

Л. Е. РАДЮК, А. Ф. ТЕРПУГОВ

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

КОНТРОЛЬНЫЙ ЛИСТ
СРОКОВ ВОЗВРАТА
КНИГА ДОЛЖНА БЫТЬ
ВОЗВРАЩЕНА НЕ ПОЗДНЕ
УКАЗАННОГО ЗДЕСЬ СРОКА
Колич. пред. выдач

158

остей и

1988

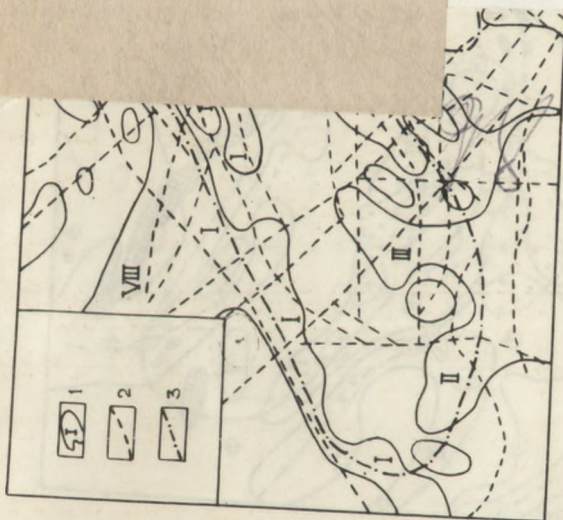


Рис. 4. I. 9.

Томский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового
Красного Знамени государственный университет
им. В.В.Куйбышева

Л.Е.Радюк, А.Ф.Терпугов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие



Издательство Томского университета

Томск - 1988

1-663453

УДК 519.2

Л.Е.Радюк, А.Ф.Терпугов. Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. – 174 с. – 30к. 1000 экз. I5020I0000.

Работа представляет собой конспект лекций по теории вероятностей и случайных процессов, которые читаются студентам факультета прикладной математики и кибернетики Томского университета в настоящее время. При написании учебного пособия предполагалось, что читатели знакомы с математическим анализом и элементами функционального анализа.

Для студентов ФММК и физических факультетов ТГУ.

Рецензент – доктор технических наук А.И.РУБАН

P I5020I0000
I77/O12/ - 87 40-88



Издательство Томского университета, 1988

О Г Л А В Л Е Н И Е

Часть I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Предмет теории вероятностей.	8
§ 2. Алгебра событий.	9
§ 3. Вероятность случайных событий.	13
§ 4. Основные свойства вероятности. Вероятностная мера.	16
§ 5. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей	19
§ 6. Формулы полной вероятности и Байеса.	22
§ 7. Частная теорема об опытах. Биномиальное распределение.	23
§ 8. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа . .	25
§ 9. Формула Пуассона.	27

Глава II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Определение случайной величины	29
§ 2. Описание случайных величин.	30
§ 3. Многомерные случайные величины	34
§ 4. Преобразование случайных величин	37
§ 5. Математическое ожидание.	42
§ 6. Дисперсия	47
§ 7. Моменты.	48
§ 8. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции . . .	49
§ 9. Характеристическая функция	53
§ 10. Нормальные (гауссовские) случайные величины. .	57

Глава III. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Типы сходимости.	60
§ 2. Центральная предельная теорема в простейшем случае.	63

§ 3. Условие Линдеберга. Центральная предельная теорема в общем случае.	65
§ 4. Центральная предельная проблема	69
§ 5. Усиленный закон больших чисел	73

Часть II. ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Определение и описание случайного процесса.	82
§ 2. Статистические средние характеристики случайных процессов.	84
§ 3. Стационарные случайные процессы	85
§ 4. Эргодические случайные процессы	87
§ 5. Комплексные случайные процессы.	89
§ 6. Функция корреляции и её свойства.	90
§ 7. Спектральная плотность случайного процесса.	91

Глава II. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Сходимость в среднем квадратическом	95
§ 2. Непрерывность случайных процессов	98
§ 3. Дифференцирование случайных процессов	100
§ 4. Интегрирование случайных процессов. Закон больших чисел.	101
§ 5. Разложение случайных процессов по ортогональным функциям.	104
§ 6. Линейные преобразования случайных процессов	106

Глава III. ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Многомерное нормальное распределение	112
§ 2. Гауссовский случайный процесс.	116
§ 3. Винеровский случайный процесс	119

Глава IV. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

§ 1. Определение марковского процесса.	120
§ 2. Дискретные цепи Маркова. Определение и классификация состояний	122

§ 3. Классификация состояний марковской цепи по асимптотическим свойствам вероятности $p_{ii}(n)$	I27
§ 4. Финальные вероятности.	I31
§ 5. Среднее время перехода из несущественного состояния в эргодический класс	I36
§ 6. Среднее время перехода из состояния в состояние внутри класса.	I37

Глава У. ДИСКРЕТНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Определение и основные свойства.	I39
§ 2. Дифференциальные уравнения Колмогорова	I42
§ 3. Финальные вероятности.	I43
§ 4. Среднее время перехода из одного состояния в другое.	I43
§ 5. Процесс размножения и гибели	I44
§ 6. Пуассоновский процесс.	I47
§ 7. Приложение процессов размножения и гибели.	I51

Глава VI. НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Диффузионные марковские процессы	I54
§ 2. Обратное уравнение Колмогорова.	I56
§ 3. Уравнение Фоккера-Планка.	I58
§ 4. Некоторые частные случаи уравнения Фоккера-Планка	I60
§ 5. Допредельные модели диффузионных процессов	I63

Глава УП. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Стохастический интеграл в форме Ито	I66
§ 2. Симметризованный стохастический интеграл	I68
§ 3. Стохастические дифференциальные уравнения.	I69

Глава УШ. МАРТИНГАЛЫ.	I71
ЛИТЕРАТУРА.	I74

Часть I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ I. Предмет теории вероятностей

Все события, происходящие вокруг нас, можно разбить на две группы – события детерминированные и события случайные.

Детерминированные события характеризуются тем, что при данном комплексе условий они либо всегда наступают, либо никогда не наступают. Например, при $t = 100^{\circ}\text{C}$ и нормальном давлении вода закипает. С другой стороны, при этих же условиях она не может превратиться в лед.

Однако есть и другая группа событий, которые характеризуются тем, что при данном комплексе условий они могут как наступать, так и не наступать, и предсказать заранее, наступит событие или нет, невозможно. Например, при бросании монеты появление герба на верхней стороне – событие случайное, при посеве семян прорастет данное зерно или нет – тоже заранее предсказать нельзя, проработает ли ЭВМ без сбоя, пока решается ваша задача, заранее неизвестно. Это все случайные события, изучением которых и занимается теория вероятностей.

Но теория вероятностей изучает не сами по себе случайные события, а те закономерности, которые возникают при многократном воспроизведении опытов со случайным исходом. Другими словами, нас будут интересовать только такие события, условия для появления которых могут возникать бесконечное число раз. И кроме того, эти массовые, так скажем, случайные, события должны обладать свойством статистической устойчивости. Смысл этого свойства будем расшифровывать на протяжении всего курса. А пока отметим, что теория вероятностей занимается изучением закономерностей в массовых случайных событиях. В сочетании противоположных понятий закономерность – случайность и состоит главная особенность этого курса.

Возникновение теории вероятностей относят обычно к XVIII веку и связывают с комбинаторными задачами азартных игр. Именно они привели к задачам, которые не укладывались в рамки существующих тогда математических моделей. Азартные игры отличаются тем, что исходы нельзя предсказать заранее, наличие элемент случайности, и ситуация может повторяться неоднократно (массовость). Выдающиеся математики того времени заинтересовались этой нестандартной

ситуацией, предвидя, что в массовых случайных явлениях должны проявляться некоторые закономерности. Первые попытки обнаружить эти закономерности сделали Гюйгенс, Паскаль, Я.Бернулли. Вслед за азартными играми в сферу внимания теории вероятностей попали задачи, возникающие в страховании и демографии. И долгое время теория вероятностей не находила других приложений. Последующее развитие теории вероятностей связано с бурным развитием естественных наук, в частности физики. Более точные измерения требовали изучения ошибок, возникающих при этом. Ошибки, как правило, случайны и не подчиняются индивидуальному учету, но проявляют некоторую устойчивость. Так возникла теория ошибок, большой вклад в развитие которой внесли Пуассон и Гаусс, с их именами мы еще встретимся.

Следующий важный период в развитии теории вероятностей связан с именами русских ученых П.Л.Чебышева, А.А.Маркова, А.М.Ляпунова, создавших эффективные методы доказательства предельных теорем для сумм независимых случайных величин.

Современный период в развитии теории вероятностей начинается с установления аксиоматики. В 1933 г. вышла книга советского математика А.Н.Колмогорова "Основные понятия теории вероятностей", в которой была предложена аксиоматика, получившая всеобщее признание и позволившая охватить все классические разделы теории вероятностей. За последние десятилетия неизмеримо выросла роль теории вероятностей в современном естествознании.

Несколько слов о терминологии. Как уже отмечалось, теория вероятностей имеет дело со случайными событиями. Здесь следует отвлечься от житейского представления, когда под случайным событием понимается что-то крайне редкое, идущее вразрез установившемуся порядку вещей. Случайные события в теории вероятностей обладают характерными особенностями – массовостью и статистической устойчивостью.

В настоящее время методы теории вероятностей широко используются в науке, технике, медицине, социологии, производстве.

§ 2. Алгебра событий

Событием будем называть любой факт, который может произойти или не произойти. События будем обозначать большими латинскими буквами, например A , B ,... и т.д.

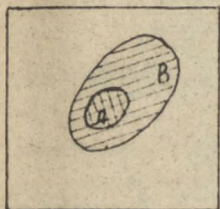
Среди всех событий выделим два крайних. Событие Ω называ-

ется достоверным, если оно наступает в каждом опыте. Событие $\emptyset$ называется невозможным, если оно не наступает ни в одном опыте.

Над событиями можно ввести определенные операции.

I. Следование событий

Говорят, что событие A входит в событие B (обозначается $A \subset B$), если при наступлении события A обязательно наступает и событие B .



Если событие A состоит в том, что наудачу брошенная точка попала в область A , а событие B — область B , то соотношение $A \subset B$ происходит тогда, когда область A целиком содержится в области B .

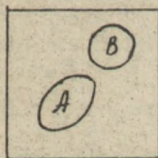
Если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$, то события A и B называются эквивалентными или равными $A = B$. Очевидно, что для любого события A имеет место включение $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

2. Произведение событий

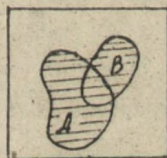
Произведением событий A и B называется такое событие C , которое происходит тогда, когда происходят событие A и событие B , и обозначается $C = A \cap B$.



$$C = A \cap B$$



$$A \cap B = \emptyset$$



$$A \cup B = C$$

События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \emptyset$.

3. Объединение (сумма) событий

Событие C называется суммой, или объединением, событий A и B , если оно происходит тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B , $C = A \cup B$.

Если события A и B несовместны, то для их суммы будем пользоваться обозначением $C = A + B$. Для сумм конечного или счетного числа событий A_i будут использованы обозначения

$\bigcup_{i=1}^n A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ для произвольных событий A_i и

$\sum_{i=1}^n A_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ - для событий попарно несовместных.

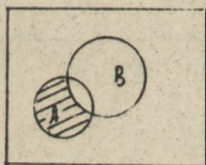
События A_i ($i=1,2,\dots$) называются попарно несовместными, если для любых пар i и j $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Легко показать, что введенные операции над событиями удовлетворяют следующим соотношениям:

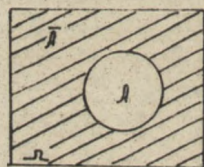
$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= A \cap (B \cup C); & (A \cap B) \cup C &= A \cup (B \cap C); \\ A \cup B &= B \cup A; & A \cap B &= B \cap A; \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C); & (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

4. Вычитание событий

Событие C называется разностью событий A и B , если оно наступает лишь тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B , $C = A \setminus B$. Событие $\Omega \setminus A$ называется противоположным событию A и обозначается $\bar{A} = \Omega \setminus A$.



$$C = A \setminus B$$



$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

Через операции $\cup$ и $\cap$ связь между событиями A и $\bar{A}$ можно выразить так:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \text{и} \quad A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Относительно противоположных событий имеют место так называемые формулы двойственности

$$\begin{aligned} 1. \quad \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i) & \text{или} \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i; \\ 2. \quad \Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i) & \text{или} \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i. \end{aligned}$$

5. Полная группа событий

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий,

если $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, если $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$, то есть если для $\forall i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

6. Алгебра и σ -алгебра событий

Пусть Ω — множество взаимоисключающих исходов некоторого эксперимента, на этом множестве задана система подмножеств $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условиям:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{F}$;

2. если $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$, $\bar{A} \in \mathcal{F}$, $\bar{B} \in \mathcal{F}$.

Множество $\mathcal{F}$ называется алгеброй событий.

Алгебра событий $\mathcal{F}$ называется σ -алгеброй, если из того, что $A_i \in \mathcal{F}$ для $i = 1, 2, \dots$, следует, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Элементы σ -алгебры $\mathcal{F}$, заданной на множестве Ω , называются случайными событиями.

Здесь уже хорошо просматривается аналогия между алгеброй множеств и алгеброй событий. Сформулируем эти соответствия в виде таблицы.

Функциональный анализ	Теория вероятностей
Пространство Ω	Достоверное событие Ω
Пустое множество $\emptyset$	Невозможное событие $\emptyset$
Подмножество $A \subset \Omega$	Событие A
Сумма множеств	Сумма событий
Произведение множеств	Произведение событий
Непересекающиеся множества	Несовместные события
Разность множеств	Разность событий
Разбиение пространства Ω	Полная группа попарно несовместных событий
Алгебра или σ -алгебра множеств	Алгебра или σ -алгебра событий

Таким образом, пришли к следующему.

Имеется некоторое пространство элементарных событий Ω , элементы которого ω -исходы некоторого опыта. На этом пространстве задана некоторая σ -алгебра множеств $\mathcal{F}$, причем элементы множества $\mathcal{F}$ есть случайные события. Пару $(\Omega, \mathcal{F})$ будем называть вероятностным пространством.

Все теоремы функционального анализа, касающиеся множеств, полуколец, колец, алгебр и σ -алгебр, превращаются тогда в соответствующие теоремы теории вероятностей с плоскостью до терминологии.

В дальнейшем нам потребуется понятие верхнего и нижнего пределов последовательностей событий

$$\begin{aligned}\limsup A_n &= \overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n; \\ \liminf A_n &= \underline{\lim} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

§ 3. Вероятность случайных событий

Основной характеристикой случайного события является его вероятность. Имеется несколько определений вероятности, из которых рассмотрим лишь некоторые.

1. Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий является конечным и содержит n элементов, то есть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Будем считать, что события $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ являются равновозможными. Понятие равновозможности является первичным и не может быть сведено к другим понятиям, а лишь может быть пояснено. Понятие равновозможности будем считать связанным с симметрией проводимого опыта, когда ни один из возможных исходов не имеет каких-либо преимуществ в появлении перед другими. Например, при бросании монеты, если она симметрична и однородна, то появление цифры или герба равновозможно.

Пусть некоторое событие $A \subset \Omega$ содержит $m < n$ элементов, то есть $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}$.

Вероятностью события A называется величина

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (I)$$

Это определение называется классическим определением вероятности. Другими словами можно сказать, что вероятностью события

называется отношение числа исходов опыта, при которых наступает событие A , к общему числу возможных исходов опыта, причем все исходы должны быть равновероятными.

Классическое определение вероятности удобно проиллюстрировать на так называемой урновой модели. В урне находится N шаров, из которых N_1 черных. Шары отличаются только по цвету. Не глядя, наудачу вынимаются два шара. Найти вероятность того, что вынутые шары черные – событие A . Общее число возможных исходов данного опыта – число любых пар шаров, очевидно, что $n = C_N^2$. Число исходов, благоприятных для события, A $m = C_{N_1}^2$, следовательно,

$$p(A) = \frac{C_{N_1}^2}{C_N^2}.$$

Несмотря на внешнюю простоту классического определения, решение задач с его помощью обычно достаточно сложно и требует хорошего знания комбинаторики.

2. Геометрическое определение вероятности

В своей идейной основе геометрическое определение вероятности не отличается от классического. Единственное отличие состоит в структуре пространства элементарных событий Ω .

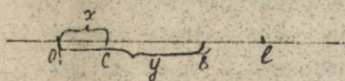
Множество элементарных исходов является непрерывным. Представим себе, что из Ω наудачу выбирается точка, причем выбор любой точки равновозможен. Событие A – выбор точки из области A . Тогда вероятность наступления события A определяется как



$$p(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}, \quad (2)$$

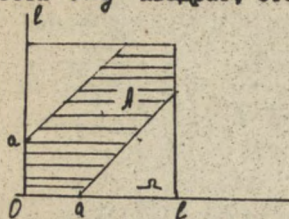
где mes означает меру области A (это длина, если Ω – одномерное множество; площадь, если Ω – двумерное и т.д.). Проиллюстрируем геометрическое определение вероятности (2) следующим примером.

Пусть дан отрезок длины ℓ , на котором случайным образом выбираются две точки – C и B .



Считая, что выбор любой точки отрезка равновозможен, найти вероятность того, что длина отрезка будет меньше a ($a \leq \ell$), – событие A .

Обозначим через x координату точки C , y - координату точки B . Тогда множество пар чисел (x, y) заполняют на плоскости Oxy квадрат, сторона которого равна l , - это множество Ω . Интересующее нас событие A наступает тогда, когда $|x - y| \leq a$. Множество таких значений - это часть квадрата, границами которой являются прямые $x - y = a$ и $y - x = a$. Поэтому



$$p(A) = \frac{\text{площадь}(A)}{\text{площадь}(\Omega)} = 2 \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}.$$

3. Статистическое определение вероятности

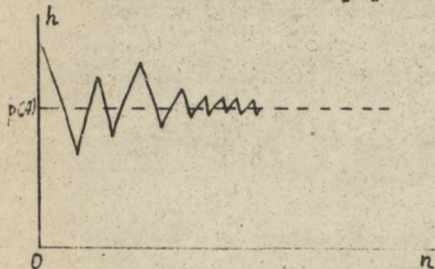
Основная трудность классического и геометрического определений вероятности - это выделение равновероятных событий, образующих пространство Ω . В реальных ситуациях такое выделение, основанное на свойствах симметрии изучаемого явления, возможно далеко не всегда.

В основе статистического определения вероятностей лежит опытный факт - так называемая устойчивость частот.

Пусть проделано n опытов, в каждом из которых может наступить или не наступить событие A . И пусть событие A поступило в m опытах ($m \leq n$). Тогда величина

$$h = \frac{m}{n}$$

называется частотой наступления события A . Построим график зависимости частоты h от n . Как показывает опыт, для подавляющего большинства событий график этой зависимости имеет достаточно



характерный вид. Если при малых n на графике имеются нерегулярные колебания достаточно большой амплитуды, то с ростом n размах этих колебаний все более уменьшается и график зависимости h от n приближается к прямой. Это

говорит о существовании предела

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}, \quad (3)$$

к которому приближается частота при $n \rightarrow \infty$. Этот предел и называют статистическим определением вероятности.

Необходимо указать на следующие моменты.

1. При таком определении не видно никакой связи между $p(A)$, определенной статистически, и вероятностью события по классическому или геометрическому определению. То, что эти вероятности совпадают, выясним лишь в конце этого курса.

2. В некоторых случаях нет устойчивости частот. Но это обычно трактуют не как то, что к этим событиям теория вероятностей не применима, а как то, что в основе изучаемого явления лежит какая-то более сложная модель, чем изучаемая.

Есть и другие определения вероятности, но их в данном курсе рассматривать не будем.

§ 4. Основные свойства вероятности. Вероятностная мера

Рассмотрим свойства вероятности, используя для этого геометрическое определение вероятности

$$1. \quad p(\Omega) = \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega)} = 1;$$

$$p(\emptyset) = \frac{\text{mes}(\emptyset)}{\text{mes}(\Omega)} = 0.$$

Таким образом, вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного - нулю.

2. Пусть $A \subset B$, тогда $p(A) \leq p(B)$. Это следует из того, что $\text{mes}(A) \leq \text{mes}(B)$, и в этом случае

$$p(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)} \leq \frac{\text{mes}(B)}{\text{mes}(\Omega)} = p(B).$$

В частности, так как $\emptyset \subset A \subset \Omega$, то для любого события

$$0 \leq p(A) \leq 1.$$

3. Пусть $A \cap B = \emptyset$, то есть события A и B несовместные, тогда $p(A+B) = p(A) + p(B)$. Так как $\text{mes}(A+B) = \text{mes}(A) + \text{mes}(B)$, то

$$p(A+B) = \frac{mes(A) + mes(B)}{mes(\Omega)} = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} + \frac{mes(B)}{mes(\Omega)} = p(A) + p(B). \quad (4)$$

И вообще, для попарно несовместных событий

$$p\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i); \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset. \quad (5)$$

Таким образом, вероятность есть неотрицательная счетно-аддитивная функция множеств, причем $p(\Omega) = 1$.

Вспоминая понятие меры в функциональном анализе, можно сказать, что вероятность $p(A)$ есть конечная мера с нормировкой $p(\Omega) = 1$. Поэтому часто говорят не о вероятности, а о вероятностной мере, заданной на вероятностном пространстве.

Тройку $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ называют вероятностным пространством с вероятностной мерой p .

Поэтому все теоремы, касающиеся свойств меры, которые изучались в функциональном анализе, автоматически становятся теоремами теории вероятностей с заменой слова "мера" на слово "вероятность". Напомним важнейшие из этих теорем.

а) Теорема о полуаддитивности вероятности

$$\begin{aligned} \text{Если } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A, \quad & \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \geq p(A); \\ \text{В частности, } & p\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k). \\ \text{Если } \sum_{k=1}^{\infty} A_k \subset A, \quad & \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \leq p(A). \end{aligned}$$

б) Теорема о монотонных последовательностях

$$\begin{aligned} p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n\right) & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf p(A_n); \\ p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n\right) & \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup p(A_n); \\ p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) & = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n). \end{aligned}$$

в) Непрерывность вероятности

Вероятность называется непрерывной сверху на пустом множестве, если из того, что $A_n \not\subset \emptyset$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = 0$.

Для того, чтобы вероятность была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной сверху на пустом множестве.

Отметим еще некоторые простейшие свойства вероятности, которые полезно знать.

4. Если $A \subset B$, то $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.

Действительно, если $A \subset B$, то $B = A + (B \setminus A)$ и $p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$. Отсюда и получаем, что

$$p(B \setminus A) = p(B) - p(A).$$

5. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$. Действительно, $\bar{A} = \Omega \setminus A$, поэтому $p(\bar{A}) = p(\Omega) - p(A) = 1 - p(A)$.

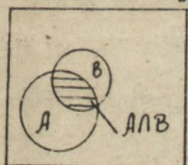
6. Теорема сложения вероятностей

Выше было показано, что вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей, то есть если $A \cap B = \emptyset$, то

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Получим теперь формулу для вероятности суммы совместных событий, которая носит название теоремы сложения вероятностей.

Начнем со случая двух событий A и B .



Как видно из рисунка, объединение событий $A \cup B$ можно представить в виде объединения трех несовместных событий

$$A \cup B = A \setminus B + B \setminus A + A \cap B.$$

Тогда по формуле (5) имеем

$$p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B \setminus A) + p(A \cap B). \quad (6)$$

Для определения вероятности $p(A \setminus B)$ воспользуемся следующим представлением события A :

$$A = A \setminus B + A \cap B.$$

Отсюда

$$p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B) \quad (7)$$

или

$$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B).$$

Аналогично

$$B = B \setminus A + A \cap B$$

и

$$p(B) = p(B \setminus A) + p(A \cap B); \quad (8)$$

$$p(B \setminus A) = p(B) - p(A \cap B).$$

Подставляя в (6) формулы (7) и (8), получим

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (9)$$



Для n совместных событий теорема сложения имеет вид

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \pm \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^n A_i). \quad (I0)$$

Докажем эту формулу по индукции. Для $n=2$ формула доказана см. (9). Пусть формула (I0) верна для некоторого n . Добавим еще одно событие A_{n+1} , тогда по формуле (9) имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i + A_{n+1}, \quad (II)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) - P(A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)).$$

Но $A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (A_{n+1} \cap A_i)$, поэтому

$$P(A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^n (A_{n+1} \cap A_i)) = \quad (I2)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{n+1}) \pm \dots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^n A_i).$$

Подставляя (I0) и (I2) в (II), получим

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \pm \dots + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i),$$

что и доказывает теорему сложения вероятностей. $\blacklozenge$

§ 5. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Как уже отмечалось, вероятность события $P(A)$ является его исчерпывающей характеристикой.

Однако так обстоит дело лишь в случае одного случайного события. На практике часто приходится сталкиваться со случаем, когда в каждом отдельном опыте наступает несколько случайных событий, то есть мы имеем дело с совокупностью случайных событий. Обратимся к примеру.

Опыт состоит в том, что монета подбрасывается три раза. Событие A состоит в том, что герб выпал один раз. Используя классическое определение вероятности, $P(A) = \frac{3}{8}$. Теперь на базе

этого же опыта рассмотрим совокупность двух событий. К уже указанному событию A добавим еще событие B , состоящее в том, что число выпавших гербов нечетно. И пусть стало известно, что событие B наступило. Что можно сказать о вероятности события A в этом случае? Очевидно, что эти события как-то связаны между собой, следовательно, вероятность события A при условии, что событие B наступило, будет иной, чем без этого условия. Эту вероятность называют условной вероятностью и обозначают $p(A/B)$ или $p_B(A)$. В нашем случае

$$p(A/B) = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{8} = p(A).$$

Теорему умножения вероятностей выведем, используя классическое определение вероятности. Пусть некоторый опыт имеет n возможных исходов, причем 2 из них благоприятны для наступления события A , m исходов благоприятны для наступления события B и в k исходах наступают оба события A и B (т.е. $A \cap B$). По классическому определению вероятности можно записать

$$p(A \cap B) = \frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n}. \quad (I3)$$

Здесь $\frac{m}{n} = p(B)$. А что такое $\frac{k}{m}$? В определении вероятности в знаменателе стоит общее число исходов данного опыта. В сомножителе $\frac{k}{m}$ в знаменателе стоит число исходов, благоприятных для наступления события B , которое заняло место всех возможных исходов данного опыта, то есть наступление события A мы рассматриваем относительно только тех исходов, в которых событие B наступает. Таким образом, $\frac{k}{m}$ есть не что иное, как условная вероятность события A при условии, что событие B наступило. Тогда формулу (I3) можно записать

$$p(A \cap B) = p(B) p(A/B).$$

Аналогично

$$p(A \cap B) = \frac{k}{n} = \frac{k}{2} \cdot \frac{2}{n} = p(B/A) p(A).$$

Тогда окончательно

$$p(A \cap B) = p(A) p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B). \quad (I4)$$

Эта формула называется теоремой умножения вероятностей. Из неё следует, что

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}; \quad p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \quad (I5)$$

$$p(B) \neq 0; \quad p(A) \neq 0.$$

Сформулируем теперь общее определение условной вероятности. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть A и B — произвольные события из множества $\mathcal{F}$. Если $P(B) > 0$, то условной вероятностью события A при условии, что событие B наступило, называется

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного из них не зависит от наступления или ненаступления другого. Для независимых событий

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B),$$

и тогда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (I6)$$

Перечислим некоторые свойства независимых событий.

1. Если событие A не зависит от события B , то и наоборот, событие B не зависит от события A . Действительно, пусть событие A не зависит от события B , то есть $P(A/B) = P(A)$. Тогда теорема умножения вероятностей дает

$$P(A/B)P(B) = P(A) \cdot P(B) = P(B/A)P(A).$$

Если $P(A) > 0$, то получаем $P(B) = P(B/A)$, то есть событие B не зависит от события A . Другими словами, независимость или зависимость случайных событий есть свойство взаимное.

2. Если события A и B независимы, то независимы также $\bar{A}$ и B ; A и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Действительно, пусть A и B независимы, тогда

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - P(A) = P(\bar{A});$$

$$P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - P(B) = P(\bar{B});$$

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = 1 - P(A/\bar{B}) = 1 - P(A) = P(\bar{A}).$$

3. Для произвольного числа событий теорема умножения (I4) имеет вид

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Если случайные события A_i $i = \overline{1, n}$ независимы, то теорема умножения запишется в форме

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Независимость событий является очень важным свойством,

облегчающим проведение очень многих расчетов. Поэтому при построении исходных моделей надо стараться в качестве исходных элементов модели брать независимые события.

§ 6. Формулы полной вероятности и Байеса

Выведем теперь две формулы, играющие очень большую роль в теории вероятностей.

Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ — полная группа попарно несовместных событий, то есть

- 1) $H_i \in \mathcal{F} \quad \forall i$;
- 2) $H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$;
- 3) $\sum_{j=1}^n H_j = \Omega$.

Рассмотрим некоторое событие $A \in \mathcal{F}$, для которого известны условные вероятности $p(A/H_i) \quad i=1, n$ и вероятности событий $H_i - p(H_i), i=1, 2, \dots, n$.

Необходимо найти (полную) вероятность события A , то есть найти $p(A)$.

Имеем

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\sum_{i=1}^n H_i \right) = \sum_{i=1}^n (A \cap H_i).$$

Все слагаемые, стоящие под знаком суммы, — попарно несовместные события. Поэтому, используя теорему сложения вероятностей и теорему умножения вероятностей, получим

$$p(A) = p\left(\sum_{i=1}^n A \cap H_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n p(H_i) p(A/H_i)$$

или

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(A/H_i) p(H_i). \quad (I7)$$

Получили формулу полной вероятности. Этой формулой часто пользуются в следующей ситуации: нас интересует некоторое событие A . Относительно условий, при которых оно наступает, можно высказать какие-то гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несовместные. Известны вероятности этих гипотез $p(H_i)$ и условные вероятности наступления события A , если верна та или иная гипотеза $p(A/H_i)$. Формула полной вероятности дает возможность найти вероятность наступления события A с учетом возможности наступления любой

из гипотез.

Другой важнейшей формулой является формула Байеса. Исходные данные в ней те же, что и в формуле полной вероятности, но дополнительно известно, что событие A наступило.

Необходимо найти условную вероятность наступления гипотезы H_j при условии, что событие A наступило.

По определению условной вероятности имеем

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{P(A)}.$$

Заменяя $P(A)$ по формуле полной вероятности, получим формулу Байеса

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)} \quad (18)$$

Её обычно применяют в следующей ситуации. Также имеются событие A и гипотезы об условиях его наступления, $P(H_j)$ – вероятности этих гипотез, известные до проведения опыта, – априорные вероятности. Пусть теперь в результате опыта наступило событие A . Факт его наступления несет нам информацию о гипотезах H_i , и эта информация выражается в изменении вероятностей наступления гипотез – они теперь становятся равными $P(H_i|A)$ – послеопытными или апостериорными вероятностями. Формула Байеса как раз и позволяет найти эти апостериорные вероятности и тем самым получить информацию об условиях наступления события A .

Тем самым формула Байеса становится основной для принятия каких-либо решений о гипотезах H_i по результатам опыта.

§ 7. Частная теорема об опытах. Биномиальное распределение

Рассмотрим и решим следующую задачу. Имеется некоторое случайное событие A . Производятся n опытов, в каждом из которых может наступить или не наступить событие A . Сделаем следующие предположения:

а) проводимые опыты независимы, то есть наступление или ненаступление события A в каком-либо опыте не влияет на исходы других опытов;

б) вероятность наступления события A в одном опыте $P(A) = p$ и одинакова для всех опытов.

Нас интересует вероятность того, что в n опытах событие A наступит ровно m раз - $P_n(m)$. Эта вероятность может быть вычислена по формуле Бернулли, которую сейчас и выведем.

Обозначим через A_i наступление события A в i -м опыте, а через B_{nm} - событие, наступающее тогда, когда в n опытах событие A наступает m раз. Тогда имеем

$$B_{nm} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \cap \bar{A}_{m+1} \cap \dots \cap \bar{A}_n + \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m+1} \cap \bar{A}_{m+2} \cap \dots \cap \bar{A}_n + \dots$$

Для примера выписаны лишь две комбинации исходов n опытов, когда событие A наступает m раз.

Замечая, что эти комбинации представляют собой несовместные события, получим

$$P_n(m) = P(B_{nm}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \cap \bar{A}_{m+1} \cap \dots \cap \bar{A}_n) + \dots$$

Пользуясь теоремой умножения вероятностей и учитывая независимость исходов опытов, имеем

$$P_n(m) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_m) P(\bar{A}_{m+1}) \dots P(\bar{A}_n) + \dots \quad (I9)$$

Учитывая теперь, что $P(A_i) = p$ и $P(\bar{A}_i) = 1 - p$, запишем

$$P_n(m) = p^m (1-p)^{n-m} + \dots$$

Чтобы окончательно подсчитать интересующую вероятность, учтем, что слагаемые в (I9) отличаются только порядком сомножителей и всего таких слагаемых C_n^m - число сочетаний из n по m , напомним, что $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Окончательно имеем

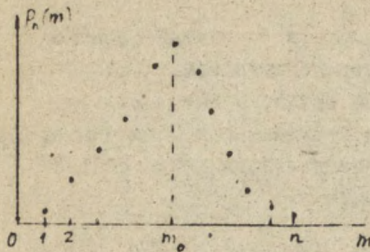
$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad (20)$$

Эта формула носит название частной теоремы об опытах или формулы Бернулли. $\blacklozenge$

Если рассматривать эту формулу как функцию m , то она задает распределение вероятностей, которое называется биномиальным. Исследуем эту зависимость $P_n(m)$ от m , $0 \leq m \leq n$. Рассмотрим отношение

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n! p^{m+1} (1-p)^{n-m-1} m! (n-m)!}{(m+1)! (n-m-1)! n! p^m (1-p)^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

Это отношение будет больше 1, если $m < p(n+1) - 1$, следовательно, $P_n(m)$ возрастает, и при $m > p(n+1) - 1$ функция $P_n(m)$ убывает, так как отношение $\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} < 1$. Поэтому график зависимости имеет вид, изображенный на рисунке.



Своего максимального значения $P_n(m)$ достигает при $m_0 = \text{entier} [(n+1)p - 1]$.

Причем это значение называют наимвероятнейшим значением биномиального распределения.

§ 8. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Формулой Бернулли для вероятности того, что в n опытах событие наступит ровно m раз

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m},$$

удобно пользоваться для численных расчетов при небольших значениях n и m , так как при больших n и m возникают трудности с вычислением $n!$, $m!$.

Выведем для $P_n(m)$ удобную приближенную формулу, пригодную для случая, когда n , m и $n-m$ велики.

Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n + \theta_n},$$

где

$$|\theta_n| < \frac{1}{12n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Введем обозначения $q = 1-p$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

и рассмотрим поведение выражения $\sqrt{npq} P_n(m)$ при $n \rightarrow \infty$.
Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{npq} P_n(m) &= \sqrt{npq} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \\ &= \sqrt{npq} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n + \theta_n} p^m q^{n-m}}{m^m \sqrt{2\pi m} e^{-m + \theta_m} (n-m)^{n-m} \sqrt{2\pi(n-m)} e^{-n+m + \theta_{n-m}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n^2 pq}{m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь предельное поведение отдельных сомножителей, считая, что $a \leq x \leq b$, где a и b — некоторые числа.

I. Так как при $n \rightarrow \infty$ $m = np + x\sqrt{npq} \rightarrow \infty$ и
 $n-m = nq - x\sqrt{npq} \rightarrow \infty$, то $\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m} \rightarrow 0$,

поэтому $e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

$$2. \sqrt{\frac{n^2 pq}{m(n-m)}} = \sqrt{\frac{n^2 pq}{(np + x\sqrt{npq})(nq - x\sqrt{npq})}} = \sqrt{\frac{1}{(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}})(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}})}},$$

откуда следует, что

$$\sqrt{\frac{n^2 pq}{m(n-m)}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Для $z = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$ имеем

$$\begin{aligned} \ln z &= -m \ln \frac{m}{np} - (n-m) \ln \left(\frac{n-m}{nq}\right) = \\ &= -(n + x\sqrt{npq}) \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) - (nq - x\sqrt{npq}) \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}). \end{aligned}$$

Используя разложение $\ln(1+z)$ в ряд Тейлора

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + O(z^3),$$

получаем

$$\begin{aligned} \ln z &= -(np + x\sqrt{npq}) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2} \frac{q}{np} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) - \\ &\quad - (nq - x\sqrt{npq}) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2} \frac{p}{nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} \ln z &= -x\sqrt{npq} - x^2 q + \frac{x^2}{2} q + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \\ &\quad + x\sqrt{npq} - x^2 p + \frac{x^2}{2} p + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

так что при $n \rightarrow \infty$ $z \sim e^{-\frac{x^2}{2}}$ (знак $\sim$ означает асимптотически равно).

Итак, окончательно имеем

$$\sqrt{npq} P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad (21)$$

Эта формула носит название локальной предельной теоремы Муавра-Лапласа. Далее строгая ее запись такова:

Если $a \leq x \leq b$, где $x = \frac{m-n\rho}{\sqrt{npq}}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{npq} P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1. \quad \blacklozenge \quad (22)$$

Эта формула дает достаточно хорошее приближение уже для $n \geq 25$, причем совпадение тем лучше, чем ближе ρ к $\frac{1}{2}$. При $\rho = \frac{1}{2}$ биномиальное распределение $P_n(m)$ имеет симметрическую форму. Однако при малых значениях ρ биномиальное распределение приобретает асимметрическую форму, и поэтому не следует ожидать, что аппроксимация экспонентой будет хорошей. Оказывается, что при больших n и при малых ρ существует другая приближенная формула — формула Пуассона.

§ 9. Формула Пуассона

Эта формула выводится в следующих предположениях. Число опытов n достаточно велико ($n \rightarrow \infty$), но вероятность наступления события в одном опыте мала $\rho \ll 1$. Обозначим $\lambda = \rho n$ или $\rho = \frac{\lambda}{n}$ и подставим это в формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

Рассмотрим предел при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-m)! n^m}. \end{aligned}$$

Вычисляя эти пределы, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1;$$

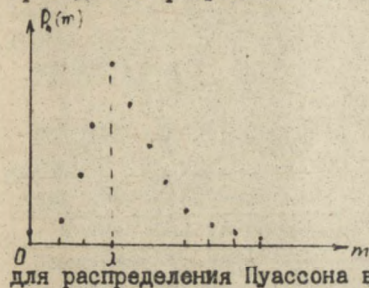
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-m)! n^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2) \cdots n}{n^m} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) = 1.$$

Окончательно имеем

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = \rho n. \quad \blacklozenge \quad (23)$$

Эта формула и называется формулой Пуассона. Как функция m формула (23) определяет распределение Пуассона, график которого приведен на рисунке:



$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda} (m-1)!}{m! \lambda^{m-1} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{m}.$$

Отсюда при $m < \lambda$ $P_n(m)$ — возрастающая функция, а при $m > \lambda$ $P_n(m)$ — убывающая функция. Наивероятнейшее значение числа наступлений события приходится на $m = \text{entier}(\lambda)$.

Здесь же следует отметить, что

для распределения Пуассона выполняется условие

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_n(m) = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Как показывает расчет, формула Пуассона дает хорошее приближение формулы Бернулли при малых вероятностях наступления события, поэтому эту формулу иногда называют формулой редких событий.

Ошибка от использования формулы Пуассона при $n = 5 \cdot 10^3$ и $p = 10^{-3}$ составляет менее 0,01 %.

Глава II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ I. Определение случайной величины

Вторым не менее важным объектом, который изучает теория вероятностей, является случайная величина.

Остановимся на понятии случайной величины. Очень часто результатом опыта является не событие, а величина, число. И очень часто оказывается, что, повторяя опыты, получаем различные значения этой интересующей нас величины, несмотря на неизменный комплекс условий проведения опыта. Например, время безотказной работы электроприбора заранее предсказать невозможно и одинаковые приборы проработают разное время, то есть время безотказной работы есть величина случайная.

Таким образом, под случайной величиной будем понимать такую величину, которая в результате опыта принимает неизвестное заранее значение, причем это значение от опыта к опыту меняется.

Перейдем к более строгому определению случайной величины. Основой всех вероятностных построений является вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра на этом пространстве и P — вероятностная мера. Каждому элементу этого вероятностного пространства ω нужно поставить в соответствие некоторое число. Так как от опыта к опыту ω меняется, то и числа будут меняться, то есть получится случайная величина.

Такое сопоставление ω числу является функцией $f(\omega)$, определенной на Ω . Но рассматривать произвольные функции $f(\omega)$ было бы очень затруднительно с математической точки зрения, поэтому на класс функций $f(\omega)$ наложим некоторые ограничения.

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество вещественных чисел x , $-\infty < x < +\infty$. Обычно все математические построения на числовой оси строятся на так называемых борелевских множествах, образующих σ -алгебру $\mathcal{B}$. Элементами этой алгебры являются множества вида $\sum_i \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$, где $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle$ — отрезок, замкнутый или открытый. Поэтому естественно требовать, чтобы функции $f(\omega)$ не только отображали Ω в $\mathcal{R}$, но также отображали σ -алгебру $\mathcal{F}$ в борелевскую алгебру $\mathcal{B}$, то есть, функции $f(\omega)$ совершали отображение

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{f(\omega)} (\mathcal{R}, \mathcal{B}).$$

Такие функции называются измеримыми; для них выполняется условие $\forall B \in \mathcal{B} \quad \{ \omega \in \Omega : f(\omega) \in B \} \in \mathcal{F}$. Таким образом, случайная величина $f(\omega)$ — произвольная измеримая функция определения на $(\Omega, \mathcal{F})$ и отображающая $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Укажем опять на аналогию с функциональным анализом

Функцион. анализ	Теория вероятностей
Измеримая функция отображающая $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$	Случайная величина $f(\omega)$

Если не будет возникать недоразумений, аргумент ω у случайной величины $f(\omega)$ будет в дальнейшем опускаться, и случайные величины будем обозначать греческими буквами ξ , ζ и т.д. без аргумента ω .

§ 2. Описание случайных величин

Как известно из курса функционального анализа, необходимое и достаточное условие измеримости функции $f(\omega)$ имеет вид для $\forall x$ множества

$$\begin{aligned} \{\omega: f(\omega) < x\} &\in \mathcal{F}; \\ \{\omega: f(\omega) \leq x\} &\in \mathcal{F}; \\ \{\omega: f(\omega) > x\} &\in \mathcal{F}; \\ \{\omega: f(\omega) \geq x\} &\in \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (0)$$

Вероятностная мера P любому событию $A \in \mathcal{F}$ ставит в соответствие число $P(A)$, определяющее вероятность этого события. Поэтому для любого x определено число $P(\{\omega: f(\omega) < x\})$. Это число зависит от x и является основной характеристикой случайной величины.

Функцией распределения $F_f(x)$ случайной величины $f(\omega)$ называется функция

$$F_f(x) = P(\{\omega: f(\omega) < x\}) = P\{f < x\},$$

то есть $F_f(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение меньше некоторого x .

Конечно, можно было бы брать другие множества из (0), но в теории вероятностей принято брать именно множества вида

$$\{\omega: \{\omega\} < x\}.$$

Функция распределения $F_f(x)$ является самой полной характеристикой случайной величины; описать, задать случайную величину ξ — это означает задать ее функцию распределения $F_f(x)$. Все, что можно сказать о случайной величине, заключено в ее функции распределения. В дальнейшем, индекс f у $F_f(x)$ будем опускать, где это не будет приводить к недоразумениям.

Рассмотрим основные свойства функции распределения $F(x)$.

1. $F(x)$ — неубывающая функция, то есть если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Действительно, если $x_1 < x_2$, то $\{\omega: \{\omega\} < x_1\} \subset \{\omega: \{\omega\} < x_2\}$, и поэтому по свойствам вероятности

$$P(\{\omega: \{\omega\} < x_1\}) \leq P(\{\omega: \{\omega\} < x_2\})$$

или

$$F(x_1) \leq F(x_2).$$

2. $F(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Действительно, рассмотрим последовательность чисел $x_n \downarrow -\infty$ и соответствующую ей последовательность событий $A_n = \{\omega: \{\omega\} < x_n\}$. Так как всякие реальные величины принимают лишь конечные значения и значений равных $-\infty$ быть не может, то $A_n \uparrow \emptyset$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(\emptyset) = 0.$$

Аналогично, взяв последовательность чисел $x_n \uparrow \infty$ и соответствующую последовательность событий $B_n = \{\omega: \{\omega\} < x_n\}$, получим, что $B_n \uparrow \Omega$, и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = P(\Omega) = 1. \quad (I)$$

3. Функция распределения $F(x)$ непрерывна слева, то есть при $x \uparrow x_0$

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Действительно, возьмем любую последовательность $x_n \uparrow x_0$ и рассмотрим события $A_n = \{\omega: \{\omega\} < x_n\}$ и $A = \{\omega: \{\omega\} < x_0\}$. Легко видеть, что $A_n \uparrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Поэтому

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(A) = F(x_0).$$

4. Как известно из функционального анализа, функция $F(x)$

определяет на борелевской прямой меру Лебега-Стилтьеса μ_F .
Поэтому

$$\begin{aligned} P(a \leq \xi < b) &= F(b) - F(a); \\ P(a \leq \xi \leq b) &= F(b+0) - F(a); \\ P(a < \xi < b) &= F(b) - F(a+0); \\ P(a < \xi \leq b) &= F(b+0) - F(a). \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, вероятность того, что случайная величина примет значение, равное x , равна

$$P(\xi = x) = P(x \leq \xi \leq x) = F(x+0) - F(x),$$

то есть равна скачку функции распределения в точке x . Отметим, что если в точке x $F(x)$ непрерывна, то $P(\xi = x) = 0$. Но это не означает, что появление этого значения для случайной величины ξ является событием невозможным.

Как известно из курса функционального анализа, любая монотонно возрастающая функция есть сумма трех функций: абсолютно непрерывной функции $F_c(x)$, ступенчатой функции $F_d(x)$ и сингулярной функции $F_s(x)$.

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x) + F_s(x).$$

В реальных задачах сингулярная компонента $F_s(x)$ не встречается, поэтому будем в дальнейшем считать, что $F_s(x) = 0$.

Остановимся на некоторых частных случаях.

1) Имеется только ступенчатая компонента, т.е. $F(x)$ — ступенчатая функция, имеющая скачки в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем величина скачков равна $p_1, p_2, \dots, p_n$. Соответствующая случайная величина называется дискретной случайной величиной. Она с вероятностью 1 может принимать значения из набора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, причем значение x_i принимается с вероятностью p_i .

Обычно такие величины задают рядом распределения — таблицей вида

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

Отметим, что в силу свойства $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ для вероятностей $p_1, p_2, \dots$ выполнено условие $\sum_i p_i = 1$.

Примерами дискретных случайных величин могут быть числа наступлений события A в биномиальном распределении и распределении Пуассона.

2) Пусть $F(x)$ содержит только абсолютно непрерывную компоненту. Это значит, что $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad (3)$$

или, что то же самое, существует производная

$$p(x) = F'(x).$$

Соответствующая случайная величина называется непрерывной случайной величиной, а функция $p(x) = F'(x)$ — плотностью распределения вероятностей случайной величины. Для непрерывных случайных величин плотность распределения вероятностей является основной характеристикой. Отметим ее основные свойства:

а) $p(x) \geq 0$,

что следует из первого свойства функции распределения;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$,

что следует из формулы (3) и свойства функции распределения (I), причем условие б) для плотности вероятностей носит название условия нормировки;

в) $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b p(x) dx$.

Действительно,

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b p(x) dx - \int_{-\infty}^a p(x) dx = \int_a^b p(x) dx.$$

Для произвольного множества $A \subset \Omega$ это свойство можно записать так:

$$P(\xi \in A) = \int_A p(x) dx.$$

Отсюда, в частности,

$$P(x \leq \xi < x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} p(t) dt = p(x) \Delta x + o(\Delta x).$$

Поэтому часто плотность распределения вероятностей $p(x)$ определяют как

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Примером непрерывной случайной величины может служить время безотказной работы некоторого прибора.

§ 3. Многомерные случайные величины

Очень часто результатом опыта является не одна, а несколько случайных величин. В этом случае говорят о случайном векторе или многомерной случайной величине.

n -мерная случайная величина определяется как совокупность n измеримых функций $f_1(\omega), f_2(\omega), \dots, f_n(\omega)$, отображающих $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ - борелевская σ -алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Необходимым и достаточным условием измеримости системы и функций является условие: $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\{\omega: f_1(\omega) < x_1, f_2(\omega) < x_2, \dots, f_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{F}.$$

Поэтому основной характеристикой n -мерной случайной величины $\xi = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ является n -мерная функция распределения

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = P(f_1 < x_1, \dots, f_n < x_n).$$

Свойства функции распределения $F_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$ аналогичны свойствам функции распределения одномерной случайной величины.

1. $F_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$ - неубывающая функция по каждому из своих аргументов.

$$2. \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i,$$

$$\lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

3. Свойство согласованности

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{n-1}) &= P(f_1 < x_1, \dots, f_{n-1} < x_{n-1}, f_n < +\infty) = \\ &= F(x_1, \dots, x_{n-1}, +\infty). \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы найти функцию распределения меньшей размерности, нужно в n -мерной функции распределения не интересующие нас аргументы устремить к $+\infty$.

В частности, свойство согласованности позволяет находить одномерные законы распределения случайных величин, входящих в $\xi = (f_1, \dots, f_n)$.

4. Если $F(x_1, \dots, x_n)$ абсолютно непрерывна, то n -мерная

случайная величина $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется непрерывной. В этом случае $F(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

где

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

называется плотностью вероятностей n -мерной случайной величины. Функция $p(x_1, \dots, x_n)$ обладает следующими свойствами:

- а) $p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$;
- б) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$ - условие нормировки;
- в) если $A \in \mathcal{B}$, то

$$P(\xi \in A) = \int_{(A)} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

г) условие согласованности для плотности вероятностей имеет вид

$$p(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n. \quad (4)$$

То есть в этом случае, чтобы получить плотность распределения меньшей размерности, нужно n -мерную плотность вероятностей проинтегрировать по неинтересующим переменным в пределах $(-\infty, +\infty)$.

Итак, зная многомерный закон распределения (функцию распределения или плотность вероятностей), можно найти одномерные законы распределения всех случайных величин, входящих в систему.

Можно ли решить обратную задачу: по одномерным законам распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ записать многомерный закон распределения? Оказывается, это возможно не всегда. В общем случае кроме одномерных законов распределения случайных величин необходимо знать условные законы распределения. Введем понятия условной функции распределения и условной плотности распределения.

Рассмотрим двумерную случайную величину (ξ, η) с функцией распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ и плотностью вероятностей $p_{\xi\eta}(x, y)$. Пусть стало известно, что случайная величина η приняла значение $\eta = y$. Найдем условную функцию распределения $F(x/y)$ и условную плотность вероятностей $p(x/y)$.

Обозначим через A событие $\{\omega: f(\omega) < x\}$, а через B - событие $\{\omega: y \leq \eta(\omega) < y + \Delta y\}$:

$$A = \{\omega: f(\omega) < x\};$$

$$B = \{\omega: y \leq \eta(\omega) < y + \Delta y\} = \{\omega: \eta(\omega) < y + \Delta y\} \setminus \{\omega: \eta(\omega) < y\}.$$

Тогда для случайных событий A и B имеем

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5)$$

Выражая вероятности этих событий через функцию распределения, получаем

$$P(B) = P(y \leq \eta < y + \Delta y) = F_{\eta}(y + \Delta y) - F_{\eta}(y);$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\xi < x, y \leq \eta < y + \Delta y) = P(\xi < x, \eta < y + \Delta y \setminus \{\xi < x, \eta < y\}) = \\ &= F_{12}(x, y + \Delta y) - F_{12}(x, y). \end{aligned}$$

Поэтому выражение (5) принимает вид

$$P(\xi < x / y \leq \eta < y + \Delta y) = \frac{F_{12}(x, y + \Delta y) - F_{12}(x, y)}{F_{\eta}(y + \Delta y) - F_{\eta}(y)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$F(x/y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(\xi < x / y \leq \eta < y + \Delta y) = \frac{\frac{\partial F_{12}(x, y)}{\partial y}}{F'_{\eta}(y)}$$

или

$$F(x/y) = \frac{1}{F'_{\eta}(y)} \frac{\partial F_{12}(x, y)}{\partial y}. \quad (6)$$

Дифференцируя по x , получим выражение для условной плотности

$$p(x/y) = \frac{p_{12}(x, y)}{F'_{\eta}(y)}. \quad (7)$$

Или, используя формулу (4), имеем

$$p(x/y) = \frac{p_{12}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(u, y) du}. \quad (8)$$

Аналогично

$$p(y/x) = \frac{p_{12}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(x, v) dv}. \quad (9)$$

Формулы (6), (7), (8) и (9) определяют условные законы распре-

деления случайной величины при условии, что другая случайная величина принимает фиксированное значение.

Формулу (7) перепишем в виде

$$p_{12}(x, y) = p(x/y) p_2(y) = p(y/x) p_1(x),$$

который напоминает теорему умножения вероятностей для случайных событий.

Аналогично понятию независимых случайных событий вводится понятие независимых случайных величин.

Случайные величины $\{x_1, \dots, x_n\}$ называются независимыми, если многомерная функция распределения равна произведению одномерных функций распределения, то есть

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{x_1}(x_1) F_{x_2}(x_2) \dots F_{x_n}(x_n). \quad (10)$$

Если существует многомерная плотность распределения вероятностей, то условие независимости случайных величин запишется как

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{x_i}(x_i).$$

В этом случае условные плотности вероятностей совпадают с безусловными, что легко проверяется по формуле (7).

§ 4. Преобразование случайных величин

Рассмотрим следующую задачу: имеется n -мерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с плотностью вероятностей $p_\xi(x_1, \dots, x_n)$ и имеется m функций от случайной величины

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \\ \eta_2 &= f_2(\xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned} \quad (11)$$

где $f_1, \dots, f_m$ — некоторые достаточно гладкие функции. Необходимо найти плотность распределения вероятностей m -мерной случайной величины $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$.

Остановимся на нескольких частных случаях этой задачи.

а) Пусть ξ — одномерная случайная величина с плотностью вероятностей $p_\xi(x)$ и $\eta = f(\xi)$, где $f(\cdot)$ — монотонно возрастающая функция. Требуется найти плотность вероятностей случайной величины $\eta = p_\eta(y)$.

Для монотонной функции x и y связаны однозначно, следовательно, уравнение $y = f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x :

$$x = f^{-1}(y) = \varphi(y).$$

Далее нетрудно заметить, что

$$\{\omega: \eta(\omega) < y\} = \{\omega: \xi(\omega) < \varphi(y)\}.$$

Тогда очевидно, что

$$F_{\eta}(y) = F_{\xi}(\varphi(y)),$$

и, переходя к плотности вероятностей, имеем

$$p_{\eta}(y) = F'_{\eta}(y) = F'_{\xi}(\varphi(y)) \varphi'(y) = p_{\xi}(\varphi(y)) \varphi'(y). \quad (I2)$$

Если функция $f(\cdot)$ монотонно убывающая, то

$$\{\omega: \eta(\omega) < y\} = \{\omega: \xi(\omega) > \varphi(y)\},$$

и поэтому

$$F_{\eta}(y) = 1 - F_{\xi}(\varphi(y)).$$

Дифференцируя по y , получим

$$p_{\eta}(y) = -F'_{\xi}(\varphi(y)) \varphi'(y) = -p_{\xi}(\varphi(y)) \varphi'(y). \quad (I3)$$

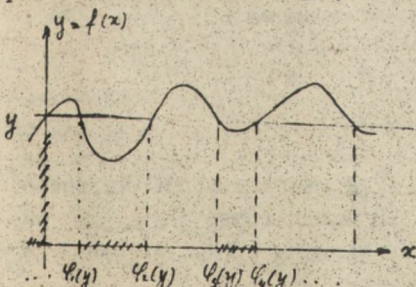
Объединяя выражения (I2) и (I3) для монотонных функций, можем записать окончательно плотность вероятностей функции от случай-ной величины

$$p_{\eta}(y) = p_{\xi}(\varphi(y)) |\varphi'(y)|,$$

где $\varphi(y)$ - функция обратная к функции $f(\cdot)$.

б). Пусть теперь случайные величины ξ и η связаны немонотонной зависимостью $\eta = f(\xi)$. Тогда уравнение $y = f(x)$, разрешенное относительно x , имеет несколько корней $x = \varphi_i(y)$, $i=1,2,\dots$.

Как видно из рисунка, в этом случае



$$\{\omega: \eta(\omega) < y\} = \{\omega: \varphi_1(y) \leq \xi(\omega) < \varphi_2(y)\} \cup$$

$$\cup \{\omega: \varphi_3(y) \leq \xi(\omega) < \varphi_4(y)\} \cup \dots,$$

и для функции распределения имеем

$$F_{\eta}(y) = P(\{\omega: \eta(y) < y\}) =$$

$$= \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} p_1(x) dx + \int_{\varphi_3(y)}^{\varphi_4(y)} p_2(x) dx + \dots$$

Дифференцируем по y , тогда

$$p_2(y) = -p_1(\varphi_1(y))\varphi_1'(y) + p_1(\varphi_2(y))\varphi_2'(y) - \dots$$

Учитывая знак производной от функций $\varphi_i(y)$, можно записать

$$p_2(y) = \sum_i p_1(\varphi_i(y)) |\varphi_i'(y)|.$$

Например, пусть $p_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ - распределение Коши и $y = x^2$. Тогда уравнение $y = x^2$ имеет два корня: $x_1 = \varphi_1(y) = -\sqrt{y}$;

$$x_2 = \varphi_2(y) = +\sqrt{y}.$$

Поэтому

$$p_2(y) = \frac{1}{\pi(1+(-\sqrt{y})^2)} \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\pi(1+(\sqrt{y})^2)} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\pi(1+y)\sqrt{y}}.$$

в) Пусть размерности случайных величин ξ и η совпадают и равны $n = m$. Тогда имеем n уравнений (II):

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть, кроме того, система уравнений

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

может быть однозначно разрешена относительно $x_1, \dots, x_n$, то есть

$$x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n);$$

$$x_2 = \varphi_2(y_1, \dots, y_n);$$

$$x_n = \varphi_n(y_1, \dots, y_n).$$

В пространстве $(x_1, \dots, x_n)$ выберем некоторую бесконечно малую область $\mathcal{D}$ площадью $S_{\mathcal{D}}$. В пространстве $(y_1, \dots, y_n)$ ей будет соответствовать область Δ площадью S_{Δ} . Так как x и y связаны взаимно однозначно, то

$$p(\xi \in \mathcal{D}) = p(\eta \in \Delta).$$

-40-

Если область D окружает точку $X = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y))$,
а область Δ - точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$\rho_f(y_1, \dots, y_n) S_\Delta = \rho_f(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) S_D.$$

Отсюда

$$\rho_f(y_1, \dots, y_n) = \rho_f(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \frac{S_D}{S_\Delta}.$$

Но, как известно из курса математического анализа, для бесконечно малых областей

$$\frac{S_D}{S_\Delta} = \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|,$$

поэтому окончательно

$$\rho_f(y_1, \dots, y_n) = \rho_f(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|. \quad (I4)$$

г) Рассмотрим теперь случай, когда в системе (II) $m < n$
и $f_1, f_2, \dots, f_m$ - дифференцируемые функции. Для того, чтобы воспользоваться предыдущим случаем, введем дополнительные случайные величины

$$y_{m+1} = f_{m+1}(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_n),$$

чтобы система уравнений

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_m = f_m(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_{m+1} = f_{m+1}(x_1, \dots, x_n);$$

$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

(I5)

однозначно разрешалась относительно $x_1, \dots, x_n$. Свобода в выборе функций $f_{m+1}, \dots, f_n$ может быть использована для того, чтобы решение системы (I5) имело наиболее простой вид.

Разрешаем систему (I5) относительно переменных $x_1, \dots, x_n$:

$$x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n);$$

$$x_2 = \varphi_2(y_1, \dots, y_n);$$

$$x_n = \varphi_n(y_1, \dots, y_n).$$

Плотность вероятностей $\tilde{p}_Y(y_1, \dots, y_n)$ величин $y_1, y_2, \dots, y_n$ найдем по формуле (14):

$$\tilde{p}_Y(y_1, \dots, y_n) = p_X(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|.$$

Проинтегрировав полученное выражение по переменным, найдем интересующую нас плотность вероятностей

$$p_Y(y_1, \dots, y_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_Y(y_1, \dots, y_n) dy_{m+1} \dots dy_n.$$

Рассмотрим несколько примеров преобразования вида г).

Пусть имеется двумерная случайная величина (ξ, η) с плотностью вероятностей $p_{\xi\eta}(x, y)$.

1. Найти $p_{\xi}(z)$, если $\xi = \xi + \eta$.

Вводим дополнительную переменную

$$\begin{aligned} \xi &= \xi + \eta, \\ \omega &= \xi. \end{aligned}$$

Тогда разрешаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + y, \\ u &= x. \end{aligned}$$

относительно x, y :

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= \tilde{x} - u. \end{aligned}$$

Находим $p_{\xi\omega}(z, u)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} \right| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ p_{\xi\omega}(z, u) &= p_{\xi\eta}(u, z - u). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее выражение по u , получим

$$p_{\xi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u, z - u) du.$$

Интеграл, входящий в эту формулу, называют интегралом типа свертки.

2. Найти $p_{\xi}(z)$, если $\xi = \frac{\xi}{\eta}$.

Опять вводим дополнительную переменную

$$\xi = \frac{\xi}{\eta}, \quad \omega = \eta$$

и разрешаем систему уравнений

-42-

$$z = \frac{x}{y}, \quad u = y$$

относительно x, y :

$$x = z \cdot u, \quad y = u.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} \right| = \begin{vmatrix} u & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix} = |u|$$

и $P_{f\omega}(z, u)$ имеет вид

$$P_{f\omega}(z, u) = P_{f\eta}(z \cdot u, u) |u|.$$

Окончательно имеем

$$P_f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |u| P_{f\eta}(z \cdot u, u) du.$$

3. Найти $P_f(z)$, если $\zeta = \sqrt{f^2 + g^2}$.

Дополнительную переменную φ введем таким образом, чтобы обратные функции имели вид

$$\xi = \zeta \cos \varphi, \quad \eta = \zeta \sin \varphi$$

или

$$x = z \cos \varphi, \quad y = z \sin \varphi.$$

Тогда

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(z, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -z \sin \varphi & z \cos \varphi \end{vmatrix} = z,$$

поэтому

$$P_{f\varphi}(z, \varphi) = z P_{f\eta}(z \cos \varphi, z \sin \varphi).$$

Так как $0 < \varphi < 2\pi$, то $z \geq 0$

$$P_f(z) = z \int_0^{2\pi} P_{f\eta}(z \cos \varphi, z \sin \varphi) d\varphi, \quad z \geq 0.$$

Аналогично

$$P_\varphi(\varphi) = \int_0^{\infty} z P_{f\eta}(z \cos \varphi, z \sin \varphi) dz.$$

§ 5. Математическое ожидание

Описание случайных величин при помощи функции распределения или плотности вероятностей является самым полным, самым

подробным описанием случайной величины. Однако это описание достаточно сложно; уже простейшие преобразования - сложение, умножение, деление случайных величин - приводят к достаточно сложным преобразованиям плотности вероятностей, связанным с вычислением интегралов. Кроме того, эмпирическое определение функции распределения или плотности вероятностей случайной величины требует проведения достаточно большого числа ее измерений (несколько сотен).

Поэтому возникает необходимость в другом описании случайных величин, пусть не столь полном и подробном, пусть характеризующем лишь некоторые их свойства, но зато более простом и требующем меньшего числа измерений при опытных исследованиях.

Такое более простое, хотя и не столь полное описание случайной величины дают числовые характеристики случайной величины.

Эти числовые характеристики многочисленны, и по функциям их можно разбить на несколько групп. В этом параграфе мы рассмотрим характеристики положения случайной величины. Их задача - указать число, около которого группируются значения случайной величины, так сказать, указать её наиболее типичные значения.

Из всех характеристик положения важнейшей является так называемое математическое ожидание случайной величины.

Определение 1. Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и случайная величина $\xi(\omega)$. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\{\xi\} = \int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Для математического ожидания используют и другие обозначения - $M\{\xi\} = E\{\xi\} = \bar{\xi}$.

Определение 2. Математическим ожиданием функции $g(\xi)$ от случайной величины ξ называется число

$$M\{g(\xi)\} = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) dP(\omega).$$

Продолжая таблицу соответствий терминов функционального анализа и теории вероятностей, можно написать

Функц. анализ

Теория вероятностей

Интеграл Лебега

$$\int_{\mathcal{R}} g(\xi(\omega)) d\rho(\omega)$$

Математическое ожидание функции $g(\xi)$ от случайной величины ξ

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении математического ожидания. Его дает следующая теорема.

Теорема. Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_{\xi}(x)$. Тогда

$$M\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_{\xi}(x),$$

где интеграл понимается в смысле Стильеса. В частности,

$$M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x).$$

Доказательство I. Заметим прежде всего, что формулы (2)

можно записать в виде

$$P(a \leq \xi < b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b dF_{\xi}(x);$$

$$P(a \leq \xi \leq b) = F_{\xi}(b+0) - F_{\xi}(a) = \int_a^{b+0} dF_{\xi}(x)$$

и т.д. Поэтому для любого множества $B \in \mathcal{B}$

$$P(\xi \in B) = \int_B dF_{\xi}(x).$$

2. Пусть $g(x) = \chi_B(x)$, где $B \in \mathcal{B}$. Тогда, обозначая $A = \xi^{-1}(B)$ (т.е. A есть прообраз множества B), $A \in \mathcal{F}$, получим, что $g(\xi(\omega)) = \chi_A(\omega)$ и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x) dF_{\xi}(x) = \int_B dF_{\xi}(x) = P(\xi \in B) = P(\omega \in A) = \\ &= \int_A d\rho(\omega) = \int_A \chi_A(\omega) d\rho(\omega) = \int_{\mathcal{R}} g(\xi(\omega)) d\rho(\omega). \end{aligned}$$

Поэтому теорема верна для функций вида $g(x) = \chi_B(x)$.

3. Отсюда теорема верна также для простых функций вида

$$g(x) = \sum_k c_k \chi_{B_k}(x),$$

что легко доказывается.

4. Пусть $g(x) \geq 0$ - измеримая функция. Тогда существует монотонно возрастающая последовательность простых функций $g_n(x)$,

сходящаяся к $g(x)$: $g_n(x) \uparrow g(x)$. Для нее имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dF_1(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_1(x),$$

$$g_n(\xi(\omega)) \uparrow g(\xi(\omega)).$$

$$\int g_n(\xi(\omega)) dP(\omega) = \int g_n(x) dF_1(x) \leq \int g(x) dF_1(x).$$

Поэтому, пользуясь два раза теоремой Леви, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_1(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dF_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dF_1(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(\xi(\omega)) dP(\omega) = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi(\omega)) dP(\omega) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) dP(\omega). \end{aligned}$$

5. Для функций $g(x)$ произвольного знака, представляя $g(x)$ в виде $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$, можно записать теорему отдельно для $g^+(x)$ и $g^-(x)$ и затем, вычтя соответствующие интегралы, получить теорему для $g(x)$. $\blacktriangleleft$

Частные случаи

1. Пусть ξ - дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда $F(x)$ является ступенчатой функцией со скачками в точках x_i , с величиной скачка p_i . Следовательно,

$$M\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_1(x) = \sum_{i=1}^n g(x_i) p_i.$$

В частности, $M\{\xi\} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

2. Пусть ξ - непрерывная случайная величина. Тогда существует $p(x) = F_1'(x)$ и

$$M\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx.$$

В частности,

$$M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx.$$

3. В случае многомерной случайной величины надо использовать меру Лебега-Стилтьеса в $\mathbb{R}^n$. Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - непрерывная случайная величина, то

$$M\{g(\xi_1, \dots, \xi_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

В частности,

$$M\{\xi, \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Свойства математического ожидания

Все теоремы об интеграле Лебега превращаются в теоремы о свойствах математического ожидания. Запишем лишь простейшие свойства, которые полезны при решении практических задач.

1. $M\{C\} = C$, (C - константа)

Действительно, для константы функция распределения имеет вид

$$F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C, \\ 1, & x > C. \end{cases}$$

и поэтому

$$M\{C\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_C(x) = C.$$

2. $M\{C\xi\} = CM\{\xi\}$.

Это - обычное свойство интеграла Лебега

$$M\{C\xi\} = \int_C C\xi(\omega) dP(\omega) = C \int_C \xi(\omega) dP(\omega) = CM\{\xi\}.$$

3. $M\{\xi \pm \eta\} = M\{\xi\} \pm M\{\eta\}$.

$$M\{\xi \pm \eta\} = \int_C [\xi(\omega) \pm \eta(\omega)] dP(\omega) = \int_C \xi(\omega) dP(\omega) \pm \int_C \eta(\omega) dP(\omega) = M\{\xi\} \pm M\{\eta\}.$$

Отметим, что это свойство верно для любых случайных величин.

4. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$M\{\xi \cdot \eta\} = M\{\xi\} M\{\eta\}.$$

Если случайные величины ξ и η непрерывны, то из их независимости следует, что $p_{\xi\eta}(x, y) = p_{\xi}(x) p_{\eta}(y)$. Поэтому

$$M\{\xi \cdot \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y p_{\eta}(y) dy = M\{\xi\} M\{\eta\}.$$

В общем случае $F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) F_{\eta}(y)$, поэтому

$$M\{\xi \cdot \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy dF_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) \int_{-\infty}^{\infty} y dF_{\eta}(y) = M\{\xi\} M\{\eta\}.$$

5. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq M\{\xi\} \leq b$. Всегда $|M\{\xi\}| \leq M\{|\xi|\}$.

Из других характеристик положения отметим лишь медиану случай-

ной величины ξ , $Me\{\xi\}$, определяемой соотношением

$$P(\xi < Me\{\xi\}) = P(\xi > Me\{\xi\}).$$

Для непрерывной случайной величины это равенство принимает вид

$$\int_{-\infty}^{Me} p_{\xi}(x) dx = \int_{Me}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{2}.$$

§ 6. Дисперсия

Кроме характеристик положения необходимо иметь также характеристики разброса случайной величины, показывающие, насколько сильно её отдельные значения могут отличаться друг от друга. К важнейшим характеристикам разброса относятся дисперсия и связанное с ней среднеквадратичное отклонение случайной величины.

Дисперсией $D\{\xi\}$ случайной величины ξ называется число

$$D\{\xi\} = M\{(\xi - M\{\xi\})^2\}.$$

Величина

$$\sigma\{\xi\} = \sqrt{D\{\xi\}}$$

называется среднеквадратичным отклонением случайной величины ξ .

По общей формуле вычисления математического ожидания функции от случайной величины можно записать

$$D\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\{\xi\})^2 dF_{\xi}(x).$$

Если ξ - дискретная случайная величина, то

$$D\{\xi\} = \sum_{i=1}^n (x_i - M\{\xi\})^2 p_i.$$

если же ξ - непрерывная случайная величина, то

$$D\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\{\xi\})^2 p(x) dx.$$

Свойства дисперсии

$$1. D\{C\} = 0 \quad (C - \text{константа}).$$

Действительно, $M\{C\} = C$ и $(C - M\{C\})^2 = 0$.

$$2. D\{c\xi\} = c^2 D\{\xi\}, \quad \sigma\{c\xi\} = |c| \sigma\{\xi\}.$$

Так как $M\{c\xi\} = c M\{\xi\}$, то

$$(c\xi - M\{c\xi\})^2 = (c\xi - cM\{\xi\})^2 = c^2 (\xi - M\{\xi\})^2,$$

откуда

$$D\{c\xi\} = M\{(c\xi - M\{c\xi\})^2\} = M\{c^2 (\xi - M\{\xi\})^2\} = c^2 M\{(\xi - M\{\xi\})^2\} = c^2 D\{\xi\}.$$

Извлекая квадратный корень, получаем

$$\sigma\{\xi\} = |\sigma\{\xi\}|.$$

3. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$D\{\xi + \eta\} = D\{\xi\} + D\{\eta\}, \quad \sigma\{\xi + \eta\} = \sqrt{\sigma^2\{\xi\} + \sigma^2\{\eta\}}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\xi + \eta - M\{\xi + \eta\})^2 &= ((\xi - M\{\xi\}) + (\eta - M\{\eta\}))^2 = \\ &= (\xi - M\{\xi\})^2 + (\eta - M\{\eta\})^2 + 2(\xi - M\{\xi\})(\eta - M\{\eta\}). \end{aligned} \quad (16)$$

В силу независимости ξ и η

$$M\{(\xi - M\{\xi\})(\eta - M\{\eta\})\} = M\{\xi - M\{\xi\}\}M\{\eta - M\{\eta\}\} = 0.$$

Усредняя соотношение (16), получим теперь

$$D\{\xi + \eta\} = D\{\xi\} + D\{\eta\}.$$

Извлекая отсюда квадратный корень, получим соотношение для $\sigma\{\xi + \eta\}$.

Следствие. Учитывая свойства 1 и 2, получаем

$$D\{\xi + c\} = D\{\xi\};$$

$$D\{\xi - \eta\} = D\{\xi\} + D\{\eta\}.$$

$$4. D\{\xi\} = M\{\xi^2\} - M^2\{\xi\}.$$

Эта формула часто применяется при вычислении дисперсии.

Так как

$$(\xi - M\{\xi\})^2 = \xi^2 - 2\xi M\{\xi\} + M^2\{\xi\},$$

то, усредняя, получим

$$D\{\xi\} = M\{\xi^2\} - 2M\{\xi\}M\{\xi\} + M^2\{\xi\} = M\{\xi^2\} - M^2\{\xi\}.$$

§ 7. Моменты

Математическое ожидание и дисперсия являются представителями целого класса характеристик, которые называются моментами случайной величины.

Начальным моментом случайной величины ξ порядка k называется число

$$m_k = M\{\xi^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

Заметим, что $m_1 = M\{\xi\}$ есть математическое ожидание случайной величины ξ .

Центральным моментом k -го порядка случайной величины называется величина

$$\mu_k = M\{(\xi - M\{\xi\})^k\} = M\{(\xi - m_1)^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k dF(x).$$

Отметим, что

$$\mu_1 = M\{(\xi - M\{\xi\})\} = M\{\xi\} - M\{\xi\} = 0,$$

а $\mu_2 = M\{(\xi - M\{\xi\})^2\}$ есть дисперсия величины ξ : $\mu_2 = D\{\xi\}$.

Между моментами начальными и центральными существуют связывающие их формулы. Например, усредняя

$$(\xi - m_1)^2 = \xi^2 - 2m_1\xi + m_1^2;$$

$$(\xi - m_1)^3 = \xi^3 - 3m_1\xi^2 + 3m_1^2\xi - m_1^3;$$

$$(\xi - m_1)^4 = \xi^4 - 4m_1\xi^3 + 6m_1^2\xi^2 - 4m_1^3\xi + m_1^4,$$

получим

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2;$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3;$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

и т.д. Аналогично, усредняя

$$\xi^2 = [(\xi - m_1) + m_1]^2 = (\xi - m_1)^2 + 2(\xi - m_1)m_1 + m_1^2;$$

$$\xi^3 = [(\xi - m_1) + m_1]^3 = (\xi - m_1)^3 + 3(\xi - m_1)^2m_1 + 3(\xi - m_1)m_1^2 + m_1^3;$$

$$\xi^4 = [(\xi - m_1) + m_1]^4 = (\xi - m_1)^4 + 4(\xi - m_1)^3m_1 + 6(\xi - m_1)^2m_1^2 + 4(\xi - m_1)m_1^3 + m_1^4,$$

получим

$$m_2 = \mu_2 + m_1^2;$$

$$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2m_1 + m_1^3;$$

$$m_4 = \mu_4 + 4\mu_3m_1 + 6\mu_2m_1^2 + m_1^4$$

и т.д.

На практике и в большинстве теоретических исследований моменты порядка выше четвертого практически не используются.

§ 8. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции

Следующая важная группа числовых характеристик - это характеристики связи случайных величин.

Наиболее полно зависимость случайной величины ξ от η описывается условной функцией распределения $F(x/y)$ или условной плотностью вероятностей $p(x/y)$, однако это описание достаточно сложно.

Более просто, хотя и менее полно эта зависимость описывается при помощи условных математических ожиданий.

Условным математическим ожиданием величины ξ при условии, что вторая случайная величина η приняла значение y , называется величина

$$M\{\xi/\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x/y)$$

или, в случае непрерывной случайной величины,

$$M\{\xi/\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x/y) dx.$$

Кривая, описываемая уравнением

$$x = M\{\xi/\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x/y) dx,$$

называется кривой регрессии ξ от η .

Аналогично вводится понятие условного математического ожидания величины η при условии, что величина $\xi = x$

$$M\{\eta/x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y/x);$$

$$M\{\eta/x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y/x) dy.$$

Кривая, описываемая уравнением

$$y = M\{\eta/x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y/x) dy,$$

называется кривой регрессии η от ξ . Эти кривые представляют собой некоторую среднюю зависимость ξ от η или η от ξ , так сказать, идеальную зависимость, освобожденную от случайностей.

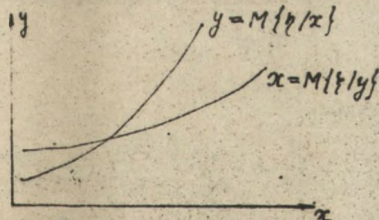
Отметим, что кривых регрессии две: $y = M\{\eta/x\}$ и $x = M\{\xi/y\}$;

они, вообще говоря, не совпадают между собой. Отметим еще полезные формулы

$$M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} M\{\xi/y\} p(y) dy,$$

$$M\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} M\{\eta/x\} p(x) dx,$$

которые легко доказываются. Например,



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} M\{\xi/y\} p_2(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x p(x/y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x/y) p_2(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = M\{\xi\}. \end{aligned}$$

Иногда используют также понятие условных дисперсий

$$D\{\xi/y\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\{\xi/y\})^2 p(x/y) dx;$$

$$D\{\eta/x\} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M\{\eta/x\})^2 p(y/x) dy,$$

которые показывают, насколько сильно отдельные значения случайной величины могут отклоняться от кривых регрессии. Кривые, определяемые уравнениями

$$y = D\{\eta/x\} \quad \text{и} \quad x = D\{\xi/y\},$$

носят название скедастик. Если нужно описать степень зависимости случайных величин друг от друга одним числом, то обычно используют коэффициент корреляции.

Величина

$$M\{(\xi - M\{\xi\})(\eta - M\{\eta\})\} = \text{cov}(\xi, \eta)$$

носит название ковариации величин ξ и η . Величина

$$r = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\{\xi\}D\{\eta\}}}$$

называется коэффициентом корреляции величин ξ и η .

Чтобы выяснить смысл коэффициента корреляции, изучим сначала его свойства.

$$I. |r| \leq 1.$$

Действительно,

$$\left(\frac{\xi - M\{\xi\}}{\sqrt{D\{\xi\}}} \pm \frac{\eta - M\{\eta\}}{\sqrt{D\{\eta\}}} \right)^2 \geq 0.$$

Раскрывая квадрат и усредняя, получим

$$\frac{M\{(\xi - M\{\xi\})^2\}}{D\{\xi\}} + \frac{M\{(\eta - M\{\eta\})^2\}}{D\{\eta\}} \pm 2 \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\{\xi\}D\{\eta\}}} \geq 0$$

или $1 \pm r \geq 0$. Беря поочередно знак $+$ и $-$, получим, что $r \geq -1$ и $r \leq 1$ или после объединения $|r| \leq 1$.

2. Если $\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$, то $Z = \pm 1$. Действительно, в этом случае

$$M\{\eta\} = aM\{\xi\} + b;$$

$$(\xi - M\{\xi\})(\eta - M\{\eta\}) = a(\xi - M\{\xi\})^2;$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = aD\{\xi\};$$

$$D\{\eta\} = a^2 D\{\xi\}.$$

Поэтому

$$Z = \frac{a D\{\xi\}}{\sqrt{D\{\xi\}} a^2 D\{\xi\}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} +1, & \text{если } a > 0; \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

3. Если $Z = \pm 1$, то существуют такие a и b , что $\eta = a\xi + b$. Пусть $Z = 1$. Как следует из выкладок, следующих после свойства I,

$$2 - 2Z = M\left\{\left(\frac{\xi - M\{\xi\}}{\sqrt{D\{\xi\}}} - \frac{\eta - M\{\eta\}}{\sqrt{D\{\eta\}}}\right)^2\right\} = 0.$$

Но выражение, стоящее под знаком математического ожидания, не отрицательно. Интеграл Лебега от неотрицательной функции может быть равен 0 лишь тогда, когда подынтегральная функция равна 0 почти всюду относительно меры $P(\omega)$. Поэтому с вероятностью 1

$$\frac{\xi - M\{\xi\}}{\sqrt{D\{\xi\}}} - \frac{\eta - M\{\eta\}}{\sqrt{D\{\eta\}}} = 0$$

или

$$\eta = \xi \sqrt{\frac{D\{\eta\}}{D\{\xi\}}} + (M\{\eta\} - M\{\xi\}) \sqrt{\frac{D\{\eta\}}{D\{\xi\}}},$$

что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай $Z = -1$.

4. Если случайные величины ξ и η независимы, то $Z = 0$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} M\{(\xi - M\{\xi\})(\eta - M\{\eta\})\} &= M\{\xi - M\{\xi\}\} M\{\eta - M\{\eta\}\} = \\ &= (M\{\xi\} - M\{\xi\})(M\{\eta\} - M\{\eta\}) = 0. \end{aligned}$$

5. Можно привести пример, когда случайные величины ξ и η связаны нелинейной функциональной зависимостью, но тем не менее $Z = 0$.

Действительно, пусть $M\{\xi\} = 0$, $M\{\xi^3\} = 0$ и $\eta = \xi^2$. Тогда

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\{\xi(\xi - M\{\xi\})\} = M\{\xi^2\} - M\{\xi\}M\{\xi\} = 0,$$

поэтому $\hat{\rho} = 0$.

Объединяя все эти свойства, можно дать следующую характеристику коэффициента корреляции. Коэффициент корреляции действительно является мерой зависимости двух случайных величин, но не всякой зависимости. Коэффициент корреляции описывает лишь линейную зависимость. Чем больше коэффициент корреляции отличается от 0, тем сильнее зависимость между ξ и η приближается к линейной. Если $\hat{\rho} = 0$, то это не означает отсутствие зависимости между ξ и η вообще, а означает отсутствие лишь линейной зависимости. Нелинейная зависимость может быть и даже очень сильная.

Если $\hat{\rho} = 0$, то случайные величины ξ и η называют некоррелированными. Еще раз подчеркнем, что из некоррелированности ξ и η не следует их независимость.

§ 9. Характеристическая функция

Очень мощным средством при проведении исследований случайных величин является так называемая характеристическая функция.

Характеристической функцией $g_{\xi}(u)$ случайной величины ξ называется функция

$$g_{\xi}(u) = M\{e^{iut}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_{\xi}(x), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Если ξ - дискретная случайная величина, то

$$g_{\xi}(u) = \sum_{k=1}^n e^{iux_k} p_k,$$

если ξ - непрерывная случайная величина, то

$$g_{\xi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} p_{\xi}(x) dx.$$

В последнем случае $g_{\xi}(u)$ является преобразованием Фурье от плотности вероятностей $p_{\xi}(x)$.

Функция распределения $F_{\xi}(x)$ однозначно определяет $g_{\xi}(u)$. Оказывается, что верно и обратное - $g_{\xi}(u)$ однозначно определяет функцию распределения $F_{\xi}(x)$. Это соответствие дается так называемой формулой обращения: для любых точек непрерывности функции $F_{\xi}(x)$ имеют место соотношения

$$F_j(y) - F_j(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{e^{-iux} - e^{-iuy}}{iu} g_j(u) du.$$

В частности, если ξ - непрерывная случайная величина, то

$$F_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g_j(u) du.$$

Этот интеграл называется обратным преобразованием Фурье.

Функцию

$$\psi_j(u) = \ln g_j(u)$$

иногда называют кумулянтной.

Отметим следующие свойства характеристической функции.

1. $g_j(0) = 1$; $|g_j(u)| \leq 1$ для любых u ;

$$|g_j(u)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_j(x) \right| \leq \int |e^{iux}| dF_j(x) = \int dF_j(x) = 1,$$

т.к. $|e^{iux}| = 1$.

2. Если $\eta = a\xi + b$, то $g_j(u) = e^{ibu} g_j(au)$, соответ-
ственно

$$\psi_j(u) = ibu + \psi_j(au).$$

Имеем

$$g_j(u) = M\{e^{i\eta u}\} = M\{e^{ia\xi u + ib\eta}\} = e^{ibu} M\{e^{ia\xi u}\} = e^{ibu} g_j(au).$$

Логарифмируя это соотношение, получим соотношение для функций $\psi_j(u)$ и $\psi_j(au)$.

3. Если ξ и η независимы, то для $\zeta = \xi + \eta$

$$g_j(u) = g_j(u) g_j(u) \text{ и соответственно } \psi_j(u) = \psi_j(u) + \psi_j(u).$$

Имеем

$$g_j(u) = M\{e^{i\zeta u}\} = M\{e^{i\xi u} \cdot e^{i\eta u}\} = M\{e^{i\xi u}\} M\{e^{i\eta u}\} = g_j(u) g_j(u).$$

Логарифмируя, получаем соотношение для $\psi_j(u)$.

4. Если существует k -й начальный момент, т.е. $M\{|\xi|^k\} < \infty$,

$k \geq 1$, то существует k -я производная от $g_j(u)$ и

$$m_k = M\{\xi^k\} = \frac{1}{i^k} g_j^{(k)}(0).$$

Так как

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} i^k x^k dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) = M\{|\xi|^k\} < \infty,$$

то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} i^k x^k dF(x)$ сходится равномерно относительно u .

Поэтому возможно почленное дифференцирование под знаком интеграла: $g_j'(u) = \int_{-\infty}^{\infty} iu e^{iux} dF(x)$, $g_j'(0) = i \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = i M\{\xi\}$.

Дальнейшие рассуждения проводятся по индукции. Если существует

$$g_f^{(k-1)}(u) = i^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} e^{iux} dF_f(x)$$

и существует $M\{|x|^k\}$, то

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{iux} dF_f(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_f(x) = M\{|x|^k\} < \infty$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{iux} dF_f(x)$ сходится равномерно относительно u .

Поэтому $\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{iux} dF_f(x)$ можно дифференцировать по u под знаком интеграла и

$$g_f^{(k)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{iux} dF_f(x); \quad g_f^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_f(x) = i^k M\{|x|^k\}$$

следовательно,

$$m_k = M\{|x|^k\} = \frac{1}{i^k} g_f^{(k)}(0).$$

Для нахождения дисперсии удобнее использовать не $g_f(u)$, а $\psi_f(u)$. Действительно,

$$\psi_f'(u) = \frac{g_f'(u)}{g_f(u)}; \quad \psi_f'(0) = g_f'(0) = im_1;$$

$$\psi_f''(u) = \frac{g_f''(u)g_f(u) - (g_f'(u))^2}{g_f^2(u)};$$

$$\psi_f''(0) = g_f''(0) - (g_f'(0))^2 = i^2(m_2 - m_1^2) = -D\{|x|\},$$

так что

$$m_1 = \frac{1}{i} \psi_f'(0);$$

$$D\{|x|\} = \frac{1}{i^2} \psi_f''(0) = -\psi_f''(0).$$

Вообще величины

$$\kappa^k = \frac{1}{i^k} \psi_f^{(k)}(0)$$

называются кумулянтами величины ξ .

5. Характеристическая функция равномерно непрерывна по u .

Действительно,

$$\begin{aligned} |g(u+h) - g(u)| &\leq \int |e^{ihx} - 1| dF(x) = \\ &= \int_{|x| \leq N} |e^{ihx} - 1| dF(x) + \int_{|x| > N} |e^{ihx} - 1| dF(x) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Так как

$$I_2 \leq 2 \int_{|x| > N} dF(x),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать N так, чтобы $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, в силу равномерной непрерывности функции $|e^{i h^2} - 1|$ на интервале $[-N, N]$ $\exists h_0 > 0$ такое, что $\forall h < h_0$ $|e^{i h^2} - 1| < \frac{\varepsilon}{2N}$, и поэтому $\forall h < h_0$ $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно $\forall h < h_0$ $|g(u+h) - g(u)| < \varepsilon$, и т.к. h_0 не зависит от u , то это и доказывает равномерную непрерывность $g(u)$. У характеристической функции много и других интересных свойств, но перечисленные выше свойства наиболее часто используются в прикладных исследованиях.

Итак, функция распределения и характеристическая функция случайной величины ξ связаны между собой взаимно однозначно. Кроме того, находить моменты случайной величины с помощью характеристической функции даже проще, чем при помощи функции распределения. Поэтому вероятностная задача считается решенной до конца, если ответ получен в виде характеристической функции и функцию распределения или плотность вероятностей найти в аналитическом виде не удастся.

Использование характеристической функции рекомендуется тогда, когда приходится иметь дело с суммами случайных величин. В этом случае вычисление интегралов типа сверток заменяется перемножением характеристических функций, что, несомненно, гораздо проще.

Заметим, что для случайных величин ξ , принимающих только неотрицательные значения, вместо преобразования Фурье выгоднее использовать преобразование Лапласа и брать характеристическую функцию в виде

$$g_{\xi}(s) = M \{ e^{s\xi} \} = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_{\xi}(x).$$

Для случайных величин ξ , принимающих значения $0, \pm 1, \pm 2$ и т.д., часто используют так называемое z -преобразование или производящую функцию

$$g_{\xi}(z) = M \{ z^{\xi} \} = \sum_k z^k p_k.$$

Свойства этих функций аналогичны свойствам характеристической функции $g_{\xi}(u)$. Главные из них - взаимно однозначное соответствие с функцией распределения, простота работы с суммами независимых случайных величин и при вычислении моментов.

Отметим еще, что для многомерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ характеристическая функция

$$g_{\xi}(u_1, \dots, u_n) = M \{ e^{i(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \dots + u_n \xi_n)} \}.$$

§ 10. Нормальные (гауссовские) случайные величины

Среди всех случайных величин особую роль играют так называемые нормальные (гауссовские) случайные величины.

Случайная величина ξ называется нормальной (гауссовской) случайной величиной, если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Иногда используют обозначение $\xi = N(a, \sigma^2)$.

Рассмотрим некоторые свойства этих величин.

1. Введем функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Входящий сюда интеграл через элементарные функции не выражается. Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей. Она имеет следующие свойства:

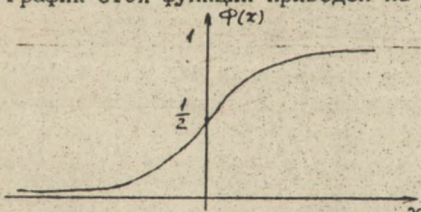
а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$;

в) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$;

г) при $x > 3$ $\Phi(x) \sim 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{15}{x^6} + \dots\right)$.

График этой функции приведен на рисунке. Для нее имеются под-



робные таблицы для значений $0 \leq x < 4$. Для $x > 4$ значение $\Phi(x)$ можно вычислять по асимптотической формуле (г). Через функцию $\Phi(x)$ выражается функция распределения случайной величины

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

2. Находя характеристическую функцию нормальной случайной величины, получим

$$g_{\xi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{iux - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{iua - \frac{\sigma^2 u^2}{2}};$$

$$\psi_{\xi}(u) = \ln g_{\xi}(u) = iua - \frac{\sigma^2 u^2}{2}.$$

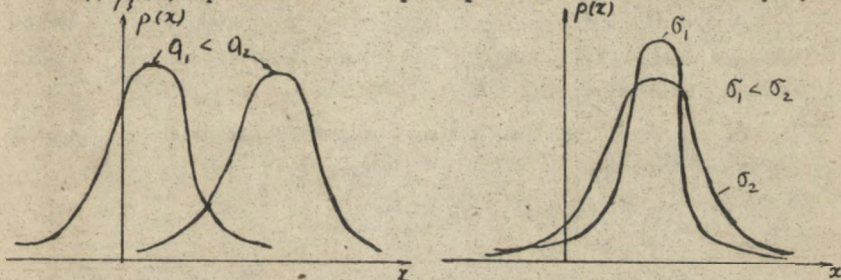
3. Находя $M\{\xi\}$ и $D\{\xi\}$ через $\psi_\xi(u)$, получим

$$\psi_\xi'(u) = i\alpha - \sigma^2 u, \quad M\{\xi\} = \frac{1}{i} \psi_\xi'(0) = \alpha;$$

$$\psi_\xi''(u) = -\sigma^2, \quad D\{\xi\} = -\psi_\xi''(0) = \sigma^2.$$

Таким образом, α есть математическое ожидание величины ξ , а σ^2 — её дисперсия.

Вид $p_\xi(x)$ при изменении параметров α и σ^2 показан на рисунке.



4. Пусть $\xi = N(\alpha, \sigma^2)$ и $\eta = \beta\xi + \alpha$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \psi_\eta(u) &= i\alpha u + \psi_\xi(\beta u) = i\alpha u + i\alpha\beta u - \frac{\sigma^2\beta^2 u^2}{2} = \\ &= i(\alpha\beta + \alpha)u - \frac{\sigma^2\beta^2}{2}u^2. \end{aligned}$$

Так как $\psi(u)$ однозначно определяет $p(x)$, то отсюда следует, что η есть также нормальная случайная величина с математическим ожиданием $(\alpha + \alpha\beta)$ и дисперсией $\sigma^2\beta^2$.

5. Пусть $\xi = N(\alpha_1, \sigma_1^2)$ и $\eta = N(\alpha_2, \sigma_2^2)$ — независимые нормальные случайные величины. Тогда для $\zeta = \xi + \eta$ имеем

$$\begin{aligned} \psi_\zeta(u) &= \psi_\xi(u) + \psi_\eta(u) = i\alpha_1 u - \frac{\sigma_1^2 u^2}{2} + i\alpha_2 u - \frac{\sigma_2^2 u^2}{2} = \\ &= i(\alpha_1 + \alpha_2)u - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}u^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сумма независимых нормальных случайных величин есть также нормальная случайная величина.

Интересно, что верно и обратное свойство, т.е. если сумма двух независимых случайных величин есть нормальная случайная величина, то каждое слагаемое есть также нормальная случайная величина.

6. Для вероятности попадания нормальной случайной величины ξ в интервал $[x_1, x_2]$ имеем

$$p(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

7. Пусть $x_2 = a + 3\sigma$, $x_1 = a - 3\sigma$. Тогда

$$p(a - 3\sigma \leq \xi \leq a + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0,997.$$

Это вероятность настолько мало отличается от единицы, что можно утверждать, что событие $|\xi - a| < 3\sigma$ является практически достоверным. Это дает "правило трёх сигм": нормальная случайная величина практически никогда не отклоняется от своего математического ожидания более чем на 3σ .

8. Вычислим еще центральные моменты нормальной случайной величины. Имеем

$$\mu_{2k+1} = M\{(\xi - a)^{2k+1}\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^{2k+1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции. Таким образом, у нормальной случайной величины все центральные моменты нечетного порядка равны 0. Для центральных моментов четного порядка имеем

$$\begin{aligned} \mu_{2k} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^{2k} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= (2k-1)!! \sigma^{2k}. \end{aligned}$$

В частности, $\mu_2 = D\{\xi\} = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_6 = 15\sigma^6$ и т.д. Отметим, что для нормальной случайной величины все кумулянты порядка выше второго равны нулю.

Глава III. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ I. Типы сходимости

Пусть нам дана некоторая последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Одним из основных вопросов, который возникает при изучении таких последовательностей, является вопрос о сходимости этой последовательности к некоторой случайной величине ξ .

Однако в отличие от, например, математического анализа, здесь возможны разнообразные типы сходимости $\{\xi_n\}$ к ξ .

Определение 1. Говорят, что некоторое свойство выполняется почти наверное, если оно выполняется с вероятностью 1 (или, что то же самое, не выполняется с вероятностью 0).

Определение 2. Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ почти наверное, если

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n - \xi) \neq 0) = 0.$$

Эту сходимость обозначают так $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ или так $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$. Этот тип сходимости — обычная сходимость, как в математическом анализе.

Определение 3. Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ по вероятности (обозначение $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, или $p\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$; $p\lim$ от *probability limit*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0.$$

Определение 4. Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к ξ в среднеквадратическом (обозначение $\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi$, или $l.i.m. \xi_n = \xi$; $l.i.m.$ от *limit in the mean*), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n - \xi)^2 = 0.$$

В более общем случае говорят о сходимости ξ_n к ξ в среднем порядка k , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n - \xi)^k = 0.$$

Определение 5. Пусть ξ_n имеет функцию распределения $F_n(x)$

и ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Тогда говорят, что ξ_n сходится к ξ по распределению (обозначение $\xi_n \xrightarrow{F} \xi$), если $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$.

Введенные выше типы сходимости имеют свое полное соответствие в функциональном анализе.

Функцион. анализ	Теория вероятностей
Сходимость почти всюду	Сходимость почти наверное
Сходимость по мере	Сходимость по вероятности
Сходимость в пространстве L_2	Сходимость в среднеквадратичном
—	Сходимость по распределению

Рассмотрим теперь соотношения между различными типами сходимости.

Теорема 1. Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности.

Эта теорема была доказана в курсе функционального анализа.

Теорема 2. Из сходимости в среднеквадратичном следует сходимость по вероятности.

Доказательство. Имеем

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = \int_B dP(\omega),$$

где $B = \{\omega : |\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$. Так как для $\omega \in B$ имеет место соотношение

$$\frac{|\xi_n - \xi|}{\varepsilon} \geq 1$$

и, следовательно,

$$1 \leq \frac{|\xi_n - \xi|^k}{\varepsilon^k},$$

то

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = \int_B 1 \cdot dP(\omega) \leq \int_B \frac{|\xi_n - \xi|^k}{\varepsilon^k} dP(\omega).$$

Учитывая, что подынтегральная функция неотрицательна и поэтому при расширении области интегрирования интеграл может лишь возрасти, получаем

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \int_B |\xi_n - \xi|^k dP(\omega) \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\Omega} |\xi_n - \xi|^k dP(\omega),$$

т.е.
$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leq \frac{M(|\xi_n - \xi|^k)}{\varepsilon^k}.$$

Это неравенство носит название неравенства Чебышева.

Если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} M(|\xi_n - \xi|^k) = 0$ и из неравенства Чебышева следует (при $k = 2$), что $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$, т.е. $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. $\blacklozenge$

Теорема 3. Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

Доказательство. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon, \delta > 0 \quad \exists N, \quad \forall n > N \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \delta,$$

т.е. вероятность того, что ξ_n отклонится от ξ больше чем на ε , меньше δ .

Поэтому, беря некоторое произвольное x , можно написать

$$P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + \delta;$$

$$P(\xi_n < x - \varepsilon) \leq P(\xi_n < x) + \delta$$

или, объединяя эти неравенства вместе,

$$P(\xi < x - \varepsilon) - \delta \leq P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + \delta.$$

В силу произвольности ε и δ , устремляя их к нулю (при этом, естественно, $N \rightarrow \infty$, т.е. происходит предельный переход $n \rightarrow \infty$), получим

$$P(\xi < x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n < x) \leq P(\xi \leq x)$$

и, если $F(x) = P(\xi < x) = F(x+0) = P(\xi \leq x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Подытоживая эти теоремы, можно нарисовать следующую схему:



Основное содержание теоретических исследований по теории вероятностей занимают вопросы сходимости случайных величин. Совокупность теорем, исследующих сходимость к так называемому нор-

мальному распределению, объединяют названием центральной предельной теоремы. Сходимость по распределению к так называемым устойчивым законам исследуется в центральной предельной проблеме. Сходимость по вероятности изучает раздел под названием "Закон больших чисел", а сходимость почти наверное — "Усиленный закон больших чисел".

Этих теорем очень много, и рассмотреть все их мы не в состоянии. Поэтому ниже будут рассмотрены лишь некоторые наиболее существенные теоремы этого типа.

§ 2. Центральная предельная теорема в простейшем случае

Среди всех сходимостей по распределению особое место занимает сходимость к нормальному распределению вероятностей. Множество теорем, изучающих условия, при которых имеет место сходимость к нормальному распределению, объединяют названием центральной предельной теоремы.

Если резюмировать результаты этих теорем, то качественно картина выглядит следующим образом. Пусть имеется некоторое явление, описываемое величиной ξ . На это явление действует очень большое число случайных факторов, которые являются случайными, но :

1) эти случайные факторы дают аддитивные добавки к величине χ , т.е. та величина ξ , которую мы измеряем, равна $\chi + \Delta\chi_1 + \Delta\chi_2 + \dots + \Delta\chi_n$, где $\Delta\chi_i$ — случайные добавки с произвольной функцией распределения;

2) Все эти добавки в некотором смысле равномерно малы, т.е. среди $\Delta\chi_i$ нет какого-то преобладающего слагаемого, которое определяло бы главным образом величину ξ ;

3) все эти добавки не зависят или слабо зависят друг от друга.

При соответствующих более точных формулировках этих ограничений ЦПТ утверждает, что при $n \gg 1$ ξ будет нормальной случайной величиной.

Мы имеем здесь дело с проявлением закона перехода количества в качества. Отдельные добавки могут иметь произвольную функцию распределения, так что никакой закономерности в $\Delta\chi_i$ нет. Но когда этих добавок много, возникает закономерность, правда

довольно своеобразная, вероятностная закономерность - сумма добавок Δx_i становится случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Закономерность возникает из-за отсутствия всякой закономерности!

Так как ограничения, при которых верна ЦПТ, довольно часто хорошо выполняются на практике, то и с нормальными случайными величинами приходится сталкиваться очень часто.

Перейдем теперь к более точным формулировкам. Основой для исследований по ЦПТ является следующая теорема.

Теорема. Пусть последовательность функций распределения $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ в каждой точке ее непрерывности. Тогда последовательность соответствующих характеристических функций $g_n(u)$ сходится к $g(u)$ - характеристической функции $F(x)$.

Наоборот, если при $n \rightarrow \infty$ $g_n(u) \rightarrow g(u)$ и $g(u)$ непрерывна при $u=0$, то $g(u)$ есть характеристическая функция некоторой функции распределения $F(x)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$.

Доказывать эту теорему мы не будем.

Рассмотрим теперь ЦПТ в её простейшей форме.

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $M\{\xi_k\} = a$ и конечной дисперсией $\sigma^2 = D\{\xi_k\} < +\infty$. Тогда для функции распределения $F_n(x)$ величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

имеет место соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x)$, т.е. $\eta_n \xrightarrow{F} N(0,1)$.

Доказательство. Как было показано выше, кумулянтная функция $\Psi(u) = \ln g(u)$ имеет свойство

$$\Psi(0) = 0; \quad \Psi'(0) = iM\{\xi\}; \quad \Psi''(0) = -D\{\xi\}.$$

Тогда разложение $\Psi(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u=0$ имеет вид

$$\Psi(u) = iM\{\xi\}u - \frac{1}{2}D\{\xi\}u^2 + O(u^3).$$

Поэтому для случайной величины ξ_k кумулянтная функция имеет вид

$$\Psi_k(u) = ia_k - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + O(u^3).$$

Для величины $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ кумулянтная функция равна

$$\Psi_n(u) = \sum_{k=1}^n \Psi_k(u) = ian u - \frac{\sigma^2 u^2 n}{2} + O(u^3 n).$$

Так как $\gamma_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{\sigma \sqrt{n}} - \frac{a \sqrt{n}}{\sigma}$, то кумулянтная функция $\bar{\Psi}_n(u)$ величины γ_n равна

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_n(u) &= ian \frac{u}{\sigma \sqrt{n}} - \frac{\sigma^2 n}{2} \frac{u^2}{(\sigma \sqrt{n})^2} + O\left(\frac{u^3 n}{(\sigma \sqrt{n})^3}\right) - i \frac{a \sqrt{n}}{\sigma} u = \\ &= -\frac{u^2}{2} + O\left(\frac{u^3}{\sigma^2 \sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_n(u) = \Psi(u) = -\frac{u^2}{2},$$

что соответствует нормальной случайной величине с нулевым средним и единичной дисперсией. В силу предыдущей теоремы

$$\gamma_n \xrightarrow{F} N(0, 1), \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\gamma_n < x) = \Phi(x).$$

§ 3. Условие Линдеберга. Центральная предельная теорема в общем случае

Пусть теперь $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_k(x)$, математическими ожиданиями $a_k = M\{\xi_k\}$ и дисперсиями $\sigma_k^2 = D\{\xi_k\}$. Вводя обозначение

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = D\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k\right\},$$

будем рассматривать величины

$$\gamma_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k)$$

или, вводя величины $\xi_{kn} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n}$, $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \xi_{kn}$.

Отметим, что $M\{\xi_{kn}\} = 0$, $D\{\xi_{kn}\} = \frac{\sigma_k^2}{B_n^2}$.

Важнейшим для выполнения сходимости к нормальному распределению является так называемое условие Линдеберга, которое имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - a_k| > \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Выясним смысл условия Линдеберга. Рассмотрим событие

$$A_k = \{\omega : |\xi_k - a_k| > \varepsilon B_n\}.$$

Оценим вероятность того, что $\max_{1 \leq k \leq n} |f_k - a_k| > \varepsilon B_n$. Имеем

$$\begin{aligned} P(\max_{1 \leq k \leq n} |f_k - a_k| > \varepsilon B_n) &= P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} dF_k(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} (x - a_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

т.к. при выполнении события A_k имеет место

$$|x - a_k| \geq \varepsilon B_n \quad \frac{(x - a_k)^2}{\varepsilon^2 B_n^2} \geq 1.$$

Таким образом, можно сказать, что смысл условия Линдеберга заключается в равномерной малости слагаемых f_k , т.к.

$P(\max_{1 \leq k \leq n} |f_k| \geq \varepsilon)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим еще отношение σ_k^2 / B_n^2 . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} &= \frac{1}{B_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_k)^2 dF_k(x) = \frac{1}{B_n^2} \left[\int_{|x - a_k| < \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x - a_k| \geq \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) \right] \leq \varepsilon^2 + \frac{1}{B_n^2} \int_{|x - a_k| \geq \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x), \end{aligned}$$

поэтому при выполнении условия Линдеберга

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что также выражает равномерную малость $f_{k,n}$, т.к. $\frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = \mathcal{D}\{f_{k,n}\}$.

Докажем теперь центральную предельную теорему в форме Линдеберга.

Теорема. Для того, чтобы для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имело место $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x)$ и $\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, необходимо и достаточно выполнение условия Линдеберга.

Достаточность. Для доказательства мы будем использовать следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |e^{ix} - 1| &\leq |x|; \\ |e^{ix} - 1 - ix| &\leq \frac{x^2}{2}; \\ |e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| &\leq \frac{|x|^3}{6}; \\ |e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| &\leq x^2; \\ |\ln(1+x) - x| &\leq x^2, \quad (|x| < \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

доказывать которые мы не будем.

1. Пусть $g_{kn}(u) = M\{e^{iukn}\}$. Так как $M\{f_{kn}\} = 0$, то $\int_{-\infty}^{\infty} dF_{kn}(x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{kn}(x) = 0$, где $F_{kn}(x)$ - функция распределения величины $\{f_{kn}\}$. Поэтому

$$|g_{kn}(u) - 1| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_{kn}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dF_{kn}(x) - iu \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{kn}(x) \right| \leq \\ \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iux} - 1 - iux| dF_{kn}(x) \leq \frac{u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{kn}(x) = \frac{u^2}{2} D\{f_{kn}\} = \frac{u^2}{2} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2}.$$

Отсюда $\max_{1 \leq k \leq n} |g_{kn}(u) - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. Рассмотрим $|u| \leq T$. Тогда $\exists N, \forall n > N \quad |g_{kn}(u) - 1| < \frac{1}{2}$ для всех k . Поэтому для $\psi_{kn}(u) = \ln g_{kn}(u)$ имеем

$$\psi_n(u) = \sum_{k=1}^n \psi_{kn}(u) = \sum_{k=1}^n \ln g_{kn}(u) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + g_{kn}(u) - 1) = \\ = \sum_{k=1}^n (g_{kn}(u) - 1) + R_n.$$

В силу неравенства $|\ln(1+x) - x| \leq x^2$

$$|R_n| \leq \sum_{k=1}^n |g_{kn}(u) - 1|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |g_{kn}(u) - 1| \sum_{k=1}^n |g_{kn}(u) - 1|.$$

Но, как получено в п.1,

$$|g_{kn}(u) - 1| \leq \frac{u^2}{2} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2} \leq \frac{T^2}{2} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2},$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^n |g_{kn}(u) - 1| \leq \frac{T^2}{2} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = \frac{T^2}{2}.$$

Итак,

$$|R_n| \leq \frac{T^2}{2} \max_{1 \leq k \leq n} |g_{kn}(u) - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3. Так как $M\{f_{kn}\} = 0$ и $D\{f_{kn}\} = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2}$, то

$$g_{kn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2} + \rho_{kn},$$

Следовательно,

$$\psi_n(u) = -\frac{u^2}{2} + \rho_n, \quad \rho_n = \sum_{k=1}^n \rho_{kn}.$$

Исследуем $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$. Имеем

$$|\rho_{kn}| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux - \frac{u^2 x^2}{2}) dF_{kn}(x) \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{|x| < \varepsilon} (e^{iux} - 1 - iux + \frac{u^2 x^2}{2}) dF_{k_n}(x) + \int_{|x| \geq \varepsilon} (e^{iux} - 1 - iux + \frac{u^2 x^2}{2}) dF_{k_n}(x) \right| \leq \\
 &\leq \int_{|x| < \varepsilon} |e^{iux} - 1 - iux + \frac{u^2 x^2}{2}| dF_{k_n}(x) + \int_{|x| \geq \varepsilon} |e^{iux} - 1 - iux + \frac{u^2 x^2}{2}| dF_{k_n}(x) \leq \\
 &\leq \frac{|u|^3}{6} \int_{|x| < \varepsilon} |x|^3 dF_{k_n}(x) + u^2 \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF_{k_n}(x) \leq \\
 &\leq \frac{|u|^3}{6} \varepsilon \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{k_n}(x) + u^2 \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF_{k_n}(x) \leq \frac{|u|^3}{6} \varepsilon \frac{\sigma_{k_n}^2}{B_n^2} + u^2 \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF_{k_n}(x),
 \end{aligned}$$

поэтому

$$|\rho_n| \leq \frac{T^3}{6} \varepsilon + \frac{T^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| \geq \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x).$$

В силу произвольности ε и выполнения условия Линдеберга получаем, что $|\rho_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

4. Поэтому

$$\Psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(u) = -\frac{u^2}{2},$$

что соответствует нормальному распределению с нулевым средним и единичной дисперсией, функция распределения которого равна $\Phi(x)$. Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x),$$

т.е. имеет место сходимость по распределению к $N(0, 1)$.

Необходимость условия Линдеберга доказывать не будем. ♦

Рассмотрим некоторые следствия центральной предельной теоремы в форме Линдеберга.

Теорема Ляпунова. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые случайные величины и для некоторого $\delta > 0$

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M\{|\xi_k - a_k|^{2+\delta}\} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x)$.

Доказательство сводится к проверке условия Линдеберга.

Имеем $\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| \geq \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \leq \frac{1}{B_n^2 \varepsilon^\delta B_n^\delta} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| \geq \varepsilon B_n} |x-a_k|^{2+\delta} dF_k(x) \leq$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |x - a_k|^{2+\delta} dF_k(x) = \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M\{|x - a_k|^{2+\delta}\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Здесь использовано то, что в области интегрирования $\frac{|x - a_k|}{\varepsilon B_n} \geq 1$, поэтому при любом положительном δ

$$1 \leq \frac{|x - a_k|}{\varepsilon B_n}.$$

Условие Ляпунова легче для проверки, чем условие Линдеберга.

Теорема. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию $\sigma^2 = D\{\xi_k\}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x).$$

Доказательство. В этом случае $B_n = \sigma\sqrt{n}$ и

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - a_k| \geq \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) = \frac{1}{n\sigma^2} \cdot n \int_{|x - a| \geq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} (x - a)^2 dF(x) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

в силу того, что $\int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 dF(x) = \sigma^2 < +\infty$. $\blacklozenge$

§ 4. Центральная предельная проблема

В более общем случае ситуацию можно представить себе следующим образом: имеется последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Рассматриваются случайные величины вида

$$\eta_n = \frac{S_n}{B_n} - A_n,$$

где A_n, B_n — некоторые константы и изучается сходимость по распределению этих величин при $n \rightarrow \infty$. Если через ξ_{kn} обозначить величины $\frac{\xi_k}{B_n} - \frac{A_n}{n}$, так что $\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_{kn}$, то ситуацию можно представить себе следующим образом: имеется последовательность серий случайных величин

$$\{\xi_{11}\},$$

$$\{\xi_{12}, \xi_{22}\},$$

$$\{\xi_{13}, \xi_{23}, \xi_{33}\},$$

$$\{\xi_{1n}, \xi_{2n}, \xi_{3n}, \dots, \xi_{nn}\}$$

с $M\{\xi_{kn}\} = 0$ и $\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_{kn}$. Рассматривается сходимость по распределению величин η_n при $n \rightarrow \infty$.

Здесь также надо ввести условие равномерной малости слага-

емых; в общем виде это условие обычно записывают так:

$$\max_{1 \leq k \leq n} P(|\xi_{kn}| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (I)$$

Но этот общий случай мы рассматривать не будем, а рассмотрим более частный случай ограниченных дисперсий. Если обозначить $\sigma_{kn}^2 = D\{\xi_{kn}\}$, то этот случай характеризуется следующими ограничениями:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{kn}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sum_{k=1}^n \sigma_{kn}^2 \leq C < +\infty. \quad (2)$$

Используя неравенство Чебышева, получим

$$\max_{1 \leq k \leq n} P(|\xi_{kn}| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{kn}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

т.е. из условия (2) следует условие (I).

Лемма. При выполнении условия (2)

$$\sum_{k=1}^n [\ln g_{kn}(u) - (g_{kn}(u) - 1)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где $g_{kn}(u) = M\{e^{iu\xi_{kn}}\}$.

Доказательство. Имеем

$$|g_{kn}(u) - 1| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux) dF_{kn}(x) \right| \leq \frac{u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{kn}(x) \leq \frac{T^2}{2} \sigma_{kn}^2,$$

отсюда следует, что

$$\max_{1 \leq k \leq n} |g_{kn}(u) - 1| \leq \frac{T^2}{2} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{kn}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому, начиная с некоторого n , все $|g_{kn}(u) - 1|$ меньше $1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n [\ln g_{kn}(u) - (g_{kn}(u) - 1)] \right| &\leq \sum_{k=1}^n |g_{kn}(u) - 1|^2 \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |g_{kn}(u) - 1| \sum_{k=1}^n |g_{kn}(u) - 1| \leq \frac{T^2}{2} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{kn}^2 \leq \\ &\leq \frac{T^4}{4} \cdot C \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{kn}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ вместо $\psi_n(u) = \sum_{k=1}^n \ln g_{kn}(u)$ можно рассматривать

$$\psi_n(u) = \sum_{k=1}^n (g_{kn}(u) - 1),$$

т.к. при $n \rightarrow \infty$ обе эти функции сходятся к одному пределу.

Преобразуем выражение для $\psi_n(u)$. Т.к. $M\{f_{k_n}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{k_n}(x) = 0$,
то

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= \sum_{k=1}^n (g_{k_n}(u) - 1) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux) dF_{k_n}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} x^2 dF_{k_n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} dK_n(x),\end{aligned}$$

где

$$K_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^x y^2 dF_{k_n}(y).$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

- 1) $K_n(-\infty) = 0$;
- 2) $K_n(x)$ монотонно возрастают с ростом x ;
- 3) $\bigvee_{-\infty}^{\infty} K_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dF_{k_n}(y) \leq C$.

Допустим, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = K(x)$. Функция $K(x)$ обладает теми же свойствами, что и $K_n(x)$. Обозначим

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} dK(x).$$

Теорема 1. Каждая функция $g(u) = e^{\psi(u)}$ является характеристической функцией некоторой случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = \bigvee_{-\infty}^{\infty} K(x)$.

Доказательство. Подынтегральная функция в выражении для $\psi(u)$ ограничена по x :

$$\frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \leq \frac{u^2}{2}$$

и непрерывна по u . Поэтому $\psi(u)$ — непрерывная функция, равная пределу сумм вида

$$\sum_k \{iua_{k_n} + \lambda_{k_n}(e^{iub_{k_n}} - 1)\}.$$

Каждое слагаемое является логарифмом некоторой характеристической функции, поэтому их сумма также является логарифмом некоторой характеристической функции. После предельного перехода в силу того, что $\psi(u)$ — непрерывная функция, $e^{\psi(u)}$ также будет характеристической функцией. ♦

Теорема 2. $\psi(u)$ однозначно определяет $K(x)$ и наоборот, $K(x)$ однозначно определяет $\psi(u)$.

Доказательство. То, что $K(x)$ однозначно определяет $\Psi(u)$, очевидно.

Дифференцируя выражение для $\Psi(u)$ дважды, получим

$$-\Psi''(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dK(x).$$

В силу формулы обращения эта формула вместе с условием $K(-\infty)=0$ однозначно определяет $K(x)$. ♦

Теорема 3. Если $K_n(x)$ слабо сходится к $K(x)$, то $\Psi_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Psi(u)$. Наоборот, если $\Psi_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Psi(u)$, то $K_n(x)$ слабо сходится к $K(x)$.

Доказывать эту теорему мы не будем. Теперь мы можем доказать центральную предельную теорему в более общем случае. ♦

Теорема. Пусть мы имеем последовательность серий независимых случайных величин $\{\xi_{kn}, k = \overline{1, n}\}$, у которых $M\{\xi_{kn}\} = 0$, $\sigma_{kn}^2 = D\{\xi_{kn}\}$ и выполняется условие $\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{kn}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\sum_{k=1}^n \sigma_{kn}^2 \leq C < +\infty$. Тогда семейство предельных функций распределения для величины $\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_{kn}$ совпадает с семейством случайных величин с характеристической функцией вида $y(u) = e^{\Psi(u)}$, где

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{1 - ixu}{x^2} dK(x)$$

и $K(x)$ монотонно возрастает, $K(x)|_{x=-\infty} = 0$, $\bigvee_{-\infty}^{\infty} K(x) \leq C$. $\eta_n \xrightarrow{F} \eta$ тогда и только тогда, когда $K_n(x) \Rightarrow K(x)$, где

$$K_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^x y^2 dF_{\xi_{kn}}(y).$$

Эта теорема непосредственно следует из теорем I, 2, 3. ♦

Частные случаи

I. Сходимость к нормальному распределению

Так как нормальному распределению соответствует $\Psi(u) = -\frac{u^2}{2}$,

то

$$-\Psi''(u) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dK(x).$$

Отсюда получаем, что

$$K(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, сходимость к нормальному распределению имеет место тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^x y^2 dF_{k,n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Покажем, что из этого условия следует условие Линдеберга. Действительно, если $\sum_{k=1}^n b_{k,n}^2 = 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{|x| \geq \varepsilon} y^2 dF_{k,n}(y) &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{-\varepsilon} y^2 dF_{k,n}(y) + \sum_{k=1}^n \int_{\varepsilon}^{\infty} y^2 dF_{k,n}(y) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\varepsilon} y^2 dF_{k,n}(y) + 1 - \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\varepsilon} y^2 dF_{k,n}(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

А это и есть условие Линдеберга.

2. Пуассоновская сходимость

Распределению Пуассона соответствует характеристическая функция вида

$$g(u) = e^{\lambda(e^{iu} - 1)},$$

т.е.

$$\psi(u) = iu\lambda + \lambda(e^{iu} - 1 - iu).$$

Первое слагаемое соответствует отличному от нуля математическому ожиданию и роли не играет. Второе слагаемое получается при

$$K(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1; \\ 1, & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, сходимость к распределению Пуассона имеет место тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^x y^2 dF_{k,n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1; \\ 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

§ 5. Усиленный закон больших чисел

Перейдем теперь к теоремам, устанавливающим условия, при которых имеет место сходимость почти наверное. Совокупность этих теорем носит общее название усиленного закона больших чисел.

Основой для вывода соответствующих теорем является так называемый

Закон нуля и единицы (лемма Бореля-Кантелли)

Если для последовательности событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, то $P(\limsup A_n) = 0$.
Если события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(\limsup A_n) = 1$.

Доказательство. 1) Вспомним, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Так как события $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ монотонно убывают с ростом n , то $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$. Тогда имеем

$$0 \leq P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0,$$

т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ сходится.

2) Ниже будет использовано элементарное неравенство $1-x \leq e^{-x}$.

Имеем

$$\begin{aligned} P(\bar{B}_n) &= P(\Omega \setminus \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) = P(\bigcap_{m=n}^{\infty} (\Omega \setminus A_m)) = P(\bigcap_{m=n}^{\infty} \bar{A}_m) = \\ &= \prod_{m=n}^{\infty} (1 - P(A_m)) \leq e^{-\sum_{m=n}^{\infty} P(A_m)}, \end{aligned}$$

где применяется условие независимости событий A_m . Так как $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) = +\infty$, то при любом n $\sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = \infty$, поэтому $P(\bar{B}_n) = 0$ и, следовательно, $P(B_n) = 1$. Так как

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n, \text{ то}$$

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 1. \quad \blacklozenge$$

В чем смысл доказанной леммы? Вспомним, что событие $\limsup A_n$ наступает тогда, когда наступает бесконечное число событий A_n . Поэтому если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ и A_n независимы, то с вероятностью 1, т.е. почти наверное, наступит бесконечное число событий A_n ; если же $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то почти наверное наступит конечное число событий A_n (т.к. $P(\limsup A_n) = 0$).

Теорема. Пусть для некоторого $k \geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M\{|X_n - \{1\}^k\}|$ сходится. Тогда $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p, k} \{1\}$.

Доказательство. Обозначим через A_n событие $\{\omega: |\xi_n - \bar{\xi}| > \varepsilon\}$. Тогда по неравенству Чебышева

$$P(A_n) = P(\{\omega: |\xi_n - \bar{\xi}| > \varepsilon\}) \leq \frac{M\{|\xi_n - \bar{\xi}|^k\}}{\varepsilon^k},$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{n=1}^{\infty} M\{|\xi_n - \bar{\xi}|^k\} < +\infty.$$

Отсюда $P(\limsup A_n) = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$, с вероятностью 1 найдется такое N , что $\forall n > N$, события A_n не наступят, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{с вероятностью 1} \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |\xi_n - \bar{\xi}| < \varepsilon.$$

Это и означает, что с вероятностью 1 $\lim \xi_n = \bar{\xi}$, т.е. $\xi_n \xrightarrow{p.p.} \bar{\xi}$.

При использовании этой теоремы приходится брать $k = 4$, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} M\{|\xi_n - \bar{\xi}|^2\}$ обычно расходится, а вычислять $M\{|\xi_n - \bar{\xi}|^3\}$ достаточно сложно из-за наличия модуля.

Для получения более глубоких теорем докажем сначала так называемое

Неравенство Колмогорова. Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, то

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{s=1}^k (\xi_s - M\{\xi_s\})| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n D\{\xi_k\}.$$

Доказательство. Введем следующие события:

$$E_0 = \{\omega: |S_1| < \varepsilon, |S_2| < \varepsilon, \dots, |S_n| < \varepsilon\},$$

$$E_k = \{\omega: |S_1| < \varepsilon, |S_2| < \varepsilon, \dots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \geq \varepsilon\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\text{где} \quad S_k = \sum_{s=1}^k (\xi_s - M\{\xi_s\}).$$

Очевидно, что $E_0, E_1, \dots, E_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий. Тогда, т.к. $M\{S_k\} = 0$,

$$\begin{aligned} D\{S_n\} &= \sum_{k=1}^n D\{\xi_k\} = M\{S_n^2\} = \sum_{k=1}^n M\{S_n^2/E_k\} P(E_k) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n M\{S_n^2/E_k\} P(E_k), \end{aligned}$$

поскольку выбрасывается неотрицательное слагаемое. Далее, если

обозначить $\xi_j - M\{\xi_j\} = \eta_j$, то

$$S_n = S_k + \sum_{j=k+1}^n \eta_j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S_n^2 &= S_k^2 + 2S_k \sum_{j>k} \eta_j + \sum_{j>k} \eta_j^2 + 2 \sum_{j>h>k} \eta_j \eta_h \geq \\ &\geq S_k^2 + 2S_k \sum_{j>k} \eta_j + 2 \sum_{j>h>k} \eta_j \eta_h. \end{aligned}$$

Но $M\{S_k^2/E_k\} \geq \varepsilon^2$ т.к. в определении E_k утверждалось, что $|S_k| \geq \varepsilon$. Заметим далее, что E_k определяется лишь $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, т.е. E_k не зависит от η_j при $j > k$. В силу взаимности свойства независимости верно и обратное, т.е. η_j при $j > k$ не зависят от E_k . Поэтому

$$\begin{aligned} M\{S_k \eta_j / E_k\} &= M\{S_k / E_k\} \cdot M\{\eta_j\} = 0; \\ M\{\eta_j \eta_h / E_k\} &= M\{\eta_j / E_k\} \cdot M\{\eta_h\} = 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$M\{S_n^2 / E_k\} \geq M\{S_k^2 / E_k\} \geq \varepsilon^2.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{D}\{\xi_k\} \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(E_k) = \varepsilon^2 P(\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{s=1}^k (\xi_s - M\{\xi_s\})| \geq \varepsilon),$$

откуда и следует доказываемое неравенство

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{s=1}^k (\xi_s - M\{\xi_s\})| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \mathcal{D}\{\xi_k\}. \quad \blacklozenge$$

Теорема Колмогорова (I). Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}\{\xi_k\}}{k^2} < +\infty$, то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\{\xi_k\}) \xrightarrow{p.n} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть, как и выше, $S_n = \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\{\xi_k\})$ и

$$v_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\{\xi_k\}). \text{ Рассмотрим событие}$$

$$A_n = \{\omega: \max_n |v_n| \geq \varepsilon, 2^m \leq n < 2^{m+1}\}.$$

Оценим вероятность этого события. Условие $|v_n| \geq \varepsilon$ можно переписать так: $|S_n| \geq \varepsilon n$. Так как с ростом n εn увеличивается, то

$$\{\omega: |S_n| \geq \varepsilon n, 2^m \leq n < 2^{m+1}\} \subset \{\omega: |S_n| \geq \varepsilon 2^m, 2^m \leq n < 2^{m+1}\},$$

значит,

$$P(A_m) \leq P(\{\omega: \max_n |S_n| \geq \varepsilon 2^m, 2^m \leq n < 2^{m+1}\}).$$

Далее с увеличением множества максимум может только возрасти. Поэтому, расширяя область значений n , мы только увеличиваем вероятность того, что $\max_n |S_n| \geq \varepsilon 2^m$. Тогда

$$P(A_m) \leq P(\{\omega: \max_n |S_n| \geq \varepsilon 2^m, 1 \leq n < 2^{m+1}\}).$$

По неравенству Колмогорова

$$P(A_m) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 4^m} \sum_{i < 2^{m+1}} D\{f_i\}.$$

Оценим теперь $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$. Имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} D\{f_i\}.$$

Меняя местами порядок суммирования, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} D\{f_i\} \sum_{m=f_i}^{\infty} \frac{1}{4^m},$$

где f_i определяется условием $2^{f_i} \leq i < 2^{f_i+1}$. Внутренняя сумма легко находится

$$\sum_{m=f_i}^{\infty} \frac{1}{4^m} = \frac{1}{4^{f_i}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \frac{1}{4^{f_i}}.$$

Так как $i < 2^{f_i+1}$, то $\frac{1}{2^{f_i+1}} < \frac{1}{i}$ и $\frac{1}{4^{f_i}} < \frac{4}{i^2}$. Поэтому

$$\sum_{m=f_i}^{\infty} \frac{1}{4^m} \leq \frac{16}{3} \frac{1}{i^2} \quad \text{и окончательно}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) \leq \frac{16}{3\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D\{f_i\}}{i^2}.$$

В силу сходимости последнего ряда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ также сходится. По лемме Бореля-Кантелли с вероятностью 1 может наступить лишь конечное число событий A_m ; поэтому с вероятностью 1 существует такое N , что для всех $n > N$ $|S_n| < \varepsilon$ т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{п.н.} \exists N, \forall n > N, \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f_k - M\{f_k\}) \right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f_k - M\{f_k\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0. \quad \blacklozenge$$

Теорема Колмогорова (2). Пусть случайные величины $\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ независимы и одинаково распределены. Тогда для того, чтобы

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f_k - M\{f_k\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0, \quad \text{необходимо и достаточно, чтобы}$$

существовало конечное $M\{f_k\}$, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$.

Доказательство. При доказательстве этой теоремы используется очень интересный прием — так называемое усечение.

Достаточность. I. Рассмотрим величины

$$\eta_k = \begin{cases} f_k, & \text{если } |f_k| < k; \\ 0, & \text{если } |f_k| \geq k. \end{cases}$$

Тогда

$$P(\eta_k \neq f_k) = \int_{|x| \geq k} dF(x) = \sum_{\ell=k}^{\infty} \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} dF(x),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P(\eta_k \neq f_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=k}^{\infty} \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} dF(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} dF(x) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} dF(x) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} |x| dF(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому по лемме Бореля-Кантелли с вероятностью I η_k отлично от f_k лишь конечное число раз.

2. Проверим для величин η_k выполнение условий теоремы Колмогорова (I). Имеем

$$\begin{aligned} D\{\eta_k\} &\leq M\{\eta_k^2\} = \int_{|x| < k} x^2 dF(x) = \\ &= \sum_{\ell=1}^k \int_{\ell-1 \leq |x| < \ell} x^2 dF(x) \leq \sum_{\ell=1}^k \ell \int_{\ell-1 \leq |x| < \ell} dF(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\{\eta_k\}}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^k \ell \int_{\ell-1 \leq |x| < \ell} dF(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \int_{(\ell-1) \leq |x| < \ell} dF(x) \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Для внутренней суммы можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \text{II} \quad \ell \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{k^2} &\leq \ell \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{\ell}{\ell-1} \leq 2 \quad \text{для } \ell \geq 2 \\ \text{I.} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} &= \frac{\pi^2}{6} < 2, \end{aligned}$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\{\eta_k\}}{k^2} \leq 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{(\ell-1) \leq |x| < \ell} |x| dF(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x).$$

Значит, согласно теореме Колмогорова (I)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - M\{y_k\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.H.} 0.$$

3. Так как

$$M\{y_k\} = \int_{-k}^k x dF(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = M\{y_k\}$$

и с вероятностью I y_k отличается от $\{y_k\}$ лишь конечное число раз, то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - M\{y_k\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.H.} 0.$$

Необходимость. Пусть $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - M\{y_k\}) = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.H.} 0$.

Так как $y_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\frac{y_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.H.} 0$$

и события $A_n = \{\omega: \frac{|y_n|}{n} \geq 1\}$ наступают лишь конечное число раз. По лемме Бореля-Кантелли отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|y_n|}{n} \geq 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|y_n| > n) < \infty,$$

но

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(|y_n| \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} P(\ell \leq |y_n| < \ell+1) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} P(\ell \leq |y_n| < \ell+1) \sum_{n=\ell}^{\infty} 1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P(\ell \leq |y_n| < \ell+1) < \infty. \end{aligned}$$

Однако, с другой стороны,

$$\begin{aligned} M\{|y_n|\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} |x| dF(x) \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \int_{\ell \leq |x| < \ell+1} dF(x) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P(\ell \leq |y_n| < \ell+1) + 1 < \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает необходимость. $\blacklozenge$

Следствие (теорема Бореля). Пусть вероятность события A равна p . Если производится n независимых опытов, то

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.H.} p,$$

где m - число наступлений события A в n опытах.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м опыте событие } A \text{ наступает;} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м опыте событие } A \text{ не наступает.} \end{cases}$$

Тогда случайные величины ξ_i независимы и одинаково распределены, $M\{\xi_i\} = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$ и $\sum_{i=1}^n \xi_i = m$.

По теореме Колмогорова (2)

$$\frac{1}{n}(m - np) = \frac{m}{n} - p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n, n} 0 \quad \text{т.е.} \quad \frac{m}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n, n} p. \quad \blacklozenge$$

Эта теорема в некотором смысле замыкает круг, который начался статистическим определением вероятности. Напомним, что статистическое определение вероятности опиралось на опытный факт — сходимость частоты $\frac{m}{n}$ к некоторой величине p , которая называлась вероятностью события. Теперь этот факт является следствием теорем, так же, как и то, что $\frac{m}{n}$ сходится именно к вероятности, а не к какой-то другой величине. Если бы такого замыкания не получилось, вряд ли бы можно было считать всю теорию вероятностей верной и не противоречащей опытным данным.

Часть II

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ I. Определение и описание случайного процесса

Случайные процессы являются удобной математической моделью функций времени, значения которых есть случайные величины. Например: число заявок, поступающих в единицу времени на телефонную станцию, являясь случайной величиной, зависит и от времени суток; расход электроэнергии в единицу времени — тоже функция времени со случайными значениями; координата броуновской частицы меняется со временем и принимает случайные значения. То есть можно сказать, что случайный процесс — это семейство случайных величин, зависящее от времени. Для более строгого определения случайного процесса вспомним определение случайной величины.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Случайная величина $\xi(\omega)$ — это измеримая функция, отображающая это вероятностное пространство на борелевскую прямую $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Рассмотрим теперь функцию, зависящую от двух аргументов $\xi(\omega, t)$ $\omega \in \Omega, t \in T$. Функцию $\xi(\omega, t)$ называют случайным процессом, если при $\forall t \in T$ она является измеримой функцией ω . Как видно из этого определения, при фиксированном t $\xi_t(\omega)$ получаем случайную величину, которую назовем сечением случайного процесса, или отсчетом процесса в момент t . Если зафиксируем ω , $\xi_\omega(t)$, получим неслучайную функцию времени, которую назовем реализацией случайного процесса. Совокупность всех реализаций случайного процесса называют ансамблем реализаций.

В дальнейшем случайный процесс $\xi(t, \omega)$ будем обозначать $\xi(t)$, где t имеет смысл времени.

Рассмотрим сечение случайного процесса в момент t_1 , $\xi(t_1)$. Функция

$$F(x_1, t_1) = P(\xi(t_1) < x_1)$$

носит название одномерной функции распределения случайного процесса в момент времени t_1 . Если зафиксируем два момента времени t_1 и t_2 , то вероятность совместного выполнения неравенств $\xi(t_1) < x_1$ и $\xi(t_2) < x_2$ задает двумерную функцию распределения случайного процесса

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(\xi(t_1) < x_1; \xi(t_2) < x_2).$$

И вообще, n сечений случайного процесса описываются n -мерной функцией распределения

$$F(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = P\{\{(t_1) < x_1, \dots, \{(t_n) < x_n\}. \quad (1)$$

Будем считать, что случайный процесс $\{t\}$ задан, если задано семейство функций распределения (1) для $\forall n$. Отметим, что функция $F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ должна удовлетворять очевидным соотношениям, которые называют условиями согласованности:

$$F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = F(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n; \infty, t_{n+1}, \dots, \infty, t_{n+p}); \quad (2)$$

$$F(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = F(x_{i_1}, t_{i_1}; x_{i_2}, t_{i_2}; \dots, x_{i_n}, t_{i_n}), \quad (3)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n$ - любая перестановка индексов $1, 2, \dots, n$ для $\forall n$. Теперь можно сформулировать еще одно определение случайного процесса.

Случайным процессом $\{t\}$, заданным на множестве T ($t \in T$), называют семейство распределений (1), удовлетворяющих условиям согласованности (2), (3). Набор функций $F(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$ для $n = 1, 2, \dots$ называют конечномерным распределением случайного процесса. Явное выражение конечномерных функций распределения случайного процесса часто бывает неудобным для применения. Поэтому иногда случайный процесс задают плотностью распределения или характеристической функций.

Если $\rho(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$ - n -мерная плотность распределения, то

$$F(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \rho(y_1, t_1; \dots, y_n, t_n) dy_1 \dots dy_n, \quad \forall n.$$

При этом условие согласованности (2) принимает вид

$$\rho(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n; y_1, t_{n+1}; \dots, y_p, t_{n+p}) dy_1 \dots dy_p.$$

Характеристическая функция конечномерного распределения вводится, как для многомерных случайных величин

$$\begin{aligned} g(u_1, t_1; \dots, u_n, t_n) &= M\{e^{i \sum_{k=1}^n \{(t_k) u_k}\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{k=1}^n x_k u_k} \rho(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4)$$

До сих пор шла речь об описании одного случайного процесса. При решении многих задач приходится иметь дело с несколькими случайными процессами. Для задания, например, двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ вводится конечномерная функция распределения размерности $n+m$:

$$F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n; y_1, t'_1; \dots; y_m, t'_m) = \\ = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n; \eta(t'_1) < y_1, \dots, \eta(t'_m) < y_m\}. \quad (5)$$

Эта функция распределения в общем случае не обладает свойством симметрии относительно всех перестановок аргументов.

§ 2. Статистические средние характеристики случайных процессов

Как уже указывалось, конечномерные распределения дают исчерпывающую характеристику случайного процесса. Однако во многих случаях представляет интерес более сжатая характеристика распределения, отражающая основные свойства случайного процесса. Роль таких характеристик случайных процессов играют моментные функции или статистические средние.

Средним значением случайного процесса (статистическим средним) $m_\xi(t)$ называется математическое ожидание сечения случайного процесса в момент времени t и обозначается

$$m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = \int x_c dF(x, t). \quad (6)$$

Оно определяется одномерной функцией распределения $F(x, t)$ и в общем случае является функцией времени.

Дисперсией случайного процесса $\xi(t)$ называется дисперсия сечения случайного процесса и тоже определяется одномерным распределением

$$D_\xi(t) = M\{\xi(t) - m_\xi(t)\}^2 = \int (x - m_\xi(t))^2 dF(x, t). \quad (7)$$

Функцией корреляции случайного процесса $\xi(t)$ называют математическое ожидание произведения двух сечений случайного процесса

$$K_\xi(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \\ = \iint x_1 x_2 dF(x_1, t_1; x_2, t_2). \quad (8)$$

Она определяется двумерной функцией распределения $F(x_1, t_1; x_2, t_2)$ и в общем случае зависит от двух аргументов — t_1, t_2 . Эту функцию $R_f(t_1, t_2)$ называют также функцией автокорреляции.

Функция ковариации случайного процесса $\{t\}$ — математическое ожидание произведения центрированных сечений процесса в два момента времени

$$K_f(t_1, t_2) = \text{cov}(\{t_1\}, \{t_2\}) = M\{(\{t_1\} - m_f(t_1))(\{t_2\} - m_f(t_2))\}.$$

При $t_1 = t_2 = t$ функция ковариации дает дисперсию случайного процесса $D_f(t)$:

$$K_f(t, t) = D_f(t) = \sigma_f^2(t).$$

Величину

$$r(t_1, t_2) = \frac{K_f(t_1, t_2)}{\sigma_f(t_1)\sigma_f(t_2)} = \frac{K_f(t_1, t_2)}{\sqrt{K_f(t_1, t_1)K_f(t_2, t_2)}}$$

называют нормированной функцией ковариации или коэффициентом корреляции случайного процесса. В общем случае коэффициент корреляции является мерой линейной зависимости двух сечений процесса $\{t_1\}$ и $\{t_2\}$, то есть он показывает, с какой точностью одна из случайных величин $\{t_1\}$ может быть линейно выражена через другую $\{t_2\}$.

Для двух случайных процессов вводится понятие взаимной функции корреляции или функции кросс-корреляции $R_{f\eta}(t_1, t_2)$:

$$R_{f\eta}(t_1, t_2) = M\{\{t_1\}\eta(t_2)\}. \quad (9)$$

Совместная корреляционная функция двух случайных процессов $\{t\}$ и $\eta(t)$ определяется как матричная функция

$$\begin{pmatrix} R_f(t_1, t_2) & R_{f\eta}(t_1, t_2) \\ R_{\eta f}(t_1, t_2) & R_\eta(t_1, t_2) \end{pmatrix},$$

все элементы которой определены выше.

§ 3. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс $\{t\}$ называется стационарным в узком смысле или строго стационарным, если его конечномерная функция распределения инвариантна относительно сдвига всех моментов

времени t_i , $i = \overline{1, n}$ на одну и ту же величину τ :

$$F(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = F(x_1, t_1 + \tau; \dots, x_n, t_n + \tau) \quad \text{или} \\ \rho(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \rho(x_1, t_1 + \tau; \dots, x_n, t_n + \tau) \quad \forall \tau \text{ и } n = 1, 2, \dots \quad (I0)$$

Другими словами, статистические (вероятностные) свойства случайного процесса не зависят от начала наблюдения.

При $n = 1$ условие стационарности дает

$$\rho(x_1, t_1) = \rho(x_1, t_1 + \tau).$$

Полагая $\tau = -t_1$, имеем

$$\rho(x_1, t_1) = \rho(x_1),$$

то есть одномерное распределение стационарного процесса не зависит от времени. А одномерное распределение, как мы помним, определяет средние значения и дисперсию случайного процесса, следовательно, для строго стационарного случайного процесса среднее и дисперсия не зависят от времени

$$m_1(t) = m_1 = \text{const}; \\ D_1(t) = \sigma_1^2 = \text{const}. \quad (II)$$

При $n = 2$ из условия стационарности (I0) следует

$$\rho(x_1, t_1; x_2, t_2) = \rho(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau).$$

Полагая $\tau = -t_1$, получим

$$\rho(x_1, t_1; x_2, t_2) = \rho(x_1, x_2, t_2 - t_1).$$

Двумерное распределение зависит лишь от разности моментов времени t_1, t_2 , следовательно, функция корреляции стационарного случайного процесса зависит только от одного аргумента

$$R_f(t_1, t_2) = \iint x_1 x_2 \rho(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \\ = \iint x_1 x_2 \rho(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = R_f(t_2 - t_1). \quad (I2)$$

В тех случаях, когда проверить выполнение условия (I0) для любого n не представляется возможным, рассматривают понятие стационарности в широком смысле, ограничиваясь выполнением условий (II) и (I2).

Случайный процесс назовём стационарным в широком смысле, если его среднее значение и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит лишь от разности моментов времени.

Очевидно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Наоборот верно не всегда. В частности, как будет показано в дальнейшем, для гауссовских случайных процессов верно и обратное утверждение.

Два случайных процесса называются стационарно связанными, если их совместная функция распределения любого порядка (5) не зависит от положения начала отсчета времени.

§ 4. Эргодические случайные процессы

Для стационарных случайных процессов кроме средних статистических характеристики вводятся еще характеристики, средние по времени.

Выберем k -ю реализацию случайного процесса $\{^{(k)}(t)\}$ и будем наблюдать её в течение времени T . Рассмотрим среднее по времени значений этой реализации

$$\langle \{^{(k)}(t)\} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{^{(k)}(t)\} dt = \tilde{m}_k. \quad (13)$$

Здесь символом $\langle \rangle$ обозначено усреднение по времени, в отличие от M - усреднения по распределению, или статистического усреднения. Это временное среднее можно рассматривать как постоянную составляющую случайного процесса $\{^{(k)}(t)\}$. Аналогично можно ввести временную функцию корреляции

$$\tilde{R}_f(\tau) = \langle \{^{(k)}(t)\} \{^{(k)}(t+\tau)\} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{^{(k)}(t)\} \{^{(k)}(t+\tau)\} dt. \quad (14)$$

Заметим, что не для любого случайного процесса приведенные временные средние имеют конечное значение. Но даже если временные средние существуют, то они могут быть различными для разных реализаций случайного процесса. Исключение составляют эргодические процессы, для которых временные средние одинаковы для всех реализаций и, кроме того, совпадают с соответствующими статистическими средними. Случайный процесс назовём эргодическим, если любая его статистическая характеристика с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, равна временному среднему, полученному усреднением одной-единственной реализации за достаточно большой промежуток времени. Из эквивалентности двух способов усреднения эргодического случайного процесса по распределению и по времени следует, что нет

необходимости изучать ансамбль реализаций, которым исследователь, как правило, не располагает, а достаточно одной реализации, заданной на достаточно длительном промежутке времени. Необходимыми и достаточными условиями эргодичности случайного процесса являются; 1) строгая стационарность и 2) так называемая метрическая транзитивность, состоящая в том, что любая часть ансамбля реализаций случайного процесса, вероятностная мера которой отлична от 0 или 1, уже не является строго стационарной.

Стационарность является необходимым условием эргодичности. Это следует из того, что временное среднее случайного процесса не зависит от времени и временная функция корреляции зависит лишь от одного аргумента; эти утверждения верны для статистических характеристик стационарного процесса.

Однако стационарность не является достаточным условием. Например, процесс $\xi(t)$, равный

$$\xi(t) = \eta(t) + \zeta,$$

является стационарным, но не эргодическим, если $\eta(t)$ — эргодический случайный процесс и ζ — непрерывная случайная величина, заданная на всей числовой оси. Строгая стационарность $\xi(t)$ очевидна. Однако условие метрической транзитивности нарушено. Выделим совокупность реализаций $\xi(t)$, в которой $\zeta > 0$, причем $\rho_1 = P(\zeta > 0) > 0$. Очевидно, что эта совокупность является строго стационарной, так как случайная величина ζ не зависит от времени. Другими словами можно сказать, что к различным реализациям процесса $\xi(t)$ относятся различные значения случайной величины ζ .

Итак, если случайный процесс эргодический, то любая его реализация определяет свойства всей совокупности и поэтому результат усреднения по времени, выполненный по одной реализации, совпадает с соответствующей статистической характеристикой процесса в любой момент времени, то есть

$$m_f(t) = \tilde{m}_f; \\ R_f(\tau) = \tilde{R}_f(\tau).$$

Можно ввести и другие временные характеристики процесса. Так, одномерная временная функция распределения $\tilde{F}(x)$ есть среднее время пребывания процесса ниже уровня x , что совпадает

с вероятностью того, что значения случайного процесса в любой момент времени не превосходят x , т.е.

$$\tilde{F}(x) = P\{\xi(t) < x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C(x - \xi^{(n)}(t)) dt, \quad (I6)$$

где $C(y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

Одномерная характеристическая функция определяется как среднее значения величины $e^{i y \xi(t)}$, поэтому характеристическая функция по времени равна

$$\tilde{g}_1(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i u \xi^{(n)}(t)} dt. \quad (I7)$$

Основное преимущество временных средних состоит в том, что для их вычисления требуется наблюдение за одной единственной реализацией, чем чаще всего и располагает исследователь. Поэтому формулы (I3), (I4), (I6), (I7) используются для экспериментального определения основных характеристик случайного процесса.

§ 5. Комплексные случайные процессы

Реально протекающие явления, как правило, описываются случайными процессами, принимающими действительные значения. Однако иногда бывает полезным воспользоваться понятием комплексного случайного процесса

$$\zeta(t) = \xi(t) + i \eta(t),$$

который можно рассматривать как двумерный случайный процесс, каждая компонента которого является действительным процессом. Конечномерное распределение порядка n случайного процесса $\zeta(t)$ задается $2n$ -мерным совместным распределением процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, $F_\zeta(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n; y_1, t_1; \dots, y_n, t_n)$.

Среднее значение и корреляционная функция комплексного процесса определяются следующими формулами:

$$m_\zeta(t) = m_\xi(t) + i m_\eta(t);$$

$$R_\zeta(t) = M\{\zeta(t_1) \zeta^*(t_2)\} =$$

$$= R_f(t_1, t_2) + R_g(t_1, t_2) + r[R_{fg}(t_1, t_2) - R_{gf}(t_1, t_2)].$$

Здесь $\{^*$ означает комплексное сопряжение. Комплексные случайные процессы удобны для описания радиотехнических сигналов.

§ 6. Функция корреляции и её свойства

Перечислим основные свойства функции корреляции случайного процесса $R_f(t_1, t_2)$.

I. Функция корреляции является симметрической функцией своих аргументов

$$R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1). \quad (18)$$

Это следует непосредственно из определения. Для стационарных случайных процессов функция корреляции - четная функция

$$R(\tau) = R(t_2 - t_1) = R(t_1 - t_2) = R(-\tau). \quad (19)$$

$$2. |R(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R(t_1, t_1)R(t_2, t_2)}.$$

Для доказательства этого соотношения воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$M^2(uv) \leq Mu^2 Mv^2. \quad (20)$$

Обозначив $u = \{f(t_1)\}$ и $v = \{f(t_2)\}$, имеем

$$M^2\{f(t_1)f(t_2)\} \leq M\{f^2(t_1)\}M\{f^2(t_2)\}.$$

Для стационарных случайных процессов это неравенство означает, что в нуле функция корреляции достигает наибольшего значения. Так как $R(t_1, t_1) = R(t_2, t_2) = R(0)$, то

$$|R(\tau)| \leq R(0). \quad (21)$$

3. Если стационарный процесс не содержит квазидетерминированных составляющих, то зависимость между $\{f(t+\tau)\}$ и $\{f(t)\}$ при $\tau \rightarrow \infty$ должна ослабевать и в пределе эти величины статистически независимы. Так как среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению средних и для стационарных процессов среднее значение не зависит от времени, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = R(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} M\{f(t)f(t+\tau)\} = m_f^2.$$

Отсюда можно выразить среднее значение процесса

$$m_f = \sqrt{R(\infty)}.$$

Далее, используя определения дисперсии процесса, можно записать

$$\sigma_f^2 = R_f(0) - m_f^2 = R_f(0) - R(-\infty). \quad (22)$$

Таким образом, дисперсию и среднее значение процесса можно найти, если известна его функция корреляции.

4. Функция корреляции случайного процесса является положительно определенной, то есть для $\forall t_1, t_2$ и действительных λ_1, λ_2

$$\sum_{k,j} R_f(t_j, t_k) \lambda_j \lambda_k = M \left\{ \sum_{k,j} \{f(t_j) f(t_k)\} \lambda_j \lambda_k \right\} = M \left(\sum_k \{f(t_k) \lambda_k\} \right)^2 \geq 0.$$

5. Функция взаимной корреляции стационарных и стационарно связанных процессов $\{f(t)\}$ и $\{g(t)\}$ удовлетворяет соотношениям

$$R_{fg}(\tau) = R_{gf}(-\tau);$$

$$|R_{fg}(\tau)| \leq \sqrt{R_f(0) R_g(0)}.$$

6. Пусть $\{f(t)\} = \sum_{i=1}^n \xi_i(t)$, тогда

$$R_f(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i \neq j} R_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2). \quad (23)$$

Таким образом, корреляционная функция суммы случайных процессов равна сумме корреляционных функций плюс сумма всех взаимных корреляционных функций. Для некоррелированных случайных процессов имеем

$$R_f(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{\xi_i}(t_1, t_2). \quad (24)$$

Наряду с функцией корреляции в теории случайных процессов широко используется понятие спектральной плотности.

§ 7. Спектральная плотность случайного процесса

При изучении неслучайных функций весьма эффективно используется аппарат Фурье-преобразования. Для его применения достаточно, чтобы квадрат исследуемой функции был интегрируем, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty. \quad (25)$$

Тогда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

образуют пару преобразования Фурье. Непосредственно применение классического преобразования Фурье к случайному процессу $\{x(t)\}$ невозможно, так как для его реализаций не выполнено условие (25).

Рассмотрим $\{x_r^{(k)}(t)\}$ k -ю реализацию усеченного случайного процесса $\{x_r(t)\}$, заданного в виде

$$x_r(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < T; \\ 0, & |t| \geq T. \end{cases}$$

Эта реализация удовлетворяет условию (25) и, следовательно, можно записать Фурье-преобразование

$$Z_r^{(k)}(i\omega) = \int_{-T}^T x_r^{(k)}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_r^{(k)}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Рассмотрим функцию

$$G_r^{(k)}(i\omega) = \frac{1}{2T} \left| Z_r^{(k)}(i\omega) \right|^2 = \frac{1}{2T} \iint_{-T}^T x_r^{(k)}(t_1) x_r^{(k)}(t_2) e^{-i\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2.$$

Найдём статистическое среднее

$$\begin{aligned} S_r(\omega) &= M\{G_r^{(k)}(i\omega)\} = \frac{1}{2T} \iint_{-T}^T M\{x_r^{(k)}(t_1) x_r^{(k)}(t_2)\} e^{-i\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{2T} \iint_{-T}^T R_f(t_1, t_2) e^{-i\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Если случайный процесс $\{f(t)\}$ стационарен, по крайней мере, в широком смысле, то $R_f(t_1, t_2) = R_f(t_2 - t_1)$ и, следовательно,

$$S_r(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_f(t_2 - t_1) e^{-i\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2.$$

Делая замену переменных и выполняя интегрирование, получим

$$S_r(\omega) = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (26)$$

Рассмотрим предел при $T \rightarrow \infty$. Если предел правой части существует, то его называют спектральной плотностью мощности случайного процесса, или спектром мощности, и обозначают

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M |Z^{(k)}(\omega)|^2}{2T}$$

Тогда соотношение (28) принимает вид

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (27)$$

Несобственный интеграл от спектральной плотности вида

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S(u) du$$

называют спектральной функцией случайного процесса, которая имеет достаточно четкий физический смысл. Если под $f(t)$ понимать электрический ток и функцию $f(t)$ можно представить в виде бесконечной суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами, то приращения $S(\omega_2) - S(\omega_1)$ ($\omega_2 > \omega_1$) равно средней мощности рассеиваемой гармоническими составляющими, частоты которых лежат в полуинтервале $[\omega_1, \omega_2]$.

Из (27) видно, что спектральная плотность процесса не является самостоятельной характеристикой, а связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье, то есть

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad (28)$$

$$R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (29)$$

Эти соотношения называют теоремой Винера-Хинчина для стационарных случайных процессов. Как следует из (27), свойства $S(\omega)$ определяются свойствами функции корреляции $R(\tau)$. Так, используя для $e^{-i\omega\tau}$ формулу Эйлера, имеем

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда видно, что $S(\omega)$ — функция четная. Из (29) следует, что средняя мощность стационарного случайного процесса

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (31)$$

равна площади под кривой его спектра мощности.

Корреляционная функция $R(\tau)$ и спектральная плотность мощности $S(\omega)$ как пара преобразования Фурье обладают всеми свойствами, присущими этому преобразованию. В частности, чем "шире" спектр $S(\omega)$, тем "уже" корреляционная функция процесса $R(\tau)$ и наоборот. Если случайный процесс эргодический, то в соответствии с (14) можно в (27) подставить временную функцию корреляции любой реализации этого процесса и таким образом находить спектральную плотность мощности по его единственной реализации.

Глава II. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ I. Сходимость в среднем квадратическом

Понятие сходимости, интегрируемости, дифференцируемости случайных процессов отличается от соответствующих понятий в математическом анализе. Наиболее удобно и просто ввести эти понятия для процессов, удовлетворяющих условию $M\{|\dot{f}(t)|^2\} < \infty$, которые называют процессами второго порядка, или гильбертовыми процессами. Физически это условие означает, что процесс $\{f(t)\}$ имеет конечную мощность, что выполнимо для подавляющего большинства реальных процессов.

Сформулируем основные типы сходимости для случайных процессов. Пусть случайный процесс $\{f_s(t)\}$ зависит от некоторого параметра s .

Говорят, что последовательность $\{f_s(t)\}$ сходится к $\{f(t)\}$ по вероятности при $s \rightarrow s_0$, если

$$\lim_{s \rightarrow s_0} P\{|\{f_s(t)\} - \{f(t)\}| > \varepsilon\} = 0,$$

что обозначается как в теории вероятностей

$$\{f_s(t)\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} \{f(t)\}.$$

Говорят, что последовательность $\{f_s(t)\}$ сходится к $\{f(t)\}$ в среднем квадратическом при $s \rightarrow s_0$, если

$$\lim_{s \rightarrow s_0} M\{(\{f_s(t)\} - \{f(t)\})^2\} = 0.$$

Обозначение этого типа сходимости то же самое, что и раньше

$$\{f_s(t)\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} \{f(t)\} \quad \text{или} \quad \text{e. i. m. } \{f_s(t)\} = \{f(t)\}.$$

Напомним, что сходимость в среднем квадратическом более сильная сходимость, чем по вероятности. На её изучении и остановимся в дальнейшем.

Лемма. Если $\{f_s(t)\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} \{f(t)\}$ и $\{g_s(t)\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} \{g(t)\}$, то

$$M\{\{f_s(t_1)\}\{g_{s'}(t_2)\}\} \xrightarrow{s, s' \rightarrow s_0} M\{\{f(t_1)\}\{g(t_2)\}\}. \quad (\text{I})$$

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим $M\{\xi_s(t_1)\eta_{s'}(t_2) - \xi(t_1)\eta(t_2)\}$. К выражению под знаком математического ожидания прибавим и отнимем $(\xi_s\eta + \xi\eta_{s'} + \xi\eta)$, где для краткости опущены аргументы, тогда

$$M\{\xi_s\eta_{s'} - \xi\eta\} = M\{(\xi_s - \xi)(\eta_{s'} - \eta)\} + M\{(\xi_s - \xi)\eta\} + M\{\xi(\eta_{s'} - \eta)\}.$$

Далее для всех трех слагаемых воспользуемся неравенством Коши-Буняковского (20). Для первого слагаемого, обозначая

$$u = \xi_s - \xi \quad \text{и} \quad v = \eta_{s'} - \eta, \quad \text{имеем}$$

$$|M\{(\xi_s - \xi)(\eta_{s'} - \eta)\}|^2 \leq M\{(\xi_s - \xi)^2\} M\{(\eta_{s'} - \eta)^2\}.$$

По условию леммы и определению сходимости в среднем квадратическом каждый сомножитель в правой части стремится к нулю при $s, s' \rightarrow s_0$, поэтому

$$M\{(\xi_s - \xi)(\eta_{s'} - \eta)\} \xrightarrow{s, s' \rightarrow s_0} 0.$$

Для второго слагаемого, обозначая $u = \xi_s - \xi$, $v = \eta$, имеем

$$|M\{(\xi_s - \xi)\eta\}|^2 \leq M\{(\xi_s - \xi)^2\} M\{\eta^2\}.$$

Здесь $M\{(\xi_s - \xi)^2\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} 0$ по условию леммы, $M\{\eta^2\} < \infty$, так как η — процесс второго порядка, следовательно,

$$M\{(\xi_s - \xi)\eta\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$M\{\eta(\eta_{s'} - \eta)\} \xrightarrow{s' \rightarrow s_0} 0.$$

Тогда окончательно имеем доказываемое утверждение

$$M\{\xi_s(t_1)\eta_{s'}(t_2) - \xi(t_1)\eta(t_2)\} \xrightarrow{s, s' \rightarrow s_0} 0.$$

На основании этой леммы докажем критерий сходимости в среднем квадратическом.

Теорема. Для того, чтобы $\xi_s(t) \xrightarrow{ср. кв.} \xi(t)$ при $s \rightarrow s_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $s \rightarrow s_0$ и $s' \rightarrow s_0$ существовал и был конечен предел

$$\lim_{s, s' \rightarrow s_0} M\{\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} = A < \infty. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_s(t) \xrightarrow{ср. кб} f(t)$ при $s \rightarrow s_0$. В качестве $g_{s'}(t)$ возьмем $f_{s'}(t) \xrightarrow{ср. кб} f(t)$ при $s' \rightarrow s_0$. Тогда по только что доказанной лемме

$$M\{f_s(t)g_{s'}(t)\} = M\{f_s(t)f_{s'}(t)\} \xrightarrow{s, s' \rightarrow s_0} M\{f^2(t)\} < \infty.$$

Достаточность. Пусть при $s, s' \rightarrow s_0$ существует конечный предел $\lim_{s, s' \rightarrow s_0} M\{f_s(t)f_{s'}(t)\} = A$.

Тогда

$$M\{(f_s(t) - f_{s'}(t))^2\} = M\{f_s^2(t)\} + M\{f_{s'}^2(t)\} - 2M\{f_s(t)f_{s'}(t)\} \xrightarrow{s, s' \rightarrow s_0} A + A - 2A = 0, \quad (3)$$

то есть последовательность $f_s(t)$ сходится. В силу этого по лемме Больцано-Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f(t)$:

$$f_{s_1}(t), f_{s_2}(t), \dots, f_{s_n}(t) \xrightarrow{ср. кб} f(t) \text{ при } s_i \rightarrow s_0. \quad (4)$$

Осталось показать, что вся последовательность $f_s(t)$ сходится к этому же пределу $f(t)$. Используя неравенство $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, имеем

$$\begin{aligned} M\{(f_s - f)^2\} &= M\{[(f_s - f_{s_i}) + (f_{s_i} - f)]^2\} \leq \\ &\leq 2M\{(f_s - f_{s_i})^2\} + 2M\{(f_{s_i} - f)^2\}. \end{aligned}$$

С учетом (3) и (4) получаем

$$M\{(f_s(t) - f(t))^2\} \xrightarrow{s \rightarrow s_0} 0,$$

что и доказывает теорему. $\blacklozenge$

Следствие. Для того, чтобы $\lim_{s \rightarrow s_0} f_s(t) = f$, необходимо и достаточно

$$\lim_{s, s' \rightarrow s_0} M\{f_s(t)f_{s'}(t)\} = M\{f^2\}. \quad (5)$$

Доказательство. Обозначив $f_s(t) = f_s(t) \xrightarrow{ср. кб} f$ при $s \rightarrow s_0$ и $g_{s'}(t) = f_{s'}(t) \xrightarrow{ср. кб} f$ при $s' \rightarrow s_0$,

из предыдущих леммы и теоремы имеем

$$M\{\xi_s(t)\xi_{s'}(t)\} \xrightarrow{s, s' \rightarrow 0} M\{\eta^2\}$$

Здесь η — случайная величина с конечным вторым моментом. Рассмотрим далее понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом для случайных процессов.

§ 2. Непрерывность случайных процессов

Непрерывность случайных процессов определяется по-разному, в зависимости от выбранного типа сходимости. Сходимость по вероятности определяет стохастическую непрерывность процесса. Это самый слабый вид непрерывности.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стохастически непрерывным в точке t_0 , если

$$\lim_{s \rightarrow 0} P\{|\xi(t_0+s) - \xi(t_0)| > \varepsilon\} = 0.$$

Стохастическая непрерывность процесса относится к свойствам, однозначно определяемым её двумерным распределением. С этим свойством встретимся при изучении марковских процессов.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в среднем квадратическом в точке t_0 , если

$$\xi(t_0+s) \xrightarrow[\text{ср. кв.}]{s \rightarrow 0} \xi(t_0).$$

Из непрерывности в среднем квадратическом в точке t следует стохастическая непрерывность $\xi(t)$ в той же точке. Действительно, из неравенства Чебышева следует

$$P(|\xi(t+s) - \xi(t)| > \varepsilon) \leq \frac{M\{(\xi(t+s) - \xi(t))^2\}}{\varepsilon^2}.$$

Обратное утверждение, как уже раньше указывалось, в общем случае не верно.

Пример. Процесс Коши. Случайный процесс $\xi(t)$ назовем процессом Коши, если его приращения $\xi(t+s) - \xi(t)$ независи-

мы и подчиняются распределению Коши

$$P(x) = \frac{s}{\pi(s^2 + x^2)}.$$

Этот процесс - стохастически непрерывен, но не является непрерывным в среднем квадратическом, так как для распределения Коши

$$M \{(\xi(t+s) - \xi(t))^2\} = \infty.$$

Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратическом не означает, что реализации случайного процесса непрерывны с вероятностью 1. Примером является процесс Пуассона, который принимает целочисленные значения и является непрерывным в среднем квадратическом. В дальнейшем этот процесс будет рассмотрен более подробно.

Теорема. Для того, чтобы процесс $\xi(t)$ был непрерывным в среднем квадратическом в момент t , необходимо и достаточно чтобы его функция корреляции $R(t_1, t_2)$ была непрерывна в точке $t_1 = t_2 = t$.

Доказательство. Обозначим $\xi_s(t) = \xi(t+s)$. Тогда по критерию сходимости в среднем квадратическом имеем

$$\begin{aligned} M \{ \xi_s(t) \xi_{s'}(t) \} &= M \{ \xi(t+s) \xi(t+s') \} = \\ &= R(t+s, t+s') \xrightarrow{s, s' \rightarrow 0} R(t, t). \end{aligned} \quad (6)$$

А это, в свою очередь, есть не что иное, как условие непрерывности функции корреляции $R(t_1, t_2)$ в точке (t, t) .

Следствие I. Для того, чтобы стационарный случайный процесс $\xi(t)$ был непрерывен в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы его функция корреляции была непрерывна в точке $\tau = 0$.

Доказательство этого утверждения очевидно.

Следствие 2. Если $R(t, t)$ непрерывна для $\forall t \in T$, то $R(t_1, t_2)$ непрерывна для $\forall t_1, t_2 \in T$, то есть из непрерывности функции корреляции при совпадающих аргументах следует её непрерывность при несовпадающих аргументах.

Доказательство. Так как $R(t_1, t_1)$ и $R(t_2, t_2)$ непрерывны, то по критерию сходимости

$$\{ (t_1 + s) \xrightarrow[s \rightarrow 0]{\text{с.к.с.}} \{ (t_1) ;$$

$$\{ (t_2 + s') \xrightarrow[s' \rightarrow 0]{\text{с.к.с.}} \{ (t_2) .$$

Тогда по лемме имеем

$$M \{ \{ (t_1 + s) \{ (t_2 + s') \} = R(t_1 + s, t_2 + s') \xrightarrow[s, s' \rightarrow 0]{} M \{ \{ (t_1) \{ (t_2) \} = R(t_1, t_2) .$$

Следствие 3. Для стационарного случайного процесса из непрерывности $R(\tau)$ в точке $\tau = 0$ следует её непрерывность для $\forall \tau$.

Доказательство вытекает из следствия 2.

§ 3. Дифференцирование случайных процессов

Случайный процесс $\{ (t) \}$ дифференцируем в среднем квадратическом в точке t , если существует

$$\{ '(t) = \text{p. i. m.} \frac{\{ (t+s) - \{ (t)}{s} .$$

Случайная функция $\{ '(t)$ называется среднеквадратической производной процесса в точке t .

Теорема. Для того, чтобы процесс $\{ (t)$ имел производную в среднем квадратическом в точке t , необходимо и достаточно, чтобы существовала $\frac{\partial^2 R(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ в точке $t_1 = t_2 = t$.

Доказательство. Через $\{_s(t)$ обозначим

$$\{_s(t) = \frac{\{ (t+s) - \{ (t)}{s} .$$

Тогда по критерию сходимости (2) для существования производной $\{ '(t)$ необходимо и достаточно существования предела

$$\lim_{s, s' \rightarrow 0} M \left\{ \frac{\{ (t+s) - \{ (t)}{s} \cdot \frac{\{ (t+s') - \{ (t)}{s'} \right\} = \\ = \lim_{s, s' \rightarrow 0} \frac{R(t+s, t+s') - R(t+s, t) - R(t, t+s') + R(t, t)}{s \cdot s'} ,$$

который равен $\frac{\partial^2 R(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ при $t_1 = t_2 = t$.

Следствие I. Для того, чтобы стационарный случайный процесс имел производную в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы $-R''(0) < \infty$.

Доказательство вытекает из свойств стационарного процесса и предыдущей теоремы.

Следствие 2. Если для всех $t \in T$ существует вторая смешанная производная от функции корреляции при совпадающих аргументах $\left. \frac{\partial^2 R(t_1, t_1)}{\partial t_1 \partial t_1} \right|_{t_1=t_2}$, то существуют

$$\frac{\partial R(t_1, t_1)}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial R(t_1, t_1)}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial^2 R(t_1, t_1)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

для всех $t_1, t_2 \in T$, то есть существуют первые и вторая смешанная производные при несовпадающих аргументах.

Доказательство. Действительно, существование $\frac{\partial^2 R(t_1, t_1)}{\partial t_1 \partial t_2}$ при $t_1 = t_2$ означает существование $f'(t)$. Обозначая

$$\xi_s(t_1) = \frac{\xi(t_1 + s) - \xi(t_1)}{s};$$

$$\xi_s(t_1) = \xi(t_2),$$

по лемме получаем, что существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} M \left\{ \frac{\xi(t_1 + s) - \xi(t_1)}{s} \xi(t_2) \right\} = \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(t_1 + s, t_2) - R(t_1, t_2)}{s} = \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_1}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается существование остальных производных. ♦

Следствие 3. Если для стационарного случайного процесса существует $R''(\tau)$ при $\tau = 0$, то для всех τ существуют $R'(\tau)$ и $R''(\tau)$.

Очевидность этого утверждения не вызывает сомнения.

§ 4. Интегрирование случайных процессов. Закон больших чисел

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ и неслучайная функция $f(t)$ заданы на интервале $[0, T]$. Разобьем этот интервал на n частей точками $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ так, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = T$, и обозначим $D = \max |t_i - t_{i-1}|$.

Случайный процесс $\xi(t)$ интегрируем в среднем квадратическом, если существует и конечен

$$\text{l.i.m.}_{D \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \xi(t_i) [f(t_i) - f(t_{i-1})] = \int_0^T \xi(t) df(t). \quad (7)$$

Теорема. Для того, чтобы процесс $\xi(t)$ был интегрируемым в среднем квадратическом, необходимо и достаточно существования интеграла от его функции корреляции

$$\int_0^T \int_0^T R(t, t_2) df(t_1) df(t_2) < \infty, \quad (8)$$

который повышается в смысле Стильеса.

Доказательство. Обозначим

$$\xi_D = \sum_{i=1}^{n-1} \xi(t_i) [f(t_i) - f(t_{i-1})]$$

и пусть $D' = \max |t_j' - t_{j-1}'|$ соответствует другому разбиению интервала $[0, T]$. Тогда по критерию сходимости (2) для существования интеграла (7) необходимо и достаточно существования предела

$$\begin{aligned} \lim_{D, D' \rightarrow 0} M \{ \xi_D \xi_{D'} \} &= \lim_{D, D' \rightarrow 0} M \left\{ \sum_{i,j} \xi(t_i) \xi(t_j') [f(t_i) - f(t_{i-1})] [f(t_j') - f(t_{j-1}')] \right\} = \\ &= \lim_{D, D' \rightarrow 0} \sum_{i,j} R(t_i, t_j') [f(t_i) - f(t_{i-1})] [f(t_j') - f(t_{j-1}')] = \\ &= \int_0^T \int_0^T R(t, t') df(t) df(t'). \quad \diamond \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда $f(t) = t$. Под несобственным интегралом в среднем квадратическом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) dt \quad \text{или} \quad \int_a^{\infty} \xi(t) dt$$

будем понимать предел

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \xi(t) dt \quad \text{или} \quad \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_a^N \xi(t) dt.$$

Для того, чтобы эти интегралы существовали, необходимо и достаточно существования пределов

$$\lim_{N, N' \rightarrow \infty} \iint_{-N}^N R(t, t') dt dt' \quad \text{или} \quad \lim_{N, N' \rightarrow \infty} \iint_a^N R(t, t') dt dt'.$$

Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет закону больших чисел в среднем квадратическом, если

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{ср. кв.}} \frac{1}{T} \int_0^T M\{\xi(t)\} dt.$$

Теорема. Если $\xi(t)$ — процесс стационарный в широком смысле, то он удовлетворяет закону больших чисел

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{ср. кв.}} M\{\xi(t)\} \quad (9)$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T K(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = 0, \quad (10)$$

где $K(\tau) = \text{cov}(\xi(u), \xi(u+\tau))$.

Доказательство. Введем процесс $\zeta(t) = \xi(t) - M\{\xi(t)\}$. Тогда нужно доказать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \zeta(t) dt \right\} = 0.$$

Для существования этого предела по следствию из теоремы § I (5) и критерию интегрируемости (8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{T, T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{T'} \int_0^T \int_0^{T'} R_{\zeta}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0. \quad (II)$$

Можно заметить, что

$$\left| \int_0^T \int_0^{T'} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^2 \leq \int_0^T \int_0^T R(u, v) du dv \int_0^{T'} \int_0^{T'} R(u, v) du dv.$$

Поэтому (II) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_{\zeta}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0. \quad (I2)$$

Так как $\xi(t)$ — стационарный процесс, то его функция ковариации $K_{\xi}(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности моментов времени

$$K_{\xi}(t_2 - t_1) = R_{\xi}(t_2 - t_1).$$

Тогда равенство (I2) принимает вид

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_{\xi}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = 0,$$

откуда после замены переменных и интегрирования получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T K_{\xi}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = 0. \quad \blacktriangleleft$$

§ 5. Разложение случайных процессов по ортогональным функциям

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ задан на интервале $[0, T]$ с нулевым математическим ожиданием и функцией корреляции $R(t, t_1)$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^T R(t, s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t), \quad (13)$$

называемое однородным интегральным уравнением Фредгольма II рода. Из теории интегральных уравнений известно, что его решение существует только при счетном наборе постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, называемых собственными числами уравнения Фредгольма. Решение $\varphi_i(t)$, соответствующее λ_i , называют собственной функцией ядра $R(t, s)$. Собственные функции всегда могут быть сделаны ортогональными, то есть

$$\int_0^T \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \delta_{mn}, \quad (14)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера. Так как ядро уравнения (13) есть функция корреляции $R(t, s)$, которая является положительно определенной функцией, то все $\lambda_i > 0$ и по теореме Мерсера ядро может быть представлено в виде ряда по собственным функциям

$$R(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(s). \quad (15)$$

Теорема. Случайный процесс $\xi(t)$ может быть представлен в виде ряда

$$\xi(t) = \text{p.i.m.} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(t),$$

где $f_k = \int_0^T \xi(t) \varphi_k(t) dt$

некоррелированные случайные величины с $M\{f_k\} = 0$ и $D\{f_k\} = \lambda_k$.

Доказательство. Рассмотрим свойства случайных величин f_k .

$$M\{f_k\} = M\left\{\int_0^T \xi(t) \varphi_k(t) dt\right\} = \int_0^T M\{\xi(t)\} \varphi_k(t) dt = 0,$$

так как $M\{\xi(t)\} = 0$. Найдем корреляционный момент $M\{f_k f_l\}$:

$$M\{\xi_k \xi_e\} = M\left\{\int_0^T \int_0^T \xi(t_1) \xi(t_2) \varphi_k(t_1) \varphi_e(t_2) dt_1 dt_2\right\} = \\ = \int_0^T \varphi_k(t_1) dt_1 \int_0^T R(t_1, t_2) \varphi_e(t_2) dt_2.$$

С учетом уравнения (I3) и условия (I4) имеем

$$M\{\xi_k \xi_e\} = \lambda_e \int_0^T \varphi_k(t_1) \varphi_e(t_1) dt_1 = \lambda_e \delta_{ke}.$$

Отсюда видно, что случайные величины ξ_k некоррелированы и имеют дисперсию $D\{\xi_k\} = \lambda_k$. Найдем еще $M\{\xi_k(t)\}$:

$$M\{\xi_k(t)\} = M\left\{\xi(t) \int_0^T \xi(s) \varphi_k(s) ds\right\} = \\ = \int_0^T R(t, s) \varphi_k(s) ds = \lambda_k \varphi_k(t).$$

Докажем теперь основное утверждение теоремы. Рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\left\{\left(\xi(t) - \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t)\right)^2\right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{R(t, t) - 2 \sum_{k=1}^n M\{\xi(t) \xi_k\} \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k^2(t)\right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{R(t, t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k^2(t)\right\}.$$

Последнее выражение по теореме Мерсера (I5) равно 0, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\left\{\left(\xi(t) - \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t)\right)^2\right\} = 0. \blacktriangleleft$$

Можно показать, что это разложение является единственным разложением случайного процесса в ряд по ортогональным функциям с некоррелированными коэффициентами.

Основное достоинство этого разложения, следовательно, заключается в том, что оно позволяет вместо функции $\xi(t)$ рассматривать случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$, которые некоррелированы между собой.

§ 6. Линейные преобразования случайных процессов

Представим себе некоторую систему, предназначенную для преобразования функций времени $x(t)$. Функция $x(t)$, которая должна быть преобразована, называется входной функцией; преобразованная функция $z(t)$ называется функцией на выходе системы или реакцией на входную функцию.

Математически всякую систему можно задать соотношением вида

$$z(t) = L(x(t), t),$$

L — оператор, описывающий систему.

Система называется линейной, если оператор L удовлетворяет условию

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2, t) = \alpha L(x_1, t) + \beta L(x_2, t), \quad (I6)$$

то есть реакция на сумму входных функций равна сумме реакций на каждую из входных функций и изменения входного сигнала в $\alpha(\beta)$ раз приводит к изменению выходного сигнала во столько же раз.

Введем оператор сдвига во времени S_τ ($-\infty < \tau < \infty$) соотношением

$$S_\tau(x, t) = x(t + \tau). \quad (I7)$$

Система называется однородной, если преобразование L перестановочно с оператором сдвига, то есть

$$z(t + \tau) = S_\tau z(t) = S_\tau L(x, t) = L(S_\tau x, t). \quad (I8)$$

Такую систему еще называют системой с постоянными параметрами.

В качестве примера рассмотрим линейное преобразование вида

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, u) x(u) du. \quad (I9)$$

Пусть на вход системы поступает сигнал в виде функции Дирака $\delta(u - s)$. Тогда $z(t) = h(t, s)$. Таким образом, функцию $h(t, s)$ следует понимать как реакцию системы на δ -образный сигнал, поступающий в момент s , и $h(t, s)$ называют импульсной переходной функцией системы. Если система однородна, то

$$h(t, s) = h(t - s).$$

Для однородной системы соотношение (I9) принимает вид

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - s) x(s) ds. \quad (20)$$

Интеграл такого вида, как уже указывалось, называется сверткой функций $h(t)$ и $x(t)$.

Для однородных систем с интегрируемой переходной функцией можно ввести преобразование Фурье

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-is\omega} ds. \quad (21)$$

Умножим (20) на $e^{-i\omega t}$ и проинтегрируем по t :

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) x(s) e^{-i\omega t} ds dt.$$

Левая часть есть не что иное, как преобразование Фурье выходной функции $Z(i\omega)$, а правую часть преобразуем заменой переменных $\tau = t - s$, тогда

$$Z(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\tau\omega} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-is\omega} ds$$

или

$$Z(i\omega) = H(i\omega) \cdot X(i\omega).$$

Таким образом, $H(i\omega)$ есть отношение Фурье-преобразований выходной и входной функций

$$H(i\omega) = \frac{Z(i\omega)}{X(i\omega)}. \quad (22)$$

Функция $H(i\omega)$ называется частотной характеристикой, или коэффициентом передачи системы.

В соотношении (19) реакция системы в момент времени t зависит от значений функции на входе как в моменты времени $s < t$ так и в моменты $s > t$. В физических устройствах это невыполнимо, поэтому для них

$$h(t, s) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < s.$$

Это условие называется условием физической осуществимости системы. Для систем, удовлетворяющих этому условию, соотношение (19) принимает вид

$$z(t) = \int_{-\infty}^t h(t, s) x(s) ds, \quad (23)$$

а если система однородна, то

$$z(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) x(s) ds = \int_0^{\infty} h(s) x(t-s) ds. \quad (24)$$

Если входной сигнал подается в момент времени $t=0$, то (23) принимает вид

$$x(t) = \int_0^t h(t,s)x(s)ds. \quad (25)$$

Остановимся теперь на случае, когда на вход линейной системы поступает случайный процесс $\{f(t)\}$ с математическим ожиданием $m_f(t)$ и функцией корреляции $R_f(t_1, t_2)$. Выходной процесс $y(t)$ тоже будет случайным

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)f(s)ds. \quad (26)$$

Найдем моментные функции этого процесса $m_y(t)$ и $R_y(t_1, t_2)$:

$$M\{y(t)\} = m_y(t) = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)f(s)ds\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)m_f(s)ds. \quad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), видим, что

$$m_y(t) = L(m_f(t), t), \quad (28)$$

то есть математическое ожидание процесса на выходе системы есть результат воздействия оператора L на математическое ожидание входного процесса.

Если $\{f(t)\}$ — стационарный процесс и система однородна, то

$$M\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} m_f h(\tau)d\tau = m_f \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = m_y = \text{const}. \quad (29)$$

Функция корреляции выходного процесса $y(t)$ равна

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M\{y(t_1)y(t_2)\} = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1,u)h(t_2,v)f(u)f(v)dudv\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1,u)h(t_2,v)R_f(u,v)dudv. \end{aligned} \quad (30)$$

Можно сказать, что функция корреляции процесса $y(t)$ получается двукратным действием оператора L на каждый аргумент функции корреляции входного процесса $\{f(t)\}$:

$$R_y(t_1, t_2) = L_{t_1} L_{t_2} R_f(t_1, t_2). \quad (31)$$

Для стационарного случайного процесса $f(t)$ и однородной системы имеем

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-u)h(t_2-v)R_f(u-v)dudv.$$

Делая замену переменных $t_1-u = z_1$ и $t_2-v = z_2$, получим

$$R_f(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(z_1) h(z_2) R_f(t_1 - t_2 - z_1 + z_2) dz_1 dz_2 = R_f(t_1 - t_2). \quad (32)$$

Из выражений (29) и (32) следует, что если на вход однородной системы поступает стационарный процесс, то на выходе имеем процесс тоже стационарный, по крайней мере, в широком смысле. В этом случае можно найти и спектральную плотность мощности выходного процесса, а именно:

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \iiint_{-\infty}^{\infty} h(z_1) h(z_2) R_f(\tau + z_2 - z_1) e^{-i\omega\tau} d\tau dz_1 dz_2.$$

После замены переменной $z = \tau + z_2 - z_1$ имеем

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z_1) e^{-i\omega z_1} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(z_2) e^{i\omega z_2} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_f(z) e^{-i\omega z} dz = \\ &= |H(i\omega)|^2 S_f(\omega). \end{aligned} \quad (33)$$

Найдём ещё функцию взаимной корреляции процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$. По определению

$$\begin{aligned} R_{f\eta}(t_1, t_2) &= M\{\xi(t_1) \eta(t_2)\} = M\left\{\xi(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau) \xi(\tau) d\tau\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau) M\{\xi(t_1) \xi(\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau) R_f(t_1, \tau) d\tau \end{aligned}$$

или, используя операторную форму, имеем

$$R_{f\eta}(t_1, t_2) = L_{t_2} R_f(t_1, t_2). \quad (34)$$

Если система однородна и входной процесс стационарный, то взаимная функция корреляции зависит только от разности моментов времени

$$R_{f\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_f(\tau - u) du.$$

Таким образом, зная статистические характеристики входного процесса и импульсную переходную или частотную характеристику системы, можно найти статистические характеристики выходного процесса.

Рассмотрим применение общих закономерностей (28), (31) (34)

к частным случаям.

1. Пусть $\eta(t)$ есть производная в среднем квадратическом входного процесса $\xi(t)$, то есть $\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$. По формуле (26) имеем

$$m_{\eta}(t) = L(m_{\xi}(t), t) = \frac{dm_{\xi}(t)}{dt}.$$

Если процесс $\xi(t)$ стационарный, то $m_{\eta}(t) = 0$. Функцию корреляции находим по формуле (31):

$$R_{\eta}(t_1, t_2) = L_{t_1, t_2} R_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Для случая, когда $\xi(t)$ стационарный, получаем

$$R_{\eta}(\tau) = -R_{\xi}''(\tau),$$

то есть производная стационарного процесса - тоже процесс стационарный, по крайней мере, в широком смысле.

Найдём спектральную плотность мощности процесса на выходе. Для этого воспользуемся формулами (33) и (22). По определению Фурье - преобразование процесса на выходе есть

$$\begin{aligned} Z(i\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \xi(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Последнее равенство получается после интегрирования по частям, если $\xi(-\infty) = \xi(+\infty) = 0$. Тогда

$$Z(i\omega) = i\omega X(i\omega).$$

Отсюда $H(i\omega) = i\omega$, поэтому $S_{\eta}(\omega) = \omega^2 S_{\xi}(\omega)$.

Таким образом, операции дифференцирования соответствует система с частотной характеристикой $i\omega$. Импульсная переходная функция не существует, но её можно рассматривать как предельную характеристику $h_{\varepsilon}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, заданную в виде

$$h_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} -\frac{\text{sign } t}{\varepsilon^2}, & |t| < \varepsilon; \\ 0, & |t| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

2. Процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ связаны линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$L\eta(t) = M\xi(t), \quad (25)$$

-III-

где
$$L = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n ;$$
$$M = b_0 \frac{d^m}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_m .$$

Эти уравнения имеют смысл только тогда, когда процесс $\xi(t)$ m раз дифференцируем в среднем квадратическом. Введем обозначения

$$L(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n ;$$

$$M(i\omega) = b_0 (i\omega)^m + b_1 (i\omega)^{m-1} + \dots + b_m .$$

Тогда уравнение (35), записанное через Фурье - преобразование, определяет частотную характеристику системы

$$H(i\omega) = \frac{L(i\omega)}{M(i\omega)} ,$$

поэтому спектральная плотность мощности на выходе такой системы имеет вид

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \left| \frac{L(i\omega)}{M(i\omega)} \right|^2 .$$

Зная $S_x(\omega)$, по теореме Винера-Хинчина можно найти функцию корреляции процесса на выходе системы.

Глава III. ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ I. Многомерное нормальное распределение

Важную роль во многих прикладных задачах играют случайные процессы, конечномерное распределение которых является гауссовским. Такие процессы возникают тогда, когда складывается большое число независимых или слабозависимых случайных процессов примерно одинаковой мощности. В этом случае, как будет показано ниже, с увеличением числа слагаемых сумма сходится к гауссовскому случайному процессу независимо от того, как распределены отдельные слагаемые. Остановимся на изучении многомерного нормального распределения.

Рассмотрим n -мерную случайную величину или случайный вектор $X^T = (x_1, \dots, x_n)$. Введем обозначения: $a^T = (a_1, \dots, a_n)$ — вектор математических ожиданий; K — матрица ковариаций, причем $k_{ij} = M\{(x_i - a_i)(x_j - a_j)\}$, $i, j = 1, n$. Здесь $(\cdot)^T$ — знак транспонирования.

Многомерная случайная величина X является гауссовской, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det K)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij}^{-1} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \right\}$$

или в матричном виде

$$p(X) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det K)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - a)^T K^{-1} (X - a) \right\}. \quad (I)$$

Иногда удобнее пользоваться характеристической функцией, которая в данном случае запишется как

$$g(u_1, \dots, u_n) = M \left\{ e^{-i \sum_{k=1}^n x_k u_k} \right\} = \exp \left\{ i \sum_k a_k u_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j} k_{kj} u_k u_j \right\},$$

или, используя матричные обозначения,

$$g(u) = \exp \left\{ i a^T u - \frac{1}{2} u^T K u \right\}, \quad (2)$$

где $u^T = (u_1, \dots, u_n)$.

Рассмотрим частные случаи формулы (I).

Одномерное распределение. Для $n=1$, обозначая $\sigma^2 = k_{11}$, получим

$$k_{11}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \det K = \sigma^2$$

и

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Двумерное нормальное распределение. $n=2$. Обозначим $K_{11}=\sigma_1^2$; $K_{12}=\sigma_1\sigma_2\gamma$; $K_{22}=\sigma_2^2$, тогда

$$K = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\gamma \\ \sigma_1\sigma_2\gamma & \sigma_2^2 \end{vmatrix}, \quad \det K = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\gamma^2).$$

При этом матрица, обратная ковариационной, принимает вид

$$K^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\gamma^2)} & -\frac{\gamma}{\sigma_1\sigma_2(1-\gamma^2)} \\ -\frac{\gamma}{\sigma_1\sigma_2(1-\gamma^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\gamma^2)} \end{vmatrix}.$$

Окончательно

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\gamma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\gamma \frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

где γ — коэффициент корреляции между случайными величинами x_1 и x_2 .

Рассмотрим основные свойства многомерных нормальных случайных величин.

I. Сумма независимых гауссовских векторов есть гауссовский случайный вектор.

Доказательство. Имеем n -мерный вектор X с характеристической функцией

$$g_1(u) = \exp \{ i a_1^T u - \frac{1}{2} u^T K_1 u \}$$

и n -мерный вектор Y с характеристической функцией

$$g_2(u) = \exp \{ i a_2^T u - \frac{1}{2} u^T K_2 u \}.$$

Так как характеристическая функция суммы независимых случайных X, Y величин равна произведению характеристических функций, то

$$g_z(u) = \exp \{ i (a_1^T + a_2^T) u - \frac{1}{2} u^T (K_1 + K_2) u \}$$

или

$$g_z(u) = \exp \{ i a^T u - \frac{1}{2} u^T K u \},$$

то есть вектор Z распределен по нормальному закону с вектором математических ожиданий $a = a_1 + a_2$ и матрицей ковариаций $K = K_1 + K_2$. ♦

2. Линейное преобразование гауссовского случайного вектора есть тоже гауссовский вектор.

Доказательство. Имеем n -мерный вектор X , который переходит в m -мерный вектор Y с помощью линейного преобразования, заданного матрицей $A = (A_{jk}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, n})$:

$$Y = AX$$

или

$$y_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k, \quad j = \overline{1, m}.$$

Вектор X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и матрицей ковариаций K , то есть его характеристическая функция имеет вид (2).

Найдем характеристическую функцию вектора Y . По определению

$$\begin{aligned} g_Y(u) &= M\left\{e^{i \sum_{j=1}^m u_j y_j}\right\} = M\left\{e^{i \sum_{j=1}^m u_j \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k}\right\} = \\ &= M\left\{\exp\left[i \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^m A_{jk} u_j\right]\right\} = g_X(A^T u). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для $g_X(u)$, получим

$$\begin{aligned} g_Y(u) &= \exp\left\{i a^T A^T u - \frac{1}{2} u^T A K A^T u\right\} = \\ &= \exp\left\{i a_Y^T u - \frac{1}{2} u^T K_Y u\right\}, \end{aligned}$$

где $a_Y = A a$ и $K_Y = A K A^T$. Отсюда видно, что m -мерный вектор Y -гауссовский вектор с математическим ожиданием a_Y и матрицей ковариаций K_Y . ♦

3. Совместное распределение любой группы компонент n -мерного гауссовского вектора также является гауссовским.

Доказательство. Пусть X - n -мерный гауссовский вектор. Рассмотрим вектор $\tilde{X}$, составленный из части компонент вектора X ,
 $\tilde{X} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Обозначим $\tilde{u}^T = (u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$,
 $\tilde{a}^T = (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ и

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} K_{i_1 i_1} & K_{i_1 i_2} & \dots & K_{i_1 i_k} \\ K_{i_2 i_1} & K_{i_2 i_2} & \dots & K_{i_2 i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i_k i_1} & K_{i_k i_2} & \dots & K_{i_k i_k} \end{pmatrix}.$$

Через $\bar{u}$ обозначим вектор-столбец u , в котором все компоненты, отличные от u_i , $s = \overline{1, k}$, заменены нулями. Тогда

$$g_X(\bar{u}) = M\{e^{i \sum_{j=1}^k u_j x_j}\} = g_X(\bar{u}).$$

Далее

$$\begin{aligned} g_X(\tilde{u}) &= \exp\{i \tilde{a}^T \tilde{u} - \frac{1}{2} \tilde{u}^T K \tilde{u}\} = \\ &= \exp\{i \tilde{a}^T \tilde{u} - \frac{1}{2} \tilde{u}^T \tilde{K} \tilde{u}\}, \end{aligned}$$

откуда и следует, что $\tilde{X}$ -гауссовский случайный вектор. $\blacklozenge$

4. Если случайный вектор $X = (x_1, \dots, x_n)$ гауссовский и случайные векторы $X' = (x_1, \dots, x_r)$ и $X'' = (x_{r+1}, \dots, x_n)$, ($r < n$) некоррелированы по каждой паре своих компонент, то векторы X' и X'' независимы.

Доказательство. В силу некоррелированности векторов X' и X'' матрица ковариации вектора X имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} K' & 0 \\ 0 & K'' \end{pmatrix},$$

где K' и K'' - ковариационные матрицы векторов X' и X'' . Обозначим $V_1^T = (u_1, \dots, u_r)$, $V_2^T = (u_{r+1}, \dots, u_n)$, $u^T = (V_1^T, V_2^T)$,

$a^T = (a_1^T, a_2^T)$, где a_1 и a_2 - математические ожидания векторов X' и X'' . Тогда

$$g(u) = \exp\{i(a_1^T V_1 + a_2^T V_2) - \frac{1}{2}(V_1^T V_2^T) \begin{pmatrix} K' & 0 \\ 0 & K'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}\}.$$

Перемножая матрицы в показателе экспоненты, имеем

$$\begin{aligned} g(u) &= \exp\{i(a_1^T V_1 + a_2^T V_2) - \frac{1}{2} V_1^T K' V_1 - \frac{1}{2} V_2^T K'' V_2\} = \\ &= g_{X'}(V_1) g_{X''}(V_2), \end{aligned}$$

где $g_{X'}(u)$ и $g_{X''}(u)$ - характеристические функции векторов X' и X'' . Это соотношение доказывает независимость векторов. $\blacklozenge$

5. Пусть $X(\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) - последовательность n -мерных гауссовских векторов с параметрами $(m(\alpha), K(\alpha))$.

Если

$$m(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} m \quad \text{и} \quad K(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} K,$$

то последовательность распределений векторов сходится к гауссовскому распределению с параметрами (m, K) .

Это утверждение очевидно, так как характеристическая функция гауссовского распределения зависит лишь от вектора математических ожиданий m и матрицы ковариаций K .

§ 2. Гауссовский случайный процесс

Пусть случайный процесс $\{t\}$ задан n -сечениями $\{t_1\}, \dots, \{t_n\}$, для которых известны математические ожидания $M\{\{t_i\}\} = a_i, i = \overline{1, n}$, и матрица ковариаций $K = (K(t_i, t_j)), i, j = \overline{1, n}$ причем

$$K(t_i, t_j) = M\{(\{t_i\} - a_i)(\{t_j\} - a_j)\}.$$

Случайный процесс $\{t\}$ называется гауссовским, или нормальным, если его n -мерная плотность распределения вероятностей является гауссовской (I) для $\forall n$. Все свойства гауссовских процессов вытекают из свойств многомерных нормальных случайных величин. Перечислим их в приложении к случайным процессам и назовем дополнительные.

1. Гауссовский процесс стационарный в широком смысле является стационарным и в узком смысле. Обратное утверждение, как уже указывалось, верно всегда.

Доказательство этого факта вытекает из вида плотности распределения и определения стационарности. Действительно, чтобы процесс был стационарным в узком смысле, необходимо выполнения условия

$p(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = p(x_1, t_1 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau)$ для $\forall n$ и $\forall \tau$.
Для процесса стационарного в широком смысле верны соотношения

$$m_i(t) = a = \text{const} \quad \text{и} \quad K_i(t_i, t_j) = K_j(t_j - t_i, 0). \quad (3)$$

Для гауссовского процесса многомерная плотность распределения (I) зависит только от математических ожиданий сечений $m_i(t)$ и матрицы ковариаций K , то есть с учетом (3) можно записать

$$p(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \varphi(a, K(t_j - t_i)), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Отсюда видно, что при переходе к моментам времени $t_i + \tau, i, i = \overline{1, n}$, плотность распределения не изменится. ♦

2. Коэффициенты разложения гауссовского случайного процесса в ряд по ортогональным функциям есть независимые нормальные случайные величины.

Действительно, учитывая свойства 2 и 4 многомерных нормальных случайных величин и то, что коэффициенты разложения в ряд некоррелированы, получаем указанное свойство.

3. Центральная предельная теорема для случайных процессов.

Пусть дана последовательность сумм случайных функций

$$\eta_n(t) = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n_k}(t), \quad n=1, 2, \dots,$$

и выполнены следующие условия:

а) при фиксированном n случайные величины $\alpha_{n_1}(t_1), \alpha_{n_2}(t_2), \dots, \alpha_{n_{m_n}}(t_{m_n})$ взаимно независимы при любых $t_1, t_2, \dots, t_{m_n}$ и имеют конечные моменты второго порядка, причем

$$M\{\alpha_{n_k}(t)\} = 0, \quad M\{\alpha_{n_k}^2(t)\} = b_{n_k}^2(t);$$

б) при $n \rightarrow \infty$ корреляционная функция

$$R_n(t_1, t_2) = M\{\eta_n(t_1)\eta_n(t_2)\}$$

сходится к некоторому пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$;

в) суммы $\eta_n(t) = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n_k}(t)$ при каждом t удовлетворяют условию Линдберга, то есть для $\forall \tau > 0$

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{m_n} \int_{|x| \geq \tau b_n} x^2 dF_{n_k}(t, x) \xrightarrow{m_n \rightarrow \infty} 0,$$

где $F_{n_k}(t, x)$ — функция распределения случайной величины $\alpha_{n_k}(t)$;

$$b_n^2 = \sum_{k=1}^{m_n} b_{n_k}^2(t) = R_n(t, t).$$

Тогда случайный процесс $\eta_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к гауссовскому случайному процессу с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(t_1, t_2)$.

Приведенная теорема непосредственно вытекает из центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин.

4. Стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и независимыми значениями (отсчетами) называется белым гауссовским шумом. Характеристическая функция этого процесса имеет вид

$$g_j(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum \sigma_i^2 u_i^2\right\}$$

и корреляционная функция

$$K_f(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau).$$

Отсюда видно, что средняя мощность этого процесса определяемая соотношением (31) гл. I, бесконечна. Следовательно, такие процессы реально существовать не могут. Тем не менее эта удобная математическая модель часто используется в прикладных задачах.

§ 3. Винеровский случайный процесс

Кроме процессов с независимыми значениями, примером которых является белый гауссовский шум, особый интерес представляют процессы с независимыми приращениями. Остановимся на одном из таких процессов. Так как приращения процесса $\xi(t)$

$$\xi(t_2) - \xi(t_1), \xi(t_3) - \xi(t_2), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}) -$$

независимы для моментов $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, то конечномерное распределение принимает вид

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) &= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \times \\ &\times \dots \times p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Случайный процесс $\xi(t)$ называется винеровским, если приращения процесса подчиняются нормальному распределению с характеристиками

$$M\{\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})\} = 0, \quad M\{(\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}))^2\} = \sigma^2 |t_i - t_{i-1}|$$

и с вероятностью 1 $\xi(t_1) = \xi_0$.

Многомерное распределение винеровского процесса имеет вид

$$p(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi |t_i - t_{i-1}|}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2\sigma^2 |t_i - t_{i-1}|}} \quad (5)$$

Покажем, что производная винеровского процесса есть белый гауссовский шум. Так как приращения процесса $\xi(t)$ являются сечениями процесса $\eta(t) = \xi'(t)$, то очевидно, что процесс $\eta(t)$ - гауссовский. Найдем его функцию корреляции, используя формулу (31) предыдущей главы:

$$R_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Функция корреляции $R_f(t_1, t_2)$ равна

$$\begin{aligned} R_f(t_1, t_2) &= M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}|t_2-t_1|} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2\sigma^2|t_2-t_1|}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}t_1} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2 t_1}} dx_1 dx_2 = \\ &= \begin{cases} t_1, & \text{если } t_2 > t_1; \\ t_2, & \text{если } t_1 > t_2, \end{cases} \end{aligned}$$

то есть $R_f(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$. Если воспользоваться единичной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

то функцию $R_f(t_1, t_2)$ можно записать в виде

$$R_f(t_1, t_2) = t_1 f(t_2 - t_1) + t_2 f(t_1 - t_2).$$

Тогда

$$R_f(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_f(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \delta(t_2 - t_1).$$

Тем самым показали, что производная винеровского процесса имеет некоррелированные отсчеты.

Отметим еще, что винеровский процесс является моделью броуновского движения частицы, перемещающейся под влиянием случайных ударов молекул жидкости.

Глава IV. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

§ I. Определение марковского процесса

Марковские процессы, или процессы без последствия, являются удобной математической моделью для многих реально протекающих процессов. Представим себе систему, которая может находиться в различных состояниях, и пусть эволюция её во времени носит стохастический характер, то есть состояние системы в момент времени t в общем случае не определяется однозначно состояниями системы в предыдущие моменты $s < t$. Тогда состояние этой системы можно описать некоторым случайным процессом $\xi(t)$, заданным на интервале $[0, T]$ и принимающим значения из множества X .

Пусть заданы n отсчетов этого случайного процесса $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ в моменты $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Рассмотрим условную плотность вероятностей

$$\rho(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \frac{\rho(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{\rho(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1})} \quad (I)$$

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если его условная плотность распределения (I) не зависит от значений процесса в моменты $t_1, t_2, \dots, t_{n-2}$, а определяется лишь значением $\xi(t_{n-1}) = x_{n-1}$, т.е.

$$\rho(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}; \dots, x_1, t_1) = \rho(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2)$$

Эту условную плотность вероятностей называют вероятностью перехода системы из состояния x_{n-1} , в котором она находилась в момент времени t_{n-1} , в состояние x_n в момент $t_n > t_{n-1}$ и обозначают

$$\rho(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}) = p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3)$$

Рассмотрим многомерную плотность распределения процесса $\xi(t)$. С учетом условия марковости (2) её можно записать в виде

$$\rho(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = p(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}) p(x_{n-1}, t_{n-1} / x_{n-2}, t_{n-2}) \dots p(x_2, t_2 / x_1, t_1) p(x_1, t_1). \quad (4)$$

Отсюда видно, что начальное одномерное распределение $\rho(x_1, t_1)$ и вероятности перехода $p(x, t; x'; t')$, $t > t'$ полностью задают марковский процесс.

Вероятности перехода удовлетворяют двум основным соотношениям.

1. Условие нормировки

$$\int p(x, t; x', t') dx = 1.$$

2. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Чтобы получить это уравнение проинтегрируем выражение (4) по некоторому промежуточному значению x ; , например x_2 :

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \dots p(x_1, t_1) \int p(x_2, t_2; x_2, t_2) p(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_2.$$

С другой стороны, по формуле (4) имеем

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \dots p(x_2, t_2; x_1, t_1) p(x_1, t_1).$$

Из сопоставления этих выражений видно, что

$$p(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int p(x_2, t_2; x_2, t_2) p(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_2. \quad (5)$$

Это уравнение и носит название уравнение Колмогорова-Чепмена.

Все марковские процессы можно разбить на классы в зависимости от структуры множества значений случайного процесса X и интервала наблюдения T .

Пусть множество состояний X дискретно и множество T тоже дискретно, то есть система может переходить из одного состояния в другое в дискретные моменты времени. Множество состояний X может быть конечным или счетным. Такие марковские процессы называются дискретными цепями Маркова. Например, множество X - классы средней школы - дискретно, переход из одного класса в другой происходит в дискретные моменты времени - в конце учебного года, то есть тоже дискретно.

Если множество состояний X дискретно, но система может переходить из одного состояния в другое в произвольные моменты времени из множества T , то процессы, описывающие поведение таких систем, называют дискретными марковскими процессами. Например, X - число заявок, поступающих на телефонную станцию, T - время поступления заявок - непрерывное множество.

Если множество состояний X непрерывно и система переходит из состояния в состояние в произвольные моменты времени из

множества T , то соответствующие процессы называют непрерывными марковскими процессами. Например, координата броуновской частицы принимает значения из непрерывного множества X и переходы происходят в произвольные моменты времени.

К изучению этих типов марковских процессов и переходим.

§ 2. Дискретные цепи Маркова. Определение и классификация состояний

Пусть случайный процесс $\xi(t)$, описывающий состояние некоторой системы, принимает целочисленные значения $i = 1, 2, \dots$ из множества X конечного или счетного, то есть $\xi(t) = i$, $\xi(t') = j$. Переходы из одного состояния в другое происходят через равные промежутки времени $|t' - t| = \tau$, которые назовем шагом.

Условные вероятности

$$P\{\xi(t_e + \tau) = k \mid \xi(t_e) = i\} = p_{ik}(t_e), \quad i, k \in X,$$

образуют матрицу вероятностей перехода из одного состояния в другое в момент времени t_e .

Если вероятности перехода $p_{ik}(t_e)$ не зависят от момента времени t_e $p_{ik}(t_e) = p_{ik}$, то дискретная цепь Маркова называется однородной с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix},$$

где s - число состояний системы - конечно или счетно. Элементы этой матрицы $p_{ik} \geq 0$ и удовлетворяют условию

$$\sum_k p_{ik} = 1 \quad \forall i.$$

Такую матрицу называют стохастической или марковской.

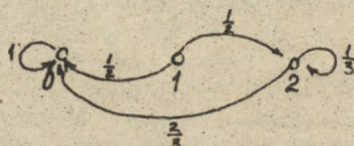
Набор вероятностей $Q = \{q_i(1), q_i(2), \dots, q_i(s)\}$ называют начальным распределением, которое определяет состояние системы в начальный момент времени.

Дискретная марковская цепь полностью задается вектором начального распределения Q и матрицей переходных вероятностей за один шаг P .

В конкретных случаях для описания цепи вместо матрицы

используют направленный граф, вершинами которого являются состояния системы, а стрелки от одной вершины к другой указывают возможные переходы между состояниями системы, число над стрелкой задает вероятность этого перехода. Если $p_{ij} = 0$, то стрелка не ставится. Например, $X = (C, 1, 2)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



В дополнение к одношаговым вероятностям интересно рассмотреть вероятности перехода из одного состояния в другое за произвольное число шагов. Эти вероятности удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj},$$

которые легко получить, используя формулу полной вероятности. Обозначим через A событие, состоящее в том, что система за $(n+1)$ шаг перейдет из i -го состояния в j -е, через H_k - событие, состоящее в том, что за n шагов система перейдет из i -го состояния в k -е. Тогда

$$p(H_k) = p_{ik}^{(n)}, \quad p(A/H_k) = p_{kj},$$

отсюда

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}. \quad (6)$$

Записав это уравнение для числа шагов $m+n$, $\forall m$, получим уравнение Колмогорова-Чепмена для дискретных марковских цепей

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \quad (7)$$

которое позволяет определить вероятности перехода из одного состояния в другое за произвольное число шагов. Этими формулами удобнее пользоваться, записав их в матричном виде. Так, формула (6) при $n=1$ в матричном виде может быть записана

$$P(2) = P \cdot P = P^2.$$

При этом уравнение (7) принимает вид

$$P(m+n) = P^n \cdot P^m. \quad (8)$$

Заметим, что матрица $P(n)$ для $\forall n$ тоже стохастическая.

Перейдем к классификации состояний.

Состояние i называется несущественным, если существует такое состояние j , в которое система может перейти за конечное число шагов n , но не может вернуться в i — е ни за какое число шагов, то есть

$$p_{ij}(n) > 0, \quad p_{ji}(m) = 0 \quad \forall m. \quad (9)$$

Все остальные состояния существенные. В дальнейшем основное внимание уделим существенным состояниям.

Состояния i и j называются сообщающимися ($i \leftrightarrow j$), если существуют n и k такие, что

$$p_{ij}(n) > 0 \quad \text{и} \quad p_{ji}(k) > 0.$$

Очевидно, что из соотношений $i \leftrightarrow k$ и $k \leftrightarrow j$ следует $i \leftrightarrow j$, и в частном случае $i=j$ имеем $i \leftrightarrow i$ и $i \leftrightarrow i$, следовательно, $i \leftrightarrow i$, то есть система может вернуться в состояние i .

Все существенные состояния можно разбить на классы, которые состоят из сообщающихся состояний и ни из одного состояния данного класса нельзя перейти в состояние другого класса. Такие классы называют неразложимыми или замкнутыми.

Проведенная классификация позволяет привести матрицу вероятностей переходов к каноническому виду. Для этого выделим замкнутые классы и перенумеруем их, отдельно выделим несущественные состояния. Тогда матрица P принимает вид

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{c} I \\ II \\ K \end{array} \begin{array}{|cc|ccc|cc|} \hline I & P_1 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline II & 0 & P_2 & \dots & & 0 & 0 \\ \hline K & 0 & 0 & \dots & & P_k & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

несущ. состоян.

несущ. состоян.

P_s — матрица вероятностей переходов s -го неразложимого класса, $s = \overline{1, k}$; B_s — матрица вероятностей перехода из несущественных состояний в s -й класс; R — матрица вероятностей переходов по несущественным состояниям.

Рассмотрим один неразложимый класс S . Для $\forall i \in S$ существует n , что $p_{ii}(n) > 0$. Через M_i — обозначим множество числа шагов n , для которых $p_{ii}(n) > 0$.

Наибольший общий делитель этих чисел называется периодом состояния i и обозначается d_i .

Теорема. Все состояния одного неразложимого класса имеют одинаковый период d .

Доказательство. Так как i и $j \in S$, то существуют такие m и n , что

$$p_{ij}(n) > 0 \quad \text{и} \quad p_{ji}(m) > 0.$$

Обозначим d_i, d_j - периоды этих состояний. Рассмотрим

$$p_{ii}(m+n) \geq p_{ij}(n) p_{ji}(m) > 0,$$

следовательно, $(m+n) \in M_i$, то есть кратно d_i . Возьмем теперь вероятность возврата в i - е состояние за число шагов $m+n+\lambda d_i$, где λ - целое число:

$$p_{ii}(m+n+\lambda d_i) \geq p_{ij}(n) p_{ji}(\lambda d_i) p_{ji}(m) > 0.$$

Отсюда следует, что $p_{ji}(\lambda d_i) > 0$ и λd_i кратно d_j . Так как λ - любое целое, то $d_i \geq d_j$. Аналогично можно показать, что $d_j \geq d_i$. Отсюда получаем, что $d_i = d_j$ для всех состояний данного класса.

Следовательно, период состояния есть характеристика класса.

Если $d=1$, то класс называется апериодическим, или эргодическим.

Пусть d - период класса S . Несмотря на сложность переходов внутри класса, можно обнаружить некоторую цикличность в переходах из одной группы состояний в другую. Покажем это. Выберем некоторое начальное состояние i , и введем следующие подклассы:

$$C_0 = \{j \in S: p_{ij}(n) > 0, n = 0 \pmod{d}\};$$

$$C_1 = \{j \in S: p_{ij}(n) > 0, n = 1 \pmod{d}\};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_{d-1} = \{j \in S: p_{ij}(n) > 0, n = d-1 \pmod{d}\}.$$

Очевидно, что $S \neq C_0 + C_1 + \dots + C_{d-1}$. Покажем, что за один шаг система переходит из подкласса C_r в C_{r+1} , из C_d в C_0 и так далее. Пусть $i \in C_r$ и $p_{ij} > 0$. Надо показать, что $j \in C_{r+1}$. Так как $i \in C_r$, следовательно,

$p_{ij}(n) > 0$ для $n = p(\text{mod } d)$. Тогда за число шагов $n+1 = p+1(\text{mod } d)$ система переходит в класс C_{p+1} , то есть $p_{ij}(n+1) > 0$ и $j \in C_{p+1}$. Поэтому подклассы C_p ($p = 0, \overline{d-1}$) называют циклическими подклассами.

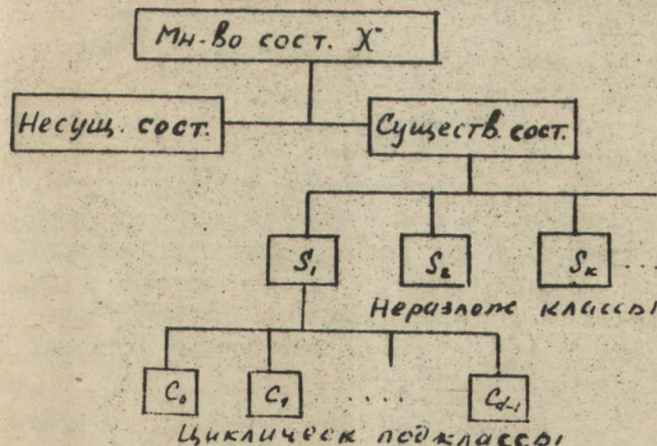
Из приведенных рассуждений видно, что матрицу вероятностей переходов неразложимого класса можно представить в следующем виде:

$$P_S = \begin{array}{c|cccc} & C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{d-1} \\ \hline C_0 & & \text{штриховано} & & & \\ C_1 & & & \text{штриховано} & \dots & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ C_{d-1} & & & & & \text{штриховано} \\ C_{d-1} & \text{штриховано} & & & \dots & \end{array}$$

Заштрихованы элементы матрицы, отличные от нуля.

Рассмотрим некоторый подкласс C_p . Если в начальный момент времени система находилась в C_p , то в моменты времени $k = p + d\tau$, $\tau = 0, 1, \dots$, она будет находиться в подклассе C_p . Следовательно, с каждым подклассом C_p можно связать новую марковскую цепь с матрицей вероятностей переходов $(p_{ij}(\tau))$, $j, i \in C_p$, которая будет неразложимой и апериодической. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении предельных свойств вероятностей $p_{ij}(n)$ можно ограничиться только эргодическими классами.

С учетом проведенной классификации все состояния марковской цепи можно расположить по следующей схеме.



§ 3. Классификация состояний марковской цепи по асимптотическим свойствам вероятности $p_{ij}^{(n)}$

Введем вероятность

$f_{ij}^{(n)} = P(\{X_n = j / X_0 = i \vee X_\ell \neq j, \forall \ell = 1, \dots, n-1\})$
того, что система попадет из i -го состояния в j -е впервые на n -м шаге. Тогда вероятность

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

можно рассматривать как вероятность того, что система, выйдя из i -го состояния, хотя бы один раз побывает в j -м.

Через $g_{ij}^{(n)}$ обозначим вероятность того, что система, выйдя из i -го состояния, не менее n раз побывает в j -м состоянии. Очевидно, $g_{ij}^{(n)} < 1$ в общем случае. Если существует предел

$$g_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{ij}^{(n)},$$

то система, выйдя из i -го состояния, побывает в j -м бесконечное число раз.

Состояние i назовем возвратным, если $f_{ii}^* = 1$, и невозвратным, если $f_{ii}^* < 1$.

Возвратность состояния означает, что система, вышедшая из i -го состояния, рано или поздно снова вернется в это состояние, но после возвращения эволюция системы как бы начинается заново.

Теорема I. Если состояние i возвратно, то $g_{ii}^* = 1$, и для невозвратных состояний $g_{ii}^* = 0$, то есть

$$g_{ii}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } f_{ii}^* = 1; \\ 0, & \text{если } f_{ii}^* < 1. \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой полной вероятности. Через A обозначим событие, состоящее в том, что система, выйдя из i -го состояния, вернется в него не менее n раз. Через H_k обозначим событие, состоящее в том, что система, выйдя из i -го состояния, впервые вернется в него на k -м шаге, причем H_0 — система выйдет из i -го состояния и в него не вернется. Очевидно, что

$$P(H_k) = f_{ii}^{(k)}, \quad P(A/H_k) = g_{ii}^{(n-k)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad P(A/H_0) = 0.$$

События $\{H_k, k=0, 1, \dots\}$ несовместны, тогда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = g_{ii}^*(n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^*(k) g_{ii}^*(n-1) = f_{ii}^* g_{ii}^*(n-1).$$

Полученную рекуррентную формулу применим $(n-1)$ раз, получим

$$g_{ii}^*(n) = f_{ii}^*(f_{ii}^* g_{ii}^*(n-2)) = \dots = (f_{ii}^*)^n.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$g_{ii}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } f_{ii}^* = 1; \\ 0, & \text{если } f_{ii}^* < 1. \end{cases} \blacklozenge$$

Таким образом, если i - е состояние возвратно, то с вероятностью 1 система побывает в нем бесконечное число раз, если же состояние невозвратно, то с вероятностью 1 система побывает в нем лишь конечное число раз.

Теорема 2. Несущественное состояние невозвратно.

Доказательство. Пусть i - несущественное состояние, это значит, что существуют такие ℓ и m , что $p_{i\ell}(m) > 0$, но для $\forall n$ и $p_{\ell i}(n) = 0$. Отсюда следует, что $g_{\ell i}^* = 0$. Далее воспользуемся формулой полной вероятности. Обозначим через A событие, состоящее в том, что система, вышедшая из состояния i , вернется в него бесконечное число раз. H_k - событие, заключающееся в том, что система на m -м шаге окажется в k -м состоянии. По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = g_{ii}^* = \sum_k p_{ik}(m) g_{ki}^* = \sum_{k \neq \ell} p_{ik}(m) g_{ki}^*.$$

Так как $g_{ki}^* \leq 1$, то

$$g_{ii}^* \leq \sum_{k \neq \ell} p_{ik}(m) = 1 - p_{i\ell}(m).$$

Поскольку $p_{i\ell}(m) > 0$, то $g_{ii}^* < 1$. По предыдущей теореме g_{ii}^* принимает лишь два значения, причем значение строго меньше 1 только одно: $g_{ii}^* = 0$. А это возможно лишь, когда $f_{ii}^* < 1$, то есть состояние i невозвратно. $\blacklozenge$

Так как отыскание функции $f_{ii}^*(n)$ довольно-таки сложно, то для определения возвратности состояния полезна следующая теорема.

Теорема 3. Состояние i -возвратно, если ряд $\sum_k p_{ii}(\kappa)$ расходится, то есть

$$\text{если } \sum_n p_{ii}(n) < \infty, \text{ то } f_{ii}^* < 1;$$

$$\text{если } \sum_n p_{ii}(n) = \infty, \text{ то } f_{ii}^* = 1.$$

Доказательство. В основу доказательства опять положена формула полной вероятности. Через A обозначим событие, состоящее в том, что система, выйдя из состояния i за n шагов, вернется в него, быть может, не впервые, H_k - впервые система вернется в исходное i -е состояние на k -м шаге, H_0 - система, выйдя из i -го состояния, в него не вернется, тогда

$$p(H_k) = f_{ii}(\kappa);$$

$$p(A/H_k) = p_{ii}(n-\kappa);$$

$$p(A/H_0) = 0.$$

По формуле полной вероятности имеем

$$p_{ii}(n) = \sum_{\kappa=1}^n p_{ii}(n-\kappa) f_{ii}(\kappa).$$

Суммируем обе части этого равенства по n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^n p_{ii}(n-\kappa) f_{ii}(\kappa).$$

Меняем местами суммы в правой части и переобозначим переменную суммирования во внутренней сумме, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_{ii}(\kappa) \sum_{n=\kappa}^{\infty} p_{ii}(n-\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_{ii}(\kappa) \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{ii}(\nu).$$

Выполняя суммирование по κ и учитывая, что $p_{ii}(0) = 1$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = f_{ii}^* \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{ii}(\nu) = f_{ii}^* (1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ii}(\nu)).$$

Отсюда

$$f_{ii}^* = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)}.$$

Следовательно, значение f_{ii}^* зависит от поведения ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$. Так, если этот ряд сходится, то $f_{ii}^* < 1$, что соответствует тому, что i - невозвратное состояние, а

если этот ряд расходится, то $f_{ii}^* = 1$, тогда i - е состояние возвратно. ♦

Теорема 4. Если имеем два сообщающихся состояния и одно из них возвратно, то второе возвратно тоже.

Доказательство. Пусть состояния i и j сообщающиеся, тогда существуют m и n такие, что $p_{ji}(m) > 0$ и $p_{ji}(n) > 0$, и пусть состояние i возвратно. Рассмотрим вероятность

$$p_{jj}(m+n+v) \geq p_{ji}(n) p_{ii}(v) p_{ij}(m).$$

Суммируя по v , имеем

$$\sum_s p_{jj}(s) \geq \sum_v p_{jj}(m+n+v) \geq p_{ij}(m) p_{ji}(n) \sum_v p_{ii}(v)$$

или

$$\sum_s p_{jj}(s) \geq \sum_v p_{ii}(v), \text{ так как } p_{ij}(m) > 0, p_{ji}(n) > 0.$$

Но ряд, стоящий в правой части, расходится по условию теоремы, следовательно, расходится и ряд $\sum_s p_{jj}(s)$, и по теореме 3 состояние j возвратно. ♦

Сформулируем как очевидное следующее утверждение.

Теорема 5. Если состояния i и j сообщающиеся и i возвратно, то $f_{ij}^* = 1$, то есть система, выйдя из i -го состояния, хотя бы раз побывает в j -м состоянии.

Доказательство этого факта довольно громоздко и здесь не приводится. Найти его можно в [2] и [15].

Теорема 6. Если состояния i и j сообщающиеся и i - возвратное, то $g_{ij}^* = 1$, то есть система, выйдя из i -го состояния, побывает в j -м бесконечное число раз с вероятностью 1.

Доказательство. Повторяя рассуждения теоремы I, можем записать

$$g_{ij}(m) = f_{ij}^* g_{ij}^*(m-1).$$

Переходим к пределу при $m \rightarrow \infty$, тогда

$$g_{ij}^* = f_{ij}^* g_{ij}^*.$$

Так как i - возвратное состояние, то по теореме 4 j - тоже возвратное $g_{ji}^* = 1$. По предыдущей теореме $f_{ij}^* = 1$, следовательно, $g_{ij}^* = 1$. ♦

Теорема 7. Если j невозвратно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности можно записать

$$p_{ij}(n) = \sum_{v=1}^n f_{ij}(v) p_{jj}(n-v).$$

Суммируем по n и меняем местами суммы в правой части, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^n f_{ij}(v) p_{jj}(n-v) = f_{ij} \sum_{v=1}^{\infty} p_{jj}(v).$$

Так как j невозвратно, то ряд в правой части сходится, следовательно, сходится и ряд $\sum_n p_{ij}(n)$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0. \blacklozenge$$

Покажем теперь, что свойство возвратности состояния является свойством всего класса. Рассмотрим марковскую цепь с конечным числом состояний $X = (1, 2, \dots, \lambda)$.

Теорема 8. Все состояния аperiodической неразложимой цепи возвратны.

Доказательство. Предположим, что все состояния невозвратны. Тогда в силу предыдущей теоремы и конечности множества состояний имеем

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\lambda} p_{ij}(n) = \sum_{j=1}^{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0.$$

Из этого противоречия следует, что все состояния не могут быть невозвратными.

Пусть i_0 возвратно, а j произвольное состояние. Так как i_0 и j сообщающиеся и i_0 возвратно, то по теореме 4 j — е состояние тоже возвратно. $\blacklozenge$

Таким образом, все состояния конечного эргодического класса возвратны. Невозвратные состояния возможны только при бесконечном числе состояний.

§ 4. Финальные вероятности

Рассмотрим аperiodическую неразложимую марковскую цепь с конечным числом состояний. Покажем, что для состояний такой цепи существует финальное распределение вероятностей.

Теорема. Для апериодического неразложимого класса ($d=1$) с конечным числом состояний для V_j существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij} \cdot(n) = \pi_j,$$

не зависящий от i , и носит название финальной вероятности j -го состояния.

Доказательство. Так как рассматривается один класс, все состояния которого сообщаются, и период класса $d=1$, то существует такое N , что для всех $n > N$ $p_{ij} \cdot(n) > 0$. Докажем, что с ростом n $\max_i p_{ij} \cdot(n)$ может только убывать, а $\min_i p_{ij} \cdot(n)$ — только возрастать. Воспользуемся для этого уравнением Чепмена-Колмогорова

$$p_{ij} \cdot(n) = \sum_k p_{ik} p_{kj} \cdot(n-1) \leq \max_k p_{kj} \cdot(n-1) \sum_k p_{ik} = \max_k p_{kj} \cdot(n-1).$$

Поскольку правая часть неравенства не зависит от i , то справедливо

$$\max_i p_{ij} \cdot(n) \leq \max_k p_{kj} \cdot(n-1).$$

Аналогично можно записать

$$p_{ij} \cdot(n) = \sum_k p_{ik} p_{kj} \cdot(n-1) \geq \min_k p_{kj} \cdot(n-1) \sum_k p_{ik} = \min_k p_{kj} \cdot(n-1),$$

следовательно,

$$\min_i p_{ij} \cdot(n) \geq \min_k p_{kj} \cdot(n-1).$$

Для доказательства существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij} \cdot(n) \neq 0$ докажем, что $|\max_i p_{ij} \cdot(n) - \min_i p_{ij} \cdot(n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Рассмотрим разность

$$p_{ij} \cdot(n) - p_{kj} \cdot(n) = \sum_s |p_{is}(s) - p_{ks}(s)| p_{sj} \cdot(n-s). \quad (10)$$

Заметим, что разности под знаком суммы могут быть как положительны, так и отрицательны. Введем обозначения

$$p_{ik}^+ = p_{is}(s) - p_{ks}(s) \geq 0; \quad (11)$$

$$-p_{ik}^- = p_{is}(s) - p_{ks}(s) < 0. \quad (12)$$

Покажем, что $\sum_{z^+} \beta_{ik}^2 = \sum_{z^-} \gamma_{ik}^2$. Очевидно,

$$\sum_z |p_{is}(s) - p_{ks}(s)| = \sum_{z^+} \beta_{ik}^2 + \sum_{z^-} \gamma_{ik}^2 = 1 - 1 = 0,$$

где z^+ — те значения z , для которых выполнено (11), и z^- — для которых выполнено (12). Обозначим

$$h_{ik} = \sum_{z+} \beta_{ik}^z = \sum_{z-} \gamma_{ik}^z. \quad (I3)$$

Как уже отмечалось, все $\rho_{ik}(s) > 0$, значит,

$$h_{ik} = \sum_{z+} [\rho_{ik}(s) - \rho_{kz}(s)] < \sum_{z+} \rho_{iz}(s) < \sum_z \rho_{iz}(s) = 1,$$

Таким образом, $h_{ik} < 1$ для всех i и k , следовательно,

$$\max_{i,k} h_{ik} = h < 1. \quad (I4)$$

Теперь возвратимся к интересующей нас разности (I0). Имеем

$$\begin{aligned} |\rho_{ij}(n) - \rho_{kj}(n)| &= \left| \sum_{z+} \beta_{ik}^z \rho_{zj}(n-s) - \sum_z \gamma_{ik}^z \rho_{zj}(n-s) \right| \leq \\ &\leq \left| \max_z \rho_{zj}(n-s) \sum_{z+} \beta_{ik}^z - \min_z \rho_{zj}(n-s) \sum_z \gamma_{ik}^z \right|. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (I3) и (I4), продолжим цепочку

$$\begin{aligned} |\rho_{ij}(n) - \rho_{kj}(n)| &\leq h_{ik} \left| \max_z \rho_{zj}(n-s) - \min_z \rho_{zj}(n-s) \right| \leq \\ &\leq h \left| \max_z \rho_{zj}(n-s) - \min_z \rho_{zj}(n-s) \right|. \end{aligned}$$

Так как правая часть не зависит от i и k , то неравенство верно, если возьмем экстремум по i и k , т.е.

$$\left| \max_i \rho_{ij}(n) - \min_k \rho_{kj}(n) \right| \leq \left| \max_z \rho_{zj}(n-s) - \min_z \rho_{zj}(n-s) \right| \cdot h.$$

Рассматривая это равенство как рекуррентное, используем его q раз, тогда

$$\left| \max_i \rho_{ij}(n) - \min_k \rho_{kj}(n) \right| \leq h^q \left| \max_z \rho_{zj}(n-sq) - \min_z \rho_{zj}(n-sq) \right|.$$

Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow \infty$. Так как

$$\left| \max_z \rho_{zj}(n-sq) - \min_z \rho_{zj}(n-sq) \right| \leq 2$$

для $h < 1$, $h^q \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$, то имеем

$$\left| \max_i \rho_{ij}(n) - \min_k \rho_{kj}(n) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что и доказывает существование предельных вероятностей. ♦

Финальные вероятности определяют вероятности состояний системы при бесконечно долгом блуждании и не зависят от того, из какого состояния система начала свою эволюцию. Для однородных цепей Маркова финальные вероятности не меняются со временем, поэтому можно сказать, что они определяют стационарное распределение вероятностей по состояниям системы.

В системе с бесконечным числом состояний финальные вероятности существуют, если состояния образуют один возвратный класс, т.е. для $\forall i: f_{ii}^+ = 1$, и определяются как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j, \quad \forall j.$$

Финальные вероятности являются наиболее важной характеристикой марковской цепи, поэтому остановимся на их вычислении.

Теорема. Пусть для марковской цепи со счетным множеством состояний и матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})$ существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j, \quad \forall j,$$

тогда 1) $\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$;

2) или все π_i или $\sum_i \pi_i = 1$;

3) если $\pi_i = 0 \quad \forall i$, то стационарного распределения не существует; если $\sum_i \pi_i = 1$, то набор $(\pi_1, \pi_2, \dots)$ образует единственное стационарное распределение.

Доказательство. По теореме Фату из функционального анализа и определению вероятности π_j имеем

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}(n) p_{ij} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i p_{ki}(n) p_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{kj}(n+1) = \pi_j.$$

То есть для любого состояния j получили

$$\sum_i \pi_i p_{ij} \leq \pi_j.$$

Пусть для некоторого j_0 выполняется строгое неравенство

$$\sum_i \pi_i p_{ij_0} < \pi_{j_0},$$

тогда, суммируя по j , имеем

$$\sum_{j_0} \pi_{j_0} > \sum_{j_0} \left(\sum_i \pi_i p_{ij_0} \right) = \sum_i \pi_i \sum_{j_0} p_{ij_0} = \sum_i \pi_i.$$

Полученное противоречие доказывает, что для V_j финальные вероятности удовлетворяют уравнению

$$\sum_i \pi_i \rho_{ij} = \pi_j. \quad (15)$$

Тем самым доказали утверждение I.

Заметим, что предыдущее соотношение верно, если система из i -го состояния переходит в j -е для V_j за произвольное число шагов n , т.е.

$$\sum_i \pi_i \rho_{ij}^{(k)} = \pi_j. \quad (16)$$

Отсюда, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \pi_i \rho_{ij}(n) = \sum_i \pi_i \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{ij}(n) = \left(\sum_i \pi_i \right) \pi_j$$

или для V_j

$$\pi_j (1 - \sum_i \pi_i) = 0.$$

Таким образом, доказали утверждение 2.

Теперь покажем, что если $\sum_i \pi_i = 1$, то уравнения (15) однозначно определяют финальные вероятности.

Пусть $q = (q_1, q_2, \dots)$ — финальные вероятности, отличные от набора $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$. Тогда, поскольку (16) равносильно (15), можно записать

$$\sum_i q_i \rho_{ij}(n) = q_j.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i q_i \rho_{ij}(n) = q_j.$$

или

$$\sum_i q_i \pi_j = q_j.$$

Последнее соотношение с учетом $\sum_i q_i = 1$ дает $\pi_j = q_j$, т.е. уравнения

$$\begin{aligned} \sum_i \pi_i \rho_{ij} &= \pi_j; \\ \sum_i \pi_i &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

однозначно определяют финальные вероятности. $\diamond$

Если $\pi_i = 0 \forall i$, то соответствующий класс называется возвратным нулевым, если $\sum_i \pi_i = 1$, то класс называется положительно

возвратным.

Если имеем возвратный нулевой класс, то в нем не устанавливается стационарное распределение вероятностей и процесс протекает в одном направлении.

До сих пор мы рассматривали вероятностные характеристики дискретной Марковской цепи. Теперь ознакомимся с основными временными характеристиками.

§ 5. Среднее время перехода из не существенного состояния в эргодический класс

Обозначим S_k множество состояний k -го эргодического класса, T - множество не существенных состояний, m_i - среднее время перехода из i -го состояния, $i \in T$, в k -й эргодический класс. Найдем это время.

Система за один шаг может перейти из i -го не существенного состояния в некоторое состояние $j \in S_k$ с вероятностью $\sum_{j \in S_k} p_{ij}$, тогда время перехода равно 1. Если же система за первый шаг перейдет в другое не существенное состояние $\ell \in T$ с вероятностью $p_{i\ell}$, то среднее время перехода в эргодический класс будет равно $(1 + m_\ell)$, и окончательно имеем

$$\begin{aligned} m_i &= i \cdot \sum_{j \in S_k} p_{ij} + \sum_{\ell \in T} p_{i\ell} (1 + m_\ell) = \\ &= \sum_{j \in S_k} p_{ij} + \sum_{\ell \in T} p_{i\ell} + \sum_{\ell \in T} m_\ell p_{i\ell} = \sum_{j \in T \cup S_k} p_{ij} + \sum_{\ell \in T} m_\ell p_{i\ell}. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно m_i , $i \in T$, найдем среднее время перехода из не существенного состояния в k -й эргодический класс.

Если нас интересует среднее время перехода в произвольный эргодический класс, тогда эту систему уравнений удобно записать в матричном виде. Обозначим $m^T = (m_0, \dots, m_k)$, $e^T = (1, \dots, 1)$, $R = (p_{ij}, i, j \in T)$.

Учитывая, что в этом случае $\sum_{j \in T \cup S_k} p_{ij} = 1$, имеем

$$m = e + Rm \quad \text{или} \quad m = (I - R)^{-1} e.$$

Последнее соотношение и определяет вектор среднего времени перехода из не существенного состояния в эргодический класс.

§ 6. Среднее время перехода из состояния в состояние внутри класса

Пусть i и $j \in S$ - множество состояний одного класса. Через m_{ij} обозначим среднее число шагов, необходимых для перехода из i -го состояния в j -е.

За один шаг система может из i -го состояния с вероятностью p_{ij} перейти в j -е состояние, тогда время перехода будет равно 1, и оно будет равно $1 + m_{kj}$, если за этот шаг система перейдет из i -го состояния в некоторое k -е. Тогда по формуле для условного математического ожидания имеем

$$m_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} (m_{kj} + 1)$$

или

$$m_{ij} = 1 + \sum_k p_{ik} m_{kj} - p_{ij} m_{ij} \quad (18)$$

Введем матричные обозначения

$$M = (m_{ij}, i, j \in S), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{ss} \end{pmatrix},$$

где s - число состояний данного класса.

В матричном виде уравнение (18) принимает вид

$$M = E + P M - P D.$$

Отсюда получаем

$$M = (I - P)^{-1} (E - P D). \quad (19)$$

Эта формула определяет искомые средние значения времени перехода из одного состояния в другое.

Выясним теперь, что представляют собой элементы матрицы D , отличные от нулей. Для этого уравнение (18) умножим на финальную вероятность π_i i -го состояния и просуммируем по i :

$$\sum \pi_i m_{ij} = 1 + \sum_k m_{kj} \sum_i \pi_i p_{ik} - m_{ij} \sum_i \pi_i p_{ij}.$$

Перепишем это уравнение с учетом формулы (15):

$$\sum_i \pi_i m_{ij} = 1 + \sum_k m_{kj} \pi_k - m_{jj} \pi_j,$$

откуда непосредственно получаем

$$m_{jj} = \frac{1}{\pi_j}.$$

Таким образом, среднее время возвращения в исходное состояние обратно пропорционально финальной вероятности этого состояния. Это, в свою очередь, значит, что среднее время возвращения в положительное возвратное состояние конечно, в то время как для нулевых возвратных состояний оно бесконечно.

Глава V. ДИСКРЕТНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ I. Определение и основные свойства

Продолжая изучение марковских процессов, рассмотрим случай, когда множество значений случайного процесса $\{t\}$ X дискретно (X — счетное или конечное) и процесс изменяет свои значения в произвольные моменты времени (T — непрерывно).

Процесс $\{t\}$ называется дискретным марковским процессом, если для моментов $s < t < t'$ выполняется условие

$$P(\{t' = j\} / \{t = i, \{s = k\}\}) = P(\{t' = j\} / \{t = i\}) = p_{ij}(t, t')$$

где $i, j \in X$. Вероятность $p_{ij}(t, t')$ — это вероятность перехода из i -го состояния в j -е за промежуток времени $[t, t']$.

Если вероятность $p_{ij}(t, t')$ зависит лишь от разности моментов времени

$$p_{ij}(t, t') = p_{ij}(t' - t) = p_{ij}(\tau),$$

то марковский процесс называется однородным.

Таким образом, можно сказать, что однородные дискретные марковские процессы полностью задаются матрицей переходов

$$P(t) = (p_{ij}(t)), i, j \in X$$

и вектором начальных состояний $Q_j(0) = P(\{t=0=j\})$. Используя формулу полной вероятности, можно найти вероятности состояний в любой момент времени

$$p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(0) p_{kj}(t).$$

Отметим свойства переходной вероятности.

- 1) $p_{ij}(\tau) \geq 0$;
- 2) $\sum_j p_{ij}(\tau) = 1$;
- 3) уравнение Чепмена-Колмогорова для дискретных марковских процессов

$$p_{ij}(t, t') = \sum_k p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, t'), \quad \forall t < s < t'. \quad (2)$$

Для однородных процессов это уравнение принимает вид

$$p_{ij}(\tau + s) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(\tau); \quad (3)$$

- 4) условие стохастической непрерывности процесса

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} p_{ij}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Это условие означает, что с вероятностью 1 система (или процесс) не изменит своего состояния за бесконечно малый промежуток времени $\tau \rightarrow 0$. Следует отметить, что стохастическая

непрерывность не означает непрерывность реализаций случайного процесса. Это тем более очевидно в данном случае, так как множество значений случайного процесса дискретно, т.е. реализации разрывны, тем не менее условие стохастической непрерывности выполнено. Это происходит потому, что разрывы каждой реализации случайного процесса происходят в случайные моменты времени и вероятность того, что разрыв произойдет именно в данной точке t , равна нулю.

Сформулируем и докажем несколько теорем относительно вероятности $p_{ij}(t)$.

Теорема 1. Для однородного дискретного марковского процесса $p_{ij}(t)$ равномерно непрерывна по t .

Доказательство. Рассмотрим $\lim_{h \rightarrow 0} p_{ij}(t+h)$ при $h > 0$. Используем уравнение Чепмена-Колмогорова (3):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} p_{ij}(t+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (p_{ij}(t) p_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h)) = \\ &= p_{ij}(t) \lim_{h \rightarrow 0} p_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \lim_{h \rightarrow 0} p_{kj}(h) = p_{ij}(t). \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовано условие стохастической непрерывности. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_k p_{ik}(t-h) p_{kj}(h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} p_{ij}(t-h) p_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} \lim_{h \rightarrow 0} p_{ik}(t-h) p_{kj}(h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} p_{ij}(t-h) \lim_{h \rightarrow 0} p_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} \lim_{h \rightarrow 0} p_{ik}(t-h) \lim_{h \rightarrow 0} p_{kj}(h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} p_{ij}(t-h). \end{aligned}$$

Сравнивая подчеркнутые выражения, получаем доказываемое утверждение. ♦

Теорема 2. Для $\forall i \in X$ вероятность вернуться в исходное состояние строго больше нуля для всех $t > 0$,

$$p_{ii}(t) > 0.$$

Доказательство. В силу стохастической непрерывности найдем такое $h > 0$, что для $\forall t \leq h$

-141-

$$p_{ii}(t) > 0.$$

Пусть t произвольно. Всегда можно найти такое n , чтобы $\frac{t}{n} < h$, тогда

$$p_{ii}(t) = \sum_{\{k_i: i=1, n\}} p_{i, k_1}(\frac{t}{n}) p_{k_1, k_2}(\frac{t}{n}) \dots p_{k_{n-1}, i}(\frac{t}{n}) \geq (p_{ii}(\frac{t}{n}))^n > 0.$$

Теорема 3. Если для некоторого t_0 $p_{ij}(t_0) > 0$, то и для $\forall t$ $p_{ij}(t) > 0$.

Доказательство вытекает непосредственно из уравнения Чепмена-Колмогорова

$$p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t - t_0) p_{kj}(t_0) \geq p_{ii}(t - t_0) p_{ij}(t_0) > 0,$$

причем строгое неравенство вытекает из теоремы 2. $\diamond$

В общем случае $p_{ij}(t)$ для произвольного t удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова, для вывода которых сформулируем без доказательства еще две теоремы.

Теорема 4. Для марковского процесса со счетным множеством состояний существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(t, t+h) - 1}{h} = q_{ii}(t),$$

хотя и может быть бесконечным.

Теорема 5. Для марковского процесса со счетным множеством состояний существует и конечен предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h} = q_{ij}(t), \quad i \neq j.$$

Величины $q_{ij}(t)$ имеют смысл плотности (интенсивности) вероятности перехода, т.е. $q_{ij}(t) \cdot h + O(h)$ - вероятность того, что система перейдет из i -го состояния в j -е за интервал $[t, t+h)$. Эти величины называют инфинитезимальными параметрами. Из определения следует, что

$$\sum_j q_{ij}(t) = 0, \text{ так как}$$

$$\sum_j p_{ij}(t, t+h) - 1 = 0 \quad \text{или}$$

$$\sum_{j \neq i} p_{ij}(t, t+h) + p_{ii}(t) - 1 = 0.$$

Последнее соотношение делим на h и переходим к пределу при

$h \rightarrow 0$ и окончательно имеем

$$\sum_j q_{ij}(t) = 0 \quad (4)$$

§ 2. Дифференциальные уравнения Колмогорова

Матрица инфинитезимальных параметров $Q(t) = (q_{ij}(t))$, $i, j \in X$ позволяет найти вероятности $p_{ij}(\tau, t)$ для $\forall t > \tau$. Рассмотрим уравнение Чепмена-Колмогорова

$$p_{ij}(\tau-h, t) = \sum_k p_{ik}(\tau-h, \tau) p_{kj}(\tau, t).$$

От обеих частей этого уравнения отнимем $p_{ij}(\tau, t)$ и разделим на h :

$$\frac{1}{h}(p_{ij}(\tau-h, t) - p_{ij}(\tau, t)) = \frac{1}{h} \left[\sum_k p_{ik}(\tau-h, \tau) p_{kj}(\tau, t) - p_{ij}(\tau, t) \left(\sum_k p_{ik}(\tau-h, \tau) - 1 \right) \right].$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial p_{ij}(\tau, t)}{\partial \tau} = \sum_k q_{ik}(\tau) p_{kj}(\tau, t), \quad \forall i, j. \quad (5)$$

Эта система уравнений носит название обратной системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Для однородных марковских процессов она принимает вид

$$\frac{d p_{ij}(\tau)}{d \tau} = \sum_k q_{ik} p_{kj}(\tau). \quad (6)$$

Совместно с начальными условиями

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

система уравнений (6) однозначно определяет вероятности переходов однородного марковского процесса.

Обратимся вновь к уравнению Чепмена-Колмогорова

$$p_{ij}(\tau, t+h) = \sum_k p_{ik}(\tau, t) p_{kj}(t, t+h).$$

Пределывая преобразования, аналогичные приведенным выше, нетрудно получить

$$\frac{\partial p_{ij}(\tau, t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(\tau, t) q_{kj}(t). \quad (8)$$

В отличие от (5) здесь вероятности переходов определяются инфинитезимальными параметрами в момент времени $t > \tau$. Эта

система уравнений называется прямой системой дифференциальных уравнений Колмогорова. Для однородных марковских процессов прямая система уравнений имеет вид

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj}. \quad (9)$$

Если к этой системе добавить начальные условия (7), то $p_{ij}(t)$ определяются однозначно. Причем если число состояний системы конечно, то решения прямой и обратной систем уравнений совпадают. Для системы со счетным множеством состояний удобнее решать обратную систему уравнений.

§ 3. Финальные вероятности

Можно показать, что для системы с конечным числом состояний существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \quad \forall j,$$

не зависящий от i , который называется финальной вероятностью j -го состояния. Другими словами, при бесконечно длительной эволюции в системе устанавливается стационарное распределение вероятностей, не зависящее от времени. Уравнения для вычисления финальных вероятностей получим, переходя к пределу в уравнениях (6). Тогда с учетом того, что $\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = 0$, имеем

$$\sum_k \pi_k q_{kj} = 0; \quad (10)$$

$$\sum_k \pi_k = 1. \quad (11)$$

Система уравнений (10) совместно с условием нормировки (11) однозначно определяет финальные вероятности.

§ 4. Среднее время перехода из одного состояния в другое

Через T_{ij} обозначим среднее время перехода из i -го состояния в j -е. Так как переходы из одного состояния в другое происходят в произвольные моменты времени, то за время Δt система может перейти из i -го состояния в j -е с вероятностью $p_{ij}(\Delta t)$ и в состояние, отличное от j -го, с вероятностью

$p_{ik}(\Delta t) \quad k \neq j$. Тогда, используя формулу для условного математического ожидания, имеем

$$T_{ij} = \Delta t \cdot p_{ij}(\Delta t) + \sum_{k \neq j} (T_{kj} + \Delta t) p_{ik}(\Delta t). \quad (I2)$$

Из определения инфинитезимальных параметров q_{ij} можем записать

$$p_{ik}(\Delta t) = q_{ik} \cdot \Delta t;$$

$$p_{ii}(\Delta t) = q_{ii} \cdot \Delta t + 1.$$

Подставляя это в (I2), получим

$$T_{ij} = (\Delta t)^2 q_{ij} + (1 + q_{ii} \Delta t)(T_{ij} + \Delta t) + \sum_{k \neq j} q_{ik} \Delta t (T_{kj} + \Delta t). \quad (I3)$$

Делим все уравнение на Δt и переходим к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем

$$\sum_{k \neq j} q_{ik} T_{kj} = -1. \quad (I4)$$

Из этой системы уравнений можно найти среднее время перехода из i -го состояния в j -е, если $j \neq i$. Найдем еще среднее время возвращения в i -е состояние. Из (I3) при $j = i$ имеем

$$T_{ii} = p_{ii}(\Delta t) T_{ii} + \sum_{k \neq i} p_{ik}(\Delta t) (T_{ki} + \Delta t).$$

После несложных преобразований, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$T_{ii} q_{ii} + \sum_{k \neq i} q_{ik} T_{ki} = 0.$$

Отсюда с учетом (I4) находим, что $T_{ii} = q_{ii}^{-1}$ - среднее время возвращения в исходное состояние обратно пропорционально инфинитезимальному параметру этого состояния.

§ 5. Процесс размножения и гибели

Так называется однородный марковский процесс со счетным множеством состояний, когда из некоторого состояния k ($k = 0, 1, \dots$) за время Δt возможен переход лишь в состояния $k+1$, $k-1$, а из нулевого состояния переход возможен лишь в первое. Такие процессы хорошо описы-

вают задачи в области биологии, физики, социологии, массового обслуживания.

Пусть рассматриваемый процесс стохастически непрерывен и существуют конечные величины q_{ij} для всех i, j . Из определения процесса рождения и гибели вытекает, что для некоторого состояния i отличны от нуля лишь три параметра: $q_{i,i-1}$, $q_{i,i}$ и $q_{i,i+1}$.

Обозначим $q_{i,i-1} = \lambda_i$ и $q_{i,i+1} = \mu_i$. Тогда

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + O(\Delta t);$$

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + O(\Delta t).$$

В силу условия (4) $q_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$ и, следовательно,

$$p_{i,i}(\Delta t) = 1 + (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + O(\Delta t).$$

Если состояние процесса интерпретировать как число заявок в некоторой системе массового обслуживания, то $\lambda_i \Delta t$ с точностью до $O(\Delta t)$ есть вероятность поступления новой заявки в систему с i заявками, а $\mu_i \Delta t + O(\Delta t)$ — вероятность окончания обслуживания заявки и ее ухода из системы за время Δt .

Прямая и обратная системы уравнений Колмогорова в данном случае имеют вид

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t); \quad (I5)$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t). \quad (I6)$$

Отметим, что для существования решения прямой системы уравнений (I5) нужно ввести дополнительные ограничения на параметры λ_i . Подробнее об этом можно посмотреть в [2].

Найдем финальные вероятности для процесса рождения и гибели. Уравнения для их определения имеют вид

$$\pi_{i-1} \lambda_{i-1} - (\lambda_i + \mu_i) \pi_i + \mu_{i+1} \pi_{i+1} = 0, \quad i=1, 2, \dots; \quad (I7)$$

$$-\pi_0 \lambda_0 + \pi_1 \mu_1 = 0; \quad (I8)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \quad (I9)$$

Из уравнения (I8) имеем $\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0$. Полагая $i=1$, из (I7) получим

$$\mu_2 \pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 - \lambda_0 \pi_0 \quad \text{или} \quad \pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0.$$

Далее по индукции получаем

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \pi_0.$$

Постоянную величину π_0 найдем из условия нормировки (I9):

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right) = 1.$$

Отсюда

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right)^{-1}.$$

Здесь возможны два случая:

$$1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} < \infty,$$

в этом случае финальные вероятности существуют и равны

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \right)^{-1},$$

$$2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} = \infty,$$

тогда $\pi_0 = 0$ и финального распределения не существует. Это означает, что эволюция системы протекает в одну сторону, при этом номер состояния все возрастает.

Рассмотрим еще одну особенность, которая возникает в процессах чистого размножения, связанную с временной характеристикой.

Пусть $\mu_i = 0$. Найдем T_{in} - среднее время перехода из состояния i в состояние n . Система (I4) в данном случае имеет вид

$$-\lambda_i T_{in} + \lambda_i T_{i+1n} = -1.$$

Отсюда

$$T_{in} = T_{i+1n} + \frac{1}{\lambda_i}.$$

Так как рассматриваемый процесс чистого размножения протекает в одном направлении, то, как показано выше, финальные вероятности не существуют, и время возвращения в исходное состояние $T_{nn} = 0$.

Тогда

$$T_{n-1n} = \frac{1}{\lambda_{n-1}}.$$

Далее, полагая $i = n-2, n-3, \dots$, получим

$$T_{in} = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Рассмотрим среднее время перехода в состояние с бесконечно большим номером, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{in} = T_{i\infty} = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Здесь опять возможны два случая, связанные со сходимостью ряда.

1) Если ряд $\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j}$ расходится, то это означает, что в состоянии с бесконечно большим номером система перейдет за бесконечно большое время. Этот случай вполне разумен.

2) Если же ряд $\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} < \infty$, это соответствует тому, что система за конечное время переходит в состояние с бесконечно большим номером. Физически это означает, что в системе возникает лавинообразный процесс или "взрыв". Для биологических систем это соответствует эпидемии.

Заметим, что сходимость этого же ряда важна для существования решения прямой системы уравнений Колмогорова. Так, если этот ряд сходится, то каждое решение $p_{ij}(t)$ прямых уравнений является невырожденным, то есть $\sum_j p_{ij}(t) < 1$ при некотором t . Эти и другие особенности процессов размножения и гибели можно найти в [2].

§ 6. Пуассоновский процесс

Рассмотрим процесс, реализации которого представляют собой неубывающую ступенчатую функцию, причем моменты скачков определяются моментами появления некоторого события. Тогда значение процесса в момент времени t есть число событий, появившихся за время $[0, t)$. И пусть для этого процесса выполнены следующие условия.

1) Отсутствие последействия. Число наступлений события в некотором интервале не зависит от числа наступлений события на других непересекающихся с ним интервалах, то есть приращение процесса $(\{t_k\} - \{t_{k-1}\})$ независимы при $t_{k-1} < t_k$,

$k = 1, 2, \dots$

2. Стационарность. Число событий, наступивших на интервале $[t_{k-1}, t_k)$, не зависит от положения этого интервала на числовой оси и от значения процесса $\{t_{k-1}\}$, а определяется полностью длиной интервала $|t_k - t_{k-1}|$.

3. Ординарность. Пусть $p_k(h)$ - вероятность того, что на отрезке длины h наступит k событий. Для $h \rightarrow 0$ определим вероятности следующим образом:

$$p_1(h) = \lambda h + o(h), \quad \lambda > 0;$$

$$p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h);$$

$$p_k(h) = o(h) \quad \text{для } k = 2, 3, \dots$$

Другими словами, ординарность предполагает, что за время $h \rightarrow 0$ может наступить не более одного события, то есть, реализация случайного процесса изменяется скачком на единицу.

Покажем, что этот процесс с целочисленными значениями, удовлетворяющий условиям I-3, является, во-первых, марковским, во-вторых, приращения процесса $(\{t_k\} - \{t_{k-1}\})$ подчиняются распределению Пуассона.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим совместную вероятность того, что в три последовательных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ значения процесса были соответственно k_1, k_2, k_3 при условии $\{t=0\} = 0$:

$$P\{\{t_1\} = k_1; \{t_2\} = k_2; \{t_3\} = k_3\} = \quad (20)$$

$$P\{\{t_3\} - \{t_2\} = k_3 - k_2 = \ell_3; \{t_2\} - \{t_1\} = k_2 - k_1 = \ell_2; \{t_1\} = k_1 = \ell_1\}.$$

Используя условия отсутствия последействия и стационарности, имеем

$$P\{\{t_1\} = k_1; \{t_2\} = k_2; \{t_3\} = k_3\} = P\{\{t_3\} - \{t_2\} = \ell_3\} P\{\{t_2\} - \{t_1\} = \ell_2\} \cdot$$

$$\cdot P\{\{t_1\} = \ell_1\} = p_{\ell_3}(t_3 - t_2) p_{\ell_2}(t_2 - t_1) p_{\ell_1}(t_1) =$$

$$= p_{k_1}(t_1) p_{k_2 - k_1}(t_2 - t_1) p_{k_3 - k_2}(t_3 - t_2).$$

Аналогично можно показать, что для любого n и $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$\begin{aligned} p\{\xi(t_1)=k_1; \dots; \xi(t_n)=k_n\} &= p_{k_1}(t_1) \prod_{i=2}^n p_{k_i-k_{i-1}}(t_i-t_{i-1}) = \\ &= p_{k_1}(t_1) \prod_{i=2}^n p(\{\xi(t_i)=k_i / \xi(t_{i-1})=k_{i-1}\}). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что многомерная вероятность состояний процесса равна произведению вероятностей переходов $p_{k_i-k_{i-1}}(t_i-t_{i-1})$ из состояния k_{i-1} в состояние k_i за время t_i-t_{i-1} , а это есть определение однородного марковского процесса.

Покажем теперь, что вероятности переходов $p_c(\tau) = p_{k_2-k_{2-1}}(t_2-t_{2-1})$ есть распределение Пуассона. Пусть $m=0=\ell$. Рассмотрим $p_0(\tau+h)$. С учетом условий 1,3 имеем

$$p_0(\tau+h) = p_0(\tau) p_0(h) \text{ или}$$

$$p_0(\tau+h) = p_0(\tau) (1 - \lambda h).$$

Разделив на h и перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, имеем

$$p'_0(\tau) = -\lambda p_0(\tau). \quad (20)$$

Это дифференциальное уравнение есть не что иное как уравнение Колмогорова для цепей чистого размножения. И совместно с начальным условием

$$p_0(0) = 1 \quad (21)$$

однозначно определяет вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события в виде

$$p_0(\tau) = e^{-\lambda \tau}. \quad (22)$$

Для определения $p_m(\tau)$ воспользуемся непосредственно уравнениями Колмогорова для процессов чистого размножения

$$p'_m(\tau) = -\lambda p_m(\tau) + \lambda p_{m-1}(\tau) \quad (23)$$

с начальными условиями

$$p_m(0) = 0 \quad \text{для } m=1, 2, \dots \quad (24)$$

Для решения этой системы дифференциально-разностных уравнений воспользуемся производящей функцией

$$G(\tau, x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k(\tau) \quad (24)$$

Умножим (23) и (24) на x^k и суммируем по k . Тогда

$$\frac{\partial G(\tau, x)}{\partial \tau} = \lambda (x-1) G(\tau, x); \quad (26)$$

$$G(0, x) = 1. \quad (27)$$

В последнем уравнении учли начальное условие (21). Решением уравнения (26) с начальным условием (27) является функция

$$G(\tau, x) = e^{\lambda \tau (x-1)}.$$

Разложим экспоненту в ряд, тогда

$$G(\tau, x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau}. \quad (28)$$

Сравнивая формулы (25) и (28), видим, что

$$p_k(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau}. \quad (29)$$

Таким образом, приращения случайного процесса $\{t\}$, задающие вероятности переходов, подчиняются распределению Пуассона, а сам процесс $\{t\}$ называется пуассоновским процессом.

Нетрудно найти статистические характеристики пуассоновского процесса. Очевидно, что

$$m_1(\tau) = \sum_k k p_k(\tau) = \lambda \tau. \quad (30)$$

Отсюда $\lambda = \frac{m_1(\tau)}{\tau}$ — среднее число событий в единицу времени или интенсивность наступления событий.

Далее

$$D_1(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \lambda \tau)^2 p_k(\tau) = \lambda \tau.$$

Для описания пуассоновского процесса иногда удобно использовать временные соотношения.

Через z_i обозначим время между появлением $i-1$ и i -го события, то есть $z_i = t_i - t_{i-1}$. Другими словами, z_i есть время пребывания процесса в состоянии $i-1$. Тогда для описания процесса $\{t\}$ достаточно задать совместную плотность вероятностей $p(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Найдем явный вид этой функции. В силу отсутствия последействия

$$p(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n p(z_i).$$

Найдем вероятность того, что время между двумя событиями будет больше τ , то есть время пребывания в $i-1$ состоянии

больше τ :

$$p(z > \tau) = p_0(\tau).$$

С учетом формулы (22) имеем

$$p(z > \tau) = \int_{\tau}^{\infty} p(z) dz = p_0(\tau) = e^{-\lambda \tau}.$$

Отсюда

$$p(z) = \lambda e^{-\lambda z}.$$

Таким образом, время пребывания в одном состоянии подчиняется экспоненциальному закону. Отсюда среднее время пребывания в одном состоянии равно

$$M\{z\} = \lambda^{-1}.$$

Пуассоновский процесс наиболее широко используется при описании входных потоков заявок в системах массового обслуживания.

§ 7. Приложение процессов размножения и гибели

1. Обслуживание станков. Пусть m станков обслуживаются бригадой, состоящей из s рабочих ($s < m$).

Когда станок выходит из строя, он немедленно обслуживается одним рабочим, если не все рабочие заняты обслуживанием ранее вышедших из строя станков, или ожидает ремонта, если все рабочие заняты. Станки обслуживаются в порядке, в котором они выходят из строя.

Сделаем следующие предположения. Каждый работающий станок может выйти из строя за время $[t, t + dt)$ с вероятностью $\lambda dt + o(dt)$ независимо от момента t и времени работы. Аналогично, если станок в ремонте, то с вероятностью $\mu dt + o(dt)$ рабочий закончит ремонт за промежуток $[t, t + dt)$ независимо от продолжительности ремонта до момента t . Станки работают, выходят из строя и обслуживаются независимо друг от друга.

Если через E_k обозначить число неисправных станков в данный момент (как ремонтируемых, так и ожидающих ремонта), то выход из строя одного станка означает переход в состояние E_{k+1} , а окончание ремонта одного станка соответствует переходу в состояние E_{k-1} . Таким образом, имеем однородную марковскую систему с конечным числом состояний $E_0, E_1, \dots, E_m$ и

вероятностями перехода

$$p_{k, k-1}(\Delta t) = (m-k)\lambda \Delta t + O(\Delta t), \quad k=0, 1, \dots, m-1;$$

$$p_{k, k-1}(\Delta t) = k\mu \Delta t + O(\Delta t), \quad 1 \leq k \leq s;$$

$$p_{k, k-1}(\Delta t) = s\mu \Delta t + O(\Delta t), \quad s \leq k \leq m;$$

$$p_{k, k-2}(\Delta t) = O(\Delta t), \quad r \geq 2.$$

Используя предыдущие обозначения для цепей размножения и гибели, можем записать

$$\lambda_k = (m-k)\lambda, \quad k=0, 1, \dots, m;$$

$$\mu_k = k\mu, \quad 0 \leq k \leq s;$$

$$\mu_k = s\mu, \quad s \leq k \leq m.$$

Тогда: финальные вероятности всегда существуют и равны

$$\pi_k = C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0, \quad k \leq s;$$

$$\pi_k = C_m^k \frac{k(k-1)\dots(s+1)}{s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0, \quad s \leq k \leq m;$$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{k=0}^s C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=s+1}^m C_m^k \frac{k(k-1)\dots(s+1)}{s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}.$$

Эти формулы могут быть использованы при расчете наиболее выгодного соотношения между числом станков и количеством обслуживавших рабочих в конкретных производственных условиях.

II. Телефонная сеть. В ряде случаев возникает такая же схема, как выше, но $m = \infty$. Такое положение имеет место, например, на междугородной телефонной станции, обладающей s линиями связи и обслуживающей неограниченное число абонентов. Номер состояния системы в данном случае показывает число абонентов, требующих обслуживания в данный момент. Если их число больше s , то они становятся в очередь и ожидают свободной линии. В отличие от предыдущего примера будем считать, что ве-

роятность того, что за время Δt потребует обслуживания один абонент, равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от числа абонентов, стоящих в очереди. Режим обслуживания абонентов такой же, как и выше. Тогда имеем

$$\lambda_k = \lambda, \quad \mu_k = k\mu, \quad k \leq s;$$

$$\mu_k = s\mu, \quad k \geq s.$$

Для существования финальных вероятностей в такой системе необходимо сходимость ряда

$$\rho = \left\{ \sum_{k=0}^s \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{s! s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right\} < \infty,$$

то есть условия $\lambda < \mu$. При этом финальные вероятности определяются формулами

$$P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{s!}, \quad 0 \leq k \leq s;$$

$$P_k = \frac{1}{s! s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{s!}, \quad k \geq s.$$

Эти и другие формулы могут быть использованы при моделировании систем массового обслуживания.

Глава VI. НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Диффузионные марковские процессы

Рассмотрим еще один класс марковских процессов, который характеризуется тем, что множество состояний X является непрерывным и время перехода из одного состояния в другое тоже изменяется непрерывно. Такие процессы образуют класс непрерывных марковских процессов, являющихся широко распространенной моделью реальных процессов.

Случайный процесс $\{t\}$ называется непрерывным марковским, если для моментов времени $s, s', t \in T$, причем $0 \leq s' < s < t$, и любых действительных y выполнено равенство

$$P\{\{t\} < y / \{s\} = x; \{s'\} = z\} = P\{\{t\} < y / \{s\} = x\} = F(s, x; t, y). \quad (I)$$

Причем условная функция распределения $F(s, x; t, y)$ называется марковской переходной функцией. Задание этой функции и вероятности начального состояния полностью определяет марковский процесс. Если существует производная $p(s, x; t, y)$, то

$$F(s, x; t, y) = \int_{-\infty}^y p(s, x; t, u) du.$$

Очевидно, что марковская переходная функция удовлетворяет следующим условиям:

1) для $\forall x, t, y$ $F(x, s; y, t)$ является вероятностной мерой, то есть

$$F(s, x; t, y) \geq 0, \quad \forall y; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(s, x; t, y) = 1; \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(s, x; t, y) = 0; \quad (4)$$

2) для $\forall 0 \leq s < u < t$ $F(s, x; t, y)$ удовлетворяет уравнению Чепмена-Колмогорова

$$F(s, x; t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u, z; t, y) d_z F(s, x; u, z) \quad (5)$$

или

$$p(s, x; t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x; u, z) p(u, z; t, y) dz; \quad (6)$$

3) условие стохастической непрерывности в данном случае запишется в виде

$$\lim_{t \rightarrow s+0} F(s, x; t, y) = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}.$$

Это условие требует, чтобы вероятностная мера была сосредоточена около точки, из которой процесс начинается.

Если марковская переходная функция зависит только от разности моментов времени $t-s$, то такой процесс называется однородным марковским процессом

$$F(s, x; t, y) = F(t-s, x; y) = F(\tau, x, y).$$

Для однородного марковского процесса уравнение Чепмена-Колмогорова принимает вид

$$F(\tau+s, x; y) = \int F(\tau, z; y) d_z F(s, x; z)$$

или для плотности вероятностей переходов

$$p(\tau+s, x; y) = \int p(s, x; z) p(\tau, z; y) dz.$$

Среди непрерывных марковских процессов особую роль играют так называемые диффузионные процессы. Это название объединяется тем, что они являются математической моделью движения частицы в процессе диффузии. Кроме того, они могут быть использованы как предельные модели для дискретных процессов, описывающих биологические явления, такие, как изменение численности популяции биологического вида или концентрация гена в популяции.

Марковский процесс называется диффузионным, если его переходная функция $F(s, x; t, y)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x$ равномерно по $s < t$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{t}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} d_y F(s, x; t, y) = 0. \quad (7)$$

Это условие требует, чтобы вероятность того, что $|\{t\} - \{s\}| > \varepsilon$, была бы величиной более высокого порядка малости, чем $|t-s|$.

2. Существуют функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ такие, что

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{t}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) d_y F(s, x; t, y) = a(s, x); \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{t}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 d_y F(s, x; t, y) = b(s, x), \quad (9)$$

причем $a(s, x)$ называется коэффициентом сноса, или переноса, а

$b(s, x)$ - коэффициентом диффузии. При некоторых ограничениях на $F(s, x; t, y)$ задание коэффициентов $a(s, x)$, $b(s, x)$ полностью определяет марковский процесс. Сформулируем эти ограничения и получим прямое и обратное уравнения Колмогорова.

§ 2. Обратное уравнение Колмогорова

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ - непрерывная ограниченная функция такая, что $M\{\varphi(x)\} = u(s, x) = \int \varphi(y) d_y F(s, x; t, y)$ имеет ограниченные непрерывные производные по x первого и второго порядка, а функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ непрерывны. Тогда $u(s, x)$ имеет производную по s и удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} = a(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2}, \quad (I0)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow s} u(s, x) = \varphi(x). \quad (II)$$

Доказательство. Докажем соотношение (II). По определению функции

$$u(s, x) = \int \varphi(y) d_y F(s, x; t, y) = \int [\varphi(y) - \varphi(x)] d_y F(s, x; t, y) + \int \varphi(x) d_y F(s, x; t, y) = \varphi(x) + \int [\varphi(y) - \varphi(x)] d_y F(s, x; t, y).$$

Разобьем область интегрирования на две области: $|y-x| > \varepsilon$ и $|y-x| \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда с учетом (7) и ограниченности функции $\varphi(y)$ имеем

$$\begin{aligned} u(s, x) &= \varphi(x) + \int_{|y-x| > \varepsilon} [\varphi(y) - \varphi(x)] d_y F(s, x; t, y) + \int_{|y-x| \leq \varepsilon} [\varphi(y) - \varphi(x)] d_y F(s, x; t, y) = \\ &= \varphi(x) + \int_{|y-x| \leq \varepsilon} [\varphi(y) - \varphi(x)] d_y F(s, x; t, y). \end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к нулю в силу непрерывности $\varphi(y)$ при $t \rightarrow s$. Тем самым доказали (II).

Далее, по определению функции $F(s, x; t, y)$ $u(s, x)$ есть условное математическое ожидание функции $\varphi(y)$ по состояниям процесса в момент времени t при условии, что фиксировано значение процесса в момент времени $s < t$, то есть

$$u(s, x) = \int \varphi(y) d_y F(s, x; t, y) = M\{\varphi(y) / \{s\} = x\}. \quad (I2)$$

Рассмотрим три момента времени $0 \leq s_1 < s_2 < t$ и используем

формулу полной вероятности для условных математических ожиданий

$$\begin{aligned} u(s, x) &= \int \varphi(y) d_y F(s, x; t, y) = M\{\varphi(\xi(t)) / \xi(s_1) = x\} = \\ &= M\{M\{\varphi(\xi(t)) / \xi(s_1) = x, \xi(s_2) = z\} / \xi(s_1) = x\} = \\ &= M\{M\{\varphi(\xi(t)) / \xi(s_2) = z\} / \xi(s_1) = x\} = M\{u(s_2, z) / \xi(s_1) = x\} \end{aligned}$$

или

$$u(s, x) = \int u(s_2, z) d_z F(s, x; s_2, z). \quad (13)$$

Из обеих частей равенства вычтем $u(s_2, x)$ и область интегрирования разобьем на две, тогда

$$\begin{aligned} u(s, x) - u(s_2, x) &= \int [u(s_1, x) - u(s_2, x)] d_z F(s, x; s_2, z) = \\ &= \int_{|z-x| \leq \varepsilon} [u(s_2, z) - u(s_2, x)] d_z F(s, x; s_2, z) + \int_{|z-x| > \varepsilon} [u(s_1, z) - u(s_2, x)] d_z F(s, x; s_2, z). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу ограниченности $u(s, x)$ и свойства (7) второй интеграл стремится к нулю при $s_2 \rightarrow s$. Разложим функцию $u(s, z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = x$:

$$u(s, z) = u(s, x) + \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} (z - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} (z - x)^2 (1 + \gamma(\varepsilon)),$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \sup_{|z-x| \leq \varepsilon} \left| \frac{\partial^2 u(s, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Подставляя это разложение в (14), имеем

$$u(s, x) - u(s_2, x) = \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \int_{|z-x| \leq \varepsilon} (z-x) d_z F(s, x; s_2, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} \int_{|z-x| \leq \varepsilon} (z-x)^2 d_z F(s, x; s_2, z) +$$

Делим обе части уравнения на $s_2 - s$ и переходим к пределу при $s_2 \rightarrow s$. Предел правой части существует, так как верны условия (8), (9), следовательно, существует и предел левой части. Таким образом, получили доказываемое утверждение

$$-\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} = u(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2}.$$

Следствие. Пусть $\varphi(y) = 1 - C(y-x)$, где $C(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$

тогда $u(s, x) = \int \varphi(y) d_y F(s, x; t, y) = \int [1 - C(y-x)] d_y F(s, x; t, y) =$
 $= 1 - \int_{y > x} d_y F(s, x; t, y) = P\{\xi(t) < x / \xi(s) = x\} = F(s, x; t, x).$

Следовательно, для функции $F(s, x; t, y)$ получим уравнение

$$\frac{\partial F(s, x; t, y)}{\partial s} + a(s, x) \frac{\partial F(s, x; t, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(s, x; t, y)}{\partial x^2} b(s, x) = 0, \quad (I5)$$

которое носит название обратного уравнения Колмогорова.

Если существует производная $F'(s, x; t, y) = p(s, x; t, y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$0 = \frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial s} + a(s, x) \frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x; t, y)}{\partial x^2} \quad (I6)$$

Решение этих дифференциальных уравнений полностью описывает поведение диффузионного процесса. Здесь следует заметить, что для однозначности решения необходимо задать начальные условия в виде

$$\lim_{t \rightarrow s} F(s, x; t, y) = \begin{cases} 1, & x < y; \\ 0, & x \geq y \end{cases}$$

для уравнения (I5) и в виде

$$\lim_{t \rightarrow s} p(s, x; t, y) = \delta(x - y)$$

для уравнения (I6).

§ 3. Уравнение Фоккера-Планка

Теперь получим прямое уравнение Колмогорова, которое является сопряженным к обратному и еще называется уравнением Фоккера-Планка. Для вывода этого уравнения необходимо существование производной от марковской переходной функции $F(s, x; t, y)$, что является довольно жестким ограничением.

Теорема. Пусть имеется диффузионный процесс, для которого существуют $p(s, x; t, y)$ и частные производные

$$\frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial (p(s, x; t, y) a(t, y))}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 (p(s, x; t, y) b(t, y))}{\partial y^2}.$$

Тогда для $\forall t > s$ и $\forall y$ $p(s, x; t, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial t} = - \frac{\partial (a(t, y) p(s, x; t, y))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b(t, y) p(s, x; t, y))}{\partial y^2}, \quad (I7)$$

которое называется уравнением Фоккера-Планка.

Доказательство. Пусть $R(y)$ - неотрицательная непрерывная функция такая, что для некоторого промежутка значений

выполняются соотношения:

$$R(y) = 0, \quad y < \alpha \wedge y > \beta; \\ R(\alpha) = R(\beta) = 0; \quad R'(\alpha) = R'(\beta) = 0; \quad R''(\alpha) = R''(\beta) = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(s, x; t, y) R(y) dy = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\alpha}^{\beta} [p(s, x; t + \delta t, y) - p(s, x; t, y)] R(y) dy. \quad (19)$$

По уравнению Чепмена-Колмогорова $p(s, x; t + \delta t, y)$ можно пред-
ставить

$$p(s, x; t + \delta t, y) = \int p(s, x; t, z) p(t, z; t + \delta t, y) dz.$$

Подставляя это в (19), с учетом (18) получим

$$J = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\alpha}^{\beta} R(y) dy \int_{\alpha}^{\infty} p(s, x; t, z) p(t, z; t + \delta t, y) dz - \int_{\alpha}^{\beta} p(s, x; t, y) R(y) dy \right] = \\ = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\alpha}^{\beta} p(s, x; t, y) \left[\int_{\alpha}^{\infty} R(z) p(t, y; t + \delta t, z) dz - R(y) \right] dy. \quad (20)$$

Разложим функцию $R(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки y :

$$R(z) = R(y) + (z - y) R'(y) + \frac{1}{2} (z - y)^2 R''(y) + O((z - y)^3). \quad (21)$$

Так как $R(z)$ ограничена, то в силу (7)

$$\frac{1}{\delta t} \int_{|y - z| \geq \varepsilon} p(t, y; t + \delta t, z) R(z) dz = O(\delta t);$$

$$\frac{1}{\delta t} \int_{|z - y| < \varepsilon} p(t, y; t + \delta t, z) R(z) dz = 1 + O(\delta t).$$

Тогда в квадратной скобке (20) с учетом разложения (21) получим

$$R'(y) \int_{\alpha}^{\infty} (z - y) p(t, y; t + \delta t, z) dz + \frac{1}{2} R''(y) \int_{\alpha}^{\infty} (z - y)^2 p(t, y; t + \delta t, z) dz = \\ = R'(y) \int_{|z - y| < \varepsilon} (z - y) p(t, y; t + \delta t, z) dz + \frac{1}{2} R''(y) \int_{|z - y| < \varepsilon} (z - y)^2 p(t, y; t + \delta t, z) dz + O(\delta t).$$

Следовательно, выражение (22) принимает вид

$$J = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} p(s, x; t, y) \left[R'(y) \int_{|z - y| < \varepsilon} (z - y) p(t, y; t + \delta t, z) dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} R''(y) \int_{|z - y| < \varepsilon} (z - y)^2 p(t, y; t + \delta t, z) dz + O(\delta t) \right] dy \right\}.$$

Переходя к пределу при $\delta t \rightarrow 0$, с учетом (8) и (9) имеем

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} p(s, x; t, y) \left[a(t, y) R'(y) + \frac{1}{2} b(t, y) R''(y) \right] dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} p(s, x; t, y) \left[a(t, y) R'(y) + \frac{1}{2} b(t, y) R''(y) \right] dy.$$

Интегралы берем по частям, тогда

$$\int_a^b p(s, x; t, y) a(t, y) R'(y) dy = - \int_a^b R(y) \frac{\partial}{\partial y} (a(t, y) p(s, x; t, y)) dy;$$

$$\int_a^b p(s, x; t, y) b(t, y) R''(y) dy = \int_a^b R(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(t, y) p(s, x; t, y)) dy.$$

Окончательно имеем

$$\int_a^b \frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial t} R(y) dy = \int_a^b R(y) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b(t, y) p(s, x; t, y))}{\partial y^2} - \frac{\partial (a(t, y) p(s, x; t, y))}{\partial y} \right] dy$$

или

$$\int_a^b R(y) \left\{ - \frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial t} - \frac{\partial (a(t, y) p(s, x; t, y))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b(t, y) p(s, x; t, y))}{\partial y^2} \right\} dy = 0.$$

Так как на промежутке $[a, b]$ $R(y)$ знак не меняет, последнее соотношение может быть справедливо только тогда, когда

$$\frac{\partial p(s, x; t, y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (a(t, y) p(s, x; t, y)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(t, y) p(s, x; t, y)) = 0.$$

Что и требовалось получить. ♦

Таким образом, получили уравнение Фоккера-Планка, которое, дополненное начальным условием

$$p(t, x; t, y) = \delta(y - x),$$

однозначно определяет функцию $p(s, x; t, y)$ для $\forall t > s$.

§ 4. Некоторые частные случаи уравнения Фоккера-Планка

1. Пусть коэффициенты $a(t, y)$ и $b(t, y)$ не зависят от t :

$a(t, y) = a(y)$ и $b(t, y) = b(y)$. В этом случае имеем стационарный случайный процесс, и плотность вероятностей переходов зависит только от разности $t - s = \tau$, тогда уравнение Фоккера-Планка принимает вид

$$\frac{\partial p(x, y, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial y} (a(y) p(x, y, \tau)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y) p(x, y, \tau)) \quad (22)$$

с начальным условием $p(x, y)|_{\tau=0} = \delta(y - x)$.

Если при $\tau \rightarrow \infty$ существует предел $\lim_{\tau \rightarrow \infty} p(x, y, \tau) = p(y)$, не зависящий от начального состояния, то его называют стационарной функцией распределения, которая может быть найдена из уравнения (22), если учесть, что при $\tau \rightarrow \infty$ $\frac{\partial p(x, y, \tau)}{\partial \tau} = 0$. Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dy} (b(y) p(y)) = a(y) p(y) + C_1$$

и

$$p(y) = \frac{1}{\ell(y)} e^{f(y)} [C_2 + C_1 \int e^{-f(y)} dy],$$

где

$$f(y) = 2 \int \frac{a(y)}{\ell(y)} dy,$$

постоянные C_1 и C_2 найдем из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1$ и граничного условия

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} p(y) = 0.$$

Если, кроме того, $a(y) = -\alpha y$ и $\ell(y) = \sigma^2$, то

$$p(y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha y^2}{\sigma^2}},$$

то есть стационарное распределение является нормальным.

2. Найдем условие, при котором марковский процесс является гауссовским. Запишем условную функцию распределения нормального стационарного процесса с $M\{\dot{\xi}(t)\} = 0$ и функцией корреляции

$R_{\xi}(\tau)$:

$$p(x, y, \tau) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} (1 - R^2(\tau))} e^{-\frac{(y - R(\tau)x)^2}{2\sigma^2 (1 - R^2(\tau))}}. \quad (23)$$

Найдем коэффициенты $a(y)$ и $\ell(y)$ для данного распределения. С учетом условия стохастической непрерывности марковского процесса имеем

$$a(y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int |x - y| \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} (1 - R^2(\tau))} e^{-\frac{(x - yR(\tau))^2}{2\sigma^2 (1 - R^2(\tau))}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (-v\sigma\sqrt{1 - R^2(\tau)} + R(\tau)y - y) e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (R(\tau) - 1)y = y R'(0);$$

$$\ell(y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int |x - y|^2 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} (1 - R^2(\tau))} e^{-\frac{(x - yR(\tau))^2}{2\sigma^2 (1 - R^2(\tau))}} dx =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (-v\sigma\sqrt{1 - R^2(\tau)} + R(\tau)y - y)^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\sigma^2 (1 - R^2(\tau)) + y^2 (1 - R(\tau))^2) = -2\sigma^2 R'(0).$$

Если $R'(0)$ непрерывна в нуле, то $R'(0) = 0$, так как $R(0) \geq R(\tau)$, и тогда $a(y) = 0$ и $\ell(y) = 0$. Этот случай

малоинтересен.

Пусть $R'(\tau)$ терпит разрыв в нуле, тогда эти коэффициенты отличны от нуля. Найдем теперь частные производные, входящие в уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \rho(x, y, \tau)}{\partial R} R'(\tau) = \\ = R'(\tau) \rho(x, y, \tau) \left[\frac{R(\tau)}{1-R^2(\tau)} - \frac{x(R(\tau)x-y)}{\sigma^2(1-R^2(\tau))} - \frac{(R(\tau)x-y)^2 R'(\tau)}{\sigma^2(1-R^2(\tau))^2} \right];$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (a(y) \rho(x, y, \tau)) = \rho(x, y, \tau) \left[R'(\tau) + y \frac{(R(\tau)x-y) R'(\tau)}{\sigma^2(1-R^2(\tau))} \right];$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y) \rho(x, y, \tau)) = -\rho(x, y, \tau) \left[\frac{2 R'(\tau)}{1-R^2(\tau)} + \frac{2 (R(\tau)x-y)^2 R'(\tau)}{1-R^2(\tau)} \right].$$

Подставляя это в уравнение (22), получим

$$\frac{R'(\tau)}{1-R^2(\tau)} \left[R(\tau) - \frac{(R(\tau)x-y)(x-R(\tau)y)}{\sigma^2(1-R^2(\tau))} \right] = \\ = - \frac{R(\tau) R'(\tau)}{1-R^2(\tau)} \left[R(\tau) - \frac{(R(\tau)x-y)(x-R(\tau)y)}{\sigma^2(1-R^2(\tau))} \right].$$

Так как выражение в квадратных скобках отлично от нуля, то функция (23) удовлетворяет уравнению (22), если

$$R'(\tau) = -R(\tau) R'(\tau).$$

Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $R(0) = 1$, является

$$R(\tau) = e^{-R'(0)|\tau|}.$$

Таким образом, нормальный случайный процесс с экспоненциальной функцией корреляции является диффузионным марковским процессом.

3. Если $a(y, t) = c$ и $b(t) = \sigma^2$, то

$$\rho(x, y, \tau) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2\tau}}.$$

Получили закон распределения винеровского процесса, с которым уже встречались.

§ 5. Допредельные модели диффузионных процессов

Рассмотрим реальные процессы, которые достаточно хорошо описываются диффузионными марковскими процессами.

Представим себе частицу, совершающую скачкообразные движения по оси X . За время Δt частица совершает скачок на величину $\pm \delta$ с вероятностью $\frac{1}{2}$, причем скачки совершаются независимо друг от друга. Через $X(T)$ обозначим координату частицы в момент времени T , через Δx_k - скачок частицы в k -й момент времени. Очевидно, что

$$X(T) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k, \quad n = \frac{T}{\Delta t}. \quad (24)$$

Найдем среднее значение и дисперсию положения частицы в момент T :

$$M\{X(T)\} = M\left\{\sum_k \Delta x_k\right\} = \sum_k M\{\Delta x_k\} = 0;$$

$$D\{X(T)\} = D\left\{\sum_k \Delta x_k\right\} = \sum_k D\{\Delta x_k\} = \sum M\{\Delta x_k\}^2 = \delta^2 n$$

или

$$D\{X(T)\} = \delta^2 \frac{T}{\Delta t} = T \frac{\delta^2}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ возможны несколько случаев.

а) Если $\delta^2 \rightarrow 0$ медленнее, чем $\Delta t \rightarrow 0$, то $D\{X(T)\} \rightarrow \infty$, то есть положение частицы в момент T задано с бесконечным разбросом, что для реальных процессов невозможно, поэтому этот случай не представляет интереса.

б) Если $\delta^2 \rightarrow 0$ быстрее, чем $\Delta t \rightarrow 0$, то $D\{X(T)\} \rightarrow 0$, что дает в пределе детерминированный случай, тоже мало интересный.

в) Порядок стремления к нулю одинаков для δ^2 и Δt , и пусть $\delta^2 = B \Delta t$, $B = \text{const}$, тогда $D\{X(T)\} = T \cdot B$ - конечная величина. На этом случае остановимся. Рассмотрим разности

$$X(t_2) - X(t_1) = \sum_{t_1 \leq k \Delta t \leq t_2} \Delta x_k, \quad t_2 > t_1,$$

для которых имеем

$$M\{X(t_2) - X(t_1)\} = 0;$$

$$D\{X(t_2) - X(t_1)\} = B \cdot |t_2 - t_1|.$$

Тогда в силу центральной предельной теоремы можно записать

$$p(x_2/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B|t_2-t_1|}} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2B|t_2-t_1|}},$$

и все разности по предположению независимы. Следовательно, получили в пределе винеровский процесс. Остановимся на особенностях траекторий этого процесса. Как уже определено выше, приращение процесса за время Δt есть $\delta = \sqrt{B\Delta t}$ и при $\Delta t \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, то есть траектории винеровского процесса непрерывны. С другой стороны,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\pm \delta}{\Delta t} = \frac{\pm \sqrt{B\Delta t}}{\Delta t} \rightarrow \pm \infty,$$

то есть производная не существует. Можно сказать, что траектории винеровского процесса ни в одной точке не имеют производной. Это утверждение верно для всех диффузионных процессов.

Таким образом, случайное блуждание частицы описывается диффузионным процессом с $a=c$ и $b=B$. Более общий случай марковского процесса можно получить, если считать, что скачок $+\delta$ происходит с вероятностью $p_1 = \frac{1}{2} + \alpha$ и скачок $-\delta$ с вероятностью $p_2 = \frac{1}{2} - \alpha$. Тогда

$$M\{\Delta x\} = \alpha \delta;$$

$$M\{X(t)\} = \delta \alpha n = T \frac{\alpha \delta}{\Delta t}.$$

Если при этом $\delta = \sqrt{B\Delta t}$, то получим

$$M\{X(t)\} = \sqrt{B} \cdot T \frac{\alpha \sqrt{\Delta t}}{\Delta t}.$$

Выбирая $\alpha = \frac{A\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{B}}$, получаем, что

$$M\{X(t)\} = A^2 T.$$

При этом $D\{X(t)\} = BT$ при $\Delta t \rightarrow 0$, и получаем диффузионный процесс с коэффициентом сноса A и коэффициентом диффузии B .

В заключение этого параграфа докажем лемму.

Лемма. Пусть $f(t)$ — винеровский процесс с нулевым коэффициентом сноса и единичным коэффициентом диффузии. Тогда для $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 \xrightarrow{ср. кс} T,$$

если $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$

Доказательство. По определению сходимости в среднем квад-

ратическом нужно доказать, что

$$M\{(S_n - T)^2\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Обозначим $\eta_i = (\{t_{i+1}\} - \{t_i\})^2$, $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i$. Так как $\{t\}$ -винеровский процесс, то $(\{t_{i+1}\} - \{t_i\})$ - нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $|t_{i+1} - t_i|$.

Тогда $M\{\eta_i\} = D\{\{t_{i+1}\} - \{t_i\}\} = t_{i+1} - t_i$;

$$D\{\eta_i\} = M\{\eta_i^2\} - M^2\{\eta_i\}.$$

Величину $M\{\eta_i^2\}$ находим, используя свойство четных моментов нормальных случайных величин $M\{x^{2k}\} = (2k-1)!! \sigma^{2k}$, тогда

$$M\{\eta_i^2\} = M\{(\{t_{i+1}\} - \{t_i\})^4\} = 3(t_{i+1} - t_i)^2.$$

Отсюда

$$D\{\eta_i\} = 2(t_{i+1} - t_i)^2.$$

Тогда

$$M\{S_n\} = T;$$

$$D\{S_n\} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2.$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} M\{(S_n - T)^2\} &= M\{S_n^2\} - 2M\{S_n\}T + T^2 = \\ &= D\{S_n\} + T^2 - 2TM\{S_n\} + T^2 = D\{S_n\} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq \\ &\leq 2T \max |t_{i+1} - t_i|. \end{aligned}$$

Так как T конечно, то при $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$ $M\{(S_n - T)^2\} \rightarrow 0$, что и доказывает сходимость $S_n \rightarrow T$ в среднем квадратическом.

Замечание. Если диффузионный процесс имеет коэффициент диффузии $\ell(x, t)$, то можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\{t_{i+1}\} - \{t_i\})^2 = \int_0^T \ell(x, t) dt.$$

Рассмотренные выше диффузионные процессы тесно связаны с понятием стохастического интеграла.

Глава УП. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В ряде случаев важную роль играют интегралы вида

$$\int_a^b \Phi(\xi(t), t) d\xi, \quad (I)$$

где $\Phi(\cdot)$ — неслучайная функция, $\xi(t)$ — случайный процесс. Реализации процесса $\xi(t)$ в общем случае являются функциями неограниченной вариации, и этот интеграл нельзя понимать как интеграл Стильеса или Лебега-Стильеса. Если, кроме того, $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то не ясно, что понимать под $d\xi(t)$ в этом случае.

Интеграл вида (I) называют стохастическим интегралом, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс.

Что же понимать под $d\xi(t)$ в диффузионном случае, выясним, рассмотрев два определения стохастического интеграла.

§ I. Стохастический интеграл в форме Ито'

Разобьем интеграл $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, и пусть $\Delta = \max |t_{i+1} - t_i|$.

Рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(\xi(t_i), t_i) [\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)].$$

Если при $\Delta \rightarrow 0$ существует предел в среднем квадратическом

$$l.i.m. \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(\xi(t_i), t_i) [\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)] = \int_a^b \Phi(\xi(t), t) d\xi(t),$$

то он называется стохастическим интегралом в форме Ито'.

Так как диффузионный процесс $\xi(t)$ недифференцируем ни в одной точке, то интеграл Ито обладает свойствами, отличными от свойств интеграла Римана. Покажем это отличие на частном примере.

Пусть надо вычислить интеграл

$$J = \int [\xi(\tau) - \xi(s)] d\xi(\tau),$$

где $\xi(\tau)$ — винеровский процесс, с нулевым средним и единичной дисперсией. Если этот интеграл понимать как интеграл Римана,

$$\text{то } J = \int_s^t [\dot{f}(\tau) - \dot{f}(s)] d(\dot{f}(\tau) - \dot{f}(s)) = \int_s^t \frac{(\dot{f}(\tau) - \dot{f}(s))^2}{2} = \\ = \frac{(\dot{f}(t) - \dot{f}(s))^2}{2}.$$

Но так как $\dot{f}(t)$ - недифференцируемая функция, то интеграл вычислим как предел интегральной суммы. Для этого разобьем область интегрирования на N частей, точками $S = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = t$. Обозначим

$$\delta_{i,i+1} = \dot{f}(t_{i+1}) - \dot{f}(t_i),$$

тогда $\dot{f}(t_i) - \dot{f}(s) = \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k$, и по определению интеграла Ито' имеем

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} [\dot{f}(t_i) - \dot{f}(s)] d[\dot{f}(t_{i+1}) - \dot{f}(t_i)] = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \right) \delta_k.$$

Чтобы вычислить эту двойную сумму, воспользуемся соотношением

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta_k \right)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k^2 + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \right).$$

Отсюда

$$\sum_{i=0}^{N-1} \delta_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta_k \right)^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k^2 \right].$$

Тогда

$$J_N = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta_k \right)^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k^2 \right] = \frac{1}{2} (\dot{f}(t) - \dot{f}(s))^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\dot{f}(t_{i+1}) - \dot{f}(t_i))^2.$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, второе слагаемое по лемме § 5 главы VI сходится к $t-s$, и интеграл равен

$$J = \frac{(\dot{f}(t) - \dot{f}(s))^2}{2} - \frac{t-s}{2}.$$

Сравнивая это выражение с интегралом Римана, видим, что они отличаются на величину $\frac{t-s}{2}$ за счет недифференцируемости траекторий винеровского процесса $\dot{f}(t)$. При решении прикладных задач обычно имеют дело с допредельными моделями броуновского движения, которые обладают непрерывными траекториями. Поэтому желательно иметь такое определение стохастического интеграла, при котором его значение было бы устойчивым по отношению к предельному переходу от процессов с дифференцируемыми траекториями к винеровскому процессу. Таким определением является опреде-

ние в форме Стратановича.

§ 2. Симметризованный стохастический интеграл

Пусть имеем разбиение интервала интегрирования точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = b$. Рассмотрим сумму

$$S_n' = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi\left(\frac{f(t_{i+1}) + f(t_i)}{2}, t_i\right) [f(t_{i+1}) - f(t_i)]. \quad (2)$$

Если при $\max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ существует предел в среднем квадратическом, то он называется стохастическим интегралом в форме Стратановича, или симметризованным стохастическим интегралом, и обозначается

$$\oint_a^b \Phi(f(t), t) df(t) = \text{p.i.m.} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi\left(\frac{f(t_{i+1}) + f(t_i)}{2}, t_i\right) [f(t_{i+1}) - f(t_i)].$$

Это отличие в аргументе подынтегральной функции обеспечивает необходимую устойчивость стохастического интеграла к предельному переходу.

Рассмотрим связь интеграла в форме Ито' и симметризованного. Предположим, что подынтегральная функция $\Phi(x, y)$ дифференцируема по первому аргументу. Тогда, разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности точки $f(t_i)$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi\left(f(t_i) + \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{2}, t_i\right) &= \Phi(f(t_i), t_i) + \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial f} + \\ &+ \frac{1}{2} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f^2} + \dots \end{aligned}$$

Подставляем это разложение в сумму (2) и переходим к пределу при $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \oint_a^b \Phi(f(t), t) df(t) &= \int_a^b \Phi(f(t), t) df(t) + \frac{1}{2} \text{p.i.m.} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial \Phi(f(t_i), t_i)}{\partial f} [f(t_{i+1}) - f(t_i)] \\ &+ \dots = \int_a^b \Phi(f(t), t) df(t) + \left\{ \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial \Phi(f(t), t)}{\partial f} dt ; \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial \Phi(f(t), t)}{\partial f} f(f(t), t) dt \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Верхнее выражение имеет место для броуновского движения с постоянным коэффициентом диффузии и нулевым коэффициентом сноса, (см. лемму § 5 главы VI), а нижнее — для более общего слу-

чая броуновского движения с учетом замечания и вышеупомянутой лемме.

Так как симметризованный интеграл больше отвечает прикладным задачам, а интеграл в форме Ито более удобен в преобразованиях, то решение конкретной задачи можно проводить с использованием представления Ито, а затем по формуле (3) перейти к симметризованному интегралу.

Если $\Phi(\xi(t), t)$ не зависит от $\xi(t)$, то интегралы совпадают.

§ 3. Стохастические дифференциальные уравнения

Многие реальные системы описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dy}{dt} = a(y, t) + \sigma(y, t) \frac{d\xi}{dt} \quad (4)$$

или в форме дифференциалов

$$dy = a(y, t)dt + \sigma(y, t)d\xi. \quad (5)$$

Если $\xi(t)$ - входной сигнал - есть винеровский процесс, то дифференциальное уравнение называется стохастическим.

Решение уравнений (4), (5) определяются интегральными равенствами

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t a(y(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(y(\tau), \tau) d\xi(\tau), \quad (6)$$

причем второй интеграл является стохастическим либо в форме Ито, либо в форме Стратановича; $y(t_0)$ - значение процесса $y(t)$ в начальный момент времени.

Покажем, что процесс $y(t)$ является марковским. Действительно, распределение вероятностей $y(t)$ при $t > t_0$ при заданном значении $y(t_0)$ зависит лишь от $y(t_0)$ и не зависит от прошлых значений $y(s)$ $s < t_0$, как видно из (6). А такая независимость от прошлого является основным свойством марковских процессов. Поэтому процесс $y(t)$ полностью описывается коэффициентами сноса и диффузии.

Будем считать, что $\xi(t)$ - винеровский процесс с нулевым средним и единичным коэффициентом диффузии, и интеграл в (6) понимаем в форме Ито. Тогда

$$y(t + \Delta t) - y(t) = a(y(t), t) \Delta t + \sigma(y(t), t) [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)] + O(\Delta t).$$

После усреднения имеем

$$M\{\eta(t+\Delta t) - \eta(t) / \eta(t)\} = a(\eta(t), t) \Delta t,$$

то есть $a(\eta, t)$ - коэффициент сноса процесса $\eta(t)$. Найдем коэффициент диффузии

$$\begin{aligned} [\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]^2 &= a^2(\eta(t), t) (\Delta t)^2 + \sigma^2(\eta(t), t) [\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^2 + \\ &+ 2 a(\eta(t), t) \sigma(\eta(t), t) \Delta t [\xi(t+\Delta t) - \xi(t)] + O(\Delta t). \end{aligned}$$

Усредняем и получим

$$M\{[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]^2 / \eta(t)\} = \sigma^2(\eta(t), t) \Delta t.$$

Таким образом, коэффициент диффузии процесса $\eta(t)$ равен $\sigma^2(\eta, t)$.

Знание коэффициентов сноса и диффузии позволяет записать уравнение Фоккера-Планка для переходной плотности вероятностей, которая однозначно определяет поведение процесса $\eta(t)$.

Глава УШ. МАРТИНГАЛЫ

Исследование зависимостей между сечениями случайного процесса осуществляется разными способами. При исследовании стационарных случайных процессов основным показателем этой зависимости была функция корреляции, и все выводы делались на основании свойств этой функции: непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости.

В теории марковских процессов основной характеристикой зависимости служит переходная функция, которая полностью определяет эволюцию процесса.

Сейчас остановимся на процессах, для которых изучение зависимости основано на исследовании свойств условных математических ожиданий.

Напомним понятие условного математического ожидания. Пусть имеем два сечения случайного процесса $\{t_1\}$ и $\{t_2\}$, $t_2 > t_1$, и предположим, что одномерная плотность распределения существует и $p_1(t, x) > 0$. Тогда

$$M\{\{t_2\} / \{t_1\} = x\} = \frac{1}{p_1(x, t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} y p_1(x, t_1, y, t_2) dy,$$

если этот интеграл существует. Очевидно, что условное математическое ожидание $M\{\{t_2\} / \{t_1\} = x\}$ есть функция от x , то есть значение процесса в момент $t_1 < t_2$.

Рассмотрим теперь процесс $\{t\}$, заданный многомерной плотностью $p(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$, при этом всюду определены условные математические ожидания.

Процесс $\{t\}$ называется мартингалом, если существует

$$M\{\{t_i\} / \{t_1\} = x_1, \dots, \{t_{n-1}\} = x_{n-1}\} = x_{n-1},$$

и не зависит от предшествующих значений процесса $\{t_k\}$, $t_k < t_{i-1}$.

Мартингалы можно рассматривать как модели безобидных игр. Так, если $\{t_n\}$ описывает состояние капитала игрока в момент t_n , то по определению мартингала средняя величина его капитала в момент t_{n+1} при условии, что в момент t_n он располагал капиталом x_n , равна x_n независимо от того, каков был его капитал до момента t_n .

Рассмотрим несколько примеров мартингалов.

I. Винеровский процесс с нулевым коэффициентом сноса и единичным коэффициентом диффузии. Найдем условное математичес-

кое ожидание значения процесса в момент t_k , если в предыдущий момент времени $t_{k-1} < t_k$ значение процесса фиксировано $\{t_{k-1}\} = x_{k-1}$:

$$M\{\xi_k | x_{k-1}\} = M\{[\xi_k - x_{k-1}] + x_{k-1} | x_{k-1}\} = \\ = x_{k-1} + M\{\xi_k - x_{k-1} | x_{k-1}\} = x_{k-1},$$

здесь учли, что приращения винеровского процесса независимы.

2. Пуассоновский процесс $\{t\}$, который начинается в нуле, то есть $\{0\} = 0$. Если рассматривать центрированный процесс $\xi(t) = \{t\} - \lambda t$,

то тоже получим мартингал.

3. Рассмотрим процесс $\{t\}$, начинающийся в нуле $\{0\} = 0$, с нулевым математическим ожиданием $M\{\xi(t)\} = 0$, независимыми приращениями и

$$M\{(\xi(t) - \xi(s))^2\} = F(t) - F(s), \quad 0 \leq s < t.$$

Тогда процесс $\xi^2(t) - F(t)$ - мартингал. Покажем это. Найдем $M\{(\xi^2(t) - F(t)) | \xi(s) = x\}$:

$$M\{(\xi^2(t) - F(t)) | \xi(s) = x\} = M\{[\xi(t) - \xi(s) + \xi(s)]^2 | \xi(s) = x\} = \\ = \xi^2(s) + 2\xi(s) M\{(\xi(t) - \xi(s)) | \xi(s) = x\} + M\{(\xi(t) - \xi(s))^2 | \xi(s) = x\} - F(t) = \\ = \xi^2(s) + M\{(\xi(t) - \xi(s))^2 | \xi(s) = x\} - F(t) = \xi^2(s) - F(s).$$

Последнее соотношение есть определение мартингала.

Случайный процесс $\{t\}$ называется субмартингалом, если

$$M\{\xi_k | x_{k-1}\} \geq x_{k-1},$$

и супермартингалом, если

$$M\{\xi_k | x_{k-1}\} \leq x_{k-1}.$$

Очевидно, что если $\{t\}$ - субмартингал, то $\{-\{t\}\}$ - супермартингал.

Лемма. Пусть $U(\cdot)$ - выпуклая функция и $\{t\}$ - мартингал. Тогда, если существует математическое ожидание $U(\xi(t))$,

$$U = U(\xi(t)) \quad \text{— субмартингал.}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из неравенства Менсена для математических ожиданий случайных величин

$$M\{u(\xi)\} \geq u(M\{\xi\}),$$

если $u(\cdot)$ - выпуклая функция. В нашем случае

$$M\{u(\xi_{k+1})/\xi_k = x_k\} \geq u(M\{\xi_{k+1}/\xi_k = x_k\}).$$

По определению мартингала аргумент функции u в правой части равен x_k , то есть имеем

$$M\{u(\xi_{k+1})/\xi_k = x_k\} \geq u(x_k);$$

$$M\{y_{k+1}/y_k\} \geq y_k. \blacklozenge$$

Основные соотношения и свойства мартингалов исследуются для случайных моментов времени, связанных с моментами достижения процессом некоторых заранее заданных значений. Их называют моментами остановки, или марковскими моментами. Эти интересные вопросы остались за пределами этого курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976. - 352 с.
2. Боруча-Рид А.Г. Элементы теории марковских процессов и их приложения. - М.: Наука, 1969. - 511 с.
3. Вентцель А.Ф. Курс теории случайных процессов. - М.: Наука, 1975. - 320 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, 1977. - 568 с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1965. - 400 с.
6. Карлин С. Основы теории случайных процессов. - М.: Мир, 1971. - 536 с.
7. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. - М.: Наука, 1970. - 271 с.
8. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. - М.: Наука, 1966. - 587 с.
9. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. - М.: Наука, 1966. - 244 с.
10. Лозе М. Теория вероятностей. - М.: ИЛ, 1962. - 719 с.
11. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.1. - М.: Сов.радио, 1969. - 748 с.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. - М.: Мир, 1964. - 498 с.
13. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. - М.: Сов.радио, 1965. - 256 с.
14. Хеннекен М., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. - М.: Наука, 1974. - 472с.
15. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1980. - 574 с.
16. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. - 416 с.

Людмила Ефимовна Радюк
Александр Федорович Терпугов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Редактор К.Г.Шилько

ИБ 1972. Подписано к печати 16.X.87г. КЗ 06303 формат 60x84 1/16
Бумага типографская №3. Печать офсетная. Печ. л. II. Усл. печ. л. 10,23.
Уч. изд. л. 9,3. Тираж 1000 экз. Заказ 3. Цена 30 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Ротапринт ТГУ, 624029, Томск, ул. Никитина, 4.

Томский государственный университет



Научная библиотека 00209984



Издательство
Томского
университета