнения неразрывности.

Чтобы завершить построение разностной схемы решения задачи, нужно, во-первых, провести дискретизацию искомых функций по времени, т. е. предположить, что

$$0 \leq t = n\tau \leq T \left(n = 0, 1, \dots, \frac{T}{\tau} \right);$$

$$\bar{u}_{ij}(t) = \bar{u}_{ij}(n\tau) = \bar{u}_{ij}^n;$$

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(n\tau) = p_{ij}^n,$$

и ввести разностную аппроксимацию производных по времени, например, следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{u}_{ij}^{n+1}}{\partial t} = \frac{\bar{u}_{ij}^{n+1} - \bar{u}_{ij}^n}{\tau}.$$

Во-вторых, необходимо осуществить разностную аппроксимацию краевых условий, что может быть проведено также с помощью разложения искомого функций и их производных на свободной поверхности в ряды по базисным функциям

$$\sum_{j=0}^M \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} \left(p_{Nj}^n \Omega_j + \frac{2}{\text{Re}} u_{1Nj}^n \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_1} \right) \Omega_l dx_2 = 0;$$

$$\sum_{j=0}^M \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} \left(u_{1Nj}^n \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_2} + u_{2Nj} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_1} \right) \Omega_l dx_2 = 0,$$

где $\Omega_j(x_2)$ — координатные функции, образующие полную на Σ последовательность.

В индексной форме граничные условия будут следующими:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9} p_{Nj}^n + \frac{2}{9} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n + p_{N-1,j}^n}{2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{p_{N,j+1}^n + p_{N,j-1}^n}{2} + \\ & + \frac{1}{9} \left[\frac{p_{N+1,j+1}^n + p_{N-1,j+1}^n + p_{N-1,j-1}^n + p_{N+1,j-1}^n}{4} \right] + \\ & + \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{u_{1,N+1,j}^n - u_{1,N-1,j}^n}{2h} + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{1,N+1,j+1}^n -}{2h} \right. \\ & \left. - \frac{u_{1,N-1,j+1}^n}{2h} + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{1,N+1,j-1}^n - u_{1,N-1,j-1}^n}{2h} \right] = 0; \\ & \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{u_{1,N,j+1}^n - u_{1,N,j-1}^n}{2h} + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{1,N+1,j+1}^n - u_{1,N+1,j-1}^n}{2h} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{1,N-1,j+1}^n - u_{1,N-1,j-1}^n}{2h} \right] + \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{u_{2,N+1,j}^n -}{2h} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{u_{2,N-1,j}^n}{2h} + \frac{1}{6} \cdot \frac{u_{2,N+1,j+1}^n - u_{2,N-1,j+1}^n}{2h} + \frac{1}{6} \times \\ & \times \frac{u_{2,N+1,j-1}^n - u_{2,N-1,j-1}^n}{2h} \end{aligned} \right] = 0.$$

В-третьих, нужно задать начальные условия

$$\bar{u}_{ij}(0) = \bar{u}_{ij}^0; p_{ij}(0) = p_{ij}^0.$$

2.5.3. Пусть теперь область Q покрыта прямоугольной сеткой h и проведена еще дополнительно ее триангуляция, как показано на рис. 2.5.2.

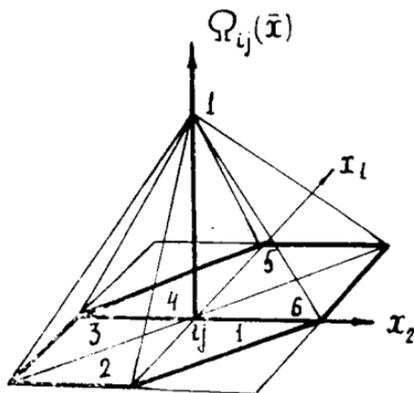


Рис. 2.5.2

Обозначим через Q_{ij} объединение всех треугольников, имеющих общую вершину в узле сетки (i, j) , и пронумеруем треугольнички, составляющие Q_{ij} , от 1 до 6 так, что

$$Q_{ij} = \sum_{\tau=1}^6 Q_{i\tau j}.$$

Построим далее базис пространства неразрывных в Q функций, т. е. кусочно-линейных функций Ω_{ij} , непрерывных в Q_{ij} и таких, что они обращаются в нуль на границе Q_{ij} и принимают значение 1 в точке (x_{i1}, x_{2j}) — в узле сетки (i, j) .

Такими функциями будут [22]

$$\Omega_{ij}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h}(x_{1i} - x_1) - \frac{1}{h}(x_{2j} - x_2) & \text{для } \bar{x} \in Q_{ij}^1; \\ 1 - \frac{1}{h}(x_{1i} - x_1) & \text{для } \bar{x} \in Q_{ij}^2; \\ 1 + \frac{1}{h}(x_{2j} - x_2) & \text{для } \bar{x} \in Q_{ij}^3; \\ 1 + \frac{1}{h}(x_{1i} - x_1) + \frac{1}{h}(x_{2j} - x_2) & \text{для } \bar{x} \in Q_{ij}^4; \\ 1 + \frac{1}{h}(x_{1i} - x_1) & \text{для } \bar{x} \in Q_{ij}^5; \\ 1 - \frac{1}{h}(x_{2j} - x_2) & \text{для } \bar{x} \in Q_{ij}^6. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Базис (2.5.8) обладает свойством ортогональности вида

$$\int_Q \frac{\partial^\alpha \Omega_{ij}}{\partial x_m^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta \Omega_{kl}}{\partial x_m^\beta} dQ = 0 \quad \text{при } |i - k| > 1, |j - l| > 1$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1; m = 1, 2).$$

Проведем разностную аппроксимацию по времени уравнений движения

$$u_1^{n+1} - \tau \left[\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_1^{n+1} - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_1} \right] = u_1^n - \frac{\tau}{\text{Fr}}; \quad (3.5.9)$$

$$u_2^{n+1} - \tau \left[\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_2^{n+1} - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_2} \right] = u_2^n$$

и представим, как и в предыдущем пункте, искомые функции u_1^{n+1} , u_2^{n+1} , p^{n+1} в виде разложений в ряды по базисным функциям $\Omega_{ij}(\bar{x})$

$$u_m^{n+1} = \sum_i \sum_j u_{mij}^{n+1} \Omega_{ij}; \quad p^{n+1} = \sum_i \sum_j p_{ij}^{n+1} \Omega_{ij}.$$

Система линейных уравнений метода Галеркина, построенная на базисе (2.5.8) для уравнений движения,

неразрывности и на соответствующем базисе для граничных условий на свободной поверхности, имеет вид

$$\bar{G}^h \cdot \|A\| = \bar{F}^h,$$

где \bar{G}^h , \bar{F}^h — векторы значений в узлах (i, j) искомых функций и правых частей соответственно, имеющие блочную структуру:

$$\bar{G}^h = \begin{pmatrix} \bar{U}_1^{n+1} \\ \bar{U}_2^{n+1} \\ \bar{P}^{n+1} \end{pmatrix}; \quad \bar{U}_m^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{m11}^{n+1} \\ u_{m12}^{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad \bar{P}^{n+1} = \begin{pmatrix} p_{11}^{n+1} \\ p_{12}^{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix};$$

$$\bar{F}^h = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_1^n \\ \bar{\chi}_2^n \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\chi}_m^n = \begin{pmatrix} \chi_{m11}^n \\ \chi_{m12}^n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2),$$

где

$$\chi_{1ij}^n = \int_Q \left(u_{\kappa j}^n - \frac{\tau}{Fr} \right) \Omega_{ij} dQ, \quad \chi_{2ij}^n = \int_Q u_{2ij}^n \Omega_{ij} dQ.$$

а матрица $\|A\|$ приведена на стр. 56.

Матрицы $\|A_{ij}\|$ и $\|B_{mij}\|$ на главной диагонали каждого блока — трехдиагональные остальные — двухдиагональные.

Элементы матриц $\|A_{ij}\|$ и $\|B_{mij}\|$ рассчитываются по формулам

$$\alpha_{ij}^{\kappa l} = \int_Q \left[\Omega_{ij} \Omega_{\kappa l} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_1} \frac{\partial \Omega_{\kappa l}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_2} \frac{\partial \Omega_{\kappa l}}{\partial x_2} \right) \right] dQ;$$

$$\alpha_{m0j}^{0l} = \int_{\Sigma_0} \Omega_j \frac{\partial \Omega_l}{\partial x_m} ds, \quad \alpha_{0j}^{0l} = \frac{2}{Re} \alpha_{10j}^{0l};$$

$$\beta_{0j}^{0l} = \int_{\Sigma_0} \Omega_j \Omega_l ds, \quad \beta_{mij}^{\kappa l} = \int_Q \Omega_{ij} \frac{\partial \Omega_{\kappa l}}{\partial x_m} dQ.$$

Элементы базиса $\{\Omega_j\}$ для аппроксимации решения на свободной поверхности Σ_0 определены на отрезке $[x_1 = 0, x_{1N}]$, имеют там непрерывные первые производные по x_m ($m = 1, 2$) и выбираются в виде $\Omega_j = \Omega_{Nj}$,

$$\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} = \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_m} \Big|_{x_1 = x_{1N}}.$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_{ij}^{\kappa l} = \alpha_{0ij}^{\kappa l} - \frac{1}{\text{Re}} (\alpha_{1ij}^{\kappa l} - \alpha_{2ij}^{\kappa l}) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N-1 \\ j = 1, 2, \dots, M-1 \end{array} \right),$$

где

$$\alpha_{0ij}^{\kappa l} = \int_{\dot{Q}} \Omega_{ij} \Omega_{\kappa l} dQ; \quad \alpha_{mij}^{\kappa l} = \int_{\dot{Q}} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_{\kappa l}}{\partial x_m} dQ,$$

то непосредственные вычисления приводят к следующим значениям элементов матрицы $\|A\|$:

 $\alpha_{0ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	0	0	0
l	0	1	0
$l + 1$	0	0	0

 $\alpha_{1ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	0	0	0
l	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$
$l + 1$	0	0	0

 $\alpha_{2ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	0	$\frac{1}{h^2}$	0
l	0	$-\frac{2}{h^2}$	0
$l + 1$	0	$\frac{1}{h^2}$	0

 $\beta_{1ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	0	0	0
l	$-\frac{1}{2h}$	0	$\frac{1}{2h}$
$l + 1$	0	0	0

$\beta_{2ij}^{\kappa l}$

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	0	$-\frac{1}{2h}$	0
$-l$	0	0	0
$l + 1$	0	$\frac{1}{2h}$	0

 γ_{mij}

$i \backslash j$	$\kappa - 1$	κ	$\kappa + 1$
$l - 1$	0	0	0
l	0	1	0
$l + 1$	0	0	0

Исходная краевая задача, выписанная в индексной форме с использованием приведенных выше значений элементов матрицы $\|A\|$, имеет стандартный вид разностных уравнений, построенных на пятиточечном (по пространственным координатам) шаблоне [3].

ГЛАВА III

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Конечно-разностные методы решения задач математической физики благодаря большой универсальности и хорошей приспособленности для реализации на вычислительных машинах получили большое развитие и с успехом применяются в различных областях механики сплошных сред, в том числе и в гидромеханике.

Однако для рассматриваемых задач динамики жидкости со свободной поверхностью уровень разработки теоретических вопросов и особенно опыт практического решения этих задач разностными методами на вычислительных машинах нельзя считать достаточным. Это объясняется в первую очередь тем, что современная вычислительная техника не позволяет еще с необходимой точностью исследовать нестационарные пространственные задачи. Кроме того, исследование течений с большими числами Рейнольдса в настоящее время не может быть осуществлено из-за того, что еще не развиты методы и алгоритмы, которые не вносили бы в решение искажений за счет аппроксимационной вязкости. Причем оценка ошибок за счет аппроксимационной вязкости в общем случае также не может быть проведена с необходимой точностью. В частности, для задач колебаний ограниченного объема маловязкой жидкости это является одним из ограничений для применения конечно-разностных методов.

§ 3.1. Разностная аппроксимация задачи

Проведем разностную аппроксимацию двумерной нестационарной задачи о малых движениях вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд.

Эта краевая задача (п. 1.4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{u} - \nabla p - \frac{\bar{e}_1}{\text{Fr}}, \\ \text{div } \bar{u} &= 0 \quad \text{в обл. } Q; \\ p - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= u_1 \quad \text{на } \Sigma_0; \\ u_n &= 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \beta u_\tau \quad \text{на } S; \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$\bar{u} = 0; \quad p = \partial(t - t_0) p^0(\zeta, x_2); \quad \zeta = H \quad \text{при } t = t_0.$$

Заменим интервал изменения аргумента $t \in [0, T]$ дискретной областью $0 \leq t = n\tau \leq T$, $n = 0, 1, 2, \dots, s$; $s = \frac{T}{\tau}$ (не смешивать с нижними индексами n, τ , которые по-прежнему обозначают нормальную и касательную составляющие, а $\frac{\partial}{\partial n}$ — производную по нормали).

Область $\bar{Q} = Q + S + \Sigma_0$ непрерывного изменения аргумента $\bar{x} = \{x_1, x_2\}$ заменим сеткой ω_n^l , узлы которой $x_{ij} = \{x_{1i}, x_{2j}\}$ также принадлежат Q , причем

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{1i} = ih_1 \leq H; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad N = \frac{H}{h_1}; \\ 0 \leq x_{2j} = jh_2 \leq 1; \quad j = 0, 1, \dots, M; \quad M = \frac{1}{h_2}. \end{aligned}$$

Здесь τ — шаг по времени; h_m — шаг по координате x_m ($m = 1, 2$). В дальнейшем будем полагать, что $h_1 = h_2$.

Заменим далее искомые функции $\bar{u}(\bar{x}, t)$, $p(\bar{x}, t)$, $\xi(x_2, t)$ сеточными функциями

$$\bar{u}_{ij}^n = \bar{u}(x_{ij}, n\tau); \quad p_{ij}^n = p(x_{ij}, n\tau); \quad \zeta_j^n = \zeta(x_{2j}, n\tau).$$

Введем вместо дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x_m}$ и ∇^2 соответствующие разностные операторы D_m ($m = 1, 2$) и Δ .

Таким образом, разностная аппроксимация исходной краевой задачи (3.1.1) означает переход из некоторого линейного функционального пространства H_0 , элементами которого является решение $\bar{U} = \{\bar{u}, \bar{p}, \bar{\zeta}\}$ непрерывных аргументов $t \in [0, T]$ и $\bar{x} \in \bar{Q}$ в соответствующее линейное функциональное пространство H_h , образованное множеством сеточных функций

$$Y_{ij}^n = \{u_{ij}^n, p_{ij}^n, \zeta_{ij}^n\}.$$

В пространстве H_h вводится норма $\|\cdot\|_h$, которая является аналогом нормы $\|\cdot\|_0$ в исходном пространстве H_0 . Например, сеточный аналог нормы в пространстве непрерывных функций C есть

$$\|Y_{ij}^n\|_C = \max_{\bar{x} \in \omega_h} |Y_{ij}^n|. \quad (3.1.2)$$

Оценку близости решения исходной задачи U к решению разностного аналога Y_{ij}^n будем проводить в пространстве H_h . Для этого H_0 отображается на пространство H_h , и каждому вектору $U \in H_0$ ставится в соответствие сеточная вектор-функция U_{ij} , определенная на $\bar{x} \in \omega_h$, т. е. если P_h — некоторый оператор из H_0 в H_h , то [34]

$$U_{ij} = P_h U \in H_h.$$

Введем в рассмотрение определенную в H_h разность

$$z_h = U_{ij} - Y_{ij},$$

с помощью которой в норме пространства H_h будем оценивать близость решений исходной и разностной задач

$$\|z_h\|_h = \|U_{ij} - Y_{ij}\|_h.$$

Естественно, что при этом должно выполняться условие аппроксимации нормы $\|\cdot\|_0$ нормой $\|\cdot\|_h$ для любого вектора из H_0 . Это условие (условие согласованности норм в H_0 и H_h) имеет вид

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\cdot\|_h = \|\cdot\|_0.$$

Введем следующие обозначения разностных операторов [44]:

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad \Lambda_m = \frac{\Delta_m \cdot \Delta_{-m}}{h^2}; \quad \Lambda_m \propto \frac{\partial^2}{\partial x_m^2};$$

$$\Delta_m = T_m - E; \quad \Delta_{-m} = E - T_{-m};$$

$$D_m = \frac{\Delta_m + \Delta_{-m}}{2h}; \quad D_m \propto \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (m = 1, 2),$$

где

$$T_m y(x_1, x_2, \dots, x_m \dots) = y(x_1, x_2, \dots, x_m + h, \dots);$$

$$T_{-m} y(x_1, x_2, \dots, x_m \dots) = y(x_1, x_2, \dots, x_m - h, \dots),$$

которые аппроксимируют дифференциальные с порядком $O(h^2)$.

В этих обозначениях представим разностный аналог краевой задачи (3.1.1) в виде следующей двухслойной схемы с весами:

$$u_{1t} - \frac{1}{\text{Re}} [\alpha u_1^{n+1} + (1 - \alpha) u_1^n] + D_1 [\alpha p^{n+1} + (1 - \alpha) p^n] + \frac{1}{\text{Fr}} = 0;$$

$$u_{2t} - \frac{1}{\text{Re}} [\alpha u_2^{n+1} + (1 - \alpha) u_2^n] + D_2 [\alpha p^{n+1} + (1 - \alpha) p^n] = 0;$$

$$(3.1.3)$$

$$D_1 u_1^{n+1} + D_2 u_2^{n+1} = 0 \quad \text{в обл. } Q;$$

$$p^{n+1} - \frac{2}{\text{Re}} D_1 u_1^{n+1} = 0;$$

$$D_1 u_2^{n+1} + D_2 u_1^{n+1} = 0,$$

$$\zeta_t = u_1^{n+1} \quad \text{на } \Sigma_0;$$

$$u_n = 0, \quad D_n u_\tau = \beta u_\tau \quad \text{на } S; \quad (3.1.4)$$

$$\bar{u} = \bar{u}^0, \quad p = p^0, \quad \zeta = H \quad \text{при } t = t_0.$$

Здесь α — параметр Кранка-Николсона;

$$y_t = \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}; \quad D_n = D_1 \cos(n, x_1) + D_2 \cos(n, x_2).$$

§ 3.2. Исследование устойчивости и сходимости

Для исследования устойчивости разностных уравнений (3.1.3) по начальным данным представим их в канонической форме

$$BY_t + AY = 0; \quad (3.2.1)$$

$$Y(t_0) = Y^0, \quad 0 \leq t \leq \omega.$$

Поскольку устойчивость операторного уравнения (3.2.1) будет исследоваться в энергетической норме, порожденной некоторым самосопряженным положи-

тельным оператором D , то введем в рассмотрение в энергетическом пространстве H_D оператора D скалярное произведение

$$(u, v)_D = (Du, v)$$

и норму

$$\|v\|_D = (Dv, v)^{1/2}.$$

Известна [35] следующая

Теорема. Пусть оператор B схемы (3.2.1) представим в виде

$$B = D + \alpha\tau A,$$

где D — положительный самосопряженный оператор. Тогда если A^{-1} существует, то для устойчивости схемы (3.1.3) в H_D , т. е. для выполнения условия

$$\|Y^{n+1}\|_D \leq \|Y^n\|_D \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

необходимо и достаточно выполнение операторного неравенства

$$DA^{-1}D + \tau \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) D \geq 0, \quad D \geq 0.$$

Приведенное условие устойчивости определяет равномерную устойчивость схемы по начальным данным, т. е. устойчивость к возмущениям не только начальных данных, но и вносимых на каждом шаге.

Представим (3.1.3) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} u_{1t} - \frac{\Lambda}{\text{Re}} [\alpha\tau u_{1t} + u_1^n] + D_1 [\alpha\tau p_t + p^n] + \frac{1}{\text{Fr}} &= 0; \\ u_{2t} - \frac{\Lambda}{\text{Re}} [\alpha\tau u_{2t} + u_2^n] + D_2 [\alpha\tau p_t + p^n] &= 0; \\ \tau D_1 u_{1t} + D_1 u_1^n + \tau D_2 u_{2t} + D_2 u_2^n &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Из (3.2.1) и (3.2.2) видим, что

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} \Lambda & 0 & D_1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \Lambda & D_2 \\ D_1 & D_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} E - \frac{\alpha\tau}{\text{Re}} \Lambda & 0 & \alpha\tau D_1 \\ 0 & E - \frac{\alpha\tau}{\text{Re}} \Lambda & \alpha\tau D_2 \\ \tau D_1 & \tau D_2 & 0 \end{pmatrix}$$

и что при $\alpha = 1$ операторы A и B симметричны и имеет место операторное равенство

$$B = D + \tau A,$$

где оператор D есть

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, условия теоремы выполнены, схема (3.1.3) при $\alpha = 1$ абсолютно устойчива, аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, следовательно, решение (3.2.2) сходится к решению дифференциальных уравнений (3.1.3) со скоростью $O(\tau + h^2)$ [34].

§ 3.3. Метод дробных шагов в линейной задаче. Исследование устойчивости и сходимости

Метод дробных шагов [44] является одним из наиболее эффективных методов решения многомерных задач математической физики. Он заключается в том, что для некоторой задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = L(\bar{v}); \quad \bar{v} = \{v_1, v_2, \dots\}; \quad \bar{v}(\bar{x}, 0) = \bar{v}^0,$$

если оператор L представим в виде суммы операторов

$$\dot{L} = L_1 + L_2 + \dots + L_p,$$

определенных в H_0 , когда выбрана некоторая разностная аппроксимация задачи, например

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\tau} = \Lambda \bar{v}^{n+1},$$

где

$$\Lambda \approx L, \quad \Lambda = \sum_{m=1}^p p \Lambda_m,$$

и представим уравнения движения (3.3.1) в виде

$$\begin{aligned} A_1 \bar{u}^{n+1/3} &= B_1 \bar{u}^n; \\ A_2 \bar{u}^{n+2/3} &= B_2 \bar{u}^{n+1/3}; \\ A_3 \bar{u}^{n+1} &= B_3 \bar{u}^{n+2/3} - \tau \mathcal{D}\Pi^{n+1}, \end{aligned}$$

откуда, используя свойство коммутативности операторов A_m, B_m ($m = 1, 2, 3$) и исключая промежуточные шаги, найдем

$$A \bar{u}^{n+1} = B \bar{u}^n - \tau A \mathcal{D}\Pi^{n+1}.$$

Здесь

$$A = A_1 \cdot A_2, \quad B = E.$$

Таким образом

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \Lambda \bar{u}^{n+1} + \mathcal{D}\Pi^{n+1} + \bar{R},$$

где \bar{R} — ошибка аппроксимации исходной разностной схемы схемой в дробных шагах

$$\bar{R} = \frac{\tau^2}{\text{Re}^2} \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{u}^{n+1} + \frac{\tau}{\text{Re}} \Lambda \mathcal{D}\Pi^{n+1} + \frac{\tau^2}{\text{Re}^2} \Lambda_1 \Lambda_2 \mathcal{D}\Pi^{n+1},$$

следовательно, ошибка расщепления имеет порядок малости не меньший, чем ошибка аппроксимации дифференциальных уравнений разностными.

Дополним (3.3.1) соответствующими граничными и начальными условиями на каждом дробном шаге.

$$\text{На 1-м шаге } t = \left(n + \frac{1}{3} \right) \tau$$

$$u_n^{n+1/3} = 0;$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1/3}}{\partial n} = \beta u_i^{n+1/3} \quad \text{для } x_{ij} \in S.$$

$$\text{На 2-м шаге } t = \left(n + \frac{2}{3} \right) \tau$$

$$\Pi^n - \frac{2}{\text{Re}} \mathcal{D}_1 u_1^{n+2/3} - \frac{\zeta^{n+2/3}}{\text{Fr}} = 0;$$

$$\mathcal{D}_1 u_2^{n+2/3} + \mathcal{D}_2 u_1^{n+2/3} = 0;$$

$$\zeta^{n+2/3} = \zeta^{n+1/3} + \frac{\tau}{3} u_1^{n+1/3} \quad \text{для } x_{ij} \in \Sigma_0.$$

На 3-м шаге $t = (n + 1) \tau$

$$u_n^{n+1} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau^{n+1}}{\partial n} = \beta u_\tau^{n+1} \quad \text{для } x_{ij} \in S;$$

$$\Pi^{n+1} - \frac{2}{\text{Re}} D_1 u_1^{n+1} - \frac{\zeta^{n+1}}{\text{Fr}} = 0;$$

$$D_1 u_2^{n+1} + D_2 u_1^{n+1} = 0;$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \tau u_1^{n+1} \quad \text{для } x_{ij} \in \Sigma_0.$$

Краевую задачу на третьем дробном шаге формулируем относительно давления Π , воздействуя для этого операторами D_1 и D_2 соответственно на уравнения движения для u_1 и u_2 на шаге $t = (n+1)\tau$ и используя уравнение неразрывности. Тогда получим

$$\Delta \Pi^{n+1} = \frac{1}{\tau} (D_1 u_1^{n+2/3} + D_2 u_2^{n+2/3}).$$

Правая часть уравнения Пуассона для давления корректирует невязку поля скоростей за счет того, что на первых двух дробных шагах уравнение неразрывности не выполняется.

Граничным условием для давления на свободной поверхности будет динамическое граничное условие

$$\Pi^{n+1} = \frac{2}{\text{Re}} D_1 u_1^{n+1} + \frac{\zeta^{n+1}}{\text{Fr}},$$

а условия на смоченной поверхности получим проектированием уравнений движения на нормаль к S

$$D_n \Pi^{n+1} = 0.$$

На этом дробном шаге неизвестные скорость \bar{u}^{n+1} и форма свободной поверхности ζ^{n+1} выражаются через известные их значения и производные по времени на шаге $t = (n + 2/3) \tau$. После определения Π^{n+1} поле скоростей \bar{u}^{n+1} корректируется с помощью уравнений движения для $t = (n + 1) \tau$.

Применение изложенной схемы расщепления к решению исходной разностной задачи позволяет на первых двух дробных шагах использовать одномерные прогонки, а на третьем — метод релаксации, например, метод верхней релаксации Гаусса—Зейделя.

3.3.2! Переходя к исследованию устойчивости схемы решения в дробных шагах, заметим, что компоненты

скорости u_1 и u_2 связаны между собой только через граничные условия. Очевидно, что схема будет устойчива, если операторы перехода S ограничены на каждом из дробных шагов.

Представим схему в виде

$$\begin{aligned} Y^{n+1/3} &= S_{1/3} Y^n; \\ Y^{n+2/3} &= S_{2/3} Y^{n+1/3}; \\ Y^{n+1} &= S_1 Y^{n+2/3}. \end{aligned}$$

Тогда условия равномерной устойчивости в некоторой норме будут следующими:

$$\begin{aligned} \|Y^{n+1/3}\| &\leq \|S_{1/3}\| \cdot \|Y^n\|, \text{ если } \|S_{1/3}\| \leq \rho_{1/3} > 0; \\ \|Y^{n+2/3}\| &\leq \|S_{2/3}\| \cdot \|Y^{n+1/3}\|, \text{ если } \|S_{2/3}\| \leq \rho_{2/3} > 0; \\ \|Y^{n+1}\| &\leq \|S_1\| \cdot \|Y^{n+2/3}\|, \text{ если } \|S_1\| \leq \rho_1 > 0. \end{aligned}$$

Исследование устойчивости будем проводить с помощью принципа максимума [34] и только на первых двух дробных шагах, так как процедура Гаусса—Зейделя, которая используется на третьем дробном шаге, обеспечивает в нашем случае равномерную устойчивость (абсолютную) вычислений. Будем предполагать, кроме того, что область Q имеет прямоугольную форму.

В соответствии с принципом максимума условие устойчивости некоторой разностной схемы по правой части

$$L_h y_i = A_i y_i - B_i y_{i+1} - C_i y_{i-1} = f_h$$

в норме пространства непрерывных функций C имеет вид

$$\|y_i\|_C \leq \frac{1}{\delta} \|f_h\|_C,$$

если $\delta = \min \delta_i$ и $\delta_i = A_i - B_i - C_i > 0$.

На первом дробном шаге для изучаемой задачи имеем

$$A_{mj} = 1 + 2\zeta; B_{mj} = C_{mj} = \zeta; \zeta = \frac{\tau}{h^2 \operatorname{Re}} \quad (m = 1, 2).$$

Следовательно,

$$\delta = \delta_{mj} = 1,$$

и для внутренних точек области можно построить иерархию неравенств

$$\|u_m^{1/3}\|_C \leq \|u_m^0\|_C;$$

$$\|u_m^{4,3}\|_C \leq \|u_m^1\|_C;$$

.....

$$\|u_m^{n+1,3}\|_C \leq \|u_m^n\|_C \quad (m = 1, 2; n = 1, 2, \dots)$$

и утверждать, что на первом дробном шаге во внутренних узлах сетки схема абсолютно устойчива.

Доказательство устойчивости схемы на втором дробном шаге во внутренних узлах сетки аналогичное, и из него также следует вывод об абсолютной устойчивости.

Учет краевых условий на твердых границах не вносит возмущений в устойчивость. Покажем это, учитывая, что в соответствии с методом Н. Н. Яненко аппроксимации граничных условий [44] в схеме дробных шагов граничные условия можно точно удовлетворять через один дробный шаг, не нарушая порядка аппроксимации задачи. В нашем случае точное выполнение граничных условий на шаге $t = (n + 1/3)\tau$ происходит на границах $x_2 = 0$, $x_2 = Mh$, а на шаге $t = (n + 2/3)\tau$ — вдоль границ $x_1 = 0$, $x_1 = Nh$.

На шаге $t = (n + 1/3)\tau$ для компоненты u_2 на границах имеет место тождественное решение

$$u_{2i0}^{n+1/3} = u_{2iM}^{n+1/3} = 0,$$

а для компоненты $u_1^{n+1,3}$ на этих же границах после исключения из граничных условий фиктивных точек с помощью уравнения движения найдем, что

$$A = 1 + 2\xi(1 + \beta h); \quad B = 2\xi; \quad C = 0$$

и

$$\delta = 1 + 2\xi\beta h.$$

Кроме того

$$u_{10j}^{n+1,3} = 0.$$

Для исследования устойчивости при $t = (n + 2/3)\tau$ и $x_1 = Nh$ фиктивные скорости $u_{mN+1,j}^{n+2,3}$ в граничных условиях исключаются с помощью уравнений движений так, что

$$u_{1Nj}^{n+2,3} \left[1 + \xi \left(2 + \frac{\tau h \operatorname{Re}}{3\operatorname{Fr}} \right) \right] - 2\xi u_{1,N-1,j}^{n+2,3} = u_{1Nj}^{n+1,3} + \xi h \operatorname{Re} \left(\Pi_{Nj}^n - \frac{\zeta^{n+1,3}}{\operatorname{Fr}} \right);$$

$$u_{2Nj}^{n+2,3} (1 + 2\xi) - 2\xi u_{2,N-1,j}^{n+2,3} = u_{2Nj}^{n+1,3} + 2\xi h \mathcal{D}_2 u_{1Nj}^{n+2/3}.$$

Следуя принципу максимума, получим из этих соотношений неравенства

$$\|u_{1Nj}^{n+2/3}\|_c \leq \frac{1}{\delta} \|u_{1Nj}^{n+1/3}\|_c + \frac{\tau}{h\delta} R_1^n; \quad (3.3.2)$$

$$\|u_{2Nj}^{n+2/3}\|_c \leq \|u_{2Nj}^{n+1/3}\|_c + \frac{\tau}{h \operatorname{Re}} R_2^n,$$

где

$$\delta = 1 + \frac{\tau^2}{3h \operatorname{Fr}};$$

$$R_1^n = \max_{\bar{x} \in \Sigma} \left| \Pi_{Nj}^n - \frac{\zeta^{n+1/3}}{\operatorname{Fr}} \right|;$$

$$R_2^n = \max_{\bar{x} \in \Sigma} \left| D_2 u_{1Nj}^{n+2/3} \right|.$$

Воспользуемая еще тем обстоятельством, что решение задачи на первом и третьем дробных шагах устойчиво, и имеют место оценки вида

$$\begin{aligned} u_{mNj}^{n+1/3} \|_c &\leq \|u_{mNj}^n\|_c; \\ \|u_{mNj}^{n+1}\|_c &\leq \|u_{mNj}^{n+2/3}\|_c; \\ \|p_{Nj}^{n+1}\|_c &\leq M \|p_{Nj}^n\|_c \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

и можно указать такие $M_m > 0$, что

$$\max_{n \in [0, T]} |R_m^n| \leq M_m. \quad (3.3.4)$$

Тогда из (3.3.2) с учетом (3.3.3) и (3.3.4) получим для для компоненты $u_{1Nj}^{n+2/3}$

$$\|u_{1Nj}^{1+2/3}\|_c \leq \frac{1}{\delta} \|u_{1Nj}^{2/3}\|_c + \frac{\tau}{h\delta} M_1;$$

$$\|u_{1Nj}^{2+2/3}\|_c \leq \frac{1}{\delta} \|u_{1Nj}^{1+2/3}\|_c + \frac{\tau}{h\delta} M_1;$$

.....

$$\|u_{1Nj}^{n+2/3}\|_c \leq \frac{1}{\delta} \|u_{1Nj}^{(n-1)+2/3}\|_c + \frac{\tau}{h\delta} M_1$$

.....

и для компоненты $u_{2Nj}^{n+2/3}$

$$\|u_{2Nj}^{1+2/3}\|_c \leq \|u_{2Nj}^{2/3}\|_c + \frac{\tau}{h \operatorname{Re}} M_2;$$

$$\|u_{2Nj}^{\tau+2/3}\|_C \leq \|u_{2Nj}^{1+2/3}\|_C + \frac{\tau}{h \operatorname{Re}} M_2;$$

$$\|u_{2Nj}^{n+2/3}\|_C \leq \|u_{2Nj}^{(n-1)+2/3}\|_C + \frac{\tau}{h \operatorname{Re}} M_2,$$

Следовательно,

$$\|u_{1Nj}^{n+2/3}\|_C \leq \frac{1}{\delta^n} \|u_{1Nj}^{2/3}\|_C + \frac{\tau M_1}{h} \sum_n \frac{1}{\delta^n};$$

$$\|u_{2Nj}^{n+2/3}\|_C \leq \|u_{2Nj}^{2/3}\|_C + \frac{2n\tau}{h \operatorname{Re}} M_2,$$

и условия устойчивости будут иметь вид для компоненты $u_1^{n+2/3}$

$$\frac{\tau}{h} \leq \sum_n \frac{1}{\delta^n},$$

и для компоненты $u_2^{n+2/3}$

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{\operatorname{Re}}{2n}.$$

§ 3.4. Оценка аппроксимационной вязкости

Получим приближенную оценку аппроксимационной вязкости, которую вносит в решение замена дифференциальных уравнений разностными.

Оценку проведем на исходной разностной схеме, учитывая, что ошибка расщепления разностных уравнений не превосходит ошибку разностной аппроксимации исходных уравнений, и, таким образом, аппроксимационная вязкость, дополнительно вносимая расщеплением, по порядку величин не превосходит аппроксимационную вязкость, которая возникает при замене дифференциальных уравнений разностными.

Первое дифференциальное приближение разностных уравнений (3.1.3) имеет вид

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_m} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \frac{h^2}{12} \times$$

$$\times \frac{\partial^3 \Pi}{\partial x_m^3} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial^4 u_m}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_m}{\partial x_2^4} \right) + O(\tau^3 + h^3) = 0$$

$$(m = 1, 2); \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3} \right) + O(h^3) = 0.$$

Для проведения дисперсионного анализа представим решение (3.4.1) в виде

$$u_m = u_m^0 e^{xt + i\beta_m(x_1 + x_2)} \quad (m = 1, 2);$$

$$\Pi = \Pi^0 e^{xt + i\beta_0(x_1 + x_2)} \quad (3.4.2)$$

и выпишем характеристическое уравнение системы (3.4.1)

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & i\beta_0 \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) \\ 0 & \Delta & i\beta_0 \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) \\ i(\beta_1 + \beta_2) \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) & i(\beta_1 + \beta_2) \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4.3)$$

где

$$\Delta = \alpha \left(1 + \frac{\tau}{2} \alpha\right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} (\beta_1 + \beta_2) \left(1 + \frac{h^2}{12}\right).$$

Интересующее нас решение (3.4.3) при

$$\frac{\tau}{\operatorname{Re}} (\beta_1 + \beta_2) \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) \ll 1 \text{ и } \beta_1 \sim \beta_2 = \beta$$

есть

$$\alpha \approx \alpha_0 \left(1 + \frac{h^2}{6} \beta^2\right).$$

Здесь α_0 — коэффициент затухания в соответствующем решении исходных дифференциальных уравнений

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\operatorname{Re}} (\beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Следовательно, аппроксимационная вязкость ли-
неаризованных разностных уравнений (3.1.3) пропорциональна физической вязкости и в коэффициент пропорциональности сомножителем входит величина h^2 .

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 4.1. Качественные оценки процесса

Коэффициент затухания является одним из важных параметров при описании динамики колебаний жидкости, частично заполняющей полость.

В этом параграфе приводятся результаты качественного исследования зависимости коэффициента затухания от вязкости жидкости и амплитуды ее колебаний. При этом используются результаты главы I, связанные с введением пристеночной пленки и учетом эффектов вблизи ЛТК.

4.1.1. Пусть маловязкая жидкость ($Re \gg 1$), частично заполняющая сосуд, совершает малые колебания под действием массовых сил с частотой, близкой к ω_0 (частота собственных колебаний при отсутствии диссипации). В этом случае для коэффициента затухания α справедлива оценка [42]

$$|\alpha| \ll \omega_0.$$

Предположение о малости колебаний здесь введено в смысле $\Delta A \ll R$, но $\Delta A \gg \delta$.

Средняя за период энергия жидкости E связана с ее начальным значением E_0 соотношением

$$E = E_0 e^{-2\alpha t}.$$

Если ввести в рассмотрение функцию диссипации F — квадратичную форму обобщенных координат жидкости, то скорость диссипации энергии выражается формулой [18]

$$\frac{dE}{dt} = -2F,$$

а коэффициент затухания есть

$$\alpha = -\frac{F}{E}.$$

Задача имеет четыре определяющих параметра (R , j , ν , γ), которые образуют две безразмерные комбинации — число Рейнольдса и число Бонда.

4.1.2. Рассмотрим вначале случай, когда силы вязкого трения много больше сил поверхностного натяжения

$$\frac{\rho \nu \omega_0}{\gamma} \gg 1, \quad (4.1.1)$$

и пусть, кроме того, $Re \gg 1$, так что вязкие свойства жидкости проявляются только в погранслое, толщина которого

$$\delta_{\text{нс}} \sim \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2}.$$

Кроме того, вязкие свойства жидкости проявляют себя еще в пленке над свободной поверхностью, когда амплитуда колебаний значительно превосходит толщину этой пленки δ .

$$\delta_{\tau} \sim \left(\frac{\nu \omega \langle \Delta A \rangle}{j}\right)^{1/2} = \delta_{\text{нс}} \left(\frac{\lambda \langle \Delta A \rangle}{R}\right)^{1/2}.$$

Здесь $\langle \Delta A \rangle$ — среднее за период значение амплитуды

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \Delta A \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \Delta A,$$

а ΔA — максимальная (за период) амплитуда колебаний.

Таким образом, предполагается, что увлечение твердой границей жидкой пленки толщины δ вызывает дополнительную потерю энергии колебаний.

Частота собственных колебаний вязкой жидкости при $Re \gg 1$ слабо зависит от вязкости [42]

$$\omega \sim \omega_0 [1 - (Re)^{-1/2}].$$

Поэтому в дальнейшем влияние вязкости на частоту колебаний не учитывается.

Энергия колебаний жидкости имеет порядок

$$E \sim \rho \omega^2 R^3 \langle \Delta A \rangle^2.$$

Пусть f — плотность функции диссипации F , которая в приближении погранслоя есть [43].

$$f \sim \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2.$$

Для области под свободной поверхностью

$$f_1 \sim \rho v \frac{u_0^2}{\delta_{nc}^2}. \quad (4.1.2)$$

Для области над свободной поверхностью оценка для f_2 получается в предположении, что в каждый момент времени существует равновесие между силами вязкого трения и массовыми силами. Это допущение основано на оценке времени стекания пленки (1.3.14).

Следовательно

$$\sigma = -v \frac{\partial u}{\partial x_2} = \rho j \delta.$$

и

$$f_2 \sim \frac{\rho}{v} (j \delta)^2. \quad (4.1.3)$$

Учитывая (4.1.2) и (4.1.3), получим оценки для диссипации энергии в области под свободной поверхностью

$$\frac{dE_1}{dt} \sim 2\rho v \frac{u_0^2}{\delta_{nc}} R^2$$

и в области над свободной поверхностью

$$\frac{dE_2}{dt} \sim 2\rho j^2 \frac{\langle \Delta A \rangle R}{v} \delta_\tau^3.$$

Суммарный коэффициент затухания

$$\alpha_\tau = \frac{1}{2E} \left(\frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} \right)$$

получает следующее окончательное выражение:

$$\alpha_\tau \sim \alpha_1 \left[1 + c_\tau \left(\frac{\Delta A}{R} \right)^{1/2} \right], \quad (4.1.4)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{j\lambda}{\omega R^2} \left(\frac{v}{\omega} \right)^{1/2} = \omega Re^{-1/2}, \quad c_\tau = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}.$$

Точное в рамках теории погранслоя значение α [42]

$$\alpha_{1\text{пс}} = \frac{\omega}{\lambda_{mn}} \text{Re}^{-1.2} A_{mn}; \quad A_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{R^2} \left[\frac{\lambda_{mn}^3 + m^2}{\lambda_{mn} (\lambda_{mn}^2 - m^2)} \right]$$

отличается от полученной оценки α_1 на константу порядка 1.

В таблице 4.1.1 приводятся расчеты, которые показывают величину вклада пристеночной пленки в значение коэффициента затухания. Расчеты проведены для первого тона несимметричных колебаний жидкости в прямом круговом цилиндре ($\lambda = 1.841$).

Таблица 4.1.1

$\Delta A/R$	0,03	0,06	0,10	0,15
α_τ/α_1	1,19	1,27	1,34	1,42

Очевидно, что коэффициент c_τ , вычисленный в рамках принятого уровня строгости, лишь грубо отражает реальную ситуацию. Нами не учитывается, например, тот факт, что толщина пленки будет различной при стекании пленки и при натекании на твердую границу. Более того, сама толщина погранслоя $\delta_{\text{пс}}$ является в некотором смысле неопределенной, так как наряду с $\delta_{\text{пс}} \sim \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2}$ можно рассматривать $\delta_{\text{пс}} \sim \left(\frac{\lambda\nu}{\omega}\right)^{1/2}$.

Поэтому приведенные результаты являются сугубо оценочными, а точное значение c_τ может быть получено только в результате применения строгой теории или экспериментально.

4.1.3. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда силы вязкого трения меньше капиллярных сил

$$\frac{\rho\nu u_0}{\gamma} \ll 1.$$

При этом предположении толщина пристеночной пленки для «медленных» движений (п. 1.3.4) есть

$$\delta_\gamma \sim \left(\frac{\nu u_0}{j}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho\nu u_0}{\gamma}\right)^{1/6}.$$

Поступая как и в предыдущем пункте, найдем, что

$$\frac{dE_1}{dt} \sim 2\rho\nu \frac{u_0^2}{\delta_{\text{пс}}} R^2,$$

и полагая

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \sim \frac{u_0}{\delta_\gamma},$$

так как при $\frac{\rho \nu u_0}{\gamma} \ll 1$ предположение о заторможенности пленки силами вязкого трения не оправдано, найдем

$$\frac{dE_2}{dt} \sim 2\rho\nu \frac{u_0^2}{\delta_\gamma} R < \Delta A >.$$

Таким образом

$$\alpha_\gamma \sim \alpha_1 \left[1 + c_\gamma \left(\frac{\Delta A}{R} \right)^{1,3} \right], \quad (4.1.5)$$

где

$$c_\gamma = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1,3} \cdot \left(\frac{s}{\delta_{nc}} \right)^{1,3}, \quad s = \left(\frac{\gamma}{\rho j \lambda^3} \right)^{1,2}.$$

Для оценки вклада пристеночной пленки в коэффициент затухания в табл. 4.1.2 приводятся расчетные данные. Расчеты выполнены для жидкостей, у которых в окрестности $\Delta A \sim 0,1R$ безразмерный комплекс $\frac{\rho \nu u_0}{\gamma} \ll 1$, $R = 100$ см, $j = 980$ см/с², $\lambda = 1,841$.

Таблица 4.1.2

Жидкость	$\Delta A/R$			
	0,03	0,06	0,10	0,15
Этиловый спирт	1,27	1,34	1,40	1,46
Ацетон	1,36	1,45	1,53	1,60
Вода	1,35	1,44	1,52	1,59

И здесь коэффициент c_γ лишь приближенно учитывает влияние амплитуды и физических свойств жидкости на коэффициент затухания. Однако формула (4.1.5) позволяет сделать ряд выводов качественного характера.

4.1.4. Важно отметить, что добавка к коэффициенту затухания за счет наличия пристеночной пленки прояв-

ляется как практически постоянная добавка. Действительно, из (4.1.5) следует, что

$$\frac{d \ln \alpha_{\gamma}}{d \ln \frac{\Delta A}{R}} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

где

$$\varepsilon = c_{\gamma} \left(\frac{\Delta A}{R} \right)^{1/3}.$$

Для значений ε порядка 0,2—0,4, характерных при гравитационных колебаниях многих жидкостей с амплитудами $\Delta A/R \sim 0,1—0,2$, получим, что

$$\alpha_{\gamma} \sim \left(\frac{\Delta A}{R} \right)^{1.12}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для α_{τ}

$$\alpha_{\tau} \sim \left(\frac{\Delta A}{R} \right)^{1/8}.$$

Поэтому ясно, что экспериментально установить зависимость коэффициента затухания от амплитуды колебаний достаточно трудно.

Однако существенным является то, что в коэффициенте затухания имеется слагаемое, которое зависит от амплитуды колебаний и проявляется при $\Delta A \gg \delta$.

Приведенные рассуждения показывают, в частности, что неучет эффектов вблизи ЛТК является, очевидно, одной из причин систематического рассогласования теоретических и экспериментальных значений коэффициента затухания в $\sqrt{2}$ раз [24].

4.1.5. Из формулы (4.1.4) следует, что когда силы вязкого трения много больше сил поверхностного натяжения, зависимость коэффициента затухания от вязкости выражается соотношением

$$\alpha_{\tau} \sim \nu^{1/2}.$$

Более сложной эта зависимость получается в другом предельном случае, когда

$$\frac{\rho \nu H_0}{\gamma} \ll 1. \quad (4.1.6)$$

Коэффициент затухания (4.1.5) представим в виде

$$\alpha_{\gamma} \sim \varepsilon_0 \nu^{1/2} [1 + \varepsilon_1 \nu^{-1.6}], \quad (4.1.7)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\omega^{1/2}}{R}, \quad \varepsilon_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{\Delta A}{R}\right)^{1/3} \left(\frac{\lambda j \rho}{\gamma \omega}\right)^{-1/6}.$$

Из (4.1.7) имеем

$$\frac{d \ln \alpha_\gamma}{d \ln \nu} \sim \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{2}{3} \varepsilon_1 \nu^{-1/6}}{1 + \varepsilon_1 \nu^{-1/6}},$$

откуда

$$\alpha_\gamma \sim \nu^\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{2}{3} \varepsilon_1 \nu^{-1/6}}{1 + \varepsilon_1 \nu^{-1/6}}. \quad (4.1.8)$$

Зависимость (4.1.8) показывает, что при выполнении условия (4.1.6) и для течений с $Re \gg 1$ и $\Delta A/\delta \gg 1$ коэффициент затухания есть функция вязкости в степени $k < 1/2$. При $\Delta A/R \rightarrow 0$ показатель k стремится к $1/2$ как $(\Delta A/R)^{1/3}$. Эти выводы следуют и из расчетных данных, представленных в табл. 4.1.3 и полученных для первого тона несимметричных гравитационных колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде $R = 100$ см при $\Delta A/R = 0,1$ и $\Delta A/R = 0,2$.

Таблица 4.1.3

Жидкость	Re	$\frac{\rho \nu u_0}{\gamma}$	$K_{\Delta A=0,1}$	$K_{\Delta A=0,2}$
Вода	$4 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^{-3}$	0,44	0,43
Ацетон	10^6	$6 \cdot 10^{-3}$	0,45	0,44
Этиловый спирт	$3 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-2}$	0,45	0,44
Жидкий водород	10^7	$6 \cdot 10^{-4}$	0,43	0,42
Ртуть	10^7	$4 \cdot 10^{-4}$	0,43	0,42

Из таблицы и анализа литературных данных видно, что критерию $\frac{\rho \nu u_0}{\gamma} \ll 1$ удовлетворяют в рассматриваемой задаче большинство реальных жидкостей.

Экспериментальное подтверждение приведенных качественных зависимостей и оценок может быть получено при достаточно больших амплитудах колебаний жидкости ($\Delta A/R \sim 0,15$) и в случае, если разброс опыт-

ных данных менее 5%. Результаты, полученные в этом параграфе, показывают важность учета эффектов в зоне ЛТК для выяснения механизма демпфирования колебаний жидкости в сосуде. Наряду с выводами § 1.3 эти результаты составляют обоснование предложенной модели течения жидкости в пристеночной зоне.

§ 4.2. О демпфировании колебаний вязкой жидкости, содержащей газовый пузырь и взаимодействующей с упругими элементами

4.2.1. Пусть вязкая жидкость в состоянии равновесия заполняет кольцевую область Q (рис. 4.2.1), внутри которой находится пузырь с изотермическим газом.

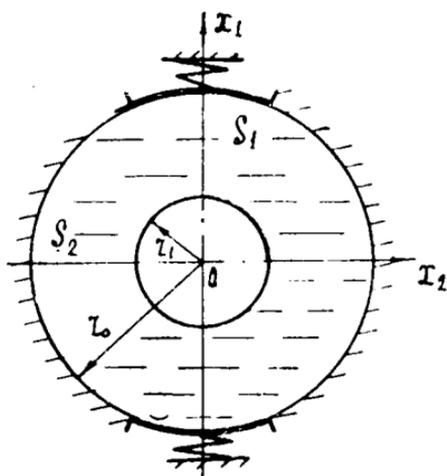


Рис. 4.2.1

Внешняя граница Q — твердая стенка, неподвижная всюду, за исключением некоторых частей S_1 , опирающихся на упругие элементы и свободных для радиальных перемещений.

Система может быть приведена в движение либо импульсом давления, приложенного к свободной поверхности жидкости, либо с помощью упругого элемента.

Предполагается, что:

— система совершает малые колебания вокруг положения равновесия, ее движение описывается линей-

ными уравнениями и граничные условия выполняются с ошибкой второго порядка малости на невозмущенных свободной и смоченной поверхностях;

— пузырь заполнен неподвижным газом, состояние которого полностью определяется уравнением

$$p\omega = c, \quad (4.2.1)$$

где p , ω — давление и удельный объем газа; c — константа;

— движение системы симметрично относительно осей ox_1 , ox_2 неподвижной системы координат o , x_1 , x_2 , связанной с центром области Q .

Наряду с декартовой системой координат o , x_1 , x_2 вводятся полярные координаты

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}.$$

Движение жидкости описывается линейризованными уравнениями Навье—Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} = 0; \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \Theta} = 0$$

и подчиняется уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \Theta} = 0. \quad (4.2.3)$$

На границе раздела газ — жидкость, уравнение которой

$$r = \zeta(\Theta, t),$$

выполняются кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u \quad \text{при } r = r_1 \quad (4.2.4)$$

и условия отсутствия напряжений

$$P - \frac{2}{\operatorname{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} = p; \quad \frac{\partial u}{\partial \Theta} + r \frac{\partial v}{\partial r} - v = 0 \quad \text{при } r = r_1. \quad (4.2.5)$$

Граничные условия на смоченной поверхности имеют вид условий прилипания:

на неподвижных стенках ($r = 1$, $\Theta \in S_2$)

$$u = v = 0; \quad (4.2.6)$$

на упруго опертых стенках ($r = 1, \theta \in S_1$)

$$u = \dot{\xi}; v = 0. \quad (4.2.7)$$

Здесь $\xi(t)$ — амплитуда колебаний смоченной поверхности S_1 подчиняется уравнению движения упругого элемента

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \mu \int_{S_1} P ds. \quad (4.2.8)$$

Начальное состояние системы ($t = 0$) определяется следующими параметрами:

$$u(r, \theta, 0) = u^0; v(r, \theta, 0) = v^0; P(r, \theta, 0) = P^0; \quad (4.2.9)$$

$$\zeta(\theta, 0) = \zeta^0; \xi(0) = \xi^0; \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}^0; p(0) = p^0.$$

В этой краевой задаче безразмерные переменные и параметры введены по формулам

$$r = \frac{r'}{r_0}; \xi = \frac{\xi'}{r_0}; P = \frac{P'}{\rho r_0^2 \Omega^2};$$

$$\omega = \frac{\omega'}{\Omega}; u = \frac{u'}{\Omega r_0}; \text{Re} = \frac{\Omega r_0^2}{\nu},$$

где Ω — частота собственных осесимметричных колебаний газового пузыря в безграничной несжимаемой идеальной жидкости; r_0 — радиус смоченной поверхности $S_1 + S_2$ в невозмущенном состоянии. Штрихом отмечены соответствующие размерные переменные и параметры.

Определяющими параметрами задачи являются $r'_1, r'_0, \omega', \nu, S'_1, \mu', \rho'$.

4.2.2. Решение задачи проводится методом дробных шагов. В соответствии с методом дробных шагов [44] и схемой его применения для уравнений Навье—Стокса [52] разностный аналог, аппроксимирующий исходную краевую задачу (4.2.2) — (4.2.10) с порядком $O(\tau + h_r^2 + h_\theta^2)$, имеет вид:

1-й дробный шаг $t = (n + 1/3)\tau$.

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Lambda_1 u_1^{n+1/3} + \frac{1}{r_i^2} u^{n+1/3} + \frac{2}{r_i} D_1 u^{n+1/3} \right);$$

$$\frac{v^{n+1/3} - v^n}{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Lambda_1 v^{n+1/3} - \frac{1}{r_i^2} v^{n+1/3} \right) \text{ для } r, \theta \in Q;$$

$$(P^n - p^n) - \frac{2}{\text{Re}} D_1 u^{n+1/3} = 0;$$

$$D_1 v^{n+1/3} + D_2 u^{n+1/3} + \frac{1}{r_i} v^{n+1/3} = 0 \text{ для } r = r_i; \quad (4.2.10)$$

$$u^{n+1/3} = v^{n+1/3} = 0 \text{ для } r = 1, \theta \in S_2;$$

$$u^{n+1/3} = u^n + \frac{\tau}{3} \mu \sum_{j \in S_1} P^n h_{\theta} - \frac{\tau}{3} \omega^2 \xi^n;$$

$$v^{n+1/3} = 0 \text{ для } r = 1, \theta \in S_1;$$

$$p^n = \frac{c}{\omega^n}; \quad \omega^n = \frac{1}{2} \sum_j (\xi^n)^2 h_{\alpha}.$$

В силу симметрии движения относительно осей ox_1 и ox_2 здесь и далее вычисления приводятся в секторе $0 \leq \theta \leq \pi/2$, а на прямых $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ задаются в разностном виде условия вида $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, v = 0$.

2-й дробный шаг $t = (n + 1/3)\tau$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \Lambda_2 u^{n+2/3}; \quad (4.2.11)$$

$$\frac{v^{n+2/3} - v^{n+1/3}}{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Lambda_2 v^{n+2/3} + \frac{2}{r_i} D_2 u^{n+2/3} \right) \text{ для } r, \theta \in Q;$$

$$-D_1 u^{n+2/3} + \frac{\text{Re}}{2} (P^n - p^n) = 0;$$

$$D_1 v^{n+2/3} + D_2 u^{n+2/3} + \frac{1}{r_i} v^{n+2/3} = 0 \text{ для } r = r_i;$$

$$u^{n+2/3} = v^{n+2/3} = 0 \text{ для } r = 1, \theta \in S_2;$$

$$u^{n+2/3} = u^n + \frac{2\tau}{3} \mu \sum_{j \in S_1} P^n h_{\alpha} - \frac{2\tau}{3} \omega^2 \xi^n;$$

$$v^{n+2/3} = 0 \text{ для } r = 1, \theta \in S_1;$$

3-й дробный шаг $t = (n + 1)\tau$.

$$\Lambda P^{n+1} = D_1 u^{n+2/3} + D_2 v^{n+2/3} + \frac{1}{r_i} u^{n+2/3} \text{ для } r, \theta \in Q;$$

$$P^{n+1} - p^{n+1} - \frac{2}{\text{Re}} D_1 u^{n+1} = 0 \text{ для } r = r_i;$$

$$D_1 P^{n+1} = 0 \quad \text{для } r=1, \theta \in S_2;$$

$$- D_1 P^{n+1} = \frac{u^{n+1} - u^{n+2,3}}{\tau} \quad \text{для } r=1, \theta \in S_1.$$

Начальные условия задачи сохраняют вид (4.2.9). В этих формулах обозначения разностных операторов такие:

$$\Lambda_1 \propto \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \Lambda_2 \propto \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad D_1 \propto \frac{\partial}{\partial r};$$

$$D_2 \propto \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}.$$

На первом и втором дробных шагах задача решается одномерными прогонками по r и θ , на третьем — методом релаксации.

Поле скоростей на временном слое $(n+1)\tau$ рассчитывается по формулам

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2,3}}{\tau} = - D_1 P^{n+1};$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+2,3}}{\tau} = - D_2 P^{n+1},$$

которые являются третьей составляющей расщепленных уравнений Навье—Стокса и из которых с помощью уравнения неразрывности получено уравнение Пуассона для давления в (4.2.12).

Условная устойчивость схемы (4.2.10)—(4.2.12) доказывается методом максимума в норме пространства непрерывных функций C .

4.2.3. Расчеты проводились для области $0 \leq r_1 \leq r \leq r_0 = 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ на сетке 10×20 с шагом по времени $\tau = 0,005$.

На основании численного эксперимента установлено, что в рассмотренном диапазоне начальных условий и значений параметров Re , r_1 , ω , S_1 , p колебания упругого элемента являются гармоническими с логарифмическим декрементом колебаний a .

На рис. 4.2.2 показана форма газового пузыря в различные моменты времени (кривая $1 - t = 0$; $2 - t = \pi$; $3 - t = 9/4 \pi$) при $Re = 1,5 \cdot 10^3$ и $\omega^2 = 31$, $S_1 = 3/20 \pi$.

Мгновенное распределение давления в жидкости приведено на рис. 4.2.3. Здесь $Re = 250$; $r_1 = 0,5$; $p = 0,5$.

Зависимость логарифмического декремента колебаний упругого элемента от числа Re имеет такой же характер (рис. 4.2.4), как и при гравитационных колебаниях вязкой жидкости в сосуде [2]. График относится к случаю $r_1 = 0,5$; $p = 0,5$; $\omega^2 = 31$.

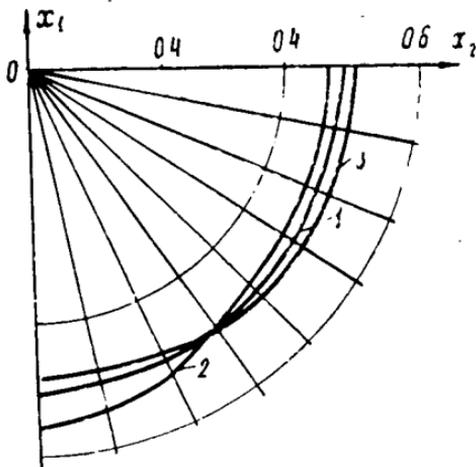


Рис. 4.2.2

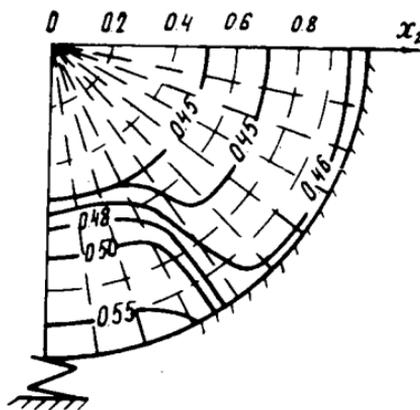


Рис. 4.2.3

Влияние частоты собственных колебаний упругого элемента ω^2 на декремент колебаний α при $r_1 = 0,5$ и $Re = 25$ видно из графиков на рис. 4.2.5, где кривая 1 соответствует $p = 0,05$; 2 — $p = 0,5$; 3 — $p = 1,27$.

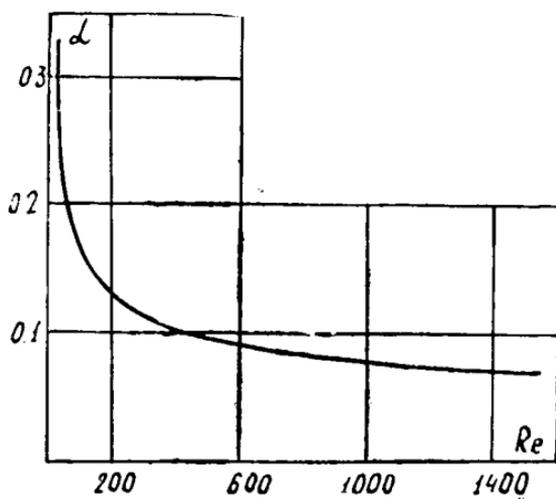


Рис. 4.2.4

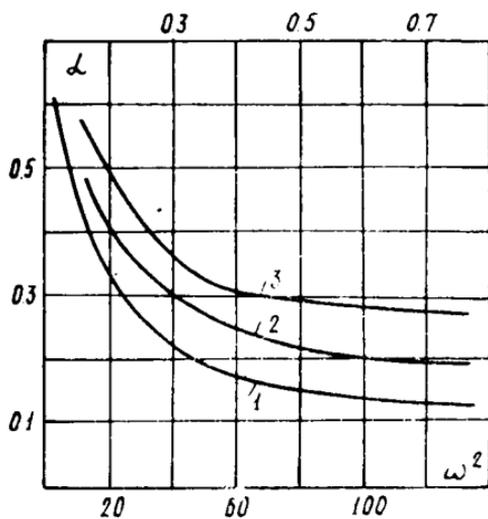


Рис. 4.2.5

Сильное влияние на демпфирование колебаний оказывает размер газовой полости. Так, при $Re = 25$, $\omega^2 = 31$, $p = 0,5$ логарифмический декремент α увеличивается от 0,07 до 0,9 при уменьшении r_1 от 0,7 до 0,3.

§ 4.3. Осесимметричные колебания жидкости в прямом круговом цилиндре

4.3.1. Рассматривается задача о малых гравитационных колебаниях вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде конечной глубины H . Колебания развиваются в жидкости из состояния покоя под действием начального импульса давления, приложенного к свободной поверхности. Эта краевая задача имеет вид (3.3.1). Причем рассматривается только тот случай, когда импульс давления возбуждает колебания первого симметричного тона.

Вводится цилиндрическая система координат o, x, r, Θ с началом в центре дна цилиндра. Ось ox совпадает с осью цилиндра и направлена против вектора ускорения гравитационных сил j . В силу осевой симметрии течения решение задачи разыскивается в области

$$0 \leq x \leq H; 0 \leq r \leq 1; \Theta = \text{const},$$

и на оси ox задаются обычные условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0; v = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial r} = 0.$$

Решение задачи проводится методом дробных шагов, и схема расщепления записывается в этом случае следующим образом:

1-й дробных шаг $t = (n + 1/3)\tau$.

$$\frac{\partial u^{n+1/3}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^{n+1/3}}{\partial x^2};$$

(4.3.1)

$$\frac{\partial v^{n+1/3}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^{n+1/3}}{\partial x^2} \quad \text{для } x, r \in Q;$$

$$\Pi^n - \frac{\xi^{n+1/3}}{Fr} - \frac{2}{Re} \frac{\partial u^{n+1/3}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial u^{n+1/3}}{\partial r} + \frac{\partial v^{n+1/3}}{\partial x} = 0, \quad \zeta^{n+1/3} = \zeta^n + \frac{\tau}{3} u^{n+1/3} \quad \text{для } x = H;$$

$$u^{n+1/3} = 0, \quad \frac{\partial v^{n+1/3}}{\partial x} = \beta v^{n+1/3} \quad \text{для } x = 0.$$

2-й дробный шаг $t = (n + 2/3)\tau$

$$\frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^{n+2/3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial r} \right); \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial v^{n+2/3}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^{n+2/3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{n+2/3}}{\partial r} - \frac{2v^{n+2/3}}{r^2} \right)$$

для $x, r \in Q$;

$$\frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial r} = \beta u^{n+2/3}, \quad v^{n+2/3} = 0 \quad \text{для } r = 1;$$

$$\frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial r} = 0, \quad v^{n+2/3} = 0 \quad \text{для } r = 0.$$

3-й дробный шаг $t = (n + 1)\tau$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial r};$$

(4.3.3)

$$\nabla^2 \Pi^{n+1} = \frac{1}{\tau} \text{div } \bar{u}^{n+2/3} \quad \text{для } x, r \in Q;$$

$$\Pi^{n+1} - \frac{\zeta^{n+1}}{\text{Fr}} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial r} = 0$$

для $x = H$;

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial r} = \beta u^{n+1}, \quad v^{n+1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = 1;$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial r} = 0, \quad v^{n+1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = 0;$$

$$u^{n+1} = 0, \quad \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} = \beta v^{n+1}, \quad \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad \text{для } x = 0.$$

При $r = 0$ в уравнениях и краевых условиях возникают неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Эти неопределенности устраняются по Лонгиталю. Например, на шаге

$t = (n + 2/3) \tau$ уравнение движения для компоненты u заменяется при $r = 0$ уравнением

$$\frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial t} = \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u^{n+2/3}}{\partial r^2}$$

и т. д.

4.3.2. Ниже приводятся результаты некоторых расчетов, выполненных по приведенной выше схеме на сетке 20×20 (для $H = 1$) с шагом по времени $\tau = 0,02$. На рис. 4.3.1 показано влияние коэффициента трения β

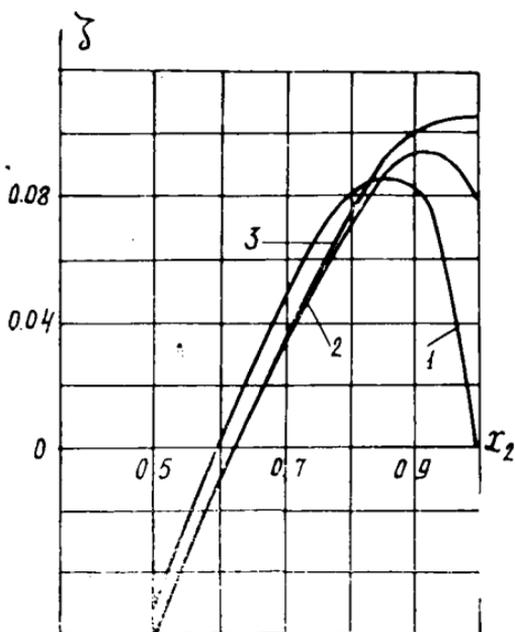


Рис. 4.3.1

на форму свободной поверхности в пристеночной зоне. Кривая 3 получена для скольжения жидкости по стенке без трения ($\beta \rightarrow 0$), кривая 2 соответствует $\beta = 1$, кривая 1 — это форма колебаний при полном прилипании жидкости к смоченной поверхности ($\beta \rightarrow \infty$). Расчеты выполнены при $Re = 250$, $H = 1$. Видно, что коэффициент трения β оказывает наиболее сильное влияние на форму свободной поверхности только вблизи смоченной поверхности на длине порядка $(Re)^{-1/2}$.

На рис. 4.3.2 и 4.3.3 изображены поля давлений и скоростей для случая колебаний жидкости с $Re=10^3$, $\beta=30$ в баке, заполненном на глубину $H=0,5$.

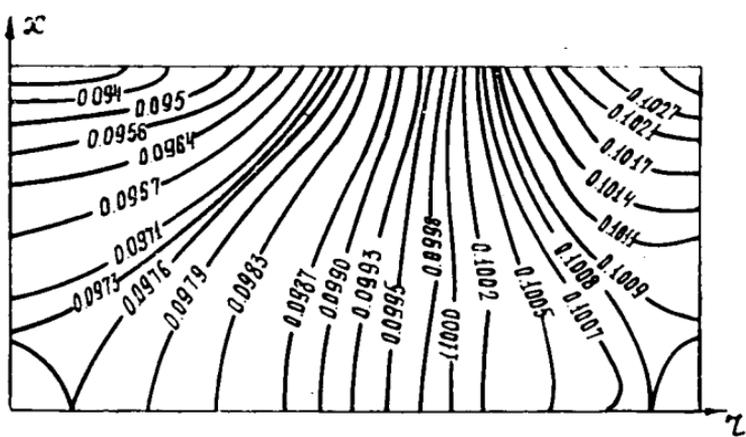


Рис. 4.3.2

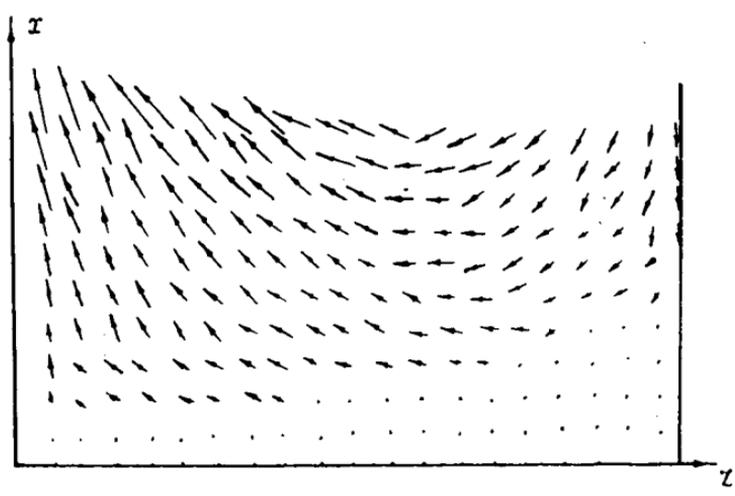


Рис. 4.3.3

Влияние числа Re на декремент колебаний α видно из графиков, приведенных на рис. 4.3.4. Здесь кривая 1 получена при $\beta \rightarrow 0$, кривая 2 — при $\beta \rightarrow \infty$, кружками обозначены значения α по приближенной формуле для слабого [24] демпфирования (п. 4.1.1)

$$\alpha = -\frac{F'}{E},$$

учитывающей, «эмпирическую» поправку $\sqrt{2}$.

Здесь

$$F' = \pi \rho \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \int_S u^2 ds; \quad E = \frac{1}{2} \rho j R^2 \int_S \zeta^2 ds; \quad (4.3.4)$$

$$\zeta = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=H}; \quad u = \begin{cases} \omega \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \text{при } x = 0; \\ \omega \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \text{при } r = 1; \end{cases}$$

$$\Phi = \frac{\text{ch} \lambda x}{\lambda \text{sh} \lambda H} \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda)}; \quad \omega^2 = \lambda j \text{th} \lambda H; \quad \lambda = 3,83.$$

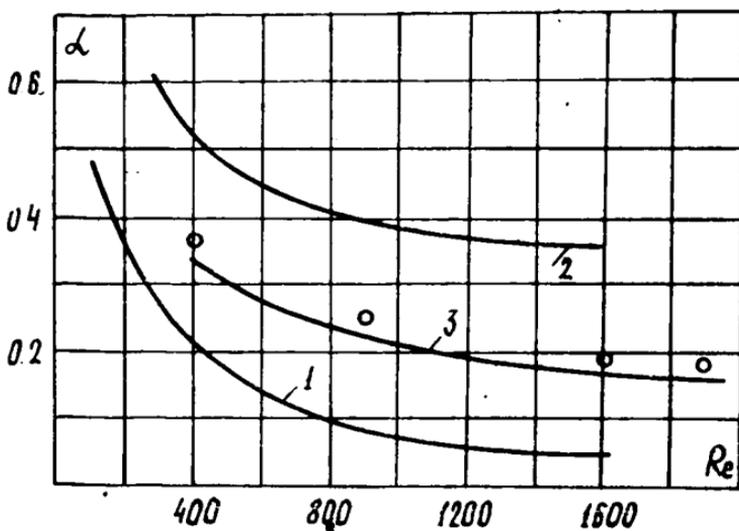


Рис. 4.3.4

При $H > 1$ из (4.3.4) для коэффициента затухания следует приближенная формула

$$\alpha \approx 5,1 (\text{Re})^{-1/2}. \quad (4.3.5)$$

Кривая 3 построена по результатам расчетов методом дробных шагов, когда величина коэффициента пристеночного трения задается по формуле

$$\beta = (\text{Re})^{1/2},$$

которую можно рассматривать как первое приближение к зависимости (1.3.10).

Видно, что эти результаты достаточно хорошо согласуются со значениями α , которые вычислены по приближенной методике (4.3.5).

§ 4.4. Несимметричные колебания жидкости в прямом круговом цилиндре

Решение этой задачи проводится также методом дробных шагов. Однако непосредственное расщепление исходной краевой проблемы в этом случае не позволяет на каждом дробном шаге получить неявную схему. Кроме того, расчет давления на заключительном шаге потребует для достижения необходимой точности использовать достаточно густую пространственную сетку, а это лимитируется возможностями вычислительной машины. Поэтому вводится предположение о том, что параметры течения в меридиональном сечении цилиндра изменяются по закону синуса (косинуса). Этим приемом задача сводится к двумерной, и таким образом снимаются многие трудности ее решения.

4.4.1. В цилиндрической системе координат (x, r, Θ) , связанной с дном цилиндра, линеаризованная краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_x + \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\Theta}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial \pi}{\partial r} = 0; \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\partial u_\Theta}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 u_\Theta - \frac{u_\Theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \Theta} = 0;$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\Theta}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{в обл. } Q;$$

$$\pi - \frac{\zeta}{\text{Fr}} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \Theta} + \frac{\partial u_\Theta}{\partial x} = 0; \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_x \quad \text{при } x = H;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \beta u_x; \quad u_r = 0; \quad \frac{\partial u_\Theta}{\partial r} = \beta u_\Theta \quad \text{при } r = 1; \quad (4.4.3)$$

$$u_x = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial x} = \beta u_r; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial x} = \beta u_\theta \quad \text{при } x = 0.$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \pi = p + \frac{x}{Fr}.$$

Начальные условия имеют вид (3.1.1).

Введение аналога давления π позволяет утверждать, что внешние силы оказывают влияние на течение жидкости только через граничные условия, записанные через π , на свободной поверхности.

Будем искать решение краевой задачи (4.4.1) — (4.4.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_x &= U_x(x, r, t) \sin \theta; \quad u_r = U_r(x, r, t) \sin \theta; \quad (4.4.4) \\ u_\theta &= U_\theta(x, r, t) \cos \theta; \quad \pi = \Pi(x, r, t) \sin \theta; \\ \zeta &= Z(r, t) \sin \theta, \end{aligned}$$

т. е. в дальнейшем будем рассматривать только колебания жидкости по первому несимметричному тону. Очевидно, что преобразования вида (4.4.4) могут быть проведены в общем случае и для других тонов колебаний.

С помощью преобразования (4.4.4) размерность исходной краевой задачи понижена на единицу, и теперь ее можно рассматривать как двумерную нестационарную

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{1}{Re} \nabla_1^2 U_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial U_r}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(\nabla_1^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} + \frac{2U_\theta}{r^2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(\nabla_1^2 U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{2U_r}{r^2} \right) + \frac{\Pi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} &= 0 \quad \text{в обл. } Q; \\ \Pi - \frac{Z}{Fr} - \frac{2}{Re} \frac{\partial U_x}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial U_\theta}{\partial x} + \frac{U_x}{r} = 0; \\ \frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial r} &= 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = U_x \quad \text{при } x = H; \\ \frac{\partial U_x}{\partial r} = \beta U_x; \quad U_r = 0; \quad \frac{\partial U_\theta}{\partial r} &= \beta U_\theta \quad \text{при } r = 1; \end{aligned}$$

$$U_x = 0; \quad \frac{\partial U_r}{\partial x} = \beta U_r; \quad \frac{\partial U_\theta}{\partial x} = \beta U_\theta \quad \text{при } x = 0,$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}.$$

Начальные условия задачи теперь будут следующими:

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, r, t_0) &= \bar{U}^0(x, r); \quad \Pi(x, r, t_0) = \Pi^0(x, r); \\ Z(r, t_0) &= Z^0(r). \end{aligned}$$

Решение этой краевой задачи будем проводить методом дробных шагов. Рассмотренная в предыдущих параграфах схема расщепления может быть применена только тогда, когда связь между составляющими вектора скорости в уравнениях движения будет осуществляться только через давление. Для достижения этого перейдем к новым искомым переменным $u(x, r, t)$; $v(x, r, t)$; $w(x, r, t)$ по формулам

$$u = U_x; \quad v + w = -U_r; \quad v - w = U_\theta. \quad (4.4.5)$$

В новых искомым переменных краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_1^2 u - \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad (4.4.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_0^2 v + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} - \frac{\Pi}{r} \right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_2^2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\Pi}{r} \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} = 0 \quad \text{в обл. } Q;$$

$$\Pi - \frac{Z}{\text{Fr}} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (4.4.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = u \quad \text{при } x = H;$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \beta u; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \beta v; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \beta w \quad \text{при } r = 1; \quad (4.4.8)$$

$$u = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \beta v; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \beta w \quad \text{при } x = 0. \quad (4.4.9)$$

Через ∇_{κ}^2 здесь обозначены операторы

$$\nabla_{\kappa}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{\kappa}{r}\right)^2$$

($\kappa = 0, 1, 2$).

4.4.2. В соответствии с принятой ранее схемой проведем расщепление краевой задачи (4.4.6) — (4.4.9) по независимым переменным x, r таким образом, что:

1-й дробный шаг $t = \left(n + \frac{1}{3}\right) \tau$

$$\frac{\partial u^{n+1,3}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^{n+1,3}}{\partial x^2} \quad \text{в обл. } Q;$$

$$\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u^{n+1,3}}{\partial x} = \Pi^n - \frac{Z^{n+1,3}}{\text{Fr}} \quad \text{при } x = H;$$

$$u^{n+1,3} = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\frac{\partial v^{n+1,3}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v^{n+1,3}}{\partial x^2} \quad \text{в обл. } Q;$$

$$\frac{\partial v^{n+1,3}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^{n+1,3}}{\partial r} - \frac{u^{n+1,3}}{r} \right) \quad \text{при } x = H;$$

$$\frac{\partial v^{n+1,3}}{\partial x} = \beta v^{n+1,3} \quad \text{при } x = 0;$$

$$\frac{\partial w^{n+1,3}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w^{n+1,3}}{\partial x^2} \quad \text{в обл. } Q,$$

$$\frac{\partial w^{n+1,3}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^{n+1,3}}{\partial r} + \frac{u^{n+1,3}}{r} \right) \quad \text{при } x = H,$$

$$\frac{\partial w^{n+1,3}}{\partial x} = \beta w^{n+1,3} \quad \text{при } x = 0.$$

2-й дробный шаг $t = \left(n + \frac{2}{3}\right) \tau.$

$$\frac{\partial u^{n+2,3}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^{n+2,3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{n+2,3}}{\partial r} - \frac{u^{n+2,3}}{r^2} \right) \quad \text{в обл. } Q;$$

$$\frac{\partial u^{n+2,3}}{\partial r} = \beta u^{n+2,3} \quad \text{при } r = 1;$$

$$u^{n+2,3} = 0 \quad \text{при } r = 0;$$

$$\frac{\partial v^{n+2,3}}{\partial t} = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 v^{n+2,3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{n+2,3}}{\partial r} \right) \quad \text{в обл. } Q;$$

$$\frac{\partial v^{n+2,3}}{\partial r} = \beta v^{n+2,3} \quad \text{при } r = 1,$$

$$v^{n+2,3} = 0 \quad \text{при } r = 0;$$

$$\frac{\partial \omega^{n+2,3}}{\partial t} = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega^{n+2,3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega^{n+2,3}}{\partial r} - \frac{4\omega^{n+2,3}}{r^2} \right)$$

в обл. Q ;

$$\omega^{n+2,3} = -v^{n+2,3} \quad \text{при } r = 1;$$

$$\frac{\partial \omega^{n+2,3}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0.$$

На третьем дробном шаге с помощью уравнений движения

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial r} - \frac{\Pi^{n+1}}{r} \right);$$

$$\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial r} + \frac{\Pi^{n+1}}{r} \right)$$

и уравнения неразрывности формулируется также крайняя задача относительно аналога давления

$$\nabla_1^2 \Pi^{n+1} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial u^{n+2,3}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+2,3}}{\partial r} + \frac{\partial \omega^{n+2,3}}{\partial r} + \frac{2\omega^{n+2,3}}{r} \right)$$

в обл. Q ;

$$\Pi^{n+1} = \frac{Z^{n+1}}{Fr} + \frac{2}{\operatorname{Re}} \frac{\partial u^{n+2,3}}{\partial x} \quad \text{при } x = H;$$

$$\frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1;$$

$$\Pi^{n+1} = 0 \quad \text{при } r = 0; \quad \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Так как область определения искоемых функций u, v, ω, Π есть прямоугольник

$$0 \leq x \leq H; \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (4.4.10)$$

то в выписанных выше краевых задачах заданы еще граничные условия при $r = 0$. Эти граничные условия формулируются исходя из условия регулярности решения в области (4.4.10).

4.4.3. Расчеты колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде по главному несимметричному тону проводились для случая $H = 1$ на сетке 20×20 с шагом по времени $\tau = 0,02$.

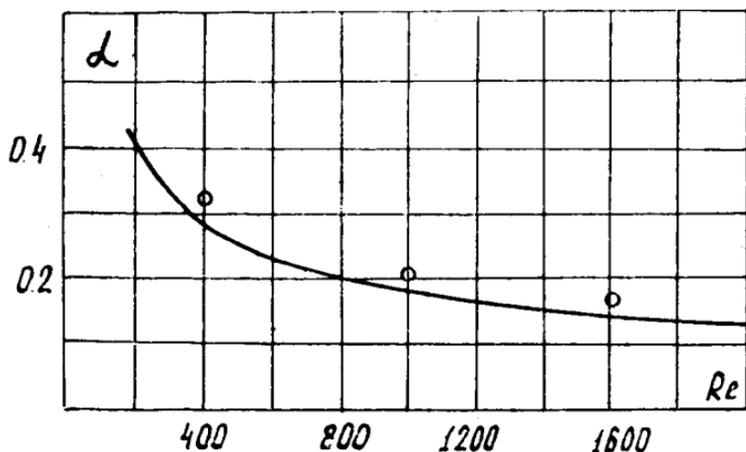


Рис. 4.4.1

На рис. 4.4.1. проводится сравнение зависимостей декремента колебаний α от числа Re , вычисленных по формуле [24]:

$$\alpha = 5,78 (Re)^{-1/2},$$

учитывающей эмпирическую поправку (сплошная линия), и по результатам вычислений, описанным конечно-разностным методом (кружки), когда значения коэффициента трения β задаются по формуле

$$\beta = (Re)^{1/2}.$$

Приведенные данные показывают удовлетворительное согласование опытных и расчетных данных и подтверждают состоятельность предложенных математической модели течения вязкой жидкости в пристеночной зоне и методики оценки величины коэффициента трения β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод «крупных частиц» для гидравлических расчетов. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 2, № 1.
2. Богоряд И. Б., Дружинин И. А. и др. Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1977.
3. Богоряд И. Б., Дружинин Г. З., Сафонов С. А. К расчету колебаний вязкой жидкости методом дробных шагов. — Тр. семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1972.
4. Богоряд И. Б., Лаврова Н. П., Христенко Г. В. К исследованию колебаний вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд. — Тр. III семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1978.
5. Богоряд И. Б., Христенко Г. В. К задаче о колебаниях газового пузыря в вязкой жидкости. — Тр. III семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1978.
6. Вазов Ф., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1963.
7. Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное исследование движения вязкой жидкости со свободной поверхностью. — ДАН, 1974, т. 217, № 2.
8. Викторов Е. Д. Вычисление коэффициента затухания свободных колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде. — ПМТФ, 1965, № 2.
9. Дерягин Б. В., Леви С. М. Физико-химия нанесения тонких слоев на движущуюся подложку. М., Изд-во АН СССР, 1959.
10. Железный Б. В., Никифоров А. Г. О напряжениях в зоне линии смачивания и динамическом сопротивлении мениска. — ПМТФ, 1978, № 4.
11. Жуковский Н. Е. О трении жидкости при большой разности скорости ее струй. — Собр. соч., ГИТТЛ, 1949.
12. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные капельною однородною жидкостью. — Избр. соч., ГИТТЛ, 1948.
13. Кастерин Н. П. Обобщение основных уравнений аэродинамики и электродинамики. М., Изд-во АН СССР, 1937.

14. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1959.
15. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 2. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
16. Ламб Г. Гидромеханика. М., Гостехиздат, 1947.
17. Ландау Л. Д., Левич В. Г. Увлечение жидкости движущейся пластинкой. — Ландау Л. Д. Собр. соч. Т. 1. М., Наука, 1969.
18. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958.
19. Лурье А. И. Теория упругости. М., Наука, 1970.
20. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., ГИТТЛ, 1952.
21. Лыков А. В., Берковский Б. М. Конвекция и тепловые волны. М., Энергия, 1974.
22. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977.
23. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. — Мех. и машиностроение, 1961, № 4.
24. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., Машиностроение, 1968.
25. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., Мир, 1964.
26. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 1970.
27. Моисеев Н. Н. О краевых задачах для линейризованных уравнений Навье—Стокса в случае, когда вязкость мала. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.
28. Николс Т. Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости. М., Мир, 1973.
29. Ньютоп И. Математические начала натуральной философии. — Крылов А. Н. Собр. соч. Т. 7. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936. Перев. с лат. Крылова А. Н.
30. Петров А. А. Вариационная формулировка задачи о движении жидкости в сосуде конечных размеров. — ПММ, 1964, т. 28, № 4.
31. Рабинович Б. И. К теории малых колебаний твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. — Прикл. мех., 1968, т. 5, вып. 9.
32. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1979.
33. Румянцев В. В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред. — ПММ, 1973, т. 37, № 6.
34. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.
35. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., Наука, 1973.
36. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
37. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1947.
38. Уизем Д. Б. Вариационные методы и их приложение к волнам на воде. — В кн.: Нелинейная теория распространения волн на воде. М., Мир, 1970.
39. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. М., Изд-во АН СССР, 1945.

40. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир, 1976.
 41. Хёрт С. Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод. — В сб.: Числ. методы в механике жидкостей. М., Мир, 1973.
 42. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
 43. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.
 44. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.
 45. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. N. Y. Dover publications, 1944.
 46. Coucher F. S., Word H. Phil. Mag., 1922, 44.
 47. Courant R. Variational Methods for the Solution of problems of equilibrium and variations. «Bull. Amer. Math. Soc.», 1943, 49.
 48. Harlow F. H., Welch I. E. Numerical Calculation of Time-Dependent Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. «Phys. of Fluid», 1965, 8, № 12.
 49. Hirt C. W., Cook J. L., Butler T. D. A Lagrangian Method for calculating the Dynamics of Incompressible Fluid with Free Surface. «Journ. of Comput. Phys.», 1970, 5, № 2.
 50. Luk J. C. A variational principle for a fluid free surface. «Journ. Fluit Mech.», 1967, 27, part 2.
 51. Stokes. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, etc. Camb. Trans., VIII, 1845, 287 (papers 1, 75).
 52. Тёман Р. Sur l'Approximations de la Solution de Equations de Navier—Stokes par la Méthode de pas Fractionneres (I). Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1969, 33, № 5.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Глава I

Постановка задачи о движении жидкости со свободной поверхностью

§ 1.1. Уравнения движения	6
§ 1.2. Условия на свободной поверхности	8
§ 1.3. Условия на твердой границе	11
§ 1.4. Краевая задача о движении жидкости, частично заполняющей полость	26

Глава II

Вариационные принципы в задаче о движении жидкости со свободной поверхностью

§ 2.1. Вариационный принцип Лагранжа	30
§ 2.2. Частные случаи	33
§ 2.3. Вариационные принципы Гамильтона и Бейтмена в задачах о потенциальном движении идеальной жидкости	36
§ 2.4. Вариационный (проекционный) метод Галеркина	42
§ 2.5. Построение вариационно-разностных и разностных схем решения на основе вариационного принципа Лагранжа	44

Глава III

Разностные методы в задачах динамики вязкой жидкости со свободной поверхностью

§ 3.1. Разностная аппроксимация задачи	59
§ 3.2. Исследование устойчивости и сходимости	62
§ 3.3. Метод дробных шагов в линейной задаче. Исследование устойчивости и сходимости	64
§ 3.4. Оценка аппроксимационной вязкости	71

Глава IV

Линейные задачи колебаний вязкой жидкости

§ 4.1. Качественные оценки процесса	73
§ 4.2. О демпфировании колебаний вязкой жидкости, содержащей газовый пузырь и взаимодействующей с упругими элементами	80

§ 4.3. Осесимметричные колебания жидкости в прямом круговом цилиндре	87
§ 4.4. Несимметричные колебания жидкости в прямом круговом цилиндре	92
Литература	98

Игорь Борисович БОГОРЯД

**ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Редактор **К. Г. Шилько**

Технический редактор **Р. М. Подгорбунская**

Корректор **Л. И. Дюканова**

КЗ02143. Сдано в набор 2.1.80 г. Подписано к печати 23.12.80 г.
 Формат 84×108^{1/32}; бумага типографская № 3. Литературная гар-
 нитура. Высокая печать. П. л. 3,25; уч.-изд. л. 4,67; усл. п. л. 5,46.
 Тираж 500. Заказ 6007. Цена 70 коп.

Издательство ТГУ, 634029, г. Томск, ул. Никитина, 17.
 Типография издательства «Красное знамя»,
 634029, г. Томск, ул. Советская, 47

1-414927

Цена 70 коп.

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00939971