

В. Г. БАГРОВ А. С. ВШИВЦЕВ С. В. КЕТОВ

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
(КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ)**



**издательство
ТОМСКОГО
университета**

'90

Томский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного
Знамени государственный университет им. В.В. Куйбышева

В.Г. Батров, А.С. Вшивцев, С.В. Кетов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
(КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ)

Учебное пособие

Издательство Томского университета
Томск -- 1990



1-429590

УДК 517.+530.1

Багров В.Г., Вшивцев А.С., Кетов С.В. Дополнительные главы математической физики (калибровочные поля): Учебное пособие. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. - 142 с. - 20 к. - 1000 экз. I604010000.

Учебное пособие в основном посвящено изложению специальных математических вопросов классической теории калибровочных полей. Физические аспекты теории обсуждаются лишь в объеме, необходимом для понимания и осмысленного применения математического аппарата. Решения конкретных задач приводятся как иллюстрация общих математических приёмов.

Для студентов физических ф-культетов университетов, специализирующихся в области теоретической и математической физики.

Рецензент - доктор физико-математических наук В.Ч. Жуковский

Биб. 30482

Б $\frac{I604010000}{I77(012)-90}$ 48 - 90

УДБМ 5-7511-0054-9

© Багров В.Г., Вшивцев А.С., Кетов С.В., 1990

Введение

Новейшее развитие квантовой теории поля – теоретической основы для описания фундаментальных взаимодействий элементарных частиц – характеризуется развитием и углублением значения принципов симметрии. Например, модель Вайнберга–Салама (теория электрослабых взаимодействий), квантовая хромодинамика (теория сильных взаимодействий), различные способы дальнейшей унификации этих теорий (модели Большого объединения) – все основано на систематическом использовании принципа локальной калибровочной инвариантности. Успехи калибровочных теорий общезвестны: многочисленные экспериментальные подтверждения квантовой электродинамики и модели Вайнберга–Салама, впечатляющие теоретические результаты, связанные с открытием явления асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теориях. Хотя в настоящее время наука не располагает прямыми доказательствами в пользу квантовой хромодинамики, ее замечательные теоретические свойства и гибкость в приложениях дают основания надеяться на ее справедливость при описании сильных взаимодействий.

Более того, современная теория фундаментальных взаимодействий не сводится к калибровочным теориям Янга–Миллса, а ставит и решает другую, не менее фундаментальную и гораздо более трудную задачу построения квантовой теории гравитации. Современный подход к этой последней проблеме заключается в том, что ее нельзя решать в отрыве от общей задачи унификации всех фундаментальных взаимодействий. Такие унифицирующие модели уже созданы и характеризуются новыми, еще более фундаментальными симметриями, которые лежат в их основе. К последним относятся теории супергравитации и суперструн, которые требуют систематического развития принципов локальной суперсимметрии, репараметризационной инвари-

антности и т.д. Такие фундаментальные теории являются чрезвычайно сложными и имеют в качестве характерных масштабов расстояния порядка планковских (10^{-33} см, радиус протона — всего около 10^{-13} см).

Поэтому существенным является систематическое изучение самих симметрий, их структуры и взаимосвязей. В частности, сами локальные калибровочные симметрии теорий Янга-Миллса еще недостаточно изучены. Одним из мощных инструментов изучения квантовой теории является ВКБ-метод, квазиклассическое приближение. Отсюда — важность изучения классической динамики калибровочных теорий и гравитации.

Современные унифицирующие модели обычно формулируются в высоких размерностях пространства-времени ($d > 4$), что приводит к проблеме компактификации. С этим разделом связаны многочисленные исследования решений классических уравнений движения калибровочных теорий, гравитации и супергравитации, которые, с одной стороны, обеспечивают унификацию фундаментальных взаимодействий наиболее естественным образом и, с другой стороны, могут в принципе объяснить многие свойства физической картины мира, например размерность пространства-времени.

Здесь мы изложим основные черты классической динамики теорий Янга-Миллса и гравитации.

§ 1. Лагранжиан классической теории

Янга-Миллса

Уравнение движения поля

В 1965 году де Виттом предложено описание калибровочных полей на основе использования идей Калуцы-Клейна [1,2]. Начнем с примера, позволяющего довольно просто и наглядно ввести электромагнитное поле. В пятимерном пространстве-времени определим действие

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{|g|} R d^5x, \quad (1.1)$$

где $R = g^{AB} R_{AB}$ - скаляр кривизны; g^{AB} - пятимерная метрика; G_5 - аналог ньютоновской постоянной, размерность $(L)^3$. Топология пятимерного пространства - прямое произведение пространства Минковского на окружность S^1 радиуса r , соответствующее выражение для метрики имеет вид

$$g_{AB} = \frac{1}{\Phi^{1/2}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \Phi & A_\mu \Phi \\ A_\nu \Phi & \Phi \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Каждая компонента метрики может быть разложена по пятой координате в ряд Фурье:

$$g_{AB} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{AB}^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/r}. \quad (1.3)$$

Если предположить, что частная производная $\partial/\partial x^5$ - вектор Киллинга, т.е. метрика не зависит от пятой координаты, то получим стандартную размерную редукцию. Это равноценно тому, что при подстановке разложения (1.3) в выражение для действия (1.1) и интегрировании по x^5 удерживается лишь нулевая мода. В результате получается следующее действие:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \left\{ R^4 + \frac{1}{4} \Phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{6} \frac{\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi}{\Phi^2} \right\}. \quad (I.4)$$

Если выбрать вакуумное значение Φ_c скалярного поля Φ равным единице, то параметр z совпадает с радиусом пятого измерения. Член, пропорциональный $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, как можно заметить, соответствует $U(1)$ - калибровочной симметрии, т.е. максвелловской электродинамике. Если мы выберем преобразование системы координат пятимерного пространства следующим образом:

$$\begin{aligned} x'^5 &= x^5 + \varepsilon(x^\mu), \\ x'^\mu &= x^\mu, \end{aligned}$$

то соответственно получим калибровочное преобразование

$$A'_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x).$$

В рассмотренном примере многообразие S^1 имело довольно простую структуру. Изучим теперь фоновое многообразие, которое представимо в виде прямого произведения $M_4 \times B$, где B - компактное риманово многообразие. В этом случае процедура, реализованная в предыдущем примере, может быть проведена для определения неабелева калибровочного поля в M_4 . Будем следовать работе [3] и выберем матрический тензор в базисе локального прямого произведения $M_4 \times B$ в виде

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \eta_{ik} A_\mu^i A_\nu^k & A_\mu^i \eta_{ik} \\ A_\nu^k \eta_{ik} & \eta_{ik} \end{pmatrix}. \quad (I.5)$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор в M_4 , а $\eta_{ik} = \int_{i\alpha}^m \int_{m\alpha}^n$ -

метрика на группе B . Для определенности выберем группу $SU(2)$, тогда f_{abc} - структурные константы группы; A_μ^i - вектор потенциал-калибровочного поля. Соответственно для γ^{ab} имеем

$$\gamma^{ab} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu} A_\nu^k \\ -g^{\mu\nu} A_\mu^i & \eta^{ik} + g^{\mu\nu} A_\mu^i A_\nu^k \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Потребуем выполнения следующих условий: $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$; $\eta^{ij} \eta_{jk} = \delta_k^i$; $\gamma^{ab} \gamma_{bc} = \delta_c^a$. Мы полагаем, что греческие индексы принимают значения $\overline{0,3}$, а латинские, кроме символов метрики γ , изменяются от 4 до 6 (для выбранной группы $SU(2)$). Величины A_μ^i определяют тензор напряженности калибровочного поля следующим образом:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.7)$$

Поскольку метрика γ_{ab} невырождена ($\det \gamma_{ab} \neq 0$), то из курса дифференциальной геометрии известно, что существует и единственная связность, симметричная и согласованная с этой метрикой. Эта связность в некоординатном базисе $\hat{e}_a$ ($a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) с метрикой γ_{ab} задается формулами

$$\overline{\Gamma}_{bc}^a = \frac{\gamma^{ad}}{2} (\partial_b \gamma_{cd} + \partial_c \gamma_{bd} - \partial_d \gamma_{bc} - c_{bd}^e \gamma_{ce} - c_{cd}^e \gamma_{be}) + \frac{c_{bc}^a}{2}, \quad (1.8)$$

где c_{bc}^a - коэффициенты коммутационных соотношений для некоординатного базиса

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b] = c_{ab}^c \hat{e}_c;$$

∂_a - производная по направлению ∂_{e_a} . В базисе локального прямого произведения коммутационные коэффициенты принимают сле-

дующие значения:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}^k &= f_{ij}^k; \\
 c_{ij}^{\alpha} &= c_{i\nu}^k = c_{iv}^{\mu} = 0; \\
 c_{\mu\nu}^k &= c_{\mu\nu}^{\alpha} = 0.
 \end{aligned}
 \quad (I.9)$$

Учитывая соотношения (I.8) и (I.9), для символов Кристоффеля находим явные выражения (где $\bar{\Gamma}$ -связность в $B \times M_4$):

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{ik}^{\alpha} &= 0; \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} f_{jk}^i; \\
 \bar{\Gamma}_{km}^{\alpha} &= \bar{\Gamma}_{km}^i = \frac{1}{2} (f_{jk}^i A_{\mu}^i + \eta_{kl} g^{\alpha\beta} A_{\alpha}^i F_{\beta\mu}^l); \\
 \bar{\Gamma}_{\mu k}^{\alpha} &= \Gamma_{k\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \eta_{kl} g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta}^l; \\
 \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{ik} g^{\alpha\beta} (A_{\mu}^i F_{\nu\beta}^k + A_{\nu}^i F_{\mu\beta}^k); \\
 \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^i &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu}^i + \partial_{\nu} A_{\mu}^i) + \\
 &+ \frac{1}{2} \eta_{jk} g^{\alpha\beta} A_{\alpha}^i (F_{\beta\mu}^j A_{\nu}^k + F_{\beta\nu}^j A_{\mu}^k) - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A_{\alpha}^i.
 \end{aligned}
 \quad (I.10)$$

Здесь Γ_{jk}^i и $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ — символы Кристоффеля соответственно пространств B и M_4 с метриками η_{ik} и $g_{\mu\nu}$. Тензор Римана в некоординатном базисе имеет вид

$$R_{abc}^d = c_{ab}^e \Gamma_{ec}^d - \partial_a \Gamma_{bc}^d + \partial_b \Gamma_{ac}^d - \Gamma_{ae}^d \Gamma_{bc}^e + \Gamma_{be}^d \Gamma_{ac}^e. \quad (I.11)$$

Соответственно для тензора Риччи, являющегося следом тензора Римана $R_{ac} = R_{a\bar{b}c}^{\bar{b}}$, имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{ik} &= R_{ik} + \eta_{ij} \eta_{kl} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^j F_{\alpha\beta}^l; \\
 \bar{R}_{\mu k} &= \bar{R}_{k\mu} = \frac{1}{4} \eta_{kl} A_{\mu}^l + \frac{1}{4} \eta_{kl} \eta_{ij} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \cdot \\
 &\cdot A_{\mu}^i F_{\alpha\beta}^j F_{\gamma\delta}^l + \frac{1}{2} \eta_{kl} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} F_{\mu\beta}^l
 \end{aligned}
 \quad (I.12)$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\eta_{ik}A_{\mu}^iA_{\nu}^k + \frac{1}{4}\eta_{ij}\eta^{\kappa\lambda}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}A_{\mu}^{\alpha}A_{\nu}^{\beta}F_{\alpha\beta}^{\gamma}F_{\gamma\delta}^{\epsilon} - \\ & - \frac{1}{2}\eta_{ik}g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}^iF_{\nu\beta}^k + \frac{1}{2}\eta_{ik}g^{\alpha\beta}(A_{\mu}^i\nabla_{\alpha}F_{\nu\beta}^k + A_{\nu}^i\nabla_{\alpha}F_{\mu\beta}^k),\end{aligned}$$

где тензоры Риччи $R_{ik} = \frac{1}{4}\eta_{ik}$ и $R_{\mu\nu}$ — для пространств B и M_4 соответственно, а ∇_{α} — ковариантная производная, определяемая условием:

$$\nabla_{\alpha}F_{\mu\nu}^k = \partial_{\alpha}F_{\mu\nu}^k - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}F_{\beta\nu}^k - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}F_{\mu\beta}^k + f_{ij}^kA_{\alpha}^iF_{\mu\nu}^j. \quad (I.13)$$

Из выражений (I.12) и (I.13) найдем скалярную кривизну:

$$\begin{aligned}\bar{R} = & -\frac{1}{4}\eta_{ik}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}^iF_{\alpha\beta}^k + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \eta^{ik}R_{ik} = \\ = & -\frac{1}{4}F^2 + R_{M_4} + R_B.\end{aligned} \quad (I.14)$$

Это представление интересно тем, что оно является суммой лагранжиана поля Янга-Миллса $\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^2$, кривизны четырехмерного пространства-времени R_{M_4} и величины R_B — кривизны группового пространства, которая может быть связана с космологическим членом. Таким образом, действие в пространстве $M_4 \times B$:

$$S_{M_4 \times B} = \int \sqrt{-g} \bar{R} d^4x d^3B$$

может быть проинтегрировано по групповым степеням свободы, в результате чего мы придем к действию в четырехмерном пространстве:

$$S = V_B \int \sqrt{-g_{M_4}} \left(-\frac{1}{4}F^2 + R_{M_4} + R_B \right) d^4x. \quad (I.15)$$

Исследуем свойства симметрии Лагранжиана поля Янга-Миллса отно-

сительно калибровочных преобразований:

$$A_\mu(x) \rightarrow g(x) A_\mu(x) g^{-1}(x) - i g(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{-1}(x) \quad (I.16)$$

Вектор-потенциал определяется соотношением $A_\mu = A_\mu^a T_a$, где T_a - генераторы группы $SU(2)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c$$

Если функция $g(x) = I - i \theta^a T_a$ (т.е. мы рассматриваем инфинитезимальные преобразования), то, подставляя явный вид $g(x)$ в линейном приближении по θ , получим

$$A_\mu'^a \rightarrow A_\mu^a - \varepsilon_{abc} A_\mu^b \theta^c - \partial_\mu \theta^a$$

Таким образом, мы можем связать линейные изменения поля δA_μ^a с линейными изменениями параметров в группе

$$\begin{aligned} A_\mu'^a &= A_\mu^a + \delta A_\mu^a = A_\mu^a - [\delta_{ac} \partial_\mu + \varepsilon_{abc} A_\mu^b] \theta^c = \\ &= A_\mu^a - \nabla_\mu \theta^a; \quad \text{т.е.} \quad \delta A_\mu^a = -\nabla_\mu \theta^a. \end{aligned}$$

Здесь $\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$ - ковариантная производная. Используя явное выражение тензора калибровочного поля (I.7), видим, что при калибровочных преобразованиях (I.16) он преобразуется по закону

$$F_{\mu\nu}'^a = g(x) F_{\mu\nu}^a g^{-1}(x)$$

Отсюда следует, что и лагранжиан поля Янга-Миллса, определяемый

оотношением

$$\mathcal{L}_{\text{яМ}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (\text{I.I7})$$

при калибровочных преобразованиях (I.I6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{яМ}} &= -\frac{1}{4} g(x) F_{\mu\nu}^a g^{-1}(x) g(x) F_a^{\mu\nu} g^{-1}(x) = \\ &= -\frac{1}{4} g(x) F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} g^{-1}(x), \end{aligned}$$

т.е. является инвариантом относительно поворотов в групповом пространстве. Аналогично можно проверить инвариантность лагранжиана поля Янга-Миллса (I.I8) относительно лоренцовых поворотов в пространстве Минковского.

Используя лагранжиан (I.I7), несложно найти уравнения движения поля Янга-Миллса:

$$\left[\frac{\partial}{\partial A_\mu^a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu} \right)} \right] \mathcal{L}_{\text{яМ}} = 0 \quad (\text{I.I8})$$

Уравнения (I.I8) удобно записать следующим образом:

$$\left(\partial_\mu \delta_c^a + g \varepsilon_{bc}^a A_\mu^b \right) F^{\mu\nu c} = -J^{\nu a} \quad (\text{I.I9})$$

Здесь ток, стоящий в правой части выражения (I.I9), обусловлен взаимодействием с заряженным полем. При исследовании решений уравнений Янга-Миллса может оказаться полезным представление уравнений через потенциалы поля и их производные (мы будем использовать калибровочное условие $\partial_\nu A_\nu^a = 0$) :

$$-(\partial^\nu \partial_\nu) A_\mu^a + 2g \varepsilon^{abm} A_\nu^m (\partial^\nu A_\mu^b) - g \varepsilon^{abc} A_\nu^b (\partial_\mu A_\nu^c) - \\ - g^2 (A_\mu^a A_\nu^b A_\nu^c - A_\nu^a A_\mu^b A_\mu^c) = -J_\mu^a \quad (1.20)$$

Явное выражение уравнений Янга-Миллса (1.20) через потенциалы поля A_μ^a показывает, что эти уравнения нелинейные и в общем случае чрезвычайно сложны. Нелинейность, присутствующая в уравнениях, приводит к существенно новым типам решений полевых уравнений, отсутствующих для уравнений Максвелла. К этим эффектам нужно отнести существование топологически нетривиальных решений (1.20), самодействие полей Янга-Миллса, а также возможную стохастичность.

§ 2. Тензор энергии импульса и инварианты поля Янга-Миллса

Решения уравнений Янга-Миллса и их общие свойства можно исследовать из энергетических соображений (на основе характеристик плотности энергии и плотности вектора Умова-Пойтинга, которые выражаются через тензор энергии-импульса):

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\lambda^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\frac{\partial A_\lambda^a}{\partial x^\nu})} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{YM} = -\partial_\mu A_\lambda^a F_{\nu a}^\lambda + \frac{g}{4} F_{\lambda\rho}^a F_a^{\lambda\rho} \quad (2.1)$$

Как видно из (2.1), мы получили канонический тензор энергии-импульса, который из-за наличия спина у поля Янга-Миллса оказался несимметричным. Для построения симметричного тензора энергии-импульса можно воспользоваться методом Белинфанте или методом

Гильберта.

В курсе лекций по теории относительности А.А. Логунова показана эквивалентность тензоров энергии-импульса Беллифранте и Гильберта [4] для лагранжианов, содержащих производные от полевых функций вплоть до третьего порядка. Мы будем использовать метод Гильберта для построения симметричного тензора энергии-импульса. Переходя к криволинейным координатам и выделяя явно метрический тензор $g^{\mu\nu}$, получим лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu\nu}^a F_{\mu'\nu'}^a. \quad (2.2)$$

Тогда симметричный тензор определяется соотношением

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right)} \right). \quad (2.3)$$

После учета соотношения $\partial \sqrt{-g} / \partial g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}$ для симметричного тензора энергии-импульса имеем

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\sigma}^a F_{\nu a}^{\sigma} + g_{\mu\nu} \frac{1}{4} F_{\tau\beta}^a F_a^{\tau\beta}. \quad (2.4)$$

При изучении КХД в ряде случаев бывает удобно проводить аналогию с хорошо изученной КЭД. Мы также воспользуемся такой аналогией и введем векторы цветового электрического и магнитного полей:

$$F_a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_a^1 & -E_a^2 & -E_a^3 \\ E_a^1 & 0 & -B_a^3 & B_a^2 \\ E_a^2 & B_a^3 & 0 & -B_a^1 \\ E_a^3 & -B_a^2 & B_a^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

или

$$\begin{aligned} E_a^k &= -F_a^{0k} ; \\ B_a^k &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{kij} F_a^{ij} ; \quad F_a^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B_a^k . \end{aligned} \quad (2.6)$$

В терминах вектор-потенциалов для напряженностей хромозлектрического и хромагнитного полей получим

$$\begin{aligned} \vec{E}_a &= -\vec{\nabla} A_a^0 - \partial_t \vec{A}_a - g \varepsilon_{abc} \vec{A}_b A_c^0 ; \\ \vec{B}_a &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_a + \frac{1}{2} g \varepsilon_{abc} \vec{A}_b \times \vec{A}_c . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.7) для хромагнитного поля можно увидеть, что

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_a) = \frac{1}{2} g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c)) .$$

Последнее соотношение указывает на возможность существования отличной от нуля плотности магнитного заряда. Как будет показано ниже, у уравнений Янга-Миллса (в отличие от уравнений Максвелла) существует новый тип специальных решений (монопольные и дионные решения), для которых магнитные заряды отличны от нуля.

В электродинамике инварианты электромагнитного поля (относительно лоренцовых преобразований) определяются как коэффициенты характеристического уравнения

$$p(\lambda) = \det(F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0 . \quad (2.8)$$

Соответствующий характеристический многочлен при этом имеет вид

$$p(\lambda) = -\lambda^4 + (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\lambda + (\vec{E}, \vec{B}) ,$$

тогда коэффициенты можно записать через свертки:

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = -(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) ;$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = (\vec{E}, \vec{B}) . \quad (2.9)$$

В геометрии комбинацию $\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ называют дуальным тензором $\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$. Вторым инвариант может быть записан через дуальный тензор следующим образом:

$$\frac{1}{4} \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} = -(\vec{E}, \vec{B}) . \quad (2.10)$$

Введение цветовых степеней свободы, очевидно, сохранит приведенные инварианты (относительно лоренц-преобразований). Чтобы получить соответствующие инварианты в КХД, надо добавить цветные степени свободы, что, очевидно, реализуется заменой $\vec{E} \rightarrow \vec{E}_a$; $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_a$; $\mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu}^a$. Вместе с тем за счет появления новых степеней свободы мы, в отличие от КЭД, можем определить новые инварианты, через которые должны выражаться все наблюдаемые величины, зависящие от полевых переменных. В общем случае для группы $SU(2)$ таких инвариантов будет девять, которые выражаются через величины:

$$L_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{b\mu\nu} = \vec{E}^a \vec{E}^b - \vec{B}^a \vec{B}^b ;$$

$$J_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \tilde{\mathcal{F}}^{b\mu\nu} = \vec{E}^a \vec{B}^b + \vec{E}^b \vec{B}^a ; \quad (2.11)$$

$$t = -\frac{1}{6} \varepsilon_{abc} (\mathcal{F}_\mu^{a\nu} \mathcal{F}_\nu^{b\rho} \mathcal{F}_\rho^{c\mu}) ;$$

$$t' = \frac{1}{6} \varepsilon_{abc} (\tilde{\mathcal{F}}_\mu^{a\nu} \tilde{\mathcal{F}}_\nu^{b\rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho^{c\mu}) .$$

Выпишем эти инварианты:

$$\det L ; \det J ; \text{tr} L ; \text{tr} J ; \text{tr} (JL) ;$$

$$\text{tr} J^2 ; \text{tr} L^2 ; t ; t' , \quad (2.12)$$

t_r означает взятие следа в матрице по цветовым индексам. Заметим, что $t_r J$ — псевдоскаляр, а $t_r L$ — скаляр. Можно также показать, что дуальный тензор $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$, построенный из неабелевых полей с учетом тождеств Якоби для коммутаторов:

$$[[T_a, T_b], T_c] + [[T_b, T_c], T_a] + [[T_c, T_a], T_b] = 0$$

или структурных констант группы:

$$\varepsilon_{ab}^l \varepsilon_{bc}^m + \varepsilon_{bc}^l \varepsilon_{ca}^m + \varepsilon_{ca}^l \varepsilon_{ab}^m = 0,$$

удовлетворяет уравнению движения (1.19):

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tilde{F}^{a\mu\nu} = g \varepsilon_{bc}^a A_\nu^b \tilde{F}^{c\mu\nu}.$$

В записи через ковариантную производную в присоединенном представлении получим $D_\nu \tilde{F}^{a\mu\nu} = 0$.

Используя дуальный тензор поля $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ и инварианты (2.12), тензор энергии-импульса поля Янга-Миллса (2.4) преобразуем следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(F_{\mu}^{\mu a} + i \tilde{F}_{\mu}^{\mu a} \right) \left(F_{\nu}^{\nu a} - i \tilde{F}_{\nu}^{\nu a} \right). \quad (2.13)$$

Это представление имеет красивую симметричную структуру и может быть использовано при изучении некоторых специальных решений уравнений движения поля Янга-Миллса.

В КЭД бывает удобно при исследовании свойств электромагнитного поля записывать компоненты тензора энергии-импульса через векторы напряженности. Для компонент тензора энергии-поля Янга-Миллса получим

$$\sum T_{ii} = T_{00} = \mathcal{E} = \frac{1}{2} (\vec{E}_a^2 + \vec{B}_a^2) ;$$

$$T_{ij} = -E_i^a E_j^a - B_i^a B_j^a + \delta_{ij} T_{00} .$$

Как указывалось выше, в электродинамике важной характеристикой поля является вектор Умова-Пойнтинга - плотность импульса поля. В нашем случае

$$\vec{P} = T_{0j} = -\varepsilon_j^{mn} E_m^a B_n^a .$$

§ 3. Топологическая классификация полей.

Число Понтрягина-Чжена-Саймона

Наряду с обычными величинами, характеризующими поле, такими как заряд, энергия, плотность импульса, важной является характеристика, учитывающая граничные условия. Этот факт окажется весьма существенным при рассмотрении топологически нетривиальных пространств. Как показано выше, лагранжиан поля Янга-Миллса может быть получен из соответствующей геометро-динамической конструкции, что указывает на возможное существование ненулевых топологических характеристик поля. К таким характеристикам калибровочных полей относится понятие плотности топологического заряда, причем последнее может быть выражено в терминах классов Понтрягина-Чжена-Саймона [5] . Соответствующие характеристические классы можно определить посредством равенства

$$\det \left(1 + \frac{\lambda}{2\pi} F \right) = \sum \lambda^n c_n , \quad (3.1)$$

где F - матричнозначная 2-форма,

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

соответствующая связность — 1-форма $A = A_\mu dx^\mu$, а связь между этими формами определяется обычным образом (для поля Янга-Миллса):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Тогда характеристические классы определяются так:

$$c_i = \text{tr} (F \wedge F \wedge \dots \wedge F) = \text{tr} F^i, \quad (3.2)$$

$$i \geq 1.$$

Из свойств калибровочных преобразований тензора $F_{\mu\nu}$, а также 2-формы F следует, что

$$F \rightarrow g F g^{-1}, \quad F^i \rightarrow g(x) F^i g^{-1}(x),$$

таким образом,

$$\text{tr} F^i = c_i \rightarrow c_i.$$

Можно показать, что величина $\int_{M_{2n}} c_n$ всегда является целым числом в том случае, когда M_{2n} — компактное $2n$ -мерное подмногообразие без границы (т.е. $2n$ — цикл) в M_4 из $M_4 \times 8$. Это целое число будем называть числом Понтрягина-Чженя-Саймонса. Наряду с формой (3.2) c_i для группы $SO(2n)$ можно ввести также χ_n степени $2n$ на базе M :

$$\beta(n) \chi(n) = \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ \vdots \\ i_{2n-1} < i_{2n}}} \chi[F(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}), \dots, F(\tau_{i_{2n-1}}, \tau_{i_{2n}})], \quad (3.3)$$

$\beta^{(n)}$ - числовой коэффициент, выбираемый из условия нормировки;
 $\chi[L^{(1)}, \dots, L^{(n)}]$ - полилинейная форма от n коосимметрических матриц $L^{(1)} = (l_{ij}^{(1)}), \dots, L^{(n)} = (l_{ij}^{(n)})$,
 которая будет определена ниже. Пусть $e^{(2)} = l_{ij}^{(2)} dy^i \wedge dy^j$
 - 2-формы в $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $y_1, \dots, y_{2n}$, тогда

$$e^{(1)} \wedge e^{(2)} \wedge \dots \wedge e^{(n)} = \chi[L^{(1)} \dots L^{(n)}] dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{2n}. \quad (3.4)$$

Для примера можно рассмотреть группу $SO(4)$, при этом у нас будут характеристические классы $c_2 = \frac{1}{2} F^2$ и χ_2 . При условии, что связность симметрична и согласована с метрикой, для четырехмерного риманова многообразия с g_{ij} получим

$$c_2 = -\frac{1}{2} R_{ij}^{kl} R_{kl}^{mn} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \quad (3.5)$$

и

$$\chi_2 = \frac{1}{24} \varepsilon^{abcd} R_{ab}{}^{lm} R_{cd}{}^{np} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d \quad (3.6)$$

Аналогично вводятся характеристические классы группы $Sp(n)$, а также других групп. Что касается групп $SO(n)$ и $U(n)$, то для них никаких других характеристических классов, не эквивалентных приведенным выше c_i и χ_i , построить нельзя.

Разберем еще один поучительный пример. Пусть $F = F_{ab} dx^a \wedge dx^b$ - напряженность магнитного поля в области $P \in \mathbb{R}^3$, $P = \mathbb{R}^3 \setminus x_0$ (где x_0 для определенности 0), а в точке $x_0 = 0$ имеется особенность. Выберем сферу $S^2 \subset P$, которая может быть определена как $r^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i - x_0^i)^2 > 0$. В этом случае

$$\int_{S^2} F_{ab} dx^a \wedge dx^b = k, \quad (a, b = 1, 2, 3),$$

где k - целое число. Из этого результата следует, что поток

магнитного поля через сферу S^2 не обязательно должен быть равен нулю. При этом, как мы уже знаем, можно с тензором $F_{\alpha\beta}$ корректно связать вектор потенциала поля. Таким образом, теоретически предсказывается (впервые это было сделано в 1931 году Дираком) существование магнитного монополя в КЭД [6]. Очевидно, что аналогичные рассуждения, основанные на изучении топологической структуры пространства, в целом правомерны и для более сложных, рассматриваемых в настоящее время, теорий калибровочных полей. Например, выберем над сферой S^4 расслоение с группой $SU(2)$ или $SO(4)$. Поскольку $S^4 \setminus \infty = \mathbb{R}^4$, используя вектор-потенциалы A_μ (связности) над $\mathbb{R}^4$, можно задать расслоение над S^4 . Будем считать, что расслоение тривиально ($F_{\mu\nu} = 0$) и выполнены граничные условия

$$A_\mu(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} g(x) \frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x^\mu}. \quad (3.7)$$

Здесь функция $g(x)$ осуществляет отображение сферы S^3 лучей $\frac{x}{|x|}$ в $B(SU(2)$ или $SO(4))$:

$$S^3 \xrightarrow{g(x)} B.$$

Соответствующий топологический инвариант расслоения — элемент $\pi_3(B)$ — гомотопический класс отображения.

В результате для $SO(4)$ можно определить два характеристических класса, в то время как для $SU(2)$ (или $SO(3)$, с которой она локально изоморфна) такой класс один:

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta; \quad (3.8)$$

$$\chi_2 = \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(F_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\gamma\delta}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta,$$

где $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta].$

§ 4. Калибровочные условия.

Необходимость выбора калибровки

При выводе уравнений движения поля Янга-Миллса (I.20) мы потребовали выполнения дополнительного (калибровочного) условия на компоненты вектор-потенциала $\partial^\nu A_\nu^a = 0$. Цель, которую мы преследовали, налагало это условие – снятие функционального произвола при решении уравнений движения. Строго говоря, после вывода уравнений движения поля (I.19) можно было поступить одним из двух способов. Первый способ состоит в нахождении множества всех решений уравнений движения поля, а затем в устранении функциональной неоднозначности решений путем наложения на множество решений таких условий, которые не противоречат уравнениям движения. При этом, вообще говоря, однозначности может и не быть, поскольку такие условия (мы их будем называть калибровочными) могут сужать класс решений уравнения движения поля. Второй путь состоит в том, чтобы снять требование согласованности условий с уравнениями движения. Формального запрета на выбор калибровки или указания на ее явный вид нет. Поэтому как в КЭД, так и в КХД при вычислении различных физических величин используют разные калибровки. Однако следует отметить, что получаемые при вычислениях наблюдаемые физические величины не должны зависеть от выбора калибровочных условий. Заметим, что выбор той или иной калибровки определяется лишь удобством решения соответствующей физической задачи. Перечислим некоторые из калибровочных условий, часто используемых при рассмотрении различных вопросов:

при получении уравнений Янга-Миллса мы использовали лоренцеву калибровку $\partial^\mu A_\mu^a = 0$; гамильтонова или временная калибровка – $A_0^a = 0$; аксиальная калибровка – $A_a^3 = 0$; фоновая калибровка – $\partial^\mu A_\mu^a = 0$, кулоновская калибровка – $\nabla \cdot \vec{A}^a = 0$

Использование калибровочных условий важно для устранения нефизических степеней свободы при проведении процедуры канонического квантования и при переходе от функционального интеграла в гамильтоновой форме к фейнмановской ковариантной форме.

§ 5. Решение уравнений движения классического поля Янга-Миллса

Уравнения движения полей Янга-Миллса имеют вид

$$D_\mu F_c^{\nu\mu} = J^{\nu a}, \quad (5.1)$$

где $D_\mu = \partial_\mu \delta_c^a + g \varepsilon_c^a{}^b A_\mu^b$ - ковариантная производная;
 $F_c^{\nu\mu}$ - тензор цветового поля; $J^{\nu a}$ - ток, природа которого не фиксируется (в общем случае это может быть сумма токов и полей материи). Изучение классических свойств теории Янга-Миллса проводилось различными авторами. Первая работа 1962 года Икеды и Миячи [7] была посвящена рассмотрению уравнений Янга-Миллса для группы $SU(2)$, несколько позже Лус (1965 г.) [8] обобщил их результаты на более широкий класс калибровочных симметрий. Общим выводом этих работ явилось указание на возможность существования кулоноподобных решений. Такие решения имеют довольно простую структуру и с момента их нахождения к ним почти не обращались.

5.1. Сферически-симметричные решения

Рассмотрим сферически-симметричные решения (5.1) в группе $SU(2)$. Аналогично тому как это делали Икеда и Миячи, положим ток в правой части (5.1) равным нулю, $J^{\nu a} = 0$, а для потенциалов поля выберем сферически-симметричную, не зависящую от времени

подстановку

$$A_0^a = l^a(r), \quad A_i^a = n^i f^a(r), \quad n^i = x^i/r. \quad (5.2)$$

Тогда для компонент l^a и f^a в сферической системе координат уравнения Янга-Миллса примут вид

$$\Delta f^a = \frac{2}{r^2} f^a + g \varepsilon^{abc} [l^b l'^c + f^b f'^c] + g^2 \varepsilon^{abc} l^b [\vec{f} \times \vec{l}]^c = 0; \quad (5.3)$$

$$\Delta l^a - 2g \varepsilon^{abc} f^b l'^c + g^2 \varepsilon^{abc} f^b [\vec{f} \times \vec{l}]^c = 0, \quad (5.4)$$

соответственно для условия калибровки (кулоновской) получаем

$$\frac{\partial f^a}{\partial r} + \frac{2}{r} f^a = 0 \quad \text{или} \quad f^a = m^a/r^2, \quad (5.5)$$

где m^a — постоянный вектор в цветовом пространстве.

Используя (5.5) из (5.3) и (5.4), найдем

$$\varepsilon^{abc} l^b [l'^c + \frac{g^2}{r^2} [\vec{m} \times \vec{l}]^c] = 0 \quad (5.6)$$

и

$$\frac{d}{dr}(r^2 l'^a) = \varepsilon^{abc} m^b [2g l'^c + \frac{g^2}{r^2} [\vec{m} \times \vec{l}]^c]. \quad (5.7)$$

Легко видеть, что из (5.6) следует соотношение

$$l'^c + \frac{g^2}{r^2} [\vec{m} \times \vec{l}]^c = \varphi(r) l^c. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) можно переписать в матричном виде

$$\frac{d}{dr} l^c = A l^c,$$

где явный вид матрицы A следующий:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(\tau) & m_3 \left(\frac{g}{\tau}\right)^2 & -m_2 \left(\frac{g}{\tau}\right)^2 \\ -m_3 \left(\frac{g}{\tau}\right)^2 & \varphi(\tau) & m_1 \left(\frac{g}{\tau}\right)^2 \\ m_2 \left(\frac{g}{\tau}\right)^2 & -m_1 \left(\frac{g}{\tau}\right)^2 & \varphi(\tau) \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы λ_i определяются из условия

$$(\varphi - \lambda)^3 + (\varphi - \lambda) \left(\frac{g}{\tau}\right)^4 \vec{m}^2 + 2m_1 m_2 m_3 \left(\frac{g}{\tau}\right)^6 = 0,$$

т.е. они однозначно определяются функцией $\varphi(\tau)$ и вектором шестого пространства $\vec{m}$. Более точно через три величины: $\varphi; \left(\frac{g}{\tau}\right)^4 \vec{m}^2$ и $2\left(\frac{g}{\tau}\right)^6 m_1 m_2 m_3$, решение ℓ^a выражается однозначно. В общем случае это будет система векторов, повернутых друг относительно друга при различных значениях τ . Если рассмотреть частный случай $f^a = 0$ и $A_i^a = [(A/\tau) + B] \delta_{a3}$, то получим $F_{ij}^a = 0$, $F_{0j}^a = -\delta_{a3} \partial_i (A/\tau + B)$.

Т.е. рассматриваемые решения уравнений Янга-Миллса кулоноподобны. Этот результат можно обобщить на любую размерность группы, т.е. на больших расстояниях необходимо учитывать соответствующее тензорное поведение потенциала в шестовом пространстве.

Несколько иные решения уравнений Янга-Миллса можно найти, используя следующий вид потенциалов поля:

$$A_0^a = \frac{i n_a \ell(\tau)}{g \tau}; \quad A_i^a = \varepsilon_{ain} n_n \frac{1 - f(\tau)}{g \tau}. \quad (5.9)$$

Подстановка (5.9) впервые была использована при $A_0^a = 0$ (временная калибровка) Бу и Янгом [9]. Несколько позже Джудия и Зи [10], а также Мекон и Хсу [11] — при $A_0^a \neq 0$. При подстановке в уравнения (5.9) несложно получить уравнения

для $\ell(r)$ и $f(r)$:

$$\begin{aligned} r^2 \ell'' - 2\ell f^2 &= 0; \\ r^2 f'' - f(f^2 - 1 + \ell^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Используя замену переменных (переходя к новому масштабу $r = e^{\xi}$), получим уравнение

$$\begin{aligned} \ell'' - \ell' - 2f^2 \ell &= 0; \\ f'' - f' - (f^2 + \ell^2 - 1)f &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь $\ell = \ell(\xi)$, $f = f(\xi)$, а штрих означает производную по ξ . Очевидно, что система (5.11) имеет постоянные решения, удовлетворяющие соотношениям: а) $\ell = 0$ и $f^2 = 1$; б) $f = 0$ и $\ell = c_1 + c_2 e^{\xi}$. Решение типа а) вакуумное при $f = 1$ и "чистая" калибровка при $f = -1$.

Рассмотрим решение линеаризованных уравнений (5.11). Они оказываются следующими:

$$\begin{aligned} \ell &= c_1 + c_2 e^{\xi}; \\ f &= \exp\left[\frac{1}{2}\exp\xi\right] \left(c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\xi} + c_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\xi}\right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Приведенные решения (5.12) указывают на быстрый рост и осцилляции компонент $f(\xi)$ в зависимости от параметра ξ (если вернуться к исходным переменным, то это означает и увеличение осцилляций с возрастанием расстояния r). Если вновь обратиться к уравнениям (5.11), то можно заметить, что возможны "резонансные" решения, приводящие к росту ℓ . Такая ситуация для стационарных уравнений резко усложняется при учете временной зависимости в вектор-потенциалах (5.9). Отмеченный рост решений $f(\xi)$ может привести к отсутствию устойчивых нестационарных решений или возникновению стохастичности. Последнее наблюдалось, например, в работе

5.2. Плоскороволновые решения уравнений

Янга-Миллса

В 1977 году Коулменом было показано [13], что плоскороволновые решения уравнений ЯМ (5.1) существуют (даже при нулевом токе), и они могут быть представлены следующим образом:

$$A_\mu^a = k_\mu \left[(n^1 x) f^a(\varphi) + (n^2 x) g^a(\varphi) + h^a(\varphi) \right]. \quad (5.13)$$

Здесь $\varphi = k_\mu x^{\mu}$ — фаза волны; $n_{\mu}^{1,2}$ — пространственно-подобные 4-векторы, характеризующие поляризацию волны; k_μ — изотропный волновой 4-вектор; $(n^1 n^2) = (k n^1) = (k n^2) = 0$, $f^a(\varphi)$, $g^a(\varphi)$, $h^a(\varphi)$ — произвольные ограниченные функции φ .

Функции $h^a(\varphi)$ в выражении для A_μ^a можно устранить калибровочным преобразованием, зависящим только от φ . Это является следствием того, что после калибровки Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu^a = 0$$

мы полностью устраним возможный произвол. Заметим при этом, что при ограниченной плотности энергии полей ЯМ и постоянном направлении вектора Умова-Пойнтинга решение A_μ^a вида (5.13) является единственным по модулю $h^a(\varphi)$. Напряженность полей ЯМ, определяемая A_μ^a , имеет вид

$$F_{\mu\nu}^a = f^a(\varphi) (n_\mu^1 k_\nu - n_\nu^1 k_\mu) + g^a(\varphi) (n_\mu^2 k_\nu - n_\nu^2 k_\mu). \quad (5.14)$$

Несколько позже в ряде работ [14-16] исследовались волновые решения уравнений ЯМ в подстановках:

$$A_0^a = 0, A_i^a = 0_i^a f^i(t); 0_i^a 0_i^b = \delta^{ab},$$

мы рассмотрим анзац, предложенный в работах [27, 29]:

$$A_0^a = 0, A_i^a = \varepsilon^{a i n} \hat{f}_n(t) \text{ или } A_i^a = \delta_i^a f_a(t). \quad (5.15)$$

Соответствующие уравнения для функций $\hat{f}(t)$ имеют вид

$$\ddot{\hat{f}}_n + g^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \hat{f}_n = 0 \quad (5.16)$$

для первой подстановки, и

$$\ddot{\hat{f}}_n + g^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - f_n^2) \hat{f}_n = 0 \quad (5.17)$$

— для второй подстановки. Если для $\vec{\hat{f}} = (f_1, f_2, f_3)$ положить $f_1 = f_2 = f_3 = \hat{f}$ и $\vec{\hat{f}} = \vec{s} \hat{f}$, где $\vec{s}$ — единичный вектор $\vec{s}^2 = 3$, то при этих условиях получим уравнение

$$\ddot{\hat{f}} + g_*^2 \hat{f}^3 = 0 \quad (5.18)$$

Здесь g_*^2 равно g^2 для первой подстановки и $2g^2$ — для второй. Из последнего уравнения легко получить

$$\dot{\hat{f}} = \pm \sqrt{2 \left(\mathcal{E} - \frac{1}{4} g_*^2 \hat{f}^4 \right)}.$$

Откуда следует, что $f(g_*^2/4\mathcal{E})^{1/4} \in [-1, 1]$, величина $\mathcal{E}$ — энергия, переносимая волной. Если обозначить частоту $\omega_0 = (g_*^2 \mathcal{E}/4)^{1/4}$, то получим решение уравнения, выражаемое через функции Якоби:

$$f(t) = \frac{2\omega_0}{g_*} \operatorname{cn}(\omega_0(t+t_0); \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (5.19)$$

Строго говоря, мы не перечислили всех решений уравнения (5.16). Так, например, положим $f_1 = c \sin Bt$, $f_2 = f_3 = \frac{c}{\sqrt{2}} \cos Bt \Rightarrow$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = c^2, \quad (5.20)$$

при этих условиях найдем, что

$$\ddot{f}_n + (cg)^2 f_n = 0, \quad n = 1, 2, 3;$$

$$k^2 + (cg)^2 = 0, \quad k_{1,2} = \pm cg;$$

$$f_i = A_1 \cos cgt + A_2 \sin cgt, \quad (5.21)$$

т.е., $B = cg \Rightarrow$

$$f_1 = c \sin cgt; \quad f_2 = f_3 = \frac{c}{\sqrt{2}} \cos cgt \quad - \text{решение (5.16).}$$

Можно поступить и так. Положим, $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = U(t)$,
далее необходимо решать задачу

$$\ddot{f}_n(t) + g^2 U(t) f_n(t) = 0, \quad (5.22)$$

скажем, методом обратной задачи рассеяния, например так, как это сделано в работе [17].

При выводе уравнения для функции $\vec{f}$ мы воспользовались одним из условий

$$g \varepsilon^{abc} A_b^i \partial_0 A_i^c = 0, \quad (5.23)$$

которое в обоих случаях приводит к тому, что

$$[\vec{f} \times \dot{\vec{f}}] = 0, \quad (5.24)$$

т.е. векторы $\vec{f}$ и $\dot{\vec{f}}$ - коллинеарны. Для напряженности электромагнитной и хромомангнитной компонент поля волны получим (мы рассмотрим первую подстановку)

$$\begin{aligned} E_i^a &= -\varepsilon_{ain} \dot{f}_n; \quad B_i^a = \frac{1}{2} g \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ikl} A_l^b A_c^k = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{lcn} \dot{f}_n \dot{f}_m = g \dot{f}_a \dot{f}_b \end{aligned} \quad (5.25)$$

Очевидно, что векторы $\vec{E}_a$ и $\vec{B}_a$ ортогональны в обычном и цветном пространствах. Плотность энергии поля, переносимая волной, имеет вид

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E}_a^2 + \vec{B}_a^2) = \dot{f}^2 + \frac{g^2}{2} f^4$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = -\vec{E}_a \vec{j}_a = 0,$$

и т.к. $\vec{j}_a = 0$ и $\text{div } \vec{\Pi} = \text{div} [\vec{E}_a \times \vec{B}_a] = 0$, то $w = \text{const}$.

Необходимо указать, что в адиабатическом пределе, который в нашем случае соответствует выполнению условия $(g^2 \varepsilon)^{1/4} \ll m$, где m — масса кварка, или ограничению на напряженность цветного поля $|\vec{E}_a| \ll m^2/g$ (здесь $m^2/g = E_{kr}$ — критическое швингеровское поле), для малых промежутков времени по сравнению с периодом колебаний поле волны может быть аппроксимировано постоянным полем. Аналогичное приближение можно использовать при рассмотрении длинных волн с тем же ограничением на амплитуду волны. Следует отметить, что в КЭД интенсивно развивался метод описания процессов во внешнем поле, разработанный в работах В.И. Ритуса и А.И. Никишова [18, 19]. Способ описания был основан на том, что практически любое не быстро меняющееся электромагнитное поле в системе отсчета, связанной с релятивистской частицей, имеет вид скрещенного поля $\vec{E} \perp \vec{n}$, $|\vec{E}| = |\vec{n}|$. Зависимость от поля в окончательные выражения входит через параметры:

$$\chi = \frac{e}{m^3} \sqrt{-(\vec{F}_{\mu\nu} p^\nu)^2}; \quad f_1 = \frac{e}{m^2} \sqrt{|\vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu}|};$$

$$f_2 = \frac{e}{m^2} \sqrt{|\vec{F}_{\mu\nu}^* \vec{F}^{\mu\nu}|},$$

е также $f_{3,4,5,6}$, определение которых дано в [19, 20]. В упомянутых работах показано, что данный метод применим для произвольного постоянного поля $F_{\mu\nu}$, если параметры f_1, f_2 малы по сравнению с χ :

$$f_1, f_2 \ll \chi.$$

В этом случае ряд процессов для широкого класса полей описывается одним параметром χ . Учитывая сказанное, приближение решений уравнений ЯМ посредством постоянных полей может оказаться полезным в связи с возможностью получения на их основе эффектов, обусловленных основным состоянием КХД.

Рассмотрение возможности существования плосковолновых решений уравнений ЯМ с нулевым током в группе $SU(2)$ для несколько более общего вида потенциала было проведено в работе О.И. Банчулы и В.П. Гусынина [21], которые для вектора-потенциала использовали следующее выражение:

$$A_0^a = \frac{p_a}{\sqrt{p^2}} J(p x); \quad (5.26)$$

$$A_i^a = \varepsilon_{a i k} \frac{p_k}{\sqrt{p^2}} \mathcal{H}(p x) + \left(\delta_{a i} - \frac{p_a p_i}{p^2} \right) H(p x) + \frac{p_a p_i}{p^2} \mathcal{F}(p x).$$

Здесь $\mathcal{H}$, H , $\mathcal{F}$ и J — скалярные функции; $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 > 0$. Решения, определяемые вектор-потенциалом (5.26), инвариантны относительно одновременных преобразований поворота в цветовом и координатном пространствах. Выпишем компоненты хромоматричного и хромоматного полей, соответствующие вектор-потенциалам (5.26):

$$F_{ci}^a = E_i^a = \varepsilon_{a i k} \frac{p_k}{\sqrt{p^2}} \left(p_0 \mathcal{H}' - J H \right) + \left(\delta_{a i} - \frac{p_a p_i}{p^2} \right) \left(p_0 H' + J \mathcal{H} \right) +$$

$$+ \frac{p_a p_i}{\bar{p}^2} (p_0 \mathcal{F}' - \sqrt{\bar{p}^2} J') ;$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathcal{F}_{jk}^a = B_i^a = \varepsilon_{a,ik} \frac{p_k}{\sqrt{\bar{p}^2}} (\sqrt{\bar{p}^2} H' + \mathcal{H} \mathcal{F}) + \\ + \frac{p_a p_i}{\bar{p}^2} (\mathcal{K}^2 - H^2) + (\delta_{ai} - \frac{p_a p_i}{\bar{p}^2}) (\mathcal{H} \mathcal{F} - \sqrt{\bar{p}^2} \mathcal{K}') .$$

Явная зависимость векторов E_i^a и B_i^a от импульса позволяет установить, что в общем случае неабелевы плосковолновые решения не являются поперечными, т.к.

$$E_i^a p_i = p_a (p_0 \mathcal{F}' - \sqrt{\bar{p}^2} J') ; B_i^a p_i = p_a (\mathcal{K}^2 - H^2) .$$

Используя калибровку Лоренца $\partial_\mu \mathcal{H}^\mu = 0$, т.е. $\mathcal{F} = \frac{p_0}{\sqrt{\bar{p}^2}} J$, уравнения Янга-Миллса запишутся в выражении через скалярные функции $\mathcal{H}$, H , $\mathcal{F}$, J следующим образом:

$$(p_0^2 - \bar{p}^2) \frac{J''}{\mathcal{K}^2} + 2 p_0 \left(\frac{H}{\mathcal{K}} \right)' + 2 J \left[1 + \left(\frac{H}{\mathcal{K}} \right)^2 \right] = 0 ;$$

$$\bar{p}^2 (p_0^2 - \bar{p}^2) \frac{\mathcal{K}''}{\mathcal{K}^2} + (p_0^2 - \bar{p}^2) \frac{J^2}{\mathcal{K}} + \bar{p}^2 \mathcal{K} \left[1 + \left(\frac{H}{\mathcal{K}} \right)^2 \right] = 0 ;$$

$$\bar{p}^2 (p_0^2 - \bar{p}^2) \frac{H''}{\mathcal{K}^2} + (p_0^2 - \bar{p}^2) \frac{J^2}{H} + \bar{p}^2 H \left[1 + \left(\frac{H}{\mathcal{K}} \right)^2 \right] = 0 ;$$

$$p_0 (p_0^2 - \bar{p}^2) \frac{J''}{\mathcal{K}^2} + 2 \bar{p}^2 \left(\frac{H}{\mathcal{K}} \right)' + 2 p_0 J \left[1 + \left(\frac{H}{\mathcal{K}} \right)^2 \right] = 0 .$$

Отсюда видно, что эта система существенно упрощается, если положить $p_0^2 - \bar{p}^2 = 0$ или $H = \alpha \mathcal{K}$, где $\alpha = \text{const}$. Такие условия, очевидно, следуют из четвертого и первого уравнений. Рассмотрим случай $H = \alpha \mathcal{K}$, тогда получим следующую систему уравнений:

$$(p_0^2 - \bar{p}^2) J'' + 2(1 + \alpha^2) J \mathcal{K}^2 = 0 ;$$

$$\bar{p}^2 (p_0^2 - \bar{p}^2) \mathcal{K}'' + (p_0^2 - \bar{p}^2) \mathcal{K} J^2 + \bar{p}^2 (1 + \alpha^2) \mathcal{K}^3 = 0$$

При $J = 0$ эти уравнения имеют следующие решения:

$$\mathcal{K}(px) = \sqrt{\frac{p^2}{1+\alpha^2}} \operatorname{cn}(p(x+x_0); \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ если } p^2 > 0;$$

$$\mathcal{K}(px) = \sqrt{\frac{-p^2}{1+\alpha^2}} \operatorname{nc}(p(x+x_0); \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ если } p^2 < 0.$$

Отсюда следует, что амплитуда и волновое число связаны соотношением

$$\frac{p^2}{1+\alpha^2} = p^2.$$

Такого вида соотношения характерны для нелинейных волновых уравнений, а сама связь напоминает дисперсионное соотношение для массивной частицы. Последний результат послужил основанием для названия такого вида решений нелинейными массивными волнами.

Вычислим теперь $T_{\mu\nu}$ для указанных решений:

$$T_{00} = \frac{(1+\alpha^2)}{g^2} \left[(p_0^2 + \bar{p}^2) \mathcal{K}'^2 + \frac{1}{2}(1+\alpha^2) \mathcal{K}^4 \right];$$

$$T_{0i} = \frac{2 p_0 p_i}{g^2} (1+\alpha^2) \mathcal{K}'^2;$$

$$T_{ij} = \frac{(1+\alpha^2)}{g^2} \left(\delta_{ij} \frac{1+\alpha^2}{2} \mathcal{K}^4 + \frac{p_i p_j}{p^2} \left[(p_0^2 + \bar{p}^2) \mathcal{K}'^2 - (1+\alpha^2) \mathcal{K}^4 \right] \right).$$

Для плотности лагранжиана можно найти следующее выражение:

$$\frac{(1+\alpha^2)}{g^2} \left[p^2 \mathcal{K}'^2 - \frac{1}{2}(1+\alpha^2) \mathcal{K}^4 \right].$$

Заметим, что действие для найденных решений бесконечно, т.к.

$$S = \frac{3}{4g^2} (p^2)^{3/2} V \int dt \left[\psi'^2(t) - \frac{1}{2} \psi^4(t) \right],$$

где $\psi(t) = \operatorname{cn}(t; \frac{\sqrt{2}}{2})$, и вклад этих решений, пропорциональный $\epsilon^{1/2}$, в фейнмановский интеграл мал. Однако существуют решения при $p^2 = 0$, например $\mathcal{K} = H = 0$, $J = J(px)$ — произвольная функция, для которых $S = 0$. Вектор-потенциал имеет

вид

$$A_0^a = \frac{P_a}{\sqrt{P^2}} J ; \quad A_i^a = \frac{P_a P_i}{P^2} \frac{P_0}{\sqrt{P^2}} J(Px) .$$

Вклад этих решений в фейнмановский интеграл сравним с тем, который дают тривиальные решения $A_\mu = 0$, учитываемые по теории возмущений. Для найденных решений $T_{\mu\nu} = 0$, следовательно, это нераспространяющиеся волны. Топологический заряд, им соответствующий:

$$\frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \int d^4x F^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} = 0 ,$$

что указывает на возможность интерпретации данных решений как "вакуумных". Заметим, что приведенные решения интересно сравнить с решениями (5.15) и (5.33), (5.34) и (5.43), поскольку асимптотики перечисленных решений уравнений Янга-Миллса, по-видимому, могут быть использованы при описании различных моделей вакуума, а также при обсуждении свойств адронной материи при столкновении пучков высокоэлектрических частиц.

В работе Ковача [22] проанализирована возможность существования плосковолновых решений уравнений ЯМ без тока для группы $SU(3)$. Следуя этой работе, рассмотрим евклидово пространство и зададим вектор-потенциал следующим образом:

$$A_i = i\varepsilon_{ijk} k_j L_k H(\varphi) + i\varepsilon_{ijk} \frac{k_i k_j}{k} Q_{kr} G(\varphi) + iL_i k_4 D(\varphi) + \\ + iQ_{ij} \frac{k_i k_j}{k} E(\varphi) + i k_i k_j L_j A(\varphi) + iQ_{rs} \frac{k_i k_s k_i}{k} B(\varphi) \quad (5.27)$$

и

$$A_4 = -iL_a k_a C(\varphi) - iQ_{ab} \frac{k_a k_b}{k} F(\varphi) ; \quad (5.28)$$

где $k = |\vec{k}|$, $\varphi = k_\mu x^\mu = k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_4 x^4$,

$$(L_a)_{ij} = i \varepsilon_{iaj} ; (Q_{ab})_j = \delta_{aj} \delta_{bi} + \delta_{aj} \delta_{bi} - \frac{2}{3} \delta_{ab} \delta_{ij} .$$

L_a и Q_{ab} удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[L_a, L_b] = i \varepsilon_{abc} L_c ; [L_a, Q_{bc}] = i (\varepsilon_{cna} Q_{bn} + \varepsilon_{bna} Q_{cn}) ;$$

$$[Q_{ab}, Q_{cd}] = i (\delta_{ad} \varepsilon_{bcs} + \delta_{bd} \varepsilon_{acs} + \delta_{bc} \varepsilon_{ads} + \delta_{ac} \varepsilon_{bds}) L_s .$$

Отметим, что вектор-потенциал и тензор поля имеют вид

$$2i A_\mu = A_\mu^a T^a , \quad 2i F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a ,$$

где T^a для группы $SU(3)$ – матрицы 3×3 .

Функции A, B, C, D, E, F, G, H – неизвестные скалярные функции, зависящие только от $\varphi = kx$. Если положить $A = B = D = E = F = G = 0$, то мы придем к более простому результату, который имеет место для группы $SU(2)$. Калибровочное условие Лоренца приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} D' + \bar{k}^2 A'/k_4 &= C' ; \\ E' + \bar{k}^2 B'/k_4 &= F' . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Здесь штрих означает производную по φ . Используя калибровочные условия и полагая, что $D = \begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}$, придем к следующей нелинейной системе дифференциальных уравнений на неизвестные скалярные функции:

$$\begin{aligned} C'' - (2CH'^2 + 2CG'^2 + 8HGF) &= 0 ; \\ F'' - 6(CG'H + FH'^2 + FG'^2) &= 0 ; \\ H'' - (H^3 + 7HG^2 + HG'^2 + 4CFG + 4HF^2) &= 0 ; \\ G'' - (G^3 + 7H^2G + C^2G + 4CFH + 4F^2G) &= 0 . \end{aligned} \quad (5.30)$$

В тривиальном случае группы $SU(2)$, $G = F = 0$, $H = C$.

Легко видеть, что решать систему (5.30) аналитически весьма затруднительно, поэтому целесообразно развивать качественные и численные методы изучения нелинейных систем такого вида. Важным отправным пунктом исследования рассмотренных систем могут являться граничные условия.

5.3. Решения уравнений Янга-Миллса с током

Если к лагранжиану, описывающему систему калибровочных полей, добавить слагаемое $A_\mu^a J_\mu^a$, обуславливающее взаимодействие, то в уравнениях ЯМ в правой части появится ток J_μ^a . В общем случае ни структура, ни природа этого тока неизвестны, но мы полагаем выполненными требования лоренцевой ковариантности уравнений ЯМ и можем предположить следующую форму зависимости от A_μ^a :

$$J_\mu^a = J_\mu^a[0] + \alpha A_\mu^a + \beta_1 A_\mu^2 A_\mu^a + \beta_2 A_\mu^a A_\mu^b A_\mu^b + \dots \quad (5.31)$$

Чтобы ток J_μ^a не нарушал ковариантности уравнений ЯМ с нулевой правой частью, рассмотрим, как он изменяется при калибровочных преобразованиях вида $\delta A_\mu^a = \varepsilon_{abc} \omega_b A_\mu^c$ (ω_b — параметр преобразования). Тогда получим $\delta J_\mu^a = [(\alpha + \beta_1 A^2) g_{\mu\nu} + \beta_2 A_\mu^b A_\nu^b] \delta A_\nu^a$. Если требовать наличия решений уравнений ЯМ без тока вида $A_\mu^a = 0$, то величина тока $J_\mu^a[0]$ должна быть равна нулю. Таким образом, ток в правой части может иметь вид

$$J_\mu^a = \alpha A_\mu^a + \beta_1 A_\mu^a A_\mu^2 + \beta_2 A_\mu^a A_\mu^b A_\mu^b + \dots \quad (5.32)$$

Если ограничиться в данном представлении только первым слагаемым, то соответствующий лагранжиан и уравнения движения поля могут быть идентифицированы, например, с массивным калибровочным полем ЯМ. Что касается природы генерируемой массы поля, то различными авторами она связывается с непертурбативными эффектами КХД, такими как стохастичность. Таким образом, если параметр $\alpha > 0$, то он может быть связан с эффективной массой глюонного поля. Заметим, что для КЭД имеется аналогия в физике твердого тела, когда у фотонов в сверхпроводнике появляется эффективная масса. При $\alpha < 0$ аналогичная связь между выражением для тока и потенциалами поля наблюдается при описании сверхтекучести. Последнее приводит к отличному от нуля вакуумному состоянию. Наряду с описанной аналогией, указанием для определения явной зависимости тока от вектор-потенциала поля, по-видимому, может служить наличие в вакууме глюонного конденсата, значение которого вычисляется на основе правил сумм и экспериментальных результатов [23-26].

Как и ранее, потенциалы зададим следующим образом:

$$A_0^a = 0 ; \quad A_i^a = \varepsilon_{a ij} s_j f(t) \quad (5.33)$$

или

$$A_0^a = 0 ; \quad A_i^a = \delta_i^a f(t) , \quad (5.34)$$

где s_j — единичный вектор в цветовом пространстве $\vec{s}^2 = 3$. На вектор-потенциал наложим калибровочное условие

$$D_\mu A_a^\mu = 0 ,$$

которое ввиду антисимметричности тензора ε_{abc} переходит в следующее: $\partial_\mu A_a^\mu = 0$ или, в нашем случае, $\partial_i A_a^i = 0$. Плотность энергии поля и вектор Умова-Пойнтинга имеют вид

$$\Pi_j = (\partial_0 A_i^a) F_{ji}^a ;$$

$$T_{0\alpha} = \partial_0 A_j^a \partial_0 A_j^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} \varkappa A_i^a A_i^a .$$

Подстановка левого выражения вектор-потенциалов в уравнения ЯМ совместно с калибровочными условиями приводит к уравнению для функции $f(t)$:

$$\ddot{f} - \varkappa f + g_*^2 f^3 = 0 . \quad (5.35)$$

Очевидно, что это уравнение имеет стационарные решения, определяемые из условия:

$$-\varkappa f [1 - g_*^2 f^2 / \varkappa] = 0 , \quad (5.36)$$

т.е. $f = 0$ и $f_0^\pm = \pm \sqrt{\varkappa} / g_*$. Решения $f_0^\pm$ в зависимости от знака $\varkappa$ могут быть как действительными, так и мнимыми. Как известно [27], чисто мнимые потенциалы возможно использовать при описании глюонного поля, но с другим, нежели при действительном значении функции $f_0^\pm$, знаком хромомagnetного поля. Ранее мы указывали на соответствие уравнений ЯМ при постоянных неабелевых потенциалах и уравнений для конденсатной волновой функции Ψ в теории сверхтекучести Гинзбурга-Ландау [28]. В самом деле, при $\Psi = \text{const}$ найдем

$$\Psi (|\Psi|^2 - n) = 0 .$$

Откуда следует, что при $f = f_0^\pm$ мы имеем соответствие, если положить n - число частиц в почти идеальном бозе-газе, равным $\varkappa / g_*^2$ ($\varkappa > 0$). Заметим, что уравнение для функции $f(t)$ можно получать, формально используя вариационный принцип из лагранжиана вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_r f \partial^r f - \frac{1}{4} g_*^2 (f^2 - \kappa/g_*^2)^2, \quad (5.37)$$

или, учитывая зависимость функции f только от времени, получим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{f}^2 - \frac{1}{4} g_*^2 (f^2 - \kappa/g_*^2)^2.$$

Соответствующая классическая механика для полей ЯМ при $\kappa = 0$ была рассмотрена нами ранее. В этом случае явное выражение для плотности энергии поля определяется выражением (здесь и далее использована вторая подстановка для вектор-потенциала поля A_r^a)

$$T_{00} = \mathcal{E} = \frac{3}{2} \left[\dot{f}^2 - \kappa f^2 + \frac{1}{2} g^2 f^4 \right],$$

а вектор Умова-Пойнтинга Π_j равен нулю.

Решение уравнений (5.35) для функции $f(t)$ при $\kappa > 0$ записывается следующим образом:

$$f(t) = \frac{\sqrt{\kappa}}{g} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \operatorname{cn} \left\{ \left(\kappa^2 + \frac{8g^2}{3} \mathcal{E} \right)^{1/4} (t - t_0)/k \right\}. \quad (5.38)$$

Как и ранее, $\operatorname{cn}(a/k)$ - эллиптический косинус, $k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \kappa/\sqrt{\kappa^2 + 8g^2 \mathcal{E}/3} \right] \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$, период найденного решения определяется через полный эллиптический интеграл первого рода $\mathcal{K}(k)$

$$T = \frac{4}{\sqrt[4]{\kappa^2 + 8g^2 \mathcal{E}/3}} \mathcal{K} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \kappa/\sqrt{\kappa^2 + 8g^2 \mathcal{E}/3}} \right). \quad (5.39)$$

Если в полученных выражениях (5.38) и (5.39) перейти к пределу $\kappa \rightarrow 0$, то мы придем к изученному ранее случаю "безмассового" поля. В другом предельном случае $\kappa^2 \gg g^2 \mathcal{E}$, при $k \sim 1$ функция $f(t)$ имеет вид "уединенной" волны:

$$f(t) \cong \frac{\sqrt{\kappa}}{g} \operatorname{ch}^{-1} [\sqrt{\kappa} (t - t_0)]. \quad (5.40)$$

Отрицательные значения ε рассматриваются аналогично, при этом получим

$$f(t) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{g} \frac{k}{\sqrt{1-2k}} \operatorname{cn} \left\{ (\alpha^2 + 8g^2\varepsilon/3)^{1/4} (t-t_0)/k \right\}, \quad (5.41)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - |\alpha| / \sqrt{\alpha^2 + 8g^2\varepsilon/3} \right] \in (0; \frac{1}{2}] .$$

Выбор второй подстановки (5.34) для вектор-потенциала приводит к тому, что уравнение для функции $f(t)$ имеет вид

$$\ddot{f} - \alpha f + g^2 f^3 = 0, \quad (5.42)$$

т.е. отличается заменой $g \rightarrow g/\sqrt{2}$ от рассмотренного выше. Вектор $\Pi_j = 0$, как и прежде.

Далее проведем некоторое обобщение решений, выражающееся в том, что от $f(t)$ мы перейдем к рассмотрению $f(\varphi)$, где $\varphi = kx$. Это можно осуществить посредством преобразований Лоренца для аргумента функции f и потенциалов. Так, если

$$x_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad A_\mu'^a = \Lambda_\mu^\nu A_\nu^a,$$

последнее приведет к наличию отличной от нуля компоненты A_0^a . Это указывает на то, что потенциалы $A_\mu^a(px)$, которые мы будем рассматривать ниже, не являются лоренц-преобразованием полученных ранее результатов, а представляют собой новые решения. Таким образом, имеем

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a = \varepsilon_{aik} p_k f(px), \quad (5.43)$$

Тогда для тензора поля (I.7) имеет место выражение

$$F_{0i}^a = \varepsilon_{ain} p_n \omega f', \quad f' = df/d\varphi; \quad (5.44)$$

$$F_{ij}^a = (\varepsilon_{ajm} p_i - \varepsilon_{aim} p_j) p_m f' + g \varepsilon_{ijn} p_n p_a f''.$$

Уравнение (5.1) в данном случае приводится к виду

$$(\omega^2 - \vec{r}^2) f'' + g^2 \vec{r}^2 f^3 - \alpha f = 0. \quad (5.45)$$

Умножив (5.45) на $\vec{r}^2 f'$, получим

$$(\omega^2 - \vec{r}^2) \vec{r}^2 (f')^2 - \alpha \vec{r}^2 f^2 + \frac{1}{2} g^2 \vec{r}^4 f^4 = \mu. \quad (5.46)$$

Уравнение (5.45) имеет структуру, аналогичную с (5.18), однако в (5.46) μ уже не имеет смысла плотности энергии.

Действительно, из (5.46) получаем

$$T_{00} = \mathcal{E} = \vec{r}^2 \left[(\omega^2 + \vec{r}^2) (f')^2 + \frac{1}{2} g^2 \vec{r}^2 f^4 - \alpha f^2 \right].$$

Другими словами,

$$\mathcal{E} = 2 \vec{r}^4 (f')^2 + \mu.$$

Вектор Пойнтинга для потенциалов (5.43) отличен от нуля:

$$\vec{\Pi} = 2 \omega \vec{r}^2 (f')^2 \vec{r}.$$

Поиск решений уравнений Янга-Миллса с зависимостью потенциалов от r^2 велся в работах [21, 27, 29]. В них получены решения (5.1) без тока, т.е. для случая $\alpha = 0$. В (5.45) он является постоянной величиной.

Для вектора Умова-Пойнтинга найдем

$$\vec{\Pi} = (g a^2 / m)^2 \sqrt{\vec{r}^2 + m^2} \vec{r},$$

где a — постоянная; $m^2 = \vec{r}^2 \neq 0$.

Уравнение (5.46) решается точно так же, как и (5.18). Действительно, пусть $\omega^2 - \vec{r}^2 > 0$, $\alpha > 0$. Тогда (5.46) приводится к виду

$$\mathcal{E}_0 = (f')^2 - \alpha_0 f^2 + g_0^2 f^4 ;$$

$$g_0^2 = g^2 \bar{p}^2 / [2(\omega^2 - \bar{p}^2)] ;$$

$$\alpha_0 = \alpha / (\omega^2 - \bar{p}^2) ; \quad \mathcal{E}_0 = \mu / [\bar{p}^2 (\omega^2 - \bar{p}^2)] .$$

Воспользовавшись результатом [29], для $f(px)$ найдем

$$f(px) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{g|\bar{p}|} \frac{k}{\sqrt{2k^2-1}} \operatorname{cn} \left\{ (\omega^2 - \bar{p}^2)^{-1/2} (\alpha^2 + 2\mu g^2)^{1/4} p(x - x_0)/k \right\} . \quad (5.47)$$

Здесь $k^2 = 0,5 [1 + \alpha / \sqrt{\alpha^2 + 2\mu g^2}]$.

Не останавливаясь на случае $\omega^2 - \bar{p}^2 > 0$, $\alpha < 0$, приведем результаты, когда $\omega^2 - \bar{p}^2 < 0$, $\alpha > 0$. Имеем

$$f(px) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2|\bar{p}|} \sqrt{\frac{1-k^2}{2k^2-1}} \operatorname{nc} \left\{ (\omega^2 - \bar{p}^2)^{-1/2} (\alpha^2 + 2\mu g^2)^{1/4} p(x - x_0), k \right\} ; \quad (5.48)$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha / \sqrt{\alpha^2 + 2\mu g^2} \right], \quad \operatorname{nc}(x, k) = \operatorname{cn}^{-1}(x, k) .$$

Таким образом, (5.48) является сингулярным решением уравнения Янга-Миллса, т.к. при $\operatorname{cn}(x, k) = 0$ оно расходится. Случай $\alpha < 0$, $\omega^2 - \bar{p}^2 \geq 0$ исследуется методом, аналогичным рассмотренному.

Для плотности энергии T_{00} найдем выражение

$$T_{00} = \mu + \frac{2\bar{p}^2(\alpha^2 + 2\mu g^2)}{g^2(\omega^2 - \bar{p}^2)} \left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\mu g^2}} \right] \left(\frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \right)^2 ,$$

соответственно для вектора Умова-Пойнтинга получим

$$\vec{\Pi} = \vec{p} \frac{2\omega(\omega^2 + 2\mu g^2)}{g^2(\omega^2 - \bar{p}^2)} \left[1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\mu g^2}} \right] \left(\frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \right)^2 ,$$

где

$$u = p(x - x_0) \frac{(\alpha^2 + 2\mu g^2)^{1/4}}{\sqrt{\omega^2 - \bar{p}^2}} .$$

Выражение для тока, с которым было проведено решение уравнений ЯМ, является наиболее простым как с точки зрения калибровочной, так и лоренц-ковариантной структуры. Если в разложении для тока J_μ^a не ограничиваться лишь первым членом, а удерживать второй, то соответствующий этому виду тока лагранжиан находится при изучении связи чисто калибровочного поля с хиггсовским триплетом калибровочного поля, как это показано в [10]. При этом потенциальная энергия была такой, что нарушалась локально-калибровочная симметрия (см. (5.6)). Явный вид лагранжиана следующий:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \lambda \left(A_\mu^a A_a^\mu + \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (5.49)$$

Джулия и Зи установили, что при восстановлении калибровочной симметрии $m^2, \lambda \rightarrow 0$ и $m^2/\lambda < 0$ для статических полей нулевая компонента вектор-потенциала A_0^a допускает интерпретацию как триплет мнимых хиггсовских полей $i\varphi^a$, и наоборот, φ^a можно рассматривать как мнимое калибровочное поле iA_0^a . Используя ток J_a^ν в виде

$$J_a^\nu = m^2 A_a^\nu + \beta_1 A_\mu^b A_b^\mu A_a^\nu, \quad (5.50)$$

для тензора $T_{\mu\nu}$ получим следующую формулу:

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}^a F_\nu^{a\rho} + (m^2 + \beta_1 A_\rho^b A_b^\rho) A_\mu^b A_\nu^b + g_{\mu\nu} \mathcal{L};$$

$$T_{00} = \mathcal{E} = \frac{3}{2} \left[\dot{f}^2 - m^2 f^2 + (g^2 + 3\beta_1/2) f^4 + m^4/(6\lambda) \right].$$

Соответствующее уравнение движения для функции f такое:

$$\ddot{f} + m^2 f + 2(g^2 + 3\beta_1/2) f^3 = 0. \quad (5.51)$$

Стационарные решения находятся из условия

$$2(g^2 + 3\beta_1/2)f \left[f^2 - \frac{0,5m^2}{g^2 + 3\beta_1/2} \right] = 0, \quad \text{т.е.} \quad (5.52)$$

$$f = 0 \quad \text{и} \quad f_0^{\pm} = \pm m / \sqrt{2g^2 + 3\beta_1}$$

Решение, зависящее от времени, запишется следующим образом:

$$f(t) = \frac{mk}{\sqrt{(g^2 + \frac{3}{2}\beta_1)(2k^2 - 1)}} \operatorname{sn} \left\{ \left(4\beta_1 \mathcal{E} + \frac{8g^2 \mathcal{E}}{3} - \frac{2}{3} \frac{m^4 g^2}{\beta_1} \right)^{1/4} (t - t_0), k \right\} \quad (5.53)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{1}{2} (1 + m^2) / \sqrt{4\beta_1 \mathcal{E} + 8g^2 \mathcal{E}/3 - \frac{2}{3} m^4 g^2 / \beta_1}$$

Решение (5.53) довольно простым образом может быть получено модификацией уже найденных решений.

5.4. Решения уравнений Янга-Миллса в мнимом времени

Исследование свойств постоянных решений $f_0^{\pm}$, найденных нами ранее (см. (5.36)), удобно провести, используя решение (5.1) в мнимом времени. В этой связи вместо рассмотренного выше лагранжиана введем отличающийся от него на постоянную:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} \alpha \left(3\alpha/4g^2 + A_{\mu}^a A_{\mu}^a \right)^2 \quad (5.54)$$

Как известно, такая замена не отражается на уравнениях движения, но энергия системы сдвигается на постоянную

$$\mathcal{E}_1 = \frac{3}{2} \left[\dot{f}^2 - \alpha f^2 + g^2 f^4 + \frac{\alpha^2}{4g^2} \right]$$

Тогда решение для "нового" лагранжиана получается простой заменой

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_1 - 3\alpha^2/8g^2; \quad \alpha^2 + 8g^2 \mathcal{E}/3 \rightarrow 8g^2 \mathcal{E}_1;$$

$$k^2 \rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha / \sqrt{8g^2 \mathcal{E}_1 / 3} \right].$$

К этой замене будет чувствителен лишь предельный переход к решению типа "удлиненной" волны. Легко видеть, что $f_0^{\pm}$ реализуют

решение с нулевой энергией $\mathcal{E}_1 = 0$, но отвечают физически различным состояниям. Решения, связывающие эти различные состояния, находятся довольно просто в евклидовом пространстве, переход к которому осуществляется в комплексной плоскости:

$$A_i^a \rightarrow -A_i^a; \quad A_0^a \rightarrow -i A_4^a. \quad (5.55)$$

Указанное преобразование (5.55) не затрагивает вида выражения для $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ и ковариантной производной. Тензор энергии импульса имеет вид

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu} + \kappa \tilde{A}_\mu^a \tilde{A}_\nu^a + g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}},$$

в силу чего уравнение движения примет следующую форму:

$$\ddot{f} + \kappa f - 2g^2 f^3 = 0.$$

Здесь $\dot{f} = df/d\tau$, $\kappa > 0$, $\tau = it$, соответственно энергия равна

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{3}{2} \left[\dot{f}^2 + \kappa f^2 - g^2 f^4 - \kappa^2/4g^2 \right].$$

Мы пришли к задаче, подробно исследованной в работах [17, 30], где, в частности, обсуждается классическое движение скалярной частицы единичной массы в потенциале:

$$U(f) = -\frac{1}{2} g^2 (f^2 - \eta^2)^2, \quad \eta^2 = \kappa/2g^2.$$

Соответствующее решение, удовлетворяющее $\tilde{\mathcal{E}} = 0$ и начальным условиям, $f(\tau \rightarrow \pm\infty) = \pm(\mp\eta)$, дается формулой

$$f(\tau) = \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} (\tau - \tau_0) \right). \quad (5.56)$$

Суть решения (5.56) в евклидовом пространстве для (5.1) состоит в том, что его асимптотики — постоянные потенциалы

$$\begin{aligned} A_1^\Gamma &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{x}{2}} (0, 1, 0, 0); \\ A_2^\Gamma &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{x}{2}} (0, 0, 1, 0); \quad A_3^\Gamma = \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{x}{2}} (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Ранее такие вектор-потенциалы вводились в серии работ [31-34] без обсуждения их связи с решениями уравнений ЯМ. Это решение обладает положительным евклидовым действием (для одномерного пространства) и описывает туннелирование между двумя нетривиальными вакуумами, существующими для потенциала $U(f)$ при $x > 0$.

Плотность действия имеет вид

$$S_E = \frac{3}{2} V \int_{-\infty}^{\infty} \left[\dot{f}^2 - x \dot{f}^4 + g^2 \dot{f}^4 + \frac{x^2}{4g^2} \right] dt = V \sqrt{x} x^{3/2} / g^2. \quad (5.58)$$

5.5. Постоянные однородные поля

как решения уравнений Янга-Миллса

Определение постоянных однородных (трансляционно-инвариантных) полей для неабелевых калибровочных теорий не является столь тривиальным, как в теории электромагнетизма. Это обусловлено тем, что тензор поля при калибровочных преобразованиях вектор-потенциала

$$A_\mu(x+\delta x) = g^{-1}(x, x+\delta x) A_\mu(x) g(x, x+\delta x) + i g^{-1}(x, x+\delta x) \partial_\mu g(x, x+\delta x)$$

преобразуется к виду

$$F_{\mu\nu}(x+\delta x) = g^{-1}(x, x+\delta x) F_{\mu\nu}(x) g(x, x+\delta x).$$

Таким образом, мы видим, что постоянное поле $F_{\mu\nu}^a$ может быть получено в том случае, когда вектор-потенциал A_μ^a в общем случае представим следующим образом:

$$A_\mu = a_\mu + f_{\mu\nu} x^\nu, \quad (5.59)$$

где a_μ и $f_{\mu\nu}$ — постоянные вектор и тензор.

Как видно из приведенного представления вектор-потенциала, по-

стоянные поля можно задать двумя различными калибровочно-неэквивалентными способами: с помощью абелевых линейных по координатам потенциалов и с помощью неабелевых постоянных потенциалов. Заметим, что такая неоднозначность задания полей предусматривалась еще ВУ и Янгом [9].

В первом случае, например при $a_\mu = 0$, $f_{\mu\nu}^a = \delta_3^a f_{\mu\nu}^3$, мы имеем абелевы линейные по x потенциалы, которые задают однокомпонентное абелево однородное поле

$$F_{\mu\nu}^a = \delta_3^a F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = -2f_{\mu\nu}^3. \quad (5.60)$$

Во втором способе имеем $f_{\mu\nu} = 0$, $a_\mu \neq 0$, $\partial_\nu a_\mu \equiv 0$ — неабелевы постоянные потенциалы a_μ (например, решения уравнений ЯМ $f_0^\pm$, указанные нами раньше), которые задают однородное поле

$$F_{\mu\nu}^a = -g \varepsilon_{abc} a_\mu^b a_\nu^c. \quad (5.61)$$

Очевидно, что в группе $SU(2)$ постоянные неабелевы вектор-потенциалы в изотопическом пространстве могут быть классифицированы в соответствии с собственными значениями матрицы

$$Y_{ab} = -H_a^r H_r^b, \quad (5.62)$$

где $a, b = 1, 2, 3$; $r = 0, 1, 2, 3$. Как видно из сравнения с электромагниткой (абелевой $U(1)$ теорией) и соответствующей задачей классификации полей (см. § 2, формулы (2.3) и ниже), в неабелевом случае даже классификация постоянных полей оказывается более сложной и содержательной. Считая, что обычные способы задания постоянных абелевых полей хорошо известны (см., например, [35, 33]), рассмотрим некоторые возможности задания полей собственными значениями матрицы Y_{ab} . Мы приведем такие способы

при условии, что $\text{Rang } Y$ равен двум и трем.

а) Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$ с.з. матрицы $Y_{\alpha\beta}$, тогда

$$A_1^{\mu} = (\sqrt{-\lambda_1}, \vec{0}); A_2^{\mu} = (0, \sqrt{\lambda_2}, 0, 0); A_3^{\mu} = (0, \vec{0}). \quad (5.63)$$

определяют хромоэлектрическое поле:

$$F_3^{01} = -F_3^{10} = E_3^x = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}.$$

б) При $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$ имеем

$$A_1^{\mu} = (0, \sqrt{\lambda_1}, 0, 0); A_2^{\mu} = (0, 0, \sqrt{\lambda_2}, 0); A_3^{\mu} = \alpha(1, 0, 0, 1), \quad (5.64)$$

получим

$$F_3^{12} = B_3^x = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2};$$

$$F_2^{01} = E_2^x = F_2^{31} = B_2^y = \alpha \sqrt{\lambda_1};$$

$$F_1^{01} = E_1^y = F_1^{32} = B_1^x = -\alpha \sqrt{\lambda_2};$$

если $\alpha = 0$, то вектор-потенциал определяют постоянное хромо-магнитное поле.

В том случае, когда $\text{Rang } Y = 3$, получим

а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$:

$$A_1^{\mu} = (\sqrt{-\lambda_1}, \vec{0}); A_2^{\mu} = (0, 0, \sqrt{\lambda_2}, 0); \quad (5.65)$$

$$A_3^{\mu} = (0, 0, 0, \sqrt{\lambda_3}); F_3^{02} = E_3^y = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2},$$

$$F_2^{03} = E_2^z = -\sqrt{-\lambda_1 \lambda_3}; F_1^{23} = B_1^x = \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}.$$

в) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$:

$$A_1^{\mu} = (0, \sqrt{\lambda_1}, 0, 0); A_2^{\mu} = (0, 0, \sqrt{\lambda_2}, 0); \quad (5.66)$$

$$A_3^{\mu} = (0, 0, 0, \sqrt{\lambda_3}) ;$$

$$F_3^{12} = B_3^z = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} , \quad F_2^{13} = -B_2^y = -\sqrt{\lambda_2 \lambda_1} ;$$

$$F_1^{23} = B_1^x = \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} .$$

5.6. Взаимодействие полей

Янга-Миллса с полями Хиггса

Рассмотрим некоторые общие свойства решений уравнений ЯМ, которые следуют из ограниченности энергии. Симметричный тензор энергии-импульса имеет вид (2.4)

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}^a F_{\nu a}^{\rho} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\tau\rho}^a F_a^{\tau\rho} , \quad (5.67)$$

причем легко видеть, что $\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$. Если для пространства M_4 мы откажемся от условия, что его размерность — четыре и положим ее равной n , то при рассмотрении поставленной задачи будут полезными величины:

$$T_{00} = \mathcal{E} = \frac{1}{2} F_{n0}^a F_a^{n0} + \frac{1}{4} F_{kl}^a F_a^{kl} ;$$

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{4} (n-3) F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} ;$$

$$T_{0j} = F_{n0}^a F_a^{nj} .$$

Очевидно, что условие конечности энергии системы означает следующее:

$$\int_{V_n} T_{00} d^n x = \int_{V_n} d^n x \left[\frac{1}{2} F_{n0}^a F_a^{n0} + \frac{1}{4} F_{kl}^a F_a^{kl} \right] < \text{const.} \quad (5.68)$$

Перейдем в n -мерном пространстве к n -мерной полнотной системе

координат:

$$x_1 = r \cos \varphi_1; \quad x_i = r \cos \varphi_i \prod_{j=1}^{i-1} \sin \varphi_j; \quad i = 2, \dots, n-1;$$

$$x_n = r \prod_{j=1}^{n-1} \sin \varphi_j, \quad (5.69)$$

где

$$r \in [0, +\infty]; \quad \varphi_i \in [0, \pi] \quad \text{при } i = \overline{1, \dots, n-2}, \quad \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi].$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$, а элемент объема равен

$$d^n x = r^{n-1} dr \prod_{i=1}^{n-1} (\sin \varphi_i)^{n-1-i} d\varphi_i. \quad \text{Отсюда следует,}$$

что для сходимости интеграла (5.68), т.е. удовлетворения условия конечности энергии, необходимо выполнение неравенства

$$\left| \frac{1}{2} F_{n0}^a F_a^{n0} + \frac{1}{4} F_{kl}^a F_a^{kl} \right| < \frac{1}{r^{n+\varepsilon}}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.70)$$

Одновременно требуется, чтобы компонента тензора T^{00} не имела сингулярностей по r и φ_i ($i = \overline{1, \dots, n}$), при которых соответствующий интеграл расходится. Далее, предполагая решения уравнений ЯМ достаточно гладкими (вместе со своими производными), получим следующее условие для поведения тензора поля на бесконечности:

$$F_a^{m\nu} \rightarrow O\left(\frac{1}{r^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}\right), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.71)$$

Заметим, что условие гладкости решений, строго говоря, ниоткуда не следует (необходимо лишь убывание на бесконечности и отсутствие сингулярностей). Это условие сопряжено с тем, что мы не умеем искать решения сложных нелинейных задач в общем виде и из своего опыта предполагаем некоторые физически разумные свойства у решений уравнений движения и тензора поля.

Исследуем статистические решения уравнений ЯМ с конечной энергией в статистической калибровке. Уравнения движения (5.1) имеют вид

$$\partial^k F_{k0}^a - g \varepsilon_{abc} A_k^b F^{ck0} = 0. \quad (5.72)$$

Умножая это уравнение на A_0^a , получим

$$\partial^k (A_0^a F_{k0}^a) - F_{k0}^a (\partial^k A_0^a) - g F^{ck0} \varepsilon_{abc} A_k^b A_0^a = 0.$$

Вычислим величину

$$\text{Tr} \left\{ \int d^n x \left[\partial^k A_0^a F_{k0}^a - F_{k0}^a (\partial^k A_0^a) - g F^{ck0} \varepsilon_{abc} A_k^b A_0^a \right] \right\} = 0, \quad (5.73)$$

но

$$\int d^n x F_{k0}^a F_{k0}^a = \int d^n x |\vec{E}_a|^2 \geq 0,$$

т.о. $E_k^a = F_{k0}^a = 0$, откуда с учетом калибровочных преобразований получим справедливость равенства (5.73) для статического решения в любой калибровке.

Далее рассмотрим выражение

$$\partial^\ell (x^k T_{\ell k}) = T_{\ell k}^k + x^k \partial^\ell T_{\ell k},$$

но

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \text{ т.о. } \partial^\circ T_{0k} + \partial^\ell T_{\ell k} = 0,$$

следовательно,

$$\partial^\ell (x^k T_{\ell k}) = T_{\ell k}^k + x^k (-\partial^\circ T_{0k}),$$

а т.к. решения не зависят от времени, то $T_{0k} \neq T_{0k}(t)$

$$\text{и } \partial^\ell (x^k T_{\ell k}) = T_{\ell k}^k = 0$$

и, следовательно,

$$\int d^n x (\partial^\ell x^k T_{\ell k}) = \int d^n x T_{\ell k}^k = 0. \quad (5.74)$$

Воспользовавшись соотношением $T^{\mu}_{\mu} = T^k_k + T^0_0$, из (5.74) получаем

$$\int d^n x T^k_k = \int d^n x [T^{\mu}_{\mu} - T^0_0] =$$

$$= \int d^n x \left[(2-n) F^a_{k0} F^k_a - \frac{1}{2} (4-n) F^a_{\ell k} F^{\ell k}_a \right] = 0$$

с учетом доказанного выше $\int (F^a_{k0} F^k_a) d^n x = 0$, откуда имеем

$$(4-n) \int (F^a_{\ell k} F^{\ell k}_a) d^n x = 0. \quad (5.75)$$

Равенство (5.75) при $n \neq 4$ верно только при $F^a_{\ell k} = 0$, а при $n = 4$ тензор поля необязательно должен быть нулевым. Тем самым доказано утверждение, что для теории поля Янга-Миллса без взаимодействия с другими полями нетривиальные статические решения существуют только для пространства размерности 4. Если мы хотим построить статические решения в пространствах иной размерности, то необходимо проводить учет взаимодействия полей ЯМ с материальными полями.

Перейдем теперь к обсуждению некоторых моделей КТП, учитывающих взаимодействие полей ЯМ со скалярным полем (модель Хиггса).

В этом случае явный вид лагранжиана $SU(2)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \frac{1}{2} (D_{\mu} \varphi^a)(D^{\mu} \varphi_a) - U(\varphi). \quad (5.76)$$

Потенциал $U(\varphi)$ – полином степени не выше 4 (это условие налагается для того, чтобы квантованная теория была перенормируемой), для простоты скалярное поле φ^a выбрано действительным.

Положим $U(\varphi) = \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{m^2}{\lambda} - \varphi^2 \right)^2$, тогда легко видеть, что $U(\varphi) = 0$ при $|\varphi| = \sqrt{m^2/\lambda}$, и этот потенциал имеет либо два минимума на действительной оси $|\varphi|$ (при $m^2/\lambda > 0$), либо

один (при $m^2/\lambda < 0$).

Далее, если определить классический вакуум как решение, обеспечивающее минимум энергии полей для рассматриваемой модели, то, учитывая самосогласованные решения уравнений движения полей ЯМ и Хиггса:

$$D_\mu F^{\nu\mu}_a = g \varepsilon_{abc} \varphi^b (D^\nu \varphi^c); \quad (5.77)$$

$$D_\mu D^\mu \varphi^a = -(m^2/\lambda - \varphi^2) \varphi^a \lambda, \quad (5.78)$$

получаем возможные статические решения для хиггсовского сектора: $\varphi^a = 0$, $\varphi^a = n^a \sqrt{m^2/\lambda}$ (n^a — единичный вектор в изотопическом пространстве). Очевидно, условие постоянства φ^a при $\sqrt{z}$ можно ослабить, заменив требованием стремления φ^a к этим постоянным решениям при неограниченном возрастании z . Итак, мы пришли к тому, что $\varphi^a = n^a \sqrt{m^2/\lambda}$ — множество вакуумов, а выбор фиксированного направления в изотопическом пространстве нарушает группу симметрии $SU(2)$. Выбор такого направления — спонтанное нарушение симметрии. Заметим также, что здесь мы имеем дело с понижением симметрии при переходе от единственного неустойчивого минимума в нуле (для $SU(2)$) к неединственному устойчивому минимуму при $n^a \sqrt{m^2/\lambda}$, что носит название спонтанного нарушения симметрии (т.к. в итоге мы приходим к группе $U(1)$).

Рассмотрим одно из простых решений уравнений ЯМ, имеющих монопольную структуру и приводящих к нарушению симметрии.

$SU(2) \rightarrow U(1)$ — самодуальный монополь Богомольского, Прасады, Сомерфилда [37]. Сначала выберем удобную калибровку. Для вектор-потенциалов поля возьмем подстановку в виде (5.9). Тогда, как отмечалось ранее (см. формулу (3.7)), можно построить такую функцию $g(x)$, что вектор φ^a (направленный вдоль радиуса вектора n^a) и третья изотопическая ось будут параллельны

в каждой точке пространства. Это дополнительное условие будем называть унитарной калибровкой. Положим

$$g = \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\mathcal{E}} \vec{e}_\varphi \theta\right) = \cos \frac{\theta}{2} + i \mathcal{G}_\varphi \sin \frac{\theta}{2}, \quad (5.79)$$

где $\mathcal{G}_\varphi = (\vec{\mathcal{E}} \vec{e}_\varphi)$; $\vec{e}_\varphi$ — единичный азимутальный вектор в сферической системе координат: $\vec{r}(\tau, \theta, \varphi)$. Преобразование (3.7) приводит к следующему явному выражению для компонент вектор-потенциала:

$$\begin{aligned} A_0^a &= i \delta_{a3} f/g\tau; \\ \vec{A}^a &= -\frac{\hbar}{g\tau} \left\{ \delta_{a1} (\vec{e}_\varphi \cos \varphi + \vec{e}_\theta \sin \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{a2} (\vec{e}_\varphi \sin \varphi - \vec{e}_\theta \cos \varphi) \right\} - \delta_{a3} \frac{\vec{e}_\varphi}{g\tau} \lg \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Выражение для $\vec{A}^a$ сингулярно вдоль нити направления $\theta = \pi$, в силу чего эта калибровка иногда называется отрунной, т.к. обнаруженный в 1931 году П.А.М.Дираком [6] в КЭД монополю имеет характерную сингулярность для потенциала вдоль струны. Более того, $\vec{A}_3 = -\frac{\vec{e}_\varphi}{g\tau} \lg \frac{\theta}{2}$ может быть поставлен в соответствие вектор-потенциалу монополя Дирака, если положить $g_m = -1/g$. Перейдем к построению монополя БПС. Энергия системы запишется в виде

$$2\mathcal{E} = \int d^3x \left\{ \vec{E}^2 + \vec{B}^2 + (\mathcal{D}_0 \varphi^a)^2 + (\vec{\mathcal{D}} \varphi^a)(\vec{\mathcal{D}} \varphi^a) + \frac{1}{2} \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right\}. \quad (5.81)$$

Для вектора $\vec{B}^a$ из тождества Якоби и ковариантного дифференцирования следует $(\vec{\mathcal{D}} \vec{B}^a) = 0$, потребуем также выполнения условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int d^2S (\vec{n} \cdot \vec{B}^a) \varphi^a = 4\pi g \sqrt{m^2/\lambda}, \quad (5.82)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали; d^2S — элемент

площади.

Используя эти свойства, после интегрирования (5.81) по частям получим

$$2\mathcal{E} \geq \int d^3x [\vec{B}^2 + (\vec{\nabla}\varphi^a)^2] = \int d^3x (\vec{B}^a + \vec{\nabla}\varphi^a)^2 + 4\pi g \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad (5.83)$$

т.е. $\mathcal{E} \geq |4\pi g \sqrt{m^2/\lambda}|$. Это приводит к уравнениям первого порядка (условие Богомольного)

$$\vec{B}^a = \mp \vec{\nabla}\varphi^a. \quad (5.84)$$

Условие (5.84) соответствует ранее сформулированному условию самодуальности

$$B_k^a = \mp i E_k^a,$$

которое с учетом его явного выражения в подстановке (5.9) и явного выражения (5.17) и (5.18) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} 1 - f^2 + r f' &= r \ell' - \ell - \ell f; \\ -f' &= \ell f / r. \end{aligned} \quad (5.85)$$

С учетом соответствия Дюлиа-Зи [10] и соотношения

$$A_0^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} i n^a \sqrt{m^2/\lambda}$$

придем к асимптотическим решениям (при $r \rightarrow \infty$) уравнений (5.85):

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m^2/\lambda} \, r / \operatorname{sh}(\sqrt{m^2/\lambda} \, r); \\ \ell &= -1 + \sqrt{m^2/\lambda} \, r \operatorname{cth}(\sqrt{m^2/\lambda} \, r), \end{aligned} \quad (5.86)$$

при которых, очевидно, достигается граница Богомольного для энергии системы $\mathcal{E}$.

Перейдем к рассмотрению монополя Полякова-Тхуфта [30].

Как и ранее, выберем подстановку в виде (5.9) и воспользуемся со-

ответствием Джулия-Зи, тогда

$$f_0^a = i\varphi^a = i n^2 \ell(r)/g^2; \quad (5.87)$$

$$A_i^a = \varepsilon_{aih} n_h (1 - f(r))/g^2.$$

Переходя к переменной $z = e^{\xi}$, получим уравнение поля:

$$\begin{aligned} \ell'' - \ell' + (m^2 e^{2\xi} - 2f^2)\ell - v^2 \ell^3 &= 0; \\ f'' - f' + (1 - \ell^2)f - f^3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.88)$$

где $v^2 = \lambda/g^2$; штрих означает производную по ξ . Как видно, система уравнений поля (5.88) сложна, но можно ее упростить. Если в каждом из уравнений пренебречь взаимодействием (последнее можно осуществить либо при $z \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow -\infty$), налагая условие $\ell(z) \rightarrow 0$, либо при $z \rightarrow \infty$ ($\ell \rightarrow \infty$), полагая $f \rightarrow 1$, т.к. эти требования следуют из необходимости ограниченности энергии системы), то полученные уравнения для каждой из функций $\ell(z)$ и $f(z)$ — известные уравнения Эмдена-Фаулера [39]. Поэтому можно ожидать, что существуют решения (5.88), удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} \ell(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} a e^{2\xi}; & \ell(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} a, e^{\xi}; \\ f(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} 1 + c e^{2\xi}; & f(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} c, e^{\xi}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Класс функций, в которых описываются такого вида решения есть произведение функции Якоби на степенную функцию.

Таким образом, $\ell(r) \sim a r^2 \operatorname{sn}^n(r^2 b; k_1)$; $f(r) \sim c r^2 \operatorname{cn}^s(d r^2; k_2)$, $e r^2 \operatorname{dn}^{\omega}(m r^2; k_3)$, где параметр k_i обусловлен нелинейностью и при малых r мал, в то время как при $r \rightarrow \infty$, $k_i \sim 1$.

Отмеченная возможность описания решений $\ell(r)$ и $f(r)$, по-видимому, обусловлена самим рией задачи, определяемой типом нелинейности теории, а также выбором подстановки (5.9). Результаты реше-

ния системы уравнений для $\ell(r)$ и $f(r)$ с заданными выше граничными условиями, а также подстановка асимптотик (5.89) в областях 0 и ∞ (по z) показывает, что хиггсовское поле отличается от вакуумного решения следующим образом:

$$|\varphi^a - m_w n^a/g| = c_1 e^{-\sqrt{2} m_w r}/r,$$

(где $m_w = mg/\sqrt{\lambda}$), соответственно отклонение от вакуума калибровочного поля

$$\Delta f \approx c_2 e^{-g m_w r/\sqrt{\lambda}}.$$

Точное решение для монополя Полякова получить не удается, но даже приведенные результаты указывают, как изменяются решения в зависимости от расстояния. В нуле существует постоянное калибровочное поле и отсутствует поле Хиггса, при больших расстояниях исчезает калибровочное поле и появляется хиггсовское поле, т.е. при $m r \gtrsim 1$ имеется конденсат

$$g \varphi^a = n^a m_w,$$

m_w — масса векторных частиц.

В результате мы получаем некоторое решение для модели взаимодействующих полей ЯМ и Хиггса, но утверждение, что это — монополь, еще преждевременно. Для того, чтобы убедиться в этом, перейдем к унитарной (струнной) калибровке.

Определим тензор поля $F_{\mu\nu}$ (в обозначениях Тхуфта):

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \varphi_a - \frac{1}{g\varphi^3} \varepsilon_{abc} \varphi^a D_\mu \varphi^b D_\nu \varphi^c, \quad (5.90)$$

который переходит в выбранной подстановке в тензор

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{g} \varepsilon_{abc} n^a (\partial_\mu n^b)(\partial_\nu n^c),$$

т.е.

$$F_{ij} = -\frac{1}{g} \varepsilon_{ijk} n_k / r^2.$$

Соответственно в унитарной калибровке будет

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

и т.к. $\varphi_a = \delta_{a3}$, $\partial_\mu \varphi = 0$, $A_\mu = A_\mu^3$,

то $\vec{A}_3 = -\vec{e}_\varphi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} / g r$, т.е. имеем монополь. Используя топологический ток

$$k_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} (\partial^\nu n^a)(\partial^\rho n^b)(\partial^\sigma n^c), \quad (5.91)$$

который сохраняется $\partial^\mu k_\mu = 0$ в силу антисимметрии тензора $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, в отличие от нетеровского тока, для которого условие сохранения выполняется как следствие структуры лагранжиана или уравнений движения, получим топологический заряд

$$n = \frac{1}{8\pi} \int k_\mu d^3x = 1. \quad (5.92)$$

Энергия монополя Полякова-Тхуфта конечна, а ее значение имеет вид (с использованием компьютерных вычислений)

$$E = m_w (4\pi/g^2) A,$$

где $A \in [1; 1.8]$ при $\lambda \in (0, \infty)$. Укажем, что в предельном случае при $\lambda \rightarrow 0$ и постоянных m и g имеется интересное решение системы для функций $\ell(r)$ и $f(r)$ с единичным топологическим зарядом

$$f(r) = r m g h^{-1}(r m), \quad \ell(r) = m r t h^{-1}(r m) - 1.$$

Это решение для монополя Полякова-Тхуфта в пределе Прасада-Соммерфилда (сравни с (5.36)).

Выше мы рассмотрели топологически нетривиальные решения -

монополю. Их цитирование в теории, скорее, необходимость, чем экзотика, т.к., например, хорошо известно о квантовании зарядов в КЭД и КХД, что указывает на их тесную связь благодаря спонтанному нарушению (полупростой) группы симметрии. Заметим также, что в теориях большого объединения (ВТО) существование монополю может привести к физически наблюдаемым эффектам — несохранению квантовых чисел (например, катализу распада протона — эффект Рубакова [40]).

5.7. Самосоогласованные решения уравнений движения калибровочных полей и полей Хиггса

Выше мы показали, что взаимодействие полей ЯМ с полями Хиггса может приводить к топологически нетривиальным структурам — монополям. Поэтому представляет интерес поиск точных решений соответствующих уравнений движения калибровочных полей, взаимодействующих с полями Хиггса. В литературе [41] рассматривалась задача нахождения самосоогласованных решений нелинейной абелевой электродинамики со спинными частицами в киральном пределе со специально выбранным типом нелинейности $\lambda A_\mu (A \cdot A)$:

$$\square A_\mu = \partial_\mu (\partial A) - e \psi \gamma_\mu \psi + \lambda A_\mu (A \cdot A); \quad \gamma_\mu (\partial^\mu + i e A^\mu) \psi = 0.$$

Новый член не меняет конформной инвариантности системы, позволяющей находить решения, связанные друг с другом специальными конформными преобразованиями. Среди найденных решений известно решение в виде плоских волн $\psi = \chi e^{ikx}$, отвечающее постоянному вектору $k_\mu = e A_\mu$, где k_μ — постоянный 4-вектор. Аналогичные решения были получены для задачи движения спинорных частиц в хромомagnetном поле (группа $SU(2)$), задаваемом постоянными потенциалами, обладающими сферической симметрией. В этом

случае влияние внешнего поля сводится к изменению дисперсионного соотношения для энергии "кварка".

1) Нахождение решений для $U(1)$ калибровочных полей, взаимодействующих со скалярными частицами.

В данной части мы будем изучать системы, описываемые следующим модельным лагранжианом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |\partial_\mu + ie A_\mu|^2 - U(\varphi), \quad (5.93)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; A_μ - 4-вектор потенциал; $U(\varphi)$ - потенциальная энергия заряженного скалярного поля.

а/ Модель φ^4 .

В этом случае функция $U(\varphi)$ имеет выражение

$$U(\varphi) = -\frac{1}{2} m^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{4} \lambda |\varphi|^4. \quad (5.94)$$

Такой вид функции U интересен тем, что вакуум поля оказывается ненулевым $|\varphi_{\text{вак}}| = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$. Аналогичная модель рассматривается, например, при получении вихревых решений типа Гинзбурга-Ландау в теории сверхпроводимости второго рода ([28]), а также при построении струнных решений в абелевой модели теории ЯМ [42]. Уравнения, соответствующие лагранжиану с потенциалом и описывающие динамику поля, имеют вид

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = -\frac{ie}{2} (\varphi^* \partial_\mu \varphi - (\partial_\mu \varphi^*) \varphi) - e^2 |\varphi|^2 A_\mu; \quad (5.95)$$

$$\{ |\partial_\mu + ie A_\mu|^2 - m^2 + \lambda |\varphi|^2 \} \varphi = 0. \quad (5.96)$$

Будем искать решения (5.95), (5.96) в виде

$$A_\mu = n_\mu a(\psi) m/e; \quad \varphi = u(\psi) e^{i\chi} m/e, \quad (5.97)$$

где $\psi = p_\mu x^\mu$, $p^2 > 0$, n_μ - произвольный постоянный вектор;

χ - фаза скалярного поля φ . Воспользовавшись калибровкой Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ и подставляя (5.97) в (5.95) и (5.96), получим следующую систему уравнений:

$$d^2 u / d\theta^2 = (1 + \xi a^2) u - v^2 u^3; \quad (5.98)$$

$$d^2 a / d\theta^2 = -a u^2. \quad (5.99)$$

Здесь $\theta = \psi (p/m)^2$, а параметр v^2 равен λ/e^2 , $\xi = \kappa^2 = n_\mu n^\mu$, $\xi = \pm 1$. Анализ (5.98) и (5.99) позволяет найти решения:

$$u(\theta) = A \operatorname{ch}^{-1} B\theta; \quad a(\theta) = C \operatorname{th} B\theta. \quad (5.100)$$

Здесь $A^2 = (v^2 - 0.5)^{-1}$; $B^2 = 0.5 A^2$; $C^2 = \xi A^2 (1 - v^2)$ при $\xi = 1$, $v^2 \in (0.5, 1]$, а при $\xi = -1$, $v^2 \geq 1$ мы полагаем $\lambda \geq 0$. Если $v^2 = 1$, то $C = 0$ и поле A_μ отсутствует. Заметим, что для $a(\theta) = 0$ существует нетривиальное решение для функций $u(\theta)$ при любом v^2 :

$$u(\theta) = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{2B^2}{2B^2 - 1}} \operatorname{cn}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2B^2 - 1}}/k\right), \quad k^2 \in (0.5, 1];$$

$$u(\theta) = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{2}{2 - k^2}} \operatorname{dn}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2 - k^2}}/k\right), \quad k^2 \in [0, 0.5]. \quad (5.101)$$

При $\xi = -1$ ($v^2 \geq 1$) систему уравнений (5.98) и (5.99) можно рассматривать как аналог задачи о движении в плоскости материальной точки единичной массы с обобщенными координатами $a(\theta)$ и $u(\theta)$. Здесь фаза θ играет роль параметра, связанного с временем. Потенциальная энергия определяется выражением $U_{\text{эф}} = \frac{v^2}{4} u^4 + \frac{1}{2} (a^2 - 1) u^2$, а траектория частицы имеет вид дуги эллипса $(u(\theta)/A)^2 + (a(\theta)/C)^2 = 1$. Пределы $v^2 \rightarrow 1$ и $v^2 \rightarrow \infty$ описывают случаи вырождения эллиптической траектории в прямые $a(\theta) = 0$ и $u(\theta) = 0$ соответственно. Значения $a = 0$, $u = \pm 1/v$ являются точками минимума потенциала $U_{\text{эф}}(a, u)$. Таким образом, вакуум теории при ис-

пользовании подстановки (5.97) остается вырожденным лишь по отношению к известному вырождению вакуума потенциала (5.94). Введение новых степеней свободы, связанных с электромагнитным полем, в данном случае не изменяет структуры классического вакуума. Для $\kappa^2 = 0$, что соответствует предельному случаю скрещенного поля $(\vec{E} \parallel \vec{H}) = 0$, $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, и при $\vec{r}^2 > 0$ точное решение вида (5.100) существует только при $\nu^2 = 1$ и имеет вид

$$u(\theta) = \sqrt{2} \operatorname{ch} \theta, \quad a(\theta) = a_0 \operatorname{th} \theta, \quad (5.102)$$

где a_0 - произвольная постоянная.

б/ Модель $\hat{\text{им}}$ -Гордона.

Рассмотрим теперь несколько иное выражение для потенциала в модельном лагранжиане

$$U(\varphi) = \frac{m^4}{\lambda} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{m} |\varphi| \right). \quad (5.103)$$

Известно, [43], что в отсутствие калибровочного поля A_μ для действительного φ потенциал (5.103) приводит к точно решаемой задаче - уравнению $\hat{\text{им}}$ -Гордона $\square \Phi + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \Phi\right) = 0$. В этом случае вакуум является вырожденным в бесконечном наборе точек

$\Phi_N^0 = 2\pi N m / \sqrt{\lambda}$, $N = 0, \pm 1, \dots$, а решения могут быть определены лишь по модулю $2\pi m / \sqrt{\lambda}$. Переход к заряженным полям

$\varphi = \Phi e^{i\chi}$ с электромагнитным полем A_μ в общем случае снимает это выражение.

Уравнения движения, полученные из (5.93) с учетом выражения (5.103), перестают быть инвариантными относительно замены $\Phi \rightarrow \Phi + 2\pi m / \sqrt{\lambda}$. Для $A_\mu = \eta_\mu a(\theta) \frac{m}{e}$ и $\varphi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} u(\theta) e^{i\chi}$ уравнения движения принимают вид

$$d^2 u / d\theta^2 = \kappa^2 a^2 u^2 - \sin u; \quad (5.104)$$

$$d^2\alpha/d\theta^2 = -a u^2 v^{-2} . \quad (5.105)$$

В пределе скрещенного поля (т.е. при $u^2 \rightarrow 0$) уравнение переходит в одномерное уравнение

$$d^2u/d\theta^2 = -\sin u . \quad (5.106)$$

При этом уравнение (5.105) содержит функцию $u(\theta)$ в качестве параметра. Используя солитонное решение $u_0(\theta) = 4 \arctg e^\theta$, из (5.105) можно получить соответствующее ему решение для векторного потенциала. Решение с граничными условиями $a(\pm\infty) = 0$ соответствует локализованным электромагнитным возмущениям конечной энергии. Полученное нетривиальное решение будет описывать самосогласованное распространение заряженного солитона и связанного с ним электромагнитного возмущения вида скрещенного поля $\vec{E} \perp \vec{H}$, $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ зависящего от фазы θ . В общем случае $n^2 \neq 0$ решения (5.104) имеют довольно сложный вид. Взаимодействие комплексного поля φ с электромагнитной волной приводит к значительному искажению формы для поля φ .

2) Волновые решения классических уравнений движения поля Янга-Миллса (в группе $SU(2)$), взаимодействующего с изодублетом хиггсовских бозонов.

Рассмотрим решения классических уравнений движения поля ЯМ (в группе $SU(2)$), взаимодействующего с изодублетом хиггсовских бозонов. В качестве исходного выберем следующий лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - U(\varphi) . \quad (5.107)$$

Здесь $F_{\mu\nu}^a$ — неабелев тензор поля; D_μ — ковариантная производная; A_μ — вектор-потенциал; $U(\varphi) = -\frac{m^2}{2} |\varphi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\varphi|^4$.

Запишем уравнения движения поля для новых функций, которые связаны с исходными следующими соотношениями:

$$A_0^a = 0; A_i^a = \varepsilon^{aik} n_k \left(\frac{\sqrt{2} m}{g} \right) \Phi(\rho x); \psi = \frac{2m}{g} u \chi(\rho x), \quad (5.108)$$

$$\text{где } \vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|; \psi = (\alpha p) \frac{p}{m}; u - \text{вектор-столбец и } u^\dagger = 1.$$

$$d^2 \Phi / d\theta^2 + \chi^2 \Phi + 2\Phi^3 = 0; \quad (5.109)$$

$$d^2 \chi / d\theta^2 + (\Phi^2 - 1)\chi + \chi^3 = 0. \quad (5.110)$$

Параметр ν^2 соответственно равен $4\lambda/g^2$.

Система уравнений (5.109), (5.110) описывает эффективное движение классической частицы с массой $m_{\text{эф}} = \left(\frac{p}{m}\right)^2 > 0$ в плоскости с координатами Φ и χ , где θ играет роль времени. Потенциальная энергия частицы $U(\Phi, \chi) = \frac{1}{2}\Phi^4 + \frac{1}{4}\nu^2\chi^4 + \frac{1}{2}\chi^2(\Phi^2 - 1)$, полная энергия $E = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + U(\Phi, \chi)$ являются интегралом движения для системы уравнений (5.109), (5.110). Подчиненные уравнения имеют несингулярные волновые решения, выражаемые через функции Якоби. Аргумент функций Якоби содержит переменную $\theta = \theta + \theta_0$ (θ_0 - произвольная постоянная фаза). Явный вид решений таков [44];

$$\Phi(\theta) = A_1 \operatorname{sn}(B_1 \theta / k_1); \chi(\theta) = C_1 \operatorname{cn}(B_1 \theta / k_1), \quad (5.111)$$

где $A_1^2 = 2(4 - \nu^2)/(4\nu^2 - 3)$; $B_1^2 = (3 - 2\nu^2)/(4\nu^2 - 3)$; $C_1^2 = 2/(4\nu^2 - 3)$; $k_1^2 = (2\nu^2 - 1)/(3 - 2\nu^2)$, а параметр ν^2 изменяется в пределе $(\frac{3}{4}; 1]$, что соответствует интервалу $(\frac{1}{3}; 1]$ по k_1^2 . Другое решение:

$$\Phi(\theta) = A_2 \operatorname{cn}(B_2 \theta / k_2); \chi(\theta) = C_2 \operatorname{dn}(B_2 \theta / k_2). \quad (5.112)$$

Для коэффициентов имеем выражения: $A_2^2 = 2(\nu^2 - 1)(2\nu^2 - 3)/[(2\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3)]$; $B_2^2 = 4(\nu^2 - 1)/(4\nu^2 - 3)$; $C_2^2 = 8(\nu^2 - 1)/[(2\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3)]$;

$k_2^2 = (2v^2 - 3)/(4v^2 - 4)$, а параметр v^2 изменяется в пределах $v^2 > 3/2$, соответственно $k_2^2 \in [0; 1/2]$. Решение (5.112) при $v^2 \rightarrow \infty$ переходит в решение для поля ЯМ типа решений, полученных в [14, 16, 27], а при $v^2 \rightarrow 3/2$ - в вакуумное (конденсатное) решение для поля Хиггса $\chi = \pm v^{-1} = \pm \sqrt{2/3}$. При $v^2 = 3/2 + \delta^2$, где $\delta^2 \ll 1$, решения (5.112) представляют собой малые возмущения на фоне конденсата Хиггса и пертурбативного вакуума теории ЯМ. Эффективное действие W для эллиптических волновых решений в нулевом, классическом приближении равно $W^0 = S^0/(L^3 T)$, где L, T - характерный размер и временной интеграл системы, которые обычно полагают достаточно большими, S^0 - классическое действие на траектории. Усредняя выражения для классического действия, соответствующего решениям (5.111), (5.112) по большому временному интервалу $T \gg \tau(k^2) = 4\mathcal{H}(k^2)$, где τ - период функций Якоби, получим

$$W^0(k^2) = \frac{2m^4}{g^2(3k^2-1)^2} \{ 3k^4 - 2k^2 - 1 + \\ + \alpha_2(k)(4k^4 + 8k^2 + 4) - \alpha_4(k)(12k^4 + 4k^2) \} \quad (5.113) \\ \text{при } k^2 \in (\frac{1}{3}; 1];$$

$$W^0(k^2) = \frac{2m^4}{g^2(1-k^2)(3-2k^2)} \{ (3-8k^2)(1-k^2) + \\ + 4k^2 \alpha_2(k)(-4k^4 + 2k^2 + 1) + 4k^4(4k^2-3)\alpha_4(k) \} \quad (5.114) \\ \text{при } k^2 \in [0; \frac{1}{2}],$$

где $\alpha_m(k) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sin^m(\xi, k) d\xi$. Из формулы (5.113) видно, что предел $k^2 \rightarrow 1/3 + \delta$ при $\delta \rightarrow 0+$ описывает особенность в поведении эффективного действия $W^0|_{\delta \rightarrow 0} = 2m^4 c(k^2)/g^2 \delta^2$. Используя частное значение функций α_m в точке $k^2 = 1/3$.

можно с учетом $\alpha_2(1/\sqrt{3}) \approx 0,525$; $\alpha_4(1/\sqrt{3}) \approx 0,4$ получить $C \approx 0,14$.

Предел при $k^2 \rightarrow 1$ для $W^0(1-\delta) = O(\delta^2)$ в этом случае
 $\tau(k^2) \rightarrow \infty$, $\alpha_2(1) = \alpha_4(1) = 1$, т.о. действие в данной точке
 — непрерывная функция параметров на решении (5.II3). Имеющаяся
 неаналитичность при $\beta^2 = 3/4$ сопровождается сильным ростом амплитуды и частоты данного решения уравнения движения системы пол-
 зой ЯМ и Хиггса, который приводит к тому, что система переходит
 на другое классическое решение, имеющее меньшее действие. В пре-
 деле $k^2 = 0$ для действия получим значение $\frac{2}{3} \frac{m^4}{g^2}$, а при
 $k^2 = \frac{1}{2}$ соответствующее действие равно $\frac{1}{5} m^4 / g^2$.

Весьма интересным является численное исследование системы
 уравнений поля, описывающих взаимодействие калибровочного поля
 ЯМ и поля Хиггса:

$$\Phi'' + \chi^2 \Phi + 2\Phi^3 = 0; \quad (5.II5)$$

$$\chi'' + (\Phi^2 - 1)\chi + \nu^2 \chi^3 = 0. \quad (5.II6)$$

Как видно, решение этой нелинейной системы определяется энерги-
 ей (или начальными условиями) и параметром ν^2 . Например,
 при $\mathcal{E} = 1$ и $\nu^2 = 0,3; 1,5; 10$ в плоскости (Φ, χ) имеют
 место фигуры лиссажу, которые отвечают колебаниям системы свя-
 занных маятников с частотами, находящимися в отношении 2:3;
 3:4 и 3:2, в последнем случае разность фаз была 90 (см. рис.
 1а,б,в,г).

В последнее время в литературе широко обсуждается вопрос о
 неинтегрируемости уравнений ЯМ [12, 45 — 48]. В частности,
 с этой позиции рассматривались такие решения уравнений ЯМ, как
 монополи Ву-Янга и плоскороволновые решения [12, 46].

Наличие стохастичности авторы связывают с возможностью объ-

яснения кода шифра цвета. Строго говоря, доказать, что динамическая система обладает таким свойством, как стохастичность, с математической точки зрения означает построение соответствующей меры. Численные эксперименты на компьютере, которые активно проводятся при изучении нелинейных систем ЯМ в настоящее время с целью обнаружения стохастичности, могут служить основанием для аналитических исследований в этой области. Так, например, численное изучение приведенной системы при $\varepsilon \sim 10^{-2}$ и $\nu^2 \leq 10^{-2}$ сильно зависит от метода вычислений (разностной аппроксимации и т.д.), что, очевидно, является недопустимым (т.к. результаты должны быть устойчивы по отношению к выбору шага интегрирования и методов счета). В данном примере соответствующие карты Пуанкаре, которые обычно приводят как доказательство стохастичности системы при $\varepsilon_0 = 1; 0,75; 0,62; 10^{-2}$ ($\nu^2 = 10^{-2}$) (см. рис.2-5), еще не дают полной уверенности в том, что в системе имеется стохастичность. Кроме того, рассмотренная система обладает довольно интересным свойством при $\varepsilon = (2[2\nu^2 - 1])^{-1}$: линия уровня-эллипс. Может оказаться, что в этом случае система кроме интеграла энергии имеет дополнительный интеграл. Известно, что Ковалевская [49], пытаясь доказать отсутствие интегралов для классической задачи - волчка, получила интегрируемый случай. Таким образом, мы видим, что строгое доказательство интегрируемости системы уравнений ЯМ - сложная математическая задача, решить которую в общем виде затруднительно [50]. Однако представляется интересным выяснить область изменения физических параметров g , m и т.д., при которых стохастичность в системе проявляется слабо, а также установить промежуток времени ΔT , в течение которого возможно использование понятий классических решений для уравнений ЯМ. Последнее, по-видимому, может быть полезно при обсуждении процессов, происходящих за время, меньшее периода колебания поля ΔT .

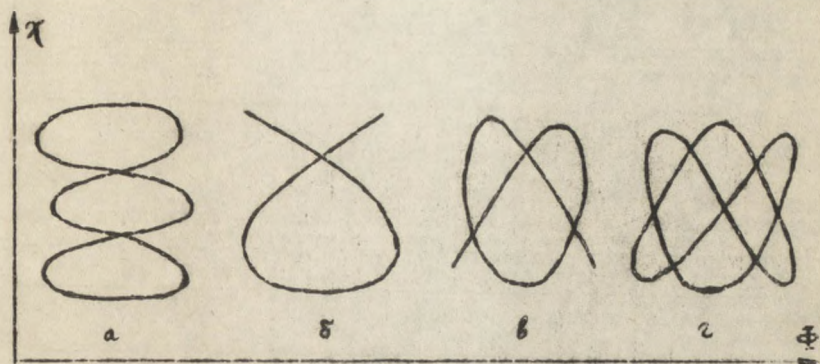


Рис. 1

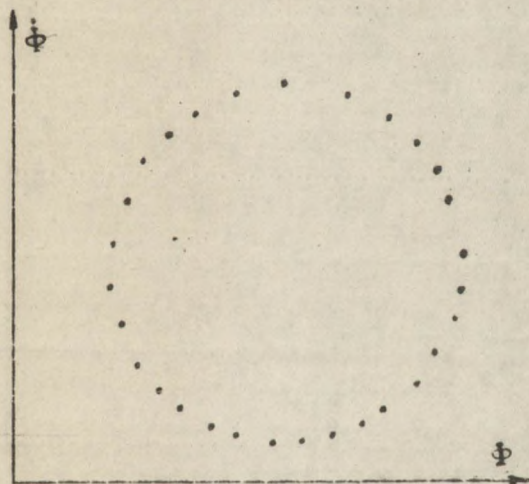


Рис. 2

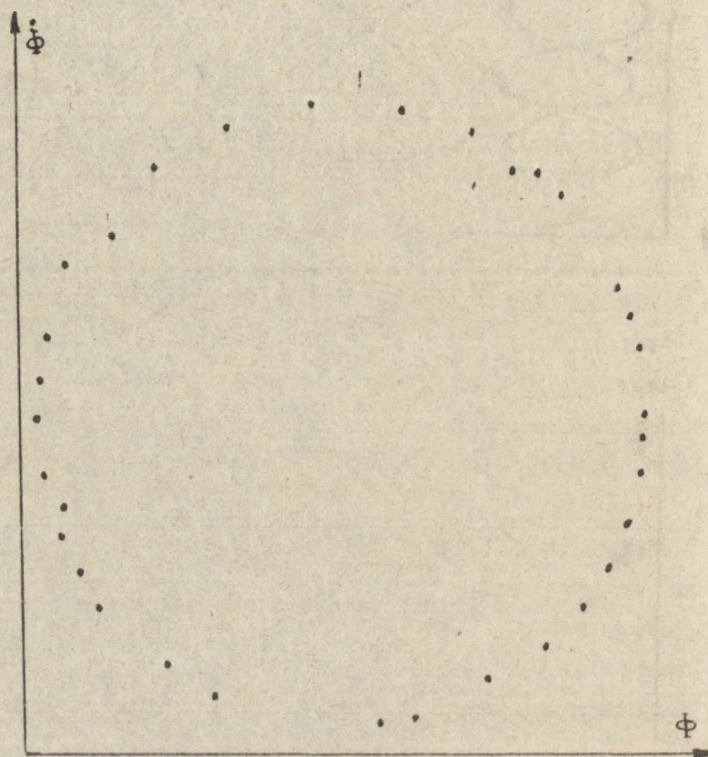


Рис. 3

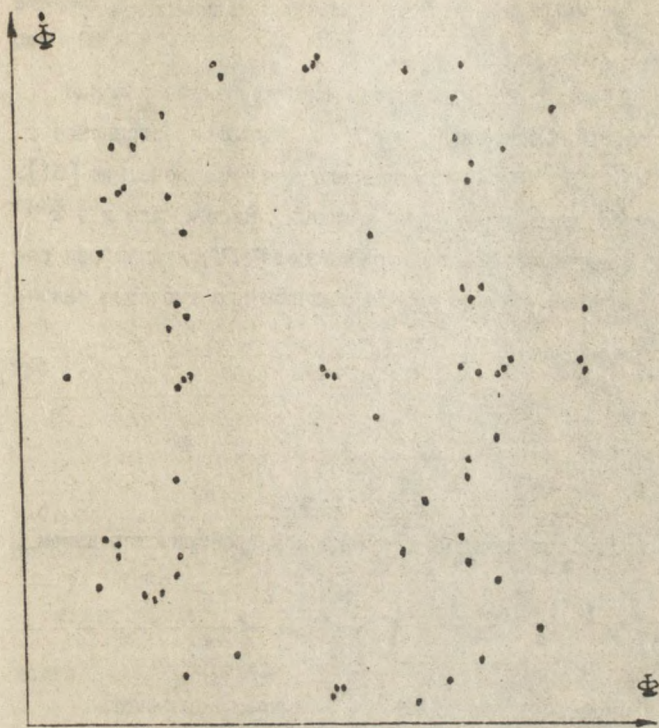


Рис. 4

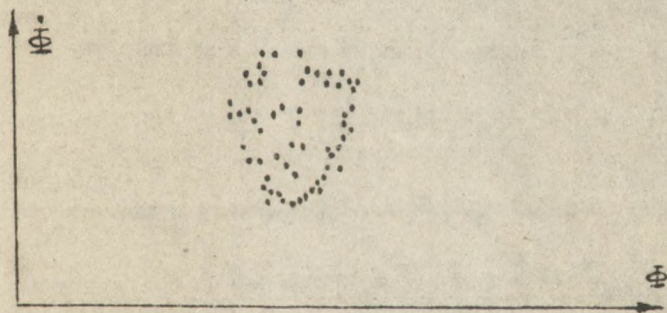


Рис. 5

5.8. Инстантонные решения уравнений Янга-Миллса

Под "инстантонами" будем понимать локализованные решения классических уравнений движения поля в евклидовом пространстве $t \rightarrow i\tau$, $x_0^2 - \vec{x}^2 \Rightarrow -x_i^2$), имеющие конечное действие [51].

Прежде чем обсудить конкретные решения, заметим, что в § 2 называлось на самодуальные конфигурации полей ЯМ, являющиеся решениями этих уравнений. Эти поля в евклидовом пространстве связаны соотношением

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \pm F_{\mu\nu}^a.$$

ответственно получим

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = F^2.$$

Тогда для плотности лагранжиана в евклидовом пространстве имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} F^2; \quad S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} F^2 d^4x.$$

Учитывая явное выражение для действия, получаем неравенство

$$\int \text{Tr} (F \pm \tilde{F})^2 d^4x = 2 \int \text{Tr} (F^2 \pm F\tilde{F}) d^4x \geq 0,$$

т.к. $\tilde{F}^2 = F^2$. Таким образом мы приходим к неравенству

$$\int \text{Tr} F^2 d^4x \geq \left| \int d^4x \text{Tr} (F\tilde{F}) \right|.$$

Отсюда оценка для евклидова действия представима в виде

$$S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} F^2 d^4x \geq \frac{1}{2} \left| \int \text{Tr} F\tilde{F} d^4x \right|,$$

причем к равенству мы приходим в случае самодуальных (антисамодуальных) полей. Учитывая топологическую классификацию полей ЯМ (см.

формулу (3.2) при $\tilde{c}=2$ и соответствующий пример (3.8)) и значение топологического заряда

$$C_2 = \frac{g^2}{16\pi^2} \int \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} d^4x,$$

получим, что

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |C_2|;$$

при $|C_2| = 1$ находим (действие минимально)

$$S_{\text{инст}} = \frac{8\pi^2}{g^2}, \quad (5.117)$$

т.е. инстантонное действие. Выпишем явное решение для инстантонов.

Положим

$$t_\mu = (\vec{t}, i) ; \quad t_\mu^+ = (\vec{t}, -i) , \quad \mu = \overline{1, \dots, 4},$$

тогда можно построить тензор

$$t_{\mu\nu} = i(t_\mu t_\nu^+ - \delta_{\mu\nu}) = \tilde{t}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} t_{\alpha\beta} ,$$

т.е. $t_{\mu\nu}$ — самодуальный тензор. В этих обозначениях

$$(xt)(xt^+) = r^2 ; \quad g = i(xt^+)/r ;$$

$$g^{-1} = -i(xt^+)/r .$$

Теперь калибровочное поле можно записать так:

$$A_{\text{калибр.}}^{\mu} = -\frac{i}{g} g(x) \partial^{\mu} g^{-1}(x) = \frac{1}{g} \frac{t_{\mu\nu} x_{\nu}}{r^2} . \quad (5.118)$$

Из требования конечности энергии следует, что вектор-потенциал можно искать в виде

$$A_{\mu} = \frac{1}{g} \frac{t_{\mu\nu} x_{\nu}}{r^2} h(r^2) , \quad (5.119)$$

где функция $h(r^2)$ в (5.119) $h(0)=0$ и регулярна в нуле, $h(r^2) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$, причем функцию $h(r)$ подберем так, чтобы выполнялось условие самодуальности.

Вычисляя явное выражение для тензора поля через вектор-потенциал, получим

$$F_{\mu\nu} = \frac{2}{g} \left[\frac{h(1-h)}{r^2} t_{\mu\nu} + \left(h' - \frac{h(1-h)}{r^2} \right) (t_{\mu\lambda} x_\lambda x_\nu - t_{\nu\lambda} x_\lambda x_\mu) \right];$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{2}{g} \left[\frac{h(1-h)}{r^2} t_{\mu\nu} - \left(h' - \frac{h(1-h)}{r^2} \right) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (t_{\alpha\lambda} x_\lambda x_\beta - t_{\beta\lambda} x_\lambda x_\alpha) \right].$$

Отсюда для $h(r)$ следует уравнение

$$r^2 h' - h(1-h) = 0 \quad (5.120)$$

с граничными условиями: $h(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$; $h(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$. Решение уравнения (5.30) имеет вид

$$h(r^2) = \left[1 + (a/r)^2 \right]^{-2}, \quad (5.121)$$

где a - параметр, определяющий размер инстантона. Тензор напряженности поля для инстантона $C_2 = -1$ имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{2}{g} t_{\mu\nu} a^2 [a^2 + r^2]^{-2}.$$

Для антиинстантона $C_2 = 1$ соответствующая формула получается из приведенного решения заменой $t_{\mu\nu} \rightarrow \bar{t}_{\mu\nu}$:

$$\bar{t}_{kl} = t_{kl} \quad \text{и} \quad \bar{t}_{k4} = -t_{k4}.$$

Физический смысл инстантона - решения, приводящие к туннельному эффекту (ранее мы разбирали эту возможность для постоянных полей; см. (5.4)).

§ 6. Уравнения движения классической частицы с изоспином

В первом параграфе были выписаны явные выражения для символов Кристоффеля, используя которые, нетрудно получить уравнения движения частицы по геодезической

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0 \quad (6.1)$$

С учетом (1.13) найдем

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu + \eta_{ik} g^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\nu\beta}^k u^\nu T^i = 0 \quad (6.2)$$

Здесь мы считаем, что $T^i = A_\mu^i u^\mu$ — вектор в изотопическом пространстве. Тогда для движения этого вектора в изотопическом пространстве можно выписать уравнения

$$\frac{dT^i}{ds} + \varepsilon^{ijk} A_j^\mu u_\mu T^k = 0 \quad (6.3)$$

Приведенная пара уравнений (6.2) и (6.3) для векторов u^α и T^i описывает движение классической частицы с изоспином. Заметим, что эти уравнения можно получить несколько иным способом, вычисляя коммутаторы соответствующих динамических переменных (как это было сделано в оригинальной работе Вонга [52]) и переходя к квазиклассическому приближению (строгий переход к квазиклассике — очень сложная задача, т.к. необходимо использовать аппарат тракторно-когерентных состояний, развитый недавно в цикле работ [53–55]; усреднение по любому другому волновому пакету может привести к физически неверному результату [56]).

Опишем еще один способ получения классических уравнений движения частицы с изоспином, основанный на выборе классического действия такой частицы в виде $S = S_0 + S_1 + S_2$ и предложенный в [57], где S_0 — действие бессиновой частицы, отвечающее пространственному движению точечного заряда:

$$S_0 = \int L_0 d\tau = \int \left(-m \frac{d\tau}{dt} + g (A_\mu^a T_a) \frac{dx^\mu}{dt} \right) dt, \quad (6.4)$$

τ – собственное время. Спинная часть действия, отвечающая за спин-орбитальную связь, имеет вид

$$S_1 = -\hat{g} \frac{g}{2m} \int \tilde{F}_{\mu\nu}^a u^\mu s^\nu T_a d\tau, \quad (6.5)$$

где $\hat{g}$ – гиромагнитное отношение; s^ν – 4-вектор спина; $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ – дуальный тензор поля. Слагаемое S_2 – кинетическая часть действия изоспина:

$$S_2 = \int L_2 dt = \int (T \cos \theta \frac{d\varphi}{dt}) dt, \quad (6.6)$$

где $T_3 = T \cos \theta$; $T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$; $t_\varphi = T_2 / T_1$.

Вывод кинетической части действия S_2 основан на аналогии движения изоспина с динамикой вектора намагниченности в ферромагнетиках [53]. Так же как и вектор намагниченности, изоспин представим в качестве симметричного волчка с одной закрепленной точкой и главными моментами инерции $A=B=0$, а $C \neq 0$; кинетическая энергия равна $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} C (\varphi \cos \theta + \psi)^2$. Величина $E_{\text{кин}}$ – функция угла нутации θ и обобщенных скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$. Т.к. угол ψ – циклическая переменная, то сохраняется соответствующий обобщенный импульс

$$p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi} = \text{const} = C (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta).$$

Эту постоянную поставим в соответствие с величиной изотопического спина частицы $p_\psi = T$. Вместо функции Лагранжа введем функцию Рауса [59]

$$R = L_T - p_\psi \dot{\psi} = g A_r^a T_a \frac{dx^r}{dt} + L_2 =$$

$$= g A_r^a T_a \frac{dx^r}{dt} + \dot{\psi} T \cos \theta. \quad (6.7)$$

Таким образом, вектор изоспина $\vec{T}$ имеет величину $|\vec{T}| = T = p_\psi$ — const и направление $\vec{n}(\theta, \varphi)$, определяемое сферическими углами θ и φ . Варьируя действие

$$S_T = \int R dt = g \int A_r^a T_a dx^r + \int T \cos \theta d\varphi, \quad (6.8)$$

получим уравнение движения изоспина. Заметим, что $\dot{\vec{n}} \Rightarrow \vec{n} + \delta \vec{n}$
 $\delta \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{n}$, где $\vec{\omega}$ — малый угол. Тогда имеем

$$\frac{\delta S_T}{\delta \vec{n}} \delta \vec{n} = \frac{\delta S_T}{\delta \vec{n}} (\vec{\omega} \times \vec{n}) = -\vec{\omega} \left(\frac{\delta S_T}{\delta \vec{n}} \times \vec{n} \right) = 0,$$

т.о., в силу произвольности вектора $\vec{\omega}$,

$$\frac{\delta S_T}{\delta \vec{n}} \times \vec{n} = 0.$$

Вариация S_2 дает

$$\frac{\delta S_2}{\delta n_\varphi} = T \dot{\theta}, \quad \frac{\delta S_2}{\delta n_\theta} = -T \sin \theta \dot{\varphi}.$$

Откуда

$$\left(\frac{\delta S_2}{\delta \vec{n}} \times \delta \vec{n} \right)_\varphi = (\dot{\vec{n}})_\varphi T; \quad \left(\frac{\delta S_2}{\delta \vec{n}} \times \vec{n} \right)_\theta = (\dot{\vec{n}})_\theta T.$$

Учитывая явное выражение для R (6.7), получим

$$\frac{\delta S_2}{\delta \vec{n}} \times \vec{n} = -g (A_r^a u^r) \times \vec{T},$$

что вместе с явным выражением компонент вектора $\left(\frac{\delta S_2}{\delta \vec{n}} \times \vec{n} \right)$

дает уравнение (после перехода к собственному времени)

$$\frac{d\vec{T}}{d\tau} = -g(\vec{A}_\mu u^\mu) \times \vec{T}. \quad (6.9)$$

Варьируя S_1 , найдем

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = -g \hat{F}_a^{\mu\nu} T^a u_\nu. \quad (6.10)$$

Несложно проверить, что введенное действие $S' = S'_1 + S'_2 + S'_3$ является калибровочно инвариантным.

Для доказательства утверждения о калибровочной инвариантности действия достаточно проверить соответствующее утверждение для S_2 . Перепишем S_2 в виде

$$S_2 = \int T \cos \theta d\varphi = \int \vec{T} d\vec{\varphi}, \quad d\vec{\varphi} = \vec{e}_z d\varphi + \vec{e}_\varphi d\theta,$$

$\vec{e}_z$ — орт оси z ; $\vec{e}_\varphi$ — орт сферической системы координат в изотопическом пространстве. Локальное инфинитезимальное преобразование ведет к преобразованию потенциалов

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \varepsilon^{abc} \omega^b A_\mu^c + g^{-1} \partial_\mu \omega^a.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta(g \int A_\mu^a T^a u^\mu d\tau) &= g \varepsilon^{abc} \int \omega^b T^c A_\mu^a dx^\mu \\ &+ g \int T^a \varepsilon^{abc} \omega^b A_\mu^c dx^\mu + \int T^a \partial_\mu \omega^a dx^\mu = \int T^a \frac{d\omega^a}{d\tau} d\tau, \end{aligned}$$

соответствующее изменение S_2 равно

$$\delta S_2 = \varepsilon^{abc} \int \omega^a T^b d\varphi^c,$$

а для общего изменения действия получим

$$\delta S = \int \vec{T} d\vec{\omega} + \int [\vec{\omega}, \vec{T}] d\vec{\varphi} = \int \vec{T} d\vec{\varphi} + \int [d\vec{\varphi}, \vec{T}] \vec{\omega}.$$

Учитывая, что $T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = |\vec{T}|^2 = \text{const}$ на сфере, получим

$$d\vec{T} = [d\vec{\varphi}, \vec{T}], \quad \delta S = \int \vec{T} d\vec{\omega} + \int \vec{\omega} d\vec{T} = \int d(\vec{T} \vec{\omega}).$$

Т.е. вариация действия выражена через интеграл от полного

дифференциала, а поэтому не варьируется при выводе уравнений

движения. Отсюда получим следствия: неабелевы частицы $S = S_1 + S_2 + S_3$ калибровочно инвариантны, как и действия абелевой частицы в КЭД. Полученные выше уравнения можно записать для частицы, имеющей спин и изоспин, движущейся в суперпозиции абелевых и неабелевых полей [60]:

$$\begin{aligned} mc \dot{u}^\mu &= -g \tilde{F}_a^{\mu\nu} T^a u_\nu - e F^{\mu\nu} u_\nu; \\ \dot{T}^a &= -g \varepsilon_{abc} T^c [A_\mu^b u^\mu + (\tilde{g}/2mc) \tilde{F}_{\mu\nu}^b u^\mu S^\nu]; \\ 2mc \dot{S}^\mu &= -\tilde{g} (g \tilde{F}_a^{\mu\nu} T^a + e F^{\mu\nu}) S_\nu - \\ &\quad - (\tilde{g}-2) c^{-2} (g \tilde{F}_a^{\alpha\beta} + e F^{\alpha\beta}) u_\alpha S_\beta u^\mu. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь $\tilde{g}$ - гироманнитное отношение; $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$; f_{abc} - структурные константы цветовой группы; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ - тензор абелева поля. Соответственно A_μ^a и B_μ - неабелевы и абелевы вектор-потенциалы поля. Легко видеть, что уравнения (6.11) имеют ковариантный вид.

Эти уравнения могут быть записаны в иной форме, если вместо четырехвектора спина S^μ использовать тензор спина

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha S_\beta; \quad S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 2 S^2; \\ \tilde{F}_{\mu\nu}^a S^{\mu\nu} &= -2 \tilde{F}_{\mu\nu}^a u^\mu S^\nu, \end{aligned} \quad (6.12)$$

тогда получим следующие уравнения (для упрощения в (6.11)

мы положим $F_{\mu\nu} = 0$):

$$\begin{aligned}
 mc \dot{u}^\mu &= -g F_a^{\mu\nu} T^a u_\nu; \\
 \dot{T}^a &= -g \varepsilon_{abc} T^c (A^b_\mu u^\mu + \frac{g^2}{2mc} F^b_\mu S^{\mu\nu}); \\
 2mc \dot{S}^{\mu\nu} &= -g \tilde{g} (F^{\mu\rho}_{a\rho} S^{\rho\nu} - F^{\nu\rho}_{a\rho} S^{\rho\mu}) T^a - \\
 &\quad - g(\tilde{g} - 2) c^{-2} (u^\mu S^{\nu\rho} - u^\nu S^{\mu\rho}) F^a_{\rho\gamma} u^\gamma T_a.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Прежде чем перейти к решению уравнений для конкретных полей, заметим, что они имеют следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned}
 T^2 &= T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \text{const}; \quad s_\rho s^\rho = s^2 = \text{const}; \\
 u_\mu u^\mu &= 1.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

§ 7. Движение классической неабелевой частицы в цветовых полях

Решение уравнений движения классической изоспиновой частицы во внешнем неабелевом калибровочном поле может быть интересным по следующим причинам:

1. При описании взаимодействия сложных квантовых систем весьма полезно иметь некоторую достаточно простую и физически наглядную модель, которая вместе с тем, несмотря на свою простоту, может использоваться при конкретных расчетах. Как известно из КЭД, таким способом описания квантовых эффектов в ряде случаев является квазиклассический метод, который, в свою очередь, оперирует с понятием классической траектории, т.е. решениями классических уравнений движения.

2. В § 5 мы рассмотрели решения полевых уравнений ЛД. Некоторые из этих решений, например поля, определяемые постоянными по-

тенциалами, используются в качестве модели вакуума, а другие являются следствием существования нетривиальных полевых объектов. Поэтому возникает необходимость более детально обсудить характер движения изоспиновых частиц в полях различной конфигурации.

3. Отметим также еще один аспект этой задачи, который обусловлен возможностью существования в адронном веществе при высоких температурах и плотностях такого фазового состояния, как кварк-глюонная плазма. Известно, что при описании плазмы также широко используются классические методы.

Учитывая сказанное, рассмотрим решения уравнения движения изоспиновой частицы в абелевых и неабелевых конфигурациях полей и установим характерные отличия в движении частицы.

Исследуем решения классических уравнений движения изоспиновой частицы (без учета спина) в постоянном однородном хромомagnetном поле, направленном вдоль третьей изотопической оси (такая конфигурация поля предлагалась, например, Саввиди и Матиньяно в качестве вакуума [61]). Как известно, вектор-потенциал, определяющий это хромомagnetное поле, можно записать следующим образом: $A_\mu^b = \delta_3^b A_\mu$, где $A_\mu = (0, x_2 H, 0, 0)$ или $A_\mu = (0, \frac{1}{2} x_2 H, -\frac{1}{2} x_1 H, 0)$, при этом тензор поля в обоих случаях имеет отличными от нуля одни и те же компоненты:

$$\begin{aligned} F_3^{12} &= \partial^1 A_3^2 - \partial^2 A_3^1 = -\frac{\partial}{\partial x^2} (x_2 H) = -H; \\ F_3^{21} &= \partial^2 A_3^1 - \partial^1 A_3^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 H) = H. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} &= 0; \quad \frac{du^1}{d\tau} = gHT^3 u_2; \\ \frac{du^3}{d\tau} &= 0; \quad \frac{du^2}{d\tau} = -gHT^3 u_1; \\ \frac{dT_1}{d\tau} &= gA_\mu^3 u^\mu T_2; \quad \frac{dT_2}{d\tau} = -gA_\mu^3 u^\mu T_1; \quad T_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Откуда следует, что движение по траектории в обоих случаях задается

хромоманнитного поля будет определяться скоростями

$$u_1 = \cos(\omega\tau - \varphi_0); u_2 = \sin(\omega\tau - \varphi_0); \omega = gH|T_3|/m,$$

или в явном виде траектория такова:

$$x_1 = x_1^0 + R \sin(\omega\tau - \varphi_0); x_2 = x_2^0 - R \cos(\omega\tau - \varphi_0); \quad (7.3)$$

$$R = m/(gH|T_3|).$$

Соответственно видим, что проекция изотопического вектора на третью ось T_3 сохраняется, а в плоскости (T_1, T_2) вектор изомерна в первом и во втором случаях задания хромоманнитного поля ведет себя следующим образом:

$$T_1 + iT_2 = \exp\left\{igH\left[\tau_0 + \frac{\tau R}{2} + \frac{R}{4\omega} \sin 2(\omega\tau - \varphi_0) - \frac{x_2^0}{\omega} \sin(\omega\tau - \varphi_0)\right]\right\}; \quad (7.4)$$

$$T_2 + iT_1 = \exp\left\{i\frac{gH}{2}\left[\tau_0 - \frac{\tau R}{2} + \frac{x_1^0}{\omega} \cos(\omega\tau - \varphi_0) + \frac{x_2^0}{\omega} \sin(\omega\tau - \varphi_0)\right]\right\}. \quad (7.5)$$

Приведенные результаты показывают, что в заданном способе задания поля (7.1) траекторное (7.3) и изоспиновое (7.4), (7.5) движения отделяются. Отличие в изоспиновом движении (7.4) и (7.5) может быть компенсировано калибровочным преобразованием, которое не затрагивает траекторного движения.

Зададим теперь хромоманнитное поле постоянными неабелевыми потенциалами

$$A_1^\mu = (0, 0, \sqrt{\lambda_2}, 0); A_2^\mu = (0, 0, 0, \sqrt{\lambda_3}); A_3^\mu = (0, 0, 0, 0). \quad (7.6)$$

В этом случае отличными от нуля будут следующие компоненты тензора поля: $F_3^{32} = -F_3^{23} = g\sqrt{\lambda_2\lambda_3} = H$. Вводя параметр $\psi = \frac{gH}{m} \int_0^\tau T_3(\tau') d\tau'$, получим для четырехимпульса выражение, которое удовлетворяет (при заданном поле) системе уравнений движения частицы

$$u_0 = u_0(0) ; \quad u_2 = u_2(0) \cos \psi + u_3(0) \sin \psi ;$$

$$u_1 = u_1(0) ; \quad u_3 = -u_2(0) \sin \psi + u_3(0) \cos \psi \quad (7.7)$$

или $u_2 = u_{\perp} \cos \varphi$; $u_3 = u_{\perp} \sin \varphi$; $\varphi = \varphi_0 - \psi$; $u_2(0) = u_{\perp} \cos \varphi_0$; $u_3(0) = u_{\perp} \sin \varphi_0$.
Из представленных решений (7.7) видно, что существуют начальные условия $u_i(0) = 0$, при которых траектория движения частицы замкнутая. Отметим, что движение в изоспиновом пространстве довольно сложным образом запутано с траекторным через параметр $\varphi(\tau) = \varphi_0 - \psi(\tau)$.
Из соотношений (6.14) следует, что параметр $\varphi(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 [T^2 - T_2^2(\varphi) - T_3^2(\varphi)] , \quad \omega = \frac{gH}{m} , \quad (7.8)$$

где величины $T_{2,3}$ и $u_{2,3}$ связаны интегралами

$$u_{2,3} = u_{2,3}(0) - T_{2,3} \frac{g\sqrt{\lambda_{2,3}}}{m} .$$

Легко заметить, что уравнение (7.8) аналогично уравнению движения классической частицы без изоспина (в КЭД) в поле волны с эллиптической поляризацией. Вектор-потенциал, определяющий эту волну, представляется следующим образом:

$$A_{\mu} = \left\{ 0, 0, \frac{m u_{\perp}}{\sqrt{\lambda_2}} \cos(k_{\mu} x^{\mu}), \frac{m u_{\perp}}{\sqrt{\lambda_2}} \sin(k_{\mu} x^{\mu}) \right\} .$$

Уравнение (7.8) — интеграл движения для уравнения

$$\ddot{\varphi} + [\lambda_2 u_2(0) \sin \varphi - \lambda_3 u_3(0) \cos \varphi] u_{\perp} + \frac{1}{2} u_{\perp}^2 (\lambda_2 - \lambda_3) \sin 2\varphi = 0, \quad (7.9)$$

Это уравнение может быть найдено, исходя из функции Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2\omega} + \frac{\omega}{2} [T^2 - T_1^2(\varphi) - T_2^2(\varphi)] .$$

Значение действия при этом, $S = \int \mathcal{L}(\tau) d\tau$, для рассматриваемого лагранжиана на классической траектории совпадает с построенной выше изоспиновой частью действия классической частицы

$$S_{\kappa_1} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T_3 d\varphi = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{T^2 - T_1^2(\varphi) - T_2^2(\varphi)} d\varphi,$$

знак $\pm$ определяется проекцией вектора $\vec{T}$ изоспина на третью изотопическую ось. Это действие удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \omega^2 T_3^2(\varphi) = 0.$$

Если в (7.9) $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$, то получим

$$\frac{d^2(\varphi - \delta)}{d\tau^2} + \lambda \sqrt{u_3^2(0) + u_2^2(0)} \sin(\varphi - \delta) = 0, \quad (7.10)$$

где $\operatorname{tg} \delta = u_2(0)/u_3(0)$. В действительном времени τ решение уравнения (7.10) можно записать через эллиптические и тригонометрические функции

$$\begin{aligned} \varphi - \delta &= \operatorname{arcsin} \{ k \sin[(\tau - \tau_0)\omega_0; k] \}, \\ \omega_0 &= \lambda \sqrt{u_3^2(0) + u_2^2(0)}, \\ k &\in (0, 1). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Если сделать замену в (7.10) $\tau \rightarrow it$, то решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi - \delta = \pm \operatorname{arcsin} \left\{ \operatorname{cn} \left[-\frac{\omega_0}{k} (t - t_0); k \right] \right\}.$$

При $k \rightarrow 1$ получим

$$\varphi - \delta = 4 \operatorname{arctg} \{ \exp[\pm \omega_0 (t - t_0)] \}. \quad (7.12)$$

Легко видеть, что при $t \rightarrow \infty$ угол φ может принимать следующие

предельные значения: $2\pi + \delta$ или δ . Используя явное выражение для интегралов (6.14), получим, что вектор изоспина в мнимом времени за бесконечно большое время, от $-\infty$ до $+\infty$, может вернуться на угол 2π .

В случае $\lambda_2 = \lambda_3$ для спиновой части уравнений (6.11) получим

$$\begin{aligned} S^{01} &= C, S^{13} = C \cos \Psi(\tau); \\ S^{02} &= C, S^{23} = C \sin \Psi(\tau); \\ S^{03} &= \text{const} = -[\vec{u} \times \vec{s}]_3; \\ S^{12} &= \text{const} = u_0 s^3 - s_0 u^3. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Мы получили, что частота осцилляций спина определяется величиной $\Psi(\tau)$, которая связана с изменением изоспиновой компоненты $T_3(\tau)$. В случае задания абелевого хромомagnetного поля вектор спина также является осциллирующей функцией, а частота осцилляций определяется величиной T_3 .

По аналогии с хромомagnetным полем хромозлектрическое поле можно определить посредством постоянных неабелевых потенциалов:

$$A_\mu^1 = (\sqrt{-\lambda_1}, \vec{0}); A_\mu^2 = (0, \sqrt{\lambda_2}, 0, 0); A_\mu^3 = (0, \vec{0}). \quad (7.14)$$

Это поле направлено по третьей изотопической оси и имеет отличными от нуля следующие компоненты тензора поля:

$$F_3^{01} = -F_3^{10} = g \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2} = E.$$

При этом задании поля решение системы (6.11) можно выразить через гиперболические функции следующим образом:

$$u_1 = -\sqrt{1 + \vec{u}_1^2} \operatorname{sh}(\psi + \delta); u_0 = \sqrt{1 + \vec{u}_1^2} \operatorname{ch}(\psi + \delta); \quad (7.15)$$

$$u_2 = u_2(0); u_3 = u_3(0).$$

Здесь $\psi = \frac{gE}{m} \int_0^\tau T_3(\tau') d\tau'$; $\operatorname{sh} \delta = -u_1(0)/\sqrt{1 + \vec{u}_1^2}$; $\operatorname{ch} \delta =$

$= [(1 + \vec{u}^2) / (1 + \vec{u}_1^2)]^{1/2}$, Как видно из решений (7.7) и (7.15), движение частицы в хромомagnetном и хромоэлектрическом полях в импульсном и изотопическом пространствах связаны нелинейно. В общем случае это приводит к неправомерности независимого рассмотрения движения частицы в этих пространствах для полей, определяемых неабелевыми потенциалами.

Рассмотрение движения изоспиновой частицы в хромоэлектрическом поле, определяемом абелевыми потенциалами $A_\alpha^{\mu} = A_\mu^{\mu} \int_{\mu}^3$, $A^{\mu} = (x\mathcal{E}, \vec{\sigma})$, приводит нас к решению

$$\begin{aligned} u^0 &= u^0(0) \cosh \psi + u^{(1)}(0) \sinh \psi ; \\ u^1 &= u^0(0) \sinh \psi + u^{(1)}(0) \cosh \psi ; \\ u_2 &= u_2(0) ; \quad u_3 = u_3(0) , \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $\psi = \frac{g\mathcal{E}}{m} T_3(0)\tau + \psi_0$. Таким образом, функция $\psi(\tau)$ в абелевых полях линейная по собственному времени, в то время как для неабелевых полей в силу нелинейных колебаний вектора изоспина на сфере мы имеем функции Якоби:

$$\begin{aligned} \tau &= \pm \frac{2m\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{g} \int (C_0 x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4)^{-1/2} dx \\ x &= \exp(\psi + \delta) ; \quad E_1^2 = m^2 [1 + u_2^2(0) + u_3^2(0)] ; \\ C_0 = C_4 &= \left(\frac{E_1}{g}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) ; \quad C_{1,3} = \frac{4E_1}{g} \left[\frac{T_1(0)}{\sqrt{-\lambda_1}} \mp \frac{T_2(0)}{\sqrt{\lambda_2}} \right] ; \\ C_2 &= 2 \left[2(T^2 - T_1^2(0) - T_2^2(0)) + \left(\frac{E_1}{g}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \right] . \end{aligned} \quad (7.17)$$

Для спиновой части уравнений (6.11) получим

$$\begin{aligned} S^{01} &= \text{const} ; \quad S^{23} = \text{const} ; \quad S^2 = \text{const} ; \quad S^3 = \text{const} ; \\ \varphi &= \frac{g^2 \sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{m} \int_0^{\tau} T_3(\tau') d\tau' , \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$S^{02} + S^{12} = C_1 \exp(-\varphi);$$

$$S^{03} + S^{13} = C_2 \exp(-\varphi);$$

$$S^0 + S^1 = C_3 \exp(-\varphi).$$

Учитывая связь функций Якоби с модулярными группами [62], можно надеяться, что уравнение Вонга имеет соответствующую симметрию, которая позволит найти их новые точные решения.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложной конфигурации внешнего поля, определяемой постоянными неабелевыми потенциалами:

$$A_\mu^1 = (\sqrt{\lambda_1}, 0); A_\mu^2 = (0, 0, \sqrt{\lambda_2}, 0); A_\mu^3 = (0, 0, 0, \sqrt{\lambda_3}). \quad (7.19)$$

В этом случае отличны от нуля следующие компоненты тензора поля:

$$\begin{aligned} F_1^{23} &= -F_1^{32} = -g\sqrt{\lambda_2\lambda_3} = -H; \\ F_2^{03} &= -F_2^{30} = -g\sqrt{-\lambda_1\lambda_3} = E_1; \\ F_3^{02} &= -F_3^{20} = -g\sqrt{-\lambda_1\lambda_2} = E_2. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Если в (7.20) положить $\lambda_1 = 0$, то получим хромомagnetное поле, а при $\lambda_3 = 0$ — хромoeлектрическое. Для поля (7.19) интегралы движения имеют вид (6.14).

Если воспользоваться параметризацией

$$\begin{aligned} m u^0 &= E \operatorname{ch} u; \quad m u^1 = p^1 = \text{const}; \\ m u^2 &= E \sin v \operatorname{sh} u; \quad m u^3 = E \cos v \operatorname{sh} u; \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$E = m \sqrt{1 + (u^1)^2},$$

то при начальных импульсах и энергии, равной нулю, $p^0 = p^2 = p^3 = 0$. При этих начальных условиях для функций $\operatorname{ch} u$ и $\cos v$ найдем следующее явное выражение через эллиптические функции:

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{cn} \left(\frac{m^2 (\tau + \tau_0)}{g \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(\frac{2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \left(\frac{m \tau}{E} \right)^2 \right)}, \frac{1}{1 - \tau} \right), \quad (7.22)$$

$$\text{где} \quad \tau = \frac{\left(\left(\frac{mT}{E} \right)^2 + \frac{2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)}{\left(\left(\frac{mT}{E} \right)^2 + \frac{2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)} ;$$

$$\cos v = \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{mT}{E} \right)^2 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}}} .$$

Проведенное нами рассмотрение показывает, что в случае абелевых полей движения в траекторном и изотопическом пространствах можно рассматривать независимо. В то же время для полей, определяемых неабелевыми потенциалами, такая процедура оказывается неправомерной. Заметим также, что для конфигураций полей, задаваемых вектор-потенциалами вида

$$A_c^a = 0 ; \quad A_i^a = \delta_i^a f(t), \quad (7.23)$$

классические уравнения движения имеют интегралы

$$\vec{u} = \vec{u}(0) - \vec{T} f(t) g / m \quad (7.24)$$

и соответственно для второго случая, т.е. при $A_c^a = 0 ; A_i^a = \varepsilon^{a i j} \eta_j f(t)$, получим

$$\vec{u} = \vec{u}(0) - [\vec{u}, \vec{T}] f(t) g / m. \quad (7.25)$$

При обсуждении решений уравнений ЯМ наряду с плосковолновыми решениями, для которых фактически и рассматривались классические уравнения движения, были указаны также физически интересные решения как монопольные. Поэтому перейдем к решению уравнений движения классической частицы в поле монополя. В настоящее время в литературе имеется довольно большое число публикаций [63], в которых исследуется движение классической частицы в поле монополя. Зададим поле следующими вектор-потенциалами:

$$g\mathcal{H}_0^a = n^a \ell(r)/r ; \quad g\mathcal{H}_i^a = \varepsilon^{aik} n_k (1-f(r))/r . \quad (7.26)$$

Тогда для напряженности хромозлектрического и хромомагнитного поля получим

$$-E_m^a = (\ell(r)/r)' n_a n_m + (\ell(r)f(r)/r^2)(\delta_{am} - n_a n_m) ;$$

$$-H_m^a = [(f'(r)-1)/r^2] n_a n_m + (f'(r)/r)(\delta_{am} - n_a n_m) .$$

Соответственно уравнения движения примут вид

$$m\dot{\vec{v}} = g'(\vec{E}_a T_a + [\vec{v}, \vec{H}_a] T_a) ; \quad (7.27)$$

$$\dot{T}_a = g' \varepsilon_{abc} (\mathcal{H}_0^b - (\vec{H}^b, \vec{v})) T_c ,$$

откуда для вектора изоспина найдём уравнение

$$\dot{\vec{T}} = \frac{g'}{g} \left(\frac{\ell(r)}{r} [\vec{n}, \vec{T}] + (1-f(r)) [\vec{T}, [\vec{n}, \vec{n}]] \right) .$$

Если положить $\ell(r) = 0$, т.е. имеем магнитный монополь, то

$$(\vec{n}, \vec{T}) = \frac{g'}{g} (f(r)-1) (\dot{\vec{n}}, \vec{T}) .$$

Далее, если $f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, при $g' = g$

$$(\vec{n}, \vec{T}) = \text{const} , \quad (7.28)$$

т.е. проекция вектора изоспина на направление движения будет сохраняться. В этом же случае $\ell(r) = 0$ уравнения движения (7.27) можно записать таким образом:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{g'}{g} \left(\frac{f^2-1-r}{r} [\dot{\vec{n}}, \vec{n}] (\vec{T}, \vec{n}) + f' [\dot{\vec{n}}, \vec{T}] + \frac{f'^2}{r} [\vec{n}, \vec{T}] \right) ;$$

$$\dot{\vec{T}} = \frac{g'}{g} (1-f) [\vec{T}, [\dot{\vec{n}}, \vec{n}]] .$$

Рассмотрим частный случай $\ell(r) = C = \pm 1$, $f(r) = 0$, тогда получим для напряженности полей

$$g E_m^a = \pm \frac{n_a n_m}{r^2} ; \quad g H_m^a = \frac{n_a n_m}{r^2} .$$

Это поле списывает дион с электрическим зарядом $g_e = \pm 1/g$ и магнитным зарядом $g_m = 1/g$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$m \ddot{\vec{r}} = (g'/g)(\vec{n}, \vec{T})(c\vec{n} + [\vec{v}, \vec{n}])/r^2 ; \quad (7.29)$$

$$\dot{\vec{T}} = (g'/g)(\vec{n}(\vec{v}, \vec{T}) - \vec{v}(\vec{n}, \vec{T}) - c[\vec{n}, \vec{T}])/r .$$

Если положить в (7.29) $g'/g = 1$, то эти уравнения имеют интеграл движения $(\vec{n}, \vec{T}) = \text{const}$, т.е. вектор изоспина прецессирует вокруг единичного радиус-вектора $\vec{n} = \vec{r}/r$, а мгновенная проекция, как указывалось выше (см. (7.28)), на вектор $\vec{n}$ сохраняется. Первое из уравнений (7.29) в том случае интегрируется. Если ввести обозначение $q = -\alpha c$, то полученный интеграл движения $E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{r}$ соответствует энергии пробной частицы в кулоновском поле с эффективным зарядом q . Знак q зависит от знака хромозлектрического поля и от проекции вектора изоспина $(\vec{n}, \vec{T})$. Эффективная потенциальная энергия $U = \frac{\mathcal{M}^2}{2mr^2} + \frac{q}{r}$ при $q < 0$, где $\mathcal{M}$ — момент импульса пробной частицы, имеет нетривиальный минимум при $\mathcal{M} \neq 0$, который отвечает замкнутым локализованным траекториям в поле (7.26). При $q'/q \neq -1$ отделение изоспинового движения от траекторного затруднительно, а само движение частицы носит более сложный характер. В частности, для неабелевого хромагнитного поля, определяемого потенциалами $A_0^a = 0$, $A_i^a = \varepsilon^{a1k} n_k \frac{(1-f(r))}{g r}$, интегралом движения является энергия частицы $E = \frac{m}{2} \vec{v}^2$, полный угловой момент $\vec{J} = m[\vec{r}, \vec{v}] + (1-f)\vec{n}(\vec{n}, \vec{T}) + f\vec{T}$ и скалярное произведение вектора изоспина на себя $\vec{T}^2 = T_a T^a$.

Обсудим теперь движение изоспиновой частицы в поле инстантона, который зададим вектор-потенциалом вида

$$A_0^a = \mp \frac{2x^a}{g(x^2 + \rho^2)} ; \quad A_i^a = \frac{2}{g(x^2 + \rho^2)} [-\varepsilon_{iak} x^k \pm \delta_i^a x^0] , \quad (7.30)$$

здесь φ - размер инстантона, а топологический заряд $|Q|=1$; соответствующий тензор поля имеет вид

$$F_{0k}^a = \mp 4\delta_{ak} \varphi^2 / g(x^2 + \varphi^2)^2; \quad F_{kl}^a = 4\varepsilon_{akl} \varphi^2 / g(x^2 + \varphi^2)^2.$$

Рассмотрение движения частицы будем проводить в евклидовом пространстве, т.е.

$$x^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Тогда уравнения движения в явном виде запишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \mp \frac{4\varphi(\vec{T}, \vec{v})}{(x^2 + \varphi^2)^2} = m \frac{d\gamma}{dt}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \frac{4\varphi^2}{(x^2 + \varphi^2)^2} (\pm \vec{T} + [\vec{v}, \vec{T}]); \quad (7.31)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{T} = \frac{2}{x^2 + \varphi^2} (\pm [\vec{x}, \vec{T}] + [\dot{\vec{x}}, \vec{T}] + \dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{T}) - \vec{x}(\dot{\vec{x}}, \vec{T})).$$

Как видно, исследование системы (7.31) в общем виде затруднительно.

Однако можно получить следующие интересные зависимости:

$$m \frac{d}{dt} \sqrt{1-\vec{v}^2} = \pm 4\varphi^2 (1-\vec{v}^2)(\vec{v}, \vec{T}) / (x^2 + \varphi^2)^2; \quad (7.32)$$

$$m \vec{T} \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = \pm 4\varphi^2 \vec{T}^2 / (x^2 + \varphi^2)^2; \quad \vec{T}^2 = \text{const}. \quad (7.33)$$

Вместе с тем из приведенных уравнений следует, что движение в поле инстантона оказывается довольно сложной поверхностью в координатном и изотопическом пространствах. Так, например, полагая $T_1 = T_2 = 0$, найдем из (7.32) и (7.33), что $T_3 = \text{const}, (x_1^2 + x_2^2) / (x_3^2 + \varphi^2) = C$, т.е. это поверхность второго порядка. Далее, если ввести угловой момент $\vec{M} = m[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]$, то уравнение для изоспина запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = \frac{4\varphi^2}{(x^2 + \varphi^2)^2} (\dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{T}) - (\vec{x}, \dot{\vec{x}})\vec{T} \pm [\vec{x}, \vec{T}]). \quad (7.34)$$

Полагая $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$, получим $M_3 = \text{const}$, т.е. проекция углового момента на третью ось сохраняется. Если при этом потребовать сохранения M_1 (или M_2), то сохраняется и M_2 (соответственно M_1) и выполняется соотношение $\dot{x}_1/\alpha_2 = \mp \dot{x}_2/\alpha_1$.

Приведенные решения в поле монополя и в поле инстантона подтверждают сказанное ранее о том, что в общем случае движения частицы в изоспиновом и траекторном пространстве не отделяются друг от друга.

Мы обсудили решения классических уравнений движения для неабелевой частицы в плоской метрике. Однако в ряде случаев, например при исследовании задач гравитации, бывает полезным провести соответствующий учет влияния гравитационного поля на движение частиц, имеющих изоспин. Таким образом, мы видим, что область использования классических уравнений движения для частиц с изоспином может быть существенно расширена. Учет же воздействия гравитационного поля может привести к физически нетривиальным последствиям.

§ 8. Решения уравнения Дирака и Клейна-Гордона-Фока в неабелевых полях различной конфигурации

История развития КЭД показывает, что изучение квантовых уравнений Дирака, Клейна-Гордона-Фока (КГФ) и Шредингера является важным этапом как в построении полной теории, так и в решении конкретных задач. Одним из замечательных примеров в этом направлении может являться теория синхротронного излучения, построенная А.А.Сokolовым, И.М.Терновым и их учениками [64], которая основана на использовании точных решений релятивистских уравнений Дирака в постоянном и однородном магнитном поле. Особый характер приобретает знание решений соответствующих волновых уравнений в квантовой хромодинамике. Это обусловлено тем, что в нелинейных теориях, каковой является, например, модель Янга-Миллса, применение пертурбативных

методов весьма ограничено и может привести к "утере" физически интересных эффектов. В рассмотрении различных конфигураций полей мы ограничимся неабелевыми полями. Вначале решим задачу для постоянного хромомagnetного поля, заданного неабелевыми потенциалами. В целях большей общности выберем группу $SU(3)$, тогда для потенциалов поля имеем

$$gA_\mu^1 = (0, \sqrt{\lambda_1}, 0, 0); gA_\mu^2 = (0, 0, \sqrt{\lambda_2}, 0); gA_\mu^3 = (0, 0, 0, \varepsilon\sqrt{\lambda_3}), \quad (8.1)$$

где $\alpha = 1, \dots, 8$; $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A_\mu^a g = (0, \vec{0})$.

Для уравнения Дирака в общем виде имеем выражение

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \{ \vec{\alpha} (-i \vec{\nabla} - g \vec{A}_a \frac{\lambda_a}{2}) + m \beta + g A_0^a \frac{\lambda_a}{2} \} \Psi, \quad (8.2)$$

где $\vec{\alpha} = \gamma_0 \vec{\gamma}$, $\beta = \gamma_0$ - матрицы Дирака, а λ_a - матрицы Гелл-Манна. Решение этого уравнения будем искать в виде плоских волн

$\Psi = \psi(p) \exp \{-iEt + i\vec{p} \vec{x}\}$, где $\psi = (\psi_A, \psi_B, \psi_C)$ - триплет кварков; таким образом, $\psi(p)$ - постоянный биспинор в координатном пространстве и триплет в изоспиновом пространстве. Подставляя такой вид решений для спиноров ψ и χ , получим уравнения

$$[m^2 - E^2 + (\vec{\nabla} \vec{\mathcal{T}})] \psi = 0; \quad (8.3)$$

$$\chi = (\vec{\nabla} \vec{\mathcal{T}}) \psi / (E + m), \quad \vec{\mathcal{T}} = \vec{p} - g \vec{A}_a \frac{\lambda_a}{2}.$$

Для третьей компоненты волновой функции ψ_C получим уравнение, которое совпадает с уравнением для свободной массивной спинорной ($S = 1/2$) частицы. Соответственно спектр энергий для компонент триплета (ψ_A, ψ_B, ψ_C) примет вид [65]

$$E_{A,B}^2 = \vec{p}^2 + m_*^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \lambda_1 \lambda_2 + (\sqrt{\lambda_1} p_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2} p_2)^2}; \quad (8.4)$$

$$E_C^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Здесь $m_* = m \sqrt{1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{4m^2}}$ - эффективная масса частицы во внешнем по-

ле. Заметим, что аналогичное выражение для массы получается в КЭД при решении задачи о движении электрона в поле плоской электромагнитной волны [66]. Таким образом, мы убеждаемся, что аналогия, которая была отмечена при решении классических уравнений движения изоспиновой частицы, имеет место и на квантомеханическом уровне. Соответствующая волновая функция представима в виде $\Psi = \Psi e^{iS} = \Psi(p) \exp(i p_r x^r)$, где $S = p_r x^r$ — квазиклассическое действие. Укажем, что постоянное хромомagnetное поле калибровочным преобразованием можно привести к виду

$$\begin{aligned} A_\mu^1 &= (0; \alpha_1 \cos \xi; -\alpha_2 \sin \xi; 0); \\ A_\mu^2 &= (0; \alpha_1 \sin \xi; \alpha_2 \cos \xi; 0); \\ A_\mu^a &= (0; \vec{0}) \quad ; \quad \xi = \omega_0(t - x) \quad ; \quad a = \overline{3, \dots, 8} \quad . \end{aligned}$$

Эти потенциалы определяют поле двух плоских цветовых волн эллиптической поляризации, распространяющихся в ортогональных направлениях друг относительно друга и имеющих сдвиг фазы $\pi/2$. Приведенный результат и объясняет замеченную нами аналогию. Обсудим теперь "утяжеление" массы частицы более подробно. Легко видеть, что этот эффект связан со спиральностью частицы. Так, например, кварк, описываемый компонентом волновой функции Ψ_A и имеющий спиральность $S_A = -I$, не взаимодействует с цветовой волной. В самом деле, выбирая четырехимпульсы в виде $p_\mu = (E, 0, 0, p)$, для $S_A = -I$, найдем $p_A^2 = m^2$. Соответственно кварк, описываемый компонентом волновой функции Ψ_B , не взаимодействует с цветовой волной, находясь в спиральном состоянии $S_B = 1$, $p_B^2 = m^2$. Если же спиральности равны $S_A = I$ и $S_B = -I$, то $p_A^2 = m_*^2$ и $p_B^2 = m_*^2$. В случае $\varepsilon = I$ энергетический спектр триплета кварков (Ψ_A, Ψ_B, Ψ_C) следующий [67]: $E_c^2 = m^2 + |\vec{p}|^2$;

$$E_A^2 = m^2 + \left\{ \frac{|\vec{p}| + \frac{1}{2}a}{\sqrt{p^2 + m^2}} + \frac{1}{2}a \right\}^2 ; \quad E_B^2 = m^2 + \left\{ \frac{|\vec{p}| - \frac{1}{2}a}{\sqrt{p^2 + m^2}} - \frac{1}{2}a \right\}^2 . \quad (8.5)$$

Спектр энергий E_A и E_B при $|\vec{p}| \rightarrow 0$ и $\frac{|\vec{p}|}{a} \gg 1$ имеет лишь два различных значения $E^2 = m^2 \pm \frac{1}{2}a$, а в общем случае таких значений E^2 — четыре. Это указывает на возможность вырождения спектра. Заметим также, что при $\varepsilon = 0$ имеется также лишь два значения E^2 . Наличие такого вырождения в общем случае весьма затрудняет построение волнового пакета, т.к. при $|\vec{p}| \rightarrow 0$ происходит "перестройка" спектра энергии (8.5), которая, очевидно, соответствует перестройке симметрии, а соответственно и должно происходить изменение набора базисных волновых функций, по которому строится волновой пакет. Рассмотрение скалярного уравнения КГФ приводит к спектру, который имеет значительное сходство с рассмотренным выше с тем лишь отличием, что имеется вырождение по спину. Так, для триплета (ψ_A, ψ_B, ψ_C) спектр энергий следующий:

$$E_{A,B}^2 = \vec{p}^2 + m_*^2 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 (p_i \sqrt{\lambda_i})^2} ; \quad (8.6)$$

$$m_*^2 = m^2 \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4m^2} \right).$$

Существенным отличием найденного спектра для постоянного однородного неабелева поля, задаваемого постоянными неабелевыми потенциалами, от абелева задания является его непрерывность.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения КГФ:

$$\left[(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \delta^{AB} - 2ig(A_\mu)^{AB} \partial^\mu + g^2 (A_\mu A^\mu)^{AB} \right] \psi^B = 0, \quad (8.7)$$

где $A_\mu = A_\mu^a \frac{\tau^a}{2}$, $(\tau^a)_{bc} = i \varepsilon_{abc}$ — для группы $SU(2)$ в присоединенном представлении в полях, которые задаются потенциалами вида (5.15). Тогда решение этого уравнения будем искать среди функций, представимых следующим образом: $\psi^B = \psi^B(t) \exp(-i \vec{p} \vec{x})$. После подстановки в уравнение КГФ явного выражения для потенциалов поля и волновых функций получим уравнение для функций $\psi^B(t)$:

$$\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \vec{p}^2 + m^2 + 2f^2(t) \right) \delta^{AB} - 2f(t) (p_a \tau_a)^{AB} \right] \psi^B(t) = 0. \quad (8.8)$$

Рассмотрим уравнение (8.8) в простейшем случае $|\vec{p}| = 0$, при этом придем к хорошо известному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2(t)\right)\varphi(t) = 0, \quad (8.9)$$

где $\omega^2(t) = m^2 + f^2(t)$. Это уравнение гармонического осциллятора с переменной частотой. Подобное рассмотрение такой системы проведено, например, в [68]. Так как функция $f(t)$ – периодическая, то в общем случае имеют место и неустойчивые решения – параметрический резонанс (если параметры попадают в ту область, в которой возможно его возникновение). Совсем иначе обстоит дело с решениями уравнения Дирака:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t - m + \frac{1}{2}g A_a^{\mu} \lambda^a \gamma_{\mu}\right]\Psi = 0. \quad (8.10)$$

Рассмотрим группу $SU(2)$, тогда λ^a – матрицы Паули, а для $\gamma^{\mu} A_a^{\mu} \lambda^a$ имеем

$$\gamma^{\mu} A_a^{\mu} \lambda^a = (G_1 \gamma^1 + G_2 \gamma^2 + G_3 \gamma^3) f(t).$$

Как и прежде, будем полагать, что $|\vec{p}| = 0$ и рассмотрим оператор $Q = (G_i \gamma^i)$. Можно показать, что построенные с ним операторы

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(3 - iQ\gamma^1\gamma^2\gamma^3); \quad \Pi_2 = \frac{1}{4}(1 + iQ\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \quad (8.11)$$

являются проекционными и удовлетворяют условиям

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1; \quad \Pi_1^2 = \Pi_1; \quad \Pi_2^2 = \Pi_2. \quad (8.12)$$

Кроме того, действие оператора Q на Π_1 и Π_2 определяется соотношениями:

$$Q\Pi_1 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Pi_1; \\ Q\Pi_2 = -3i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Pi_2.$$

Воспользовавшись этими свойствами проекционных операторов Π_1 и Π_2 , представим решение уравнения (8.10) в виде

$$\Pi_{1,2} \varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}. \quad (8.13)$$

Подстановка (8.13) в (8.10) приводит к уравнению вида

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m + \frac{1}{2} g a_{1,2} f(t) \right) \varphi_{1,2}(t) = 0, \quad (8.14)$$

где $a_1 = i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $a_2 = -3i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. После квадрирования уравнения (8.14) получим следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2 + \frac{1}{4} g^2 b_{1,2} f^2(t) - \frac{i}{2} b_{1,2} \gamma^5 g f'(t) \right) \varphi_{1,2}(t) = 0, \quad (8.15)$$

где $b_{1,2} = 1, -3$. Полученное уравнение (8.15) легко приводится к диагональному виду. Именно, положим

$$\varphi_{1,2}^{(+,-)} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) R_{1,2}^{(+,-)},$$

тогда для $R_{1,2}^{(+,-)}$ приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2 + \left(\frac{g}{2} b_{1,2} f \pm \text{arctg} \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} |R| \right)^2 \right) R_{1,2}^{(+,-)} = 0. \quad (8.16)$$

Заметим, что в отличие от уравнения Клейна-Гордона уравнение (8.16) всегда имеет устойчивые решения. Это можно показать, если заметить, что выражение, стоящее в скобках:

$$|R^2| \left(m^2 + \left(\frac{g}{2} b_{1,2} f \pm \text{arctg} \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} |R| \right)^2 \right) = U^2 = \text{const},$$

является интегралом движения уравнения (8.16). Здесь $R = R_1 \pm iR_2 = R_{1,2}^{(+,-)}$. Таким образом, получим, что $|R^2| < U^2/m^2$, откуда и следует устойчивость решений уравнения Дирака в рассматриваемом поле при всех значениях параметров [69].

Укажем, что уравнение (8.16) может быть записано в суперсимметричном виде.

Далее, следуя работе [70], рассмотрим решение уравнений Дирака в группе $SU(2)$ в поле плоской цветовой волны. Тогда уравне-

ния имеют вид

$$\left[i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} g \gamma^\mu k_\mu (\beta(kx)(n^1x) + c(kx)(n^2x)) \sigma^a m^a + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma^\mu k_\mu \sigma^a k^a(kx) - m \right] \Psi = 0, \quad (8.17)$$

где m^a — вектор в цветовом пространстве; $m_a m^a = 1$; $\Psi = (\psi_A, \psi_B)$ — дуплет фермионов. Полагая, что функция $k^a = \varepsilon^{abc} m'^b m^c / g$, где штрих означает производную по (kx) , и

$$\Psi = \frac{1}{2} (1 + \tau m^a \sigma^a) U \begin{pmatrix} S_1(kx) \\ S_2(kx) \end{pmatrix}, \quad \tau = \pm 1,$$

для четырехкомпонентного спинора получим уравнение

$$\left[i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{\tau}{2} g \gamma^\mu k_\mu (\beta(n^1x) + c(n^2x)) - m \right] U = 0,$$

которое совпадает с уравнением Дирака, для фермиона с зарядом $0,5\tau g$ в поле плоской волны, заданной вектор-потенциалом:

$$A_\mu = k_\mu (\beta(kx)(n^1x) + c(kx)(n^2x)), \quad (8.18)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$U = \left(1 - \frac{\tau g}{4k\rho} \hat{k} \hat{A} \right) \frac{u_0}{\sqrt{2\rho_0}} \exp(i\mathcal{F}); \\ \mathcal{F} = \tau (Ax) - (px) + \frac{\tau g}{2k\rho} \int (A\rho + \frac{1}{4}\tau g A^2) d(kx). \quad (8.19)$$

Здесь $A_\mu = B n'_\mu + C n^2_\mu$; $B = \int \beta(kx) d(kx)$ и $C = \int c(kx) d(kx)$; u_0 удовлетворяет уравнению $(\hat{\beta} - m)u_0 = 0$. Соответственно для столбца S получим уравнение

$$\left(i \partial_\gamma + \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \sigma^a m'^b m^c \right) \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = 0,$$

решения которого таковы:

$$S = \exp\left(\frac{i\eta}{2} \int \varphi' \cos \Theta d\gamma\right) \begin{pmatrix} \eta e^{-i\varphi/2} \sqrt{\frac{1+\eta \cos \Theta}{2}} \\ e^{i\varphi/2} \sqrt{\frac{1-\eta \cos \Theta}{2}} \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

Здесь $\eta = \pm 1$; $\varphi = \arctg(m^2/m')$; $\theta = \arctg \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{m_3}$, т.е. вектор $\vec{S}$ пропорционален собственному вектору оператора $\vec{\sigma}^a m^a$, отсюда имеем, что знак заряда τ связан с выбором знака $\eta = \pm 1$ действием оператора

$$\Pi = \frac{1}{2} (1 + \tau \vec{\sigma}^a m^a)$$

проекции. А т.к. $\vec{\sigma}^a m^a \vec{S} = \eta \vec{S}$, то $\tau = \eta$.

Изучим теперь решение Дирака в поле монополя Полякова-Тософты [70].

Уравнение имеет вид

$$(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) \delta_{mn} + \frac{1}{2} \hbar \vec{\tau}_{mn} [\vec{\alpha} \times \vec{n}] \Psi_m = E \Psi_n, \quad (8.21)$$

где $\hbar = m r / (g h (m r) - 1)$, $\vec{n} = \vec{r} / r$. Учитывая свойства стандартных дираковских матриц, получим

$$\vec{\sigma} \vec{p} \chi^\pm - \frac{1}{2} \hbar [\vec{\sigma} \times \vec{n}]^a \sigma^a \chi^\pm \mp m \chi^\pm = E \chi^\pm, \text{ где}$$

мы использовали $\psi = \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^- \end{pmatrix}$, $\chi_{im}^\pm = \chi_{in}(\sigma^2)_{nm}$. В случае $J = 0$ ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} + \vec{T}$) получим

$$\chi_{im}^\pm = \delta_{im} G^\pm(r) \pm \sigma_{im}^a n_a P^\pm(r).$$

Подставляя $\chi^\pm$ в уравнение Дирака, получим уравнения на радиальные части волновой функции $G(r)$ и $P(r)$:

$$\left(\frac{d}{dr} - A\right) G^\pm = i(E \pm m) P^\pm;$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + A\right) P^\pm = i(E \pm m) G^\pm.$$

Отсюда найдем

$$G^\pm = \frac{c^\pm}{r} \left[\left(\frac{2ik}{m} + \text{th} \frac{mr}{2} \right) e^{-ikr} - \left(\frac{2ik}{m} - \text{th} \frac{mr}{2} \right) e^{ikr} \right];$$

$$P^\pm = -\frac{c^\pm}{r} \frac{k}{E \pm m} \left[\left(\frac{2ik}{m} + \text{th} \frac{mr}{2} \right) e^{-ikr} + \left(\frac{2ik}{m} - \text{th} \frac{mr}{2} \right) e^{ikr} \right],$$

где $k^2 = E^2 - m^2$; $c^+ = i/2$; $c^- = i(k/E + m)/2$.

Таким образом, получим $\Psi' = u \Psi$, где

$$u = \begin{pmatrix} \omega_1 e/2 & e^{i\varphi} \sin \theta/2 \\ -e^{-i\varphi} \sin \theta/2 & \omega_2 e/2 \end{pmatrix}.$$

и тогда при $T_3 = +1/2$:

$$\Psi' = \frac{1}{2} S e^{ikz} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 e^{i\varphi} \\ \cos \theta/2 \\ -\frac{k}{E+m} \sin \theta/2 e^{-i\varphi} \\ \frac{k}{E+m} \cos \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

Здесь $S = e^{i2\delta} = (1 - m/2ik)/(1 + m/2ik)$.

Соответственно

при $T_3 = -1/2$ имеем

$$\Psi' = \frac{1}{2} e^{-ikz} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \\ \frac{k}{E+m} \cos \theta/2 \\ \frac{k}{E+m} \sin \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Найдем также некоторые свойства решений уравнения Дирака (в группе $SU(2)$) в поле, задаваемом потенциалом [72]:

$$g A_0^a = 0, \quad g A_i^a = \varepsilon^{aik} n_k A(r). \quad (8.24)$$

Мы также ограничимся случаем $\vec{J} = 0$. Тогда решения уравнения Дирака

$$(i \gamma^\mu D_\mu - m) \Psi = 0; \quad i(D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu + m \bar{\Psi} = 0, \quad (8.25)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$, $A_\mu = A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$ для группы $SU(2)$, после подстановки $\Psi = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} X^\dagger \\ Y^\dagger \end{pmatrix}$, где X и Y можно представить в виде $\sigma_2 X^{\dagger, \dagger} = G_+^{\dagger, \dagger} + (\vec{\kappa} \vec{\varepsilon}) G_-^{\dagger, \dagger}$, $\sigma_2 Y^{\dagger, \dagger} = D_+^{\dagger, \dagger} + (\vec{\kappa} \vec{\varepsilon}) D_-^{\dagger, \dagger}$. Для функций $G(r)$ и $D(r)$ придем к следующим уравнениям:

$$\left(\frac{d}{dr} - A\right) G_+^{\dagger, \dagger} = i(E \pm m) G_-^{\dagger, \dagger}; \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + A\right) G_-^{\dagger, \dagger} = i(E \mp m) G_+^{\dagger, \dagger};$$

$$\left(\frac{d}{dr} + A\right) D_+^{\dagger, \dagger} = i(E \mp m) D_-^{\dagger, \dagger}; \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} - A\right) D_-^{\dagger, \dagger} = i(E \mp m) D_+^{\dagger, \dagger},$$

верхние знаки берутся при подстановке функций $G^{\dagger}$ и $D^{\dagger}$, а нижние — функций $\bar{\Psi}^{\dagger}$ и $G^{\dagger}$. После перехода к квадрированным уравнениям и введения новых переменных для кварка $F_{\pm}^{\dagger}(r) = r G_{\pm}^{\dagger}(r)$ и антикварка

ка $\bar{F}_{\pm}^q(\tau) = \tau D_{\pm}(\tau)$ получим системы, которые могут быть представ-
лены в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{d\tau^2} + U_+(\tau) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{d\tau^2} + U_-(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_+ \\ F_- \end{pmatrix} = \Delta^2 \begin{pmatrix} F_+ \\ F_- \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

где эффективная потенциальная энергия $U_{\pm} = \Phi^2 \pm \Phi'$, а $\Delta^2 = E^2 - m^2$.
Здесь мы ввели новую функцию $\Phi = \frac{1}{\tau} + \xi A(\tau)$, у которой знак
 $\xi = 1$ соответствует кварку, а $\xi = -1$ - антикварку. Мы опустили
индексы $\uparrow, \downarrow$, т.к. система (8.26) явно от них не зависит, что
указывает на отличие соответствующих решений лишь на постоянную
интегрирования, определяемую из начальных условий. Легко видеть,
что (8.26) можно представить в суперсимметричном виде (см., напри-
мер, [73-75]):

$$H\mathcal{F} = \Delta^2 \mathcal{F}, \quad (8.27)$$

где $H = p^2 + \Phi^2 + \mathcal{Q}_3 \Phi'$; $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_+ \\ F_- \end{pmatrix}$; $p = i \frac{d}{d\tau}$. Таким образом, вопрос
о динамике кварка (антикварка) в хромомagnetном поле сведен к на-
хождению решений $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной квантовой механике. Это
интересно, т.к. для суперсимметричной квантовой механики мы зна-
ем свойства решений и спектра энергий. Следуя традиции, введем
операторы суперзарядов $\hat{Q}_{\pm} = (p \pm i\Phi)\mathcal{Q}_{\mp}$, которые коммутируют с опе-
ратором H , что указывает на имеющееся в системе вырождение спек-
тра энергии. Оператор $\hat{f} = \mathcal{Q}_3/2$ также коммутирует с H . Можно
проверить, что операторы $H = \{\hat{Q}_+, \hat{Q}_-\}/2$, $\hat{Q}_+$, $\hat{Q}_-$ образуют су-
пералгебру. Классификацию волновых функций, соответствующих дан-
ному значению Δ_n^2 , можно провести по собственным значениям опе-
раторов $\hat{Q}_{\pm}$ и $\hat{f}$. При этом если $\mathcal{F}_{+1/2}^{(n)} = \begin{pmatrix} F_+^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}$ волновая функция,
соответствующая значению оператора $\hat{f} \rightarrow \hat{f} = +1/2$, является решением
уравнения (8.27) с энергией Δ_n^2 , то $\hat{Q}_+ \mathcal{F}_{+1/2}^{(n)}$ также является

решением о тем же собственным значением энергии. Известно, что спектр Δ_n^2 ограничен снизу $\Delta_n^2 \geq 0$, следовательно, для кварка (антикварка) $|E_n| \geq m$. Явный вид основного состояния (которое, как известно, невырождено) суперсимметричной системы (а значит компонент волновой функции кварка) $\Delta_0^2 = 0$ следующий:

$$F_{\pm 1/2}^{(0)} = \begin{pmatrix} F_{\pm}^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad F_{\pm 1/2}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{\pm}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (8.28)$$

где $F_{\pm}^{(0)}(r) = N \exp(\pm \int \Phi(r) dr) = N r^{\pm 1} \exp(\pm \int A(r) dr)$.

Соответствующее явное выражение для функции $F_{\pm 1/2}^{(0)}$ выбирается из соображений возможности нормировки. Последнее условие, очевидно, накладывает соответствующие ограничения на явный вид потенциалов поля $A(r)$, при которых возможна нормировка волновых функций. Для гладких функций $A(r)$ существенным является вопрос о поведении их на бесконечности и в нуле. Это, очевидно, следует из рассмотрения вопроса о нормировке волновых функций кварков в соответствующих полевых конфигурациях, являющихся решениями классических уравнений движения поля. В частности, можно указать, что уравнения, рассмотренные нами выше (см., например, (8.15)), имеют суперсимметричный вид. Соответствующие свойства суперсимметрии уравнения Дирака в неабелевых хромомagnetных полях детально исследовались в работе [76].

§ 9. Использование алгебраических структур при построении точно решаемых волновых уравнений

Релятивистские волновые уравнения Клейна-Гордона-Фока и Дирака для заряда во внешнем электромагнитном поле являются основой квантовой электродинамики [36]. Это обуславливается тем, что в квантовой механике соответствующие уравнения интерпретируются как

одночастные, а их решения, волновые функции, полностью описывают движение частиц (бозонов и фермионов). Кроме того, в КЭД на основе точных решений уравнений строится представление Фейнмана, в котором учтено взаимодействие частиц с внешним полем.

В квантовой хромодинамике, интенсивно развивающейся в течение пятнадцати лет, большое внимание уделяется исследованию взаимодействия кварков с внешним калибровочным полем [77-79]. Имеется и ряд трудностей, связанных с учетом внешнего поля, поскольку в нелинейных теориях (каковой является, например, модель Янга-Миллса) применение пертурбативных методов приводит к необходимости их более глубокого понимания и корректного использования.

Таким образом, нахождение точных решений волновых уравнений является важной и актуальной задачей. Не менее серьезной является проблема построения теории возмущений для тех классов потенциалов, которые не допускают нахождения точных решений.

В ряде случаев задача о нахождении точных решений уравнений Клейна-Гордона-Фока и Дирака фактически может быть сведена к поиску точных решений стационарного уравнения Шредингера (УШ). Соответствующая процедура хорошо изучена и описана в литературе [36]. К настоящему времени известно большое число потенциалов, для которых найдены точные решения УШ. Однако имеется один потенциал (являющийся своего рода "пробным камнем"), который представляет практический интерес во многих областях физики, будь то физика твердого тела, лазерная техника или квантовая хромодинамика. Таким "пробным камнем" является потенциал ангармонического осциллятора. Получение спектра собственных значений для этого потенциала весьма искусственно, а точные волновые функции вообще не были найдены. Обычные методы теории возмущений (ТВ) приводят к асимптотическим рядам, работать с которыми затруднительно. Такое положение было обусловлено отсутствием разработанных математических методов,

позволяющих довольно просто решать поставленные задачи. Вместе с тем в последнее время в физику активно проникают красивые по форме и глубокие по содержанию алгебраические методы. В частности, основываясь на алгебраическом подходе и изучая симметрию уравнений Клейна–Гордона–Фока и Дирака, удалось построить теорию разделения переменных для этих уравнений. Результатом явилось получение новых точных решений волновых релятивистских уравнений и их классификация [36]. Однако к решению задачи можно подойти несколько иным образом, т.е. пойти в обратную сторону. Используя генераторы соответствующих групп, строить дифференциальные уравнения, наперед зная собственные функции используемых и получаемых операторов. Собственные числа при таком подходе находят из решения алгебраической задачи. Этот метод и будет описан нами ниже, где в качестве операторов выбраны различные координатные представления генераторов группы $SU(2)$. Очевидно, что аналогичная процедура может быть реализована при использовании любых операторов, спектр которых и собственные функции нам известны.

9.1. Построение точно решаемых дифференциальных уравнений

Вначале мы опишем метод построения точно решаемых уравнений, используя представление группы $SU(2)$. Известно [82], что любое неприводимое унитарное представление группы $SU(2)$ однозначно определяется неотрицательным числом s , целым или полуполым. Это представление $T_s(g)$ может быть реализовано формулой

$$[T_s(g)f](\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\alpha\tilde{x} + \gamma\tilde{y}, \beta\tilde{x} + \delta\tilde{y}), \quad (9.1.)$$

где

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Рассмотрим пространство R_s однородных многочленов $f(\tilde{x}, \tilde{y})$ степени не выше $2s$. В базисе, определяемом соотношением:

$$e_k = \tilde{x}^{s-k} \tilde{y}^{s+k}, \quad (9.2.)$$

$$k = -s, -s+1, \dots, 0, \dots, s-1, s,$$

действие генераторов группы на функции e_k определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E_- e_k &= (s+k) e_{k-1}; \\ E_+ e_k &= (s-k) e_{k+1}; \\ E_0 e_k &= k e_k. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Укажем, что базис (9.2) ортонормирован (см., например, [81]); последнее свойство, как известно, оказывается весьма существенным при решении задачи на нахождение собственных значений и собственных векторов соответствующих операторов.

В пространстве R_s операторы E_+ , E_- , E_0 можно записать в дифференциальной форме [82]:

$$\begin{aligned} E_- &= \tilde{x} \partial_{\tilde{y}}; \\ E_+ &= \tilde{y} \partial_{\tilde{x}}; \\ E_0 &= \frac{1}{2} (\tilde{y} \partial_{\tilde{y}} - \tilde{x} \partial_{\tilde{x}}). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы (9.4) удовлетворяют известным коммутационным соотношениям группы $SU(2)$.

Нашей целью является построение с помощью операторов (9.4) двумерного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. Последнее можно осуществить, построив, например, квадратичную форму, элементами которой являются приведенные выше операторы группы $SU(2)$.

Заметим, что, вообще говоря, по описанной ниже процедуре можно построить точно решаемое дифференциальное уравнение произвольного порядка. Однако в этом случае мы должны использовать уже не квадратичную форму, как указывалось выше, а форму соответствующего

порядка (третьего, четвертого и т.д. порядков). При этом нахождение собственных значений формально сведется к решению алгебраического уравнения более высокого порядка. В остальном же решение задачи будет аналогичным предложенному.

В целях упрощения проведения классификации дифференциальных уравнений второго порядка мы ограничимся случаем, когда коэффициенты при старших производных постоянные.

Для того, чтобы обеспечить постоянство коэффициентов при старших производных, сделаем замену переменных

$$\tilde{x} = e^{\xi}, \quad \tilde{y} = e^{\eta} \quad (9.5)$$

После такой замены вместо операторов (9.4) будем иметь

$$\begin{aligned} E_- &= \exp(\xi - \eta) \partial_{\eta} ; \\ E_+ &= \exp(\eta - \xi) \partial_{\xi} ; \\ E_0 &= \frac{1}{2} (\partial_{\xi} - \partial_{\eta}) . \end{aligned} \quad (9.6)$$

В качестве примера построения дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрим квадратичную форму

$$H = E_0^2 + \alpha \{E_+, E_-\} + 2\alpha E_0 + \beta E_+ + \gamma E_- , \quad (9.7)$$

где

$$\{E_+, E_-\} = E_+ E_- + E_- E_+ . \quad (9.8)$$

Подставляя в (9.7) явный вид E_+, E_-, E_0 в соответствии с (9.6), получим

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4} \partial_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2} (4\alpha - 1) \partial_{\xi\eta}^2 + \frac{1}{4} \partial_{\eta\eta}^2 + \\ &+ (\alpha - \alpha + \beta e^{\eta-\xi}) \partial_{\xi} + (\alpha + \alpha + \gamma e^{\xi-\eta}) \partial_{\eta} . \end{aligned} \quad (9.9)$$

В соответствии со стандартной классификацией дифференциальных уравнений второго порядка имеем, что при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ оператор H будет оператором эллиптического типа, при $\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{1}{2}$ — параболического типа и при $\alpha < 0$ или $\alpha > \frac{1}{2}$ — оператором гиперболического

кого типа.

Далее рассмотрим случай параболического уравнения. Положив, например, $\alpha = 0$, будем иметь

$$\frac{1}{4} u_{\xi\xi} + \frac{1}{4} u_{\eta\eta} - \frac{1}{2} u_{\xi\eta} + (\beta e^{\eta-\xi} - \alpha + \frac{1}{4}) u_{\xi} + (\gamma e^{\xi-\eta} + \alpha + \frac{1}{4}) u_{\eta} = 0. \quad (9.10)$$

Уравнение (9.10) можно привести к каноническому виду, произведя стационарную замену:

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta. \quad (9.11)$$

В результате получим

$$u_{yy} + (\frac{1}{2} + \beta e^{-y} + \gamma e^y) u_x - (2\alpha - \beta e^{-y} + \gamma e^y) u_y = 0. \quad (9.12)$$

С помощью калибровочного преобразования вида

$$u = \varphi(y) \psi(x, y), \quad (9.13)$$

здесь $\varphi(y) = \exp(\alpha y + \frac{\beta}{2} e^{-y} + \frac{\gamma}{2} e^y)$, можно избавиться от члена с u_y в (9.12):

$$\psi_{yy} + (\frac{1}{2} + \beta e^{-y} + \gamma e^y) \psi_x + [\frac{1}{2}(\beta e^{-y} + \gamma e^y) - \frac{1}{4}(2\alpha - \beta e^{-y} + \gamma e^y)^2] \psi = 0. \quad (9.14)$$

Решения уравнения (9.14) записываются в виде

$$\psi(x, y) = \exp(-\alpha y - \frac{1}{2} \beta e^{-y} - \frac{1}{2} \gamma e^y + lx) \sum_{k=-s}^s C_k \varphi_k(y). \quad (9.15)$$

Коэффициенты C_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(-\gamma + k^2 + 2\alpha k) C_k + \beta \sqrt{(s-k)(s+k+1)} C_{k+1} + \gamma \sqrt{(s+k)(s-k+1)} C_{k-1} = 0; \quad (9.16)$$

$$C_{s+1} = C_{-(s+1)} = 0, \quad k = -s, \dots, 0, \dots, s.$$

Собственные значения λ находятся из решения уравнения

$$\det \| M - \lambda E \| = 0, \quad (9.17)$$

где матрица M для оператора (9.7) имеет вид

$$\begin{pmatrix} s^2 + 2\alpha s & \beta & 0 & 0 & \dots \\ (s-1)\gamma & (s-1)^2 + 2\alpha(s-1) & 2\beta & 0 & \dots \\ 0 & (s-1)\gamma & (s-2)^2 + 2\alpha(s-2) & 3\beta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

9.2. Построение многопараметрического одномерного уравнения

Шредингера и нахождение его решений

В качестве генераторов группы $SU(2)$ возьмем следующие:

$$H = z \partial_z - S; \quad E_+ = 2zS - z^2 \partial_z; \quad E_- = \partial_z. \quad (9.19)$$

Легко проверить, что эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[H, E_+] = E_+; \quad [H, E_-] = -E_-; \quad [E_+, E_-] = 2H.$$

Для построения оператора Шредингера $\hat{\mathcal{D}}_z = U(\gamma)$, очевидно, необходимо выписать квадратичную форму переменных H, E_+ . Мы выберем следующий вид квадратичной формы:

$$H^2 + 2\alpha H + \beta E_+ + \gamma E_-. \quad (9.20)$$

Этот выбор определен тем, что она может быть связана с гамильтонианом анизотропного легкососного парамагнетика [83]. Подставляя в нее явное выражение для операторов (9.19), после замены переменной $z \rightarrow e^{\xi}$ (которая необходима для обращения в единицу коэффициента при старшей производной ∂_z^2) получим оператор, содержащий первую производную. Для обращения в нуль коэффициента при первой производной проведем калибровочное преобразование, т.е. оператор $\hat{\mathcal{D}}_z$ заменим на $\partial_\xi + (\ln \chi(\xi))'$, что соответствует поиску решения уравнения $\psi(\xi)$ в виде произведения функций $\chi(\xi)\varphi(\xi)$. На калибровочную функцию мы наложим условие

$$\frac{d}{d\xi}(\ln \chi(\xi)) = s - \alpha + \frac{\beta}{2} e^{\xi} - \frac{\gamma}{2} e^{-\xi}, \quad (9.21)$$

которое приводит к следующему виду функции $\chi(\xi)$:

$$\chi(\xi) = C \exp \left[(s - \alpha) \xi + \frac{\beta}{2} e^{\xi} + \frac{\gamma}{2} e^{-\xi} \right]. \quad (9.22)$$

В результате описанной процедуры мы приходим к следующему уравнению Шредингера для функции $\varphi(\xi)$:

$$\left[\partial_{\xi}^2 - \alpha^2 + \frac{1}{2} \beta \gamma - \frac{1}{4} \beta^2 e^{2\xi} - \frac{1}{4} \gamma^2 e^{-2\xi} + \right. \\ \left. + \beta(s - \alpha + \frac{1}{2}) e^{\xi} + \gamma(s - \alpha - \frac{1}{2}) e^{-\xi} \right] \varphi(\xi) = 0. \quad (9.23)$$

Поскольку мы проводим построение УШ, используя генераторы группы $SU(2)$: $H, E_{\pm}$, для которых известны базисные векторы, действие на них этих генераторов, скалярное произведение (например, как это выполнено в работе [81]) и показана ортогональность этой системы векторов, то можно сформулировать задачу о нахождении собственных значений. В случае непрерывного значения параметра s решение задачи о нахождении собственных значений оператора Шредингера, написанного выше, связано с нахождением собственных чисел следующей бесконечной матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta(s - \alpha - 1) & 0 & 0 & \dots \\ (a+1)^2 + 2\alpha(a+1) & \beta(s - \alpha) & 0 & \dots \\ \gamma(s + a + 1) & a^2 + 2\alpha a & \beta(s - \alpha + 1) & \dots \\ 0 & \gamma(s + a) & (a-1)^2 + 2\alpha(a-1) & \dots \\ 0 & 0 & \gamma(s + a - 1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (9.24)$$

Если $\alpha = \pm s$, то получим бесконечную матрицу. Так, при $\alpha = s - 1$ имеем следующий определитель при решении задачи на собственные значения:

$$\det(J - \lambda E) = \det J_0 = 0;$$

$$J_0 = \begin{vmatrix} s^2 - 2\alpha s - \lambda & \beta & 0 \\ \gamma 2s & (s-1)^2 - 2\alpha(s-1) - \lambda & 2\beta \\ 0 & \gamma(2s-1) & (s-2)^2 - 2\alpha(s-2) - \lambda \\ 0 & 0 & \gamma 2(s-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (9.25)$$

Вычислив этот бесконечный определитель, можно использовать рекуррентные соотношения и цепные дроби. Например, можно увидеть, что справедливо соотношение

$$J_0 = [s(s+2\alpha) - \lambda] J_1 - \beta \gamma 2s J_2, \quad (9.26)$$

где J_1 и J_2 — определители, полученные из J_0 последовательным вычеркиванием левого столбца и верхней строки. Более того, продолжая этот процесс, получим рекуррентную формулу

$$J_n = [(s-n)(s-n+2\alpha) - \lambda] J_{n+1} - n\beta\gamma(2s-n) J_{n+2}. \quad (9.27)$$

Кроме этих соотношений при оценке собственных значений матрицы может оказаться полезной следующая цепная дробь:

$$\frac{J_0}{J_1} = s(s+2\alpha) - \lambda - \frac{2\beta\gamma s}{[(s-1)(s-1+2\alpha) - \lambda]} + \dots \quad (9.28)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, для которых можно точно написать с.з. матрицы. Как упоминалось выше, для целого или полужелого значения параметра матрица может быть приведена к матрице Якоби специального вида порядка $(2s+1)$, у которой все собственные значения действительны [84, 85] (отметим, что действительность значений собственных чисел в квантовой механике указывает на устойчивость состояний). Так, в случае $s = \frac{1}{2}$ для с.з. имеем выражение

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}.$$

При $S = I$ собственные значения находятся из решения соответствующего кубического уравнения и могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_1 = -2\tau \cos(\varphi/3), \lambda_2 = \tau [\cos(\varphi/3) + \sqrt{3} \sin(\varphi/3)];$$

$$\lambda_3 = \tau [\cos(\varphi/3) - \sqrt{3} \sin(\varphi/3)];$$

$$q = \frac{1}{27} - \frac{4\alpha^2 - 2\beta\delta}{3}; \quad p = -\frac{1}{9} - \frac{4\alpha^2 + 4\beta\delta}{3}.$$

Здесь и далее положим $\cos 2\varphi = q\tau^{-3}$, $\tau = -|p|^{-1/2} \operatorname{sign} q$.

Из приведенных выражений видно, что в частном случае $\alpha = 0$ и $\beta = \delta = B$. Эти собственные значения совпадают с результатами, приведенными в [96]. Рассмотрение матрицы Якоби показывает, что при $\alpha = 0$ уравнение для собственных значений порядка $(2S+1)$ распадается на произведение двух уравнений порядка $(S+1/2)$ (для полуцелых S) или соответственно S и $(S+1)$ (для целых S). Последнее позволяет точно вычислить спектр собственных значений вплоть до $S = 7/2$; в этом случае мы приходим к двум уравнениям четвертой степени. Этот результат является следствием симметрии матриц Якоби рассматриваемого типа. Ниже приведены собственные значения для различных значений параметра S до $5/2$;

$S = 2$:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{2} + 4B^2}; \quad \lambda_4 = \tau [\cos(\varphi/3) + \sqrt{3} \sin(\varphi/3)];$$

$$\lambda_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{2} + 4B^2}; \quad \lambda_5 = \tau [\cos(\varphi/3) - \sqrt{3} \sin(\varphi/3)];$$

$$\lambda_3 = -2\tau \cos(\varphi/3);$$

$$q = -\frac{35}{27} + \frac{32}{3} B^2; \quad p = -\frac{13}{9} - \frac{16}{3} B^2.$$

$$S = 5/2: \lambda_{1,4} = \frac{1}{4} + 2\tau_{1,2} \cos(\varphi_{1,2}/3);$$

$$\lambda_{2,5} = \frac{1}{4} - \tau_{1,2} (\cos(\varphi_{1,2}/3) + \sqrt{3} \sin(\varphi_{1,2}/3));$$

$$\lambda_{3,6} = \frac{1}{4} - \tau_{1,2} (\cos(\varphi_{1,2}/3) - \sqrt{3} \sin(\varphi_{1,2}/3)),$$

где

$$q_{1,2} = -\frac{32}{3} B^2 \mp \frac{4}{3} B - \frac{176}{27}; \quad p_{1,2} = -\frac{16}{3} B^2 \mp \frac{8}{3} B - \frac{28}{9};$$

$$\cos \varphi_i = q_i / \tau_i^2, \quad i = 1, 2.$$

На рис. 6, 7, 8 построены графические зависимости собственных значений B для значения параметра $s = 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$. Там же указаны асимптотики значений λ при больших величинах параметра B ($B \gg 2s+1$). Эти асимптотики указывают, что собственные числа при больших значениях параметра B имеют вид веера линейных функций от B . Кроме того, отметим, что в случае целого значения параметра s одно из чисел асимптотически не зависит от параметра B . Для полуцелого s (исключая $s = 1/2$) имеют место зависимости $\lambda_i(B)$, носящие немонотонный характер. Перейдем теперь к решению уравнения (9.23) для потенциала вида $U(\xi)$. Решение УШ, исходя из того, что было сказано выше, представляется в виде

$$\varphi(\xi) = [\chi(\xi)]^{-1} \sum_{n=-s}^{+s} c_n \psi_n(\xi), \quad (9.29)$$

$$\text{где } \psi_n(\xi) = [(s-n)!(s+n)!]^{-1/2} \exp[\xi(s-n)].$$

Несложно убедиться в справедливости этого результата для гамма-мультиманов-линейных комбинаций H и $E_{\pm}$, поскольку сферические функции являются собственными для этих операторов [80-82]. Коэффициенты c_n находятся из решения системы линейных уравнений

$$(n^2 - 2\alpha n - \lambda) c_n + \beta \sqrt{(s-n)(s+n+1)} c_{n+1} + \gamma \sqrt{(s+n)(s-n+1)} c_{n-1} = 0,$$

где $c_{s+1} = c_{-(s+1)} = 0$, $n = -s, \dots, 0, \dots, s$.

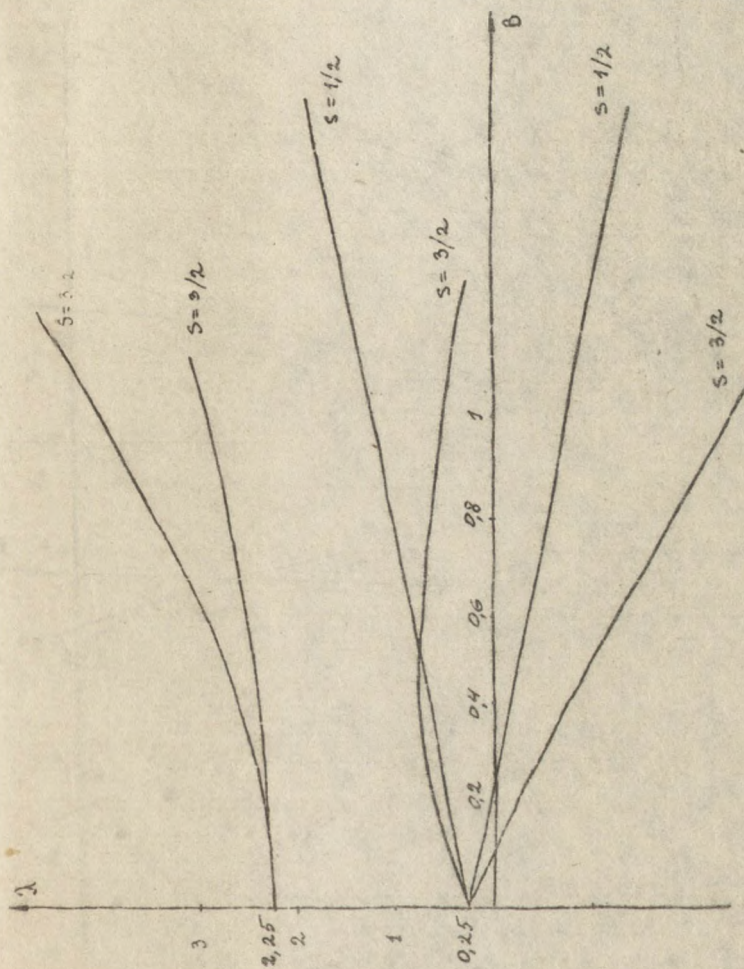


Рис. 6. $s = 1/2$, $s = 3/2$

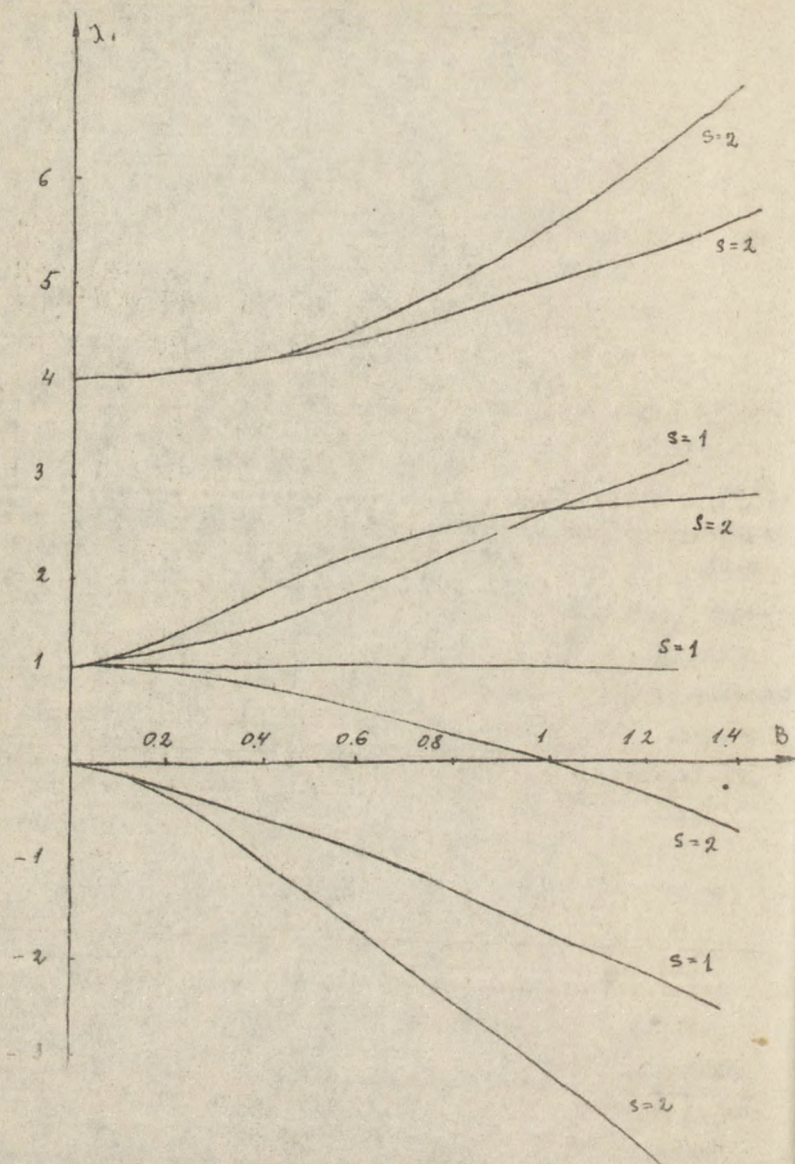


Рис. 7. $s=1$, $s=2$

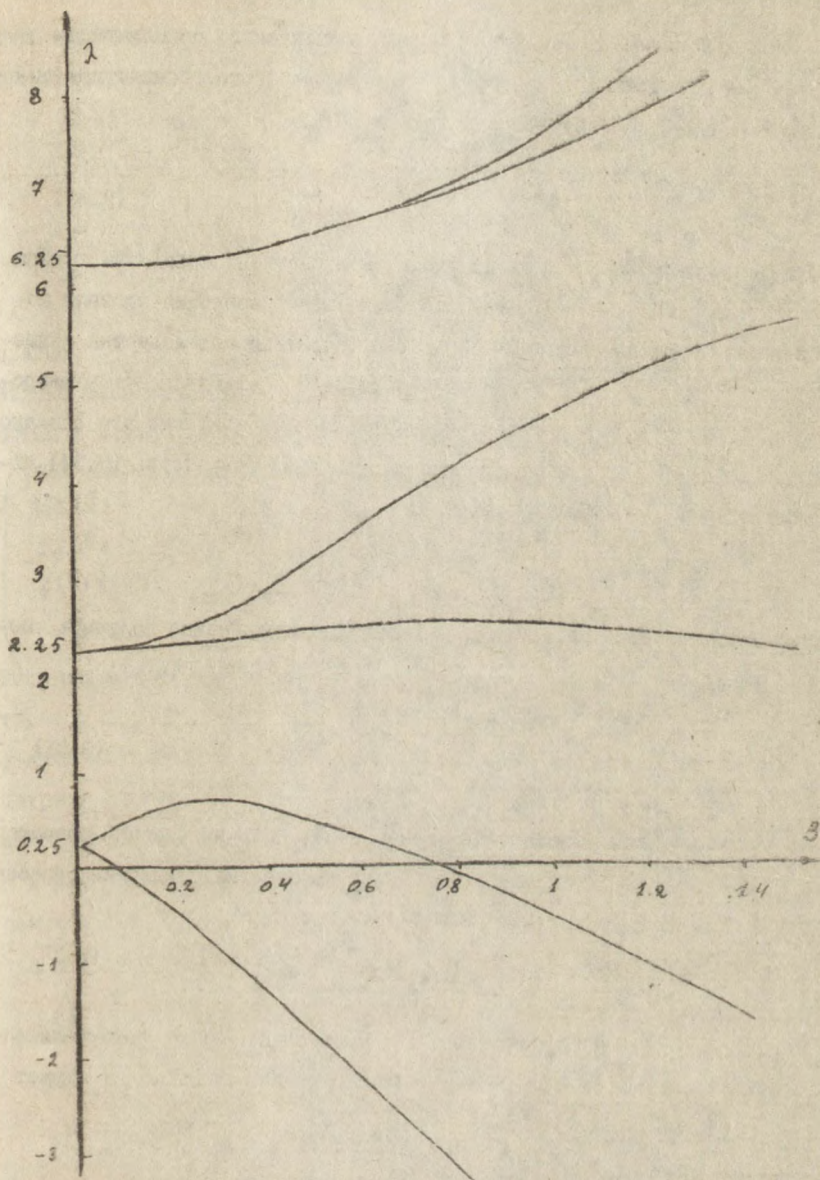


Рис. 8. $S=5/2$
113

9.3. Уравнение Шредингера для ангармонического осциллятора

Для построения оператора $\hat{H}$ ангармонического осциллятора выберем следующие генераторы в группе $SU(2)$:

$$E_+ = \bar{z}^{-1} s + \partial_z ; \quad E_- = \bar{z} s - z^2 \partial_z ; \quad E_0 = -z \partial_z . \quad (9.30)$$

Эти генераторы могут быть получены из известной реализации группы $SU(2)$ [80] после соответствующего преобразования системы координат. Базисные векторы операторов (9.30) хорошо известны и имеют вид $e_k = C_k \bar{z}^k$. Система векторов e_k является ортонормированной, а скалярное произведение определяется так, как это сделано в работе [81]. Коммутационные соотношения операторов (9.30) являются традиционными для групп Ли:

$$[E_+, E_-] = 2E_0 ; \quad [E_0, E_+] = E_+ ; \quad [E_0, E_-] = -E_- .$$

Заметим, что необходимый для нас вид оператора можно получить, построив из операторов (9.30) следующую квадратичную форму:

$$\begin{aligned} E_+^2 + \beta E_+ + \gamma E_- + 2\alpha E_0 = \\ = \partial_z^2 + (\beta - 2\alpha|z| - \gamma z^2 + 2s|z|^{-1}) \partial_z + \\ + \bar{z}^2(s-1) + (\beta|z|^{-1} + \gamma|z|)s . \end{aligned} \quad (9.31)$$

Осуществляя калибровочное преобразование, получим искомый оператор

$$\begin{aligned} \hat{H} = \partial_z^2 - U(z) , \quad \text{в котором потенциал выражается следующим образом:} \\ -U(z) = -\frac{1}{4}\beta^2 + (1+2s)\alpha + [(1+2s)\gamma + \alpha\beta]|z| + \\ + \left(\frac{1}{2}\beta\gamma - \alpha^2\right)z^2 - \alpha\gamma|z|^3 - \frac{1}{4}\gamma^2|z|^4 . \end{aligned} \quad (9.32)$$

Перейдем теперь к решению УШ для построенного нами ангармонического потенциала (9.32). Как отмечалось ранее, решение УШ может быть представлено в виде

$$\psi(z) = [\chi(z)]^{-1} \sum_{k=-s}^s \frac{C_k |z|^k}{\sqrt{(s-k)!(s+k)!}} , \quad (9.33)$$

где $\chi(z) = \bar{z}^{-s} \psi_0^{-1} = \bar{z} \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta|z| - \alpha|z|^2 - \frac{\gamma}{3}|z|^3)\right]$ — калибровочная функ-

ция; α, β, γ — произвольные параметры. Коэффициент C_k находится из системы рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(s+k+1)C_{k-1}}{\sqrt{(s-k+1)!(s+k-1)!}} + \frac{(2\alpha k - \lambda)C_k}{\sqrt{(s-k)!(s+k)!}} + \\ & + \frac{\beta(s-k+1)C_{k+1}}{\sqrt{(s-k-1)!(s+k+1)!}} + \frac{(1+s-k)(s-k+2)C_{k+2}}{\sqrt{(s-k-2)!(s+k+2)!}} = 0, \end{aligned} \quad (9.34)$$

причем $C_{-s-1} = C_{s+1}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm s$.

Задача нахождения с.з. λ УШ при произвольных значениях k сводится к нахождению с.з. бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} (s-k-2)(s-k-1) & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \beta(s-k-1) & (s-k-1)(s-k) & 0 & 0 & \vdots \\ 2\alpha(k+1) & \beta(s-k) & (s-k)(s-k+1) & 0 & \vdots \\ \gamma(s+k+1) & 2\alpha k & \beta(s-k+1) & (s-k+1)(s-k+2) & \vdots \\ 0 & \gamma(s+k) & 2\alpha(k-1) & \beta(s-k+2) & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma(s+k+1) & 2\alpha(k-2) & \vdots \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

Если параметр $k = \pm s$, то приходим к полубесконечной матрице, которая в некотором смысле подобна матрице, возникающей при решении задачи на с.з. уравнения Матве. При целом или полуцелом индексе s матрица (9.35) становится конечной, и с.з. находятся из решения алгебраического уравнения порядка $(2s+1)$. Для некоторых значений

и при произвольных значениях параметров α, β, γ собственные значения и соответствующие им функции имеют довольно простое выражение:

$$\begin{aligned} s=0, \lambda=0, \psi(z) &= C_0 \psi_0 = C_0 \exp \left\{ \frac{1}{2} (\beta |z| - \alpha |z|^2 - \frac{1}{3} \gamma |z|^3) \right\}, \\ s=\frac{1}{2}, \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta \gamma}, \psi_{1,2} = \psi_0 C_{1,2} \left(1 + \frac{\alpha - \lambda}{\beta} |z| \right), \end{aligned} \quad (9.36)$$

$$s=1, \lambda_1 = A+B, \lambda_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (A-B),$$

$$A^3 = 2\gamma^2 + \sqrt{4\gamma^4 - \left(\frac{\gamma}{3}\right)^3 (\alpha^2 + \beta\gamma)^3}; B^3 = 2\gamma^2 - \sqrt{4\gamma^4 - \left(\frac{\gamma}{3}\right)^3 (\alpha^2 + \beta\gamma)^3},$$

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0 \left\{ C_{-1}(\lambda_i) |z|^2 + \sqrt{2} C_0(\lambda_i) |z| + C_1(\lambda_i) \right\}, \quad i=1,2,3.$$

9.4. Суперсимметрия

Здесь мы рассмотрим решение задачи для ангармонического осциллятора и изучим свойства решений для ряда задач, в которых возможно проявление такого интересного явления, как суперсимметрия.

В предыдущих частях работы, используя представление группы $SU(2)$, была построена серия гамильтонианов, описывающих многопараметрический ангармонический осциллятор. Аналитическое выражение для гамильтониана с номером $n = 2s$ можно представить в виде

$$H_n = \partial_x^2 - U(s, x) = \partial_x^2 - \left[\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 x^4 + \alpha \gamma |z|^2 + \right. \\ \left. + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} \beta \gamma \right) x^2 - ((1+2s)\gamma + \beta) |z| + \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 - (1+2s)\alpha \right]. \quad (9.37)$$

Для каждого гамильтониана, т.е. при $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ и при некоторых значениях энергии E_k , найдены точные решения Ψ_n

$$H_n \Psi_n = E \Psi_n. \quad (9.38)$$

Как показано выше, нахождение с.з. энергии сводилось просто к решению алгебраической задачи, для волновых функций, удовлетворяющих уравнению (9.38), найдено следующее представление:

$$\Psi_n(z) = \Psi_0(z) \sum_{k=-s}^s \frac{c_k |z|^{s-k}}{\sqrt{(s-k)!(s+k)!}}, \quad (9.39)$$

где $\Psi_0(z) = e^{-W} = \exp \left[\frac{1}{2} (\beta |z| - \alpha |z|^2 - \frac{\gamma}{3} |z|^3) \right]$ — решение уравнения (9.38) при $s=0$; параметры α, β — произвольные, а $\gamma > 0$.

Из представления волновых функций (9.39) видно, что при любом (которое может принимать как целые, так и полуцелые значения) они нормируемы. Последнее свойство оказывается весьма важным при изучении собственных функций и собственных значений гамильтонианов вида (9.37). С очевидно, что свойство нормируемости исчезает, если у параметра $\gamma > 0$ изменить знак на противоположный. Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению свойств гамильтонианов, определя-

емых соотношением (9.37), заметил, что при $z=0$ потенциал $U(0, z)$ и волновая функция (9.39) в основном состоянии $\psi_0 = C_0 e^{-W(z)}$ связаны следующим простым соотношением (здесь и далее модуль необходимо опустить):

$$U(0, z) = -(\partial_z W)^2 + \partial_z^2 W. \quad (9.40)$$

Последнее свойство потенциала и волновой функции при $z=0$ указывает на связь полученного нами выражения (9.37) с суперсимметричным гамильтонианом квантовой механики, построенной Виттенем [73]. Это обусловлено тем, что при $z=0$ гамильтониан (9.37) может быть факторизован (необходимые и достаточные условия возможности факторизации гамильтонианов сформулированы в теоремах I-5 и части 3 статьи Инфельда и Халла [86]). Для факторизации гамильтониана выберем дифференциальные операторы первого порядка L^+ и L^- такие, через которые можно выразить гамильтониан (9.37) при $z=0$. Очевидно, такими линейными операторами могут быть следующие:

$$L^\pm = \partial_z \pm \partial_z W, \quad L^- = (L^+)^*,$$

здесь $*$ означает сопряжение. Легко видеть, что коммутационные соотношения для операторов L^- и L^+ имеют вид $[L^-, L^+] = 2\partial_z^2 W$. Используя выбранные операторы, гамильтониан H_0 может быть записан в факторизованном виде

$$H_0 = L^- L^+ \quad (9.41)$$

Отметим, что представление гамильтониана в виде (9.41) через некоммутирующие операторы имеет место в суперсимметричной теории (см., например, работу [74]). В этом случае простейший суперсимметричный матричный гамильтониан, построенный из некоммутирующих операторов L^+ и L^- , может быть представлен следующим образом:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} L^- L^+ & 0 \\ 0 & L^+ L^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & H_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z^2 + \partial_z^2 W - (\partial_z W)^2 & 0 \\ 0 & \partial_z^2 - \partial_z^2 W - (\partial_z W)^2 \end{pmatrix}.$$

Операторы $\hat{L}^+ = \hat{L}^- E_-$, $\hat{L}^- = \hat{L}^+ E_+$, где, как и ранее, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, удовлетворяют следующим соотношениям: $\{\hat{L}^+, \hat{L}^+\} = 0$, $\{\hat{L}^-, \hat{L}^-\} = 0$, $\hat{H} = \{\hat{L}^+, \hat{L}^-\}$, $[\hat{H}, \hat{L}^+] = 0$, $[\hat{H}, \hat{L}^-] = 0$, т.е. матричный гамильтониан $\hat{H}$ в самом деле соответствует гамильтониану суперсимметричной квантовой механики, а величины $\hat{L}^{\pm}$ — суперзаряды. Очевидно, что структура гамильтониана, полученного в § 8 (см. формулы (8.26) и (8.27)), совпадает с рассматриваемой, откуда следуют выводы, сделанные в предыдущем параграфе относительно спектра и волновых функций.

Далее заметим, что гамильтонианы $H_0 = \hat{L}^- \hat{L}^+$ и $H_{-2} = \hat{L}^+ \hat{L}^-$ связаны между собой преобразованием Дарбу [87]:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{-2} + [\hat{L}^-, \hat{L}^+] = \\ &= \partial_z^2 - \partial_z^2 W - (\partial_z W)^2 + 2\partial_z^2 W = \partial_z^2 + \partial_z^2 W - (\partial_z W)^2. \end{aligned}$$

Известное соотношение имеет место и для волновых функций

$$\hat{L}^- \psi_0(E_0) = 0; \quad \psi_0(z, E_0) = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \hat{L}^+ \psi_{-2}(z, E_0). \quad (9.42)$$

Проведенное нами рассмотрение показывает, что при значении $z=0$ преобразование Дарбу позволило получить гамильтониан H_{-2} , который может быть объединен с исходным суперсимметричным матричным гамильтонианом. Отмеченное свойство системы, которую представляет собой ангармонический осциллятор, свидетельствует о его богатой внутренней структуре, а также сложности физических систем, описываемых при помощи этой модели. Интересным является сходство спектров гамильтонианов H_0 и H_{-2} , так как они отличаются лишь тем, что в спектре H_{-2} отсутствует уровень $E_0=0$. Указанная особенность спектров H_0 и H_{-2} может оказаться весьма полезной при построении теории возмущений, а соотношения (9.42) — для волновых функций при нахождении волновых функций одного из операторов по известным функциям второго [88, 89].

Сделаем теперь некоторые общие замечания относительно получен-

ных результатов. Как отмечалось выше, гамильтониан (9.37) был получен, исходя из генераторов группы $SU(2)$, которые в однопараметрическом представлении имели выражение (9.30):

$$E_0 = -\alpha \partial_z ; \quad E_+ = s z^{-1} + \partial_z ; \quad E_- = s z - z^2 \partial_z .$$

Легко видеть, что квадратичная форма, построенная из этих операторов, при значении параметра $s=0$ может быть представлена в факторизованном виде. Кроме того, связь между потенциалом $U(e, z)$ и волновой функцией, отмеченная нами выше, сохраняется. Это указывает на общий характер свойств суперсимметрии моделей, построенных на основе группы $SU(2)$. Заметим также, что преобразования системы координат не затрагивают это свойство. Так, например, преобразуя систему координат, от генераторов, определяемых формулами (9.30), перейдем к следующим генераторам:

$$H = z \partial_z - s ; \quad E_+ = 2s z - z^2 \partial_z ; \quad E_- = \partial_z , \quad z = e^{\xi} .$$

Если взять их за основу, то можно построить квадратичную форму (9.23)

$$H^2 + 2\alpha H + \beta E_+ + \gamma E_- = \partial_{\xi}^2 - \alpha^2 + \frac{1}{2} \beta \gamma - \frac{1}{4} \beta^2 e^{2\xi} - \\ - \frac{1}{4} \gamma^2 e^{-2\xi} + \frac{\beta}{2} (2s + 1 + 2\alpha) e^{\xi} + \frac{\gamma}{2} (2s + 1 - 2\alpha) e^{-\xi} ,$$

которая, как и форма (37), при $s=0$ обладает свойством суперсимметрии. Здесь в качестве функции $W(\xi)$ необходимо выбрать следующую:

$$W(\xi) = -\alpha \xi + \frac{1}{2} (\beta e^{\xi} - \gamma e^{-\xi}) .$$

Далее можно построить матричный суперсимметричный гамильтониан и определить суперзаряды по процедуре, описанной выше. В статье Инфельда и Халла перечислен ряд потенциалов, для которых выполнены условия факторизации гамильтонианов (в этой работе имеется список 31 вида потенциалов), а следовательно, возможно построение суперсимметричных гамильтонианов и нахождение спектра энергий. В нашем случае ситуация более сложная, поскольку при значении индекса S ,

отличного от 0, факторизация проводится следующим образом (для примера рассмотрим потенциал вида (9.37)):

$$L^{\pm} = \partial_z \pm \frac{1}{2} (\beta - 2\alpha z - \gamma z^2 + 2f'/f). \quad (9.43)$$

Здесь $f(z) = \sum_{k=-s}^s \frac{c_k |z|^{s-k}}{V(s-k)!(s+k)!}$. При этом H_+ соответствует индексу s , а H_- — индексу $[-(s+1)]$, т.е. в результате преобразования потенциал $U_s(\alpha, \beta, \gamma)$ переходит в $U_{-(s+1)}(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Используя явное выражение для потенциалов рассмотренных типов, отметим, что существует еще один тип симметрии:

$$U_s(\alpha, \beta, \gamma) = U_{-(s+1)}(-\alpha, -\beta, -\gamma). \quad (9.44)$$

Таким образом, используя свойства симметрии, мы расширили множество гамильтонианов, для которых возможно найти точные решения УШ при некоторых значениях энергии. Неприменимость известных методов нахождения спектра может свидетельствовать о более сложной структуре решений УШ в том случае, если пытаемся найти уровень для индекса S , превышающего соответствующий параметр модельного гамильтониана.

9.5. ВКБ-приближение для ангармонического осциллятора

В этой части на примере ангармонического осциллятора сформулируем ТВ и укажем соответствующий метод построения квазиклассического приближения.

Рассмотрим коммутирующие операторы $L^{\pm}$, определяемые соотношением (9.43).

Используя приведенные операторы, построим оператор Шредингера

$$H = [L^{\pm} = \partial_z \pm U(s, z) = \partial_z^2 + (\partial_z W)^2 - \partial_z^2 W]. \quad (9.45)$$

Явное выражение для уравнения Шредингера может быть записано в виде (9.37).

Прежде чем выписать решение этого уравнения, напомним, что

приведенный выше метод построения волнового уравнения был предложен Шредингером в 1926 году [95] и получил название метода факторизации. Несколько позже весьма подробно он был изложен в работе Инфельда и Халла [36]. В настоящее время к такой процедуре вернулись в бурно развивающемся направлении – суперсимметричной квантовой механике [73, 74].

Решения уравнения (9.37) при целых или полужелых индексах можно представить в следующей форме:

$$\psi_{2s} = \psi_0 \sum_{k=0}^s \frac{c_k |z|^{s-k}}{\sqrt{(s+k)!(s-k)!}}, \quad (9.46)$$

где $\psi_0(z) = e^{-W(z)} = \exp\left(\frac{1}{2}(\beta|z| - \alpha|z|^2 - \frac{\gamma}{3}|z|^3)\right)$, $\gamma > 0$.

Легко видеть, что уравнение (9.37) – уравнение ангармонического осциллятора. Мы рассмотрим частный случай уравнения (9.37) при $S=0$, $\alpha=0$ и для удобства сделаем замену переменной. В результате мы придем к довольно простому уравнению

$$\left(\partial_z^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 (z^2 - \alpha^2)^2 + \gamma|z|\right)\psi = E\psi. \quad (9.47)$$

Волновая функция основного состояния для уравнения (9.47) имеет вид

$$\psi_0 = \exp\left(\frac{\gamma}{2}\left(\alpha^2|z| - \frac{1}{3}|z|^3\right)\right). \quad (9.48)$$

Можно заметить, что оператор Шредингера, построенный из некоммутирующих операторов $L^{\pm}$, имеет основное состояние энергии, равное нулю, при этом дно ямы находится ниже этого уровня энергии на величину $\alpha\gamma$. В качестве примера найдем энергию основного состояния для потенциала, часто рассматриваемого в литературе и имеющего выражение $U = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 (z^2 - \alpha^2)^2$. Вычисления будем проводить, используя обычный метод ТЗ, где волновые функции берутся в виде (9.48), а возмущение имеет вид $\Delta U = \gamma|z|$. Заметим, что возникающие в вычислениях интегралы известны и связаны с хорошо изученными функциями.

ченными функциями Эйри [90]. В результате вычислений для основного состояния получим следующее значение энергии:

$$E'_0 = \alpha \gamma + 2 \gamma^{1/3} J'(a^2 \gamma^{2/3}) / (J a^2 / \gamma^{1/3}), \quad (9.49)$$

где функция $J(\gamma)$ определяется следующим образом:

$$J(\gamma) = 3^{-2/3} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^{m/3}}{m!} \gamma^m \left(\frac{m-2}{3} \right)! \right).$$

Легко видеть, что выражение для энергии содержит параметр γ и по нему является неаналитическим выражением в нуле. Однако, несмотря на указанную неаналитичность по параметру γ , мы не отказываемся от применения теории возмущения, а также не говорим о ее неприменимости (см., например, построение ТВ в работе [91]).

Рассмотрим теперь построение ВКБ-приближения в случае ангармонического осциллятора. Вначале напомним, что волновая функция в квазиклассическом приближении ищется в виде

$$\psi(z) = A(z) e^{iS(z)/\hbar}. \quad (9.50)$$

Мы рассматриваем стационарную одномерную задачу. Если оператор Шредингера представим в виде (9.45), то для действия и предэкспоненциальной функции A получим следующую систему уравнений [92]:

$$\partial_z (iS + W) \cdot \partial_z (-iS + W) = E; \quad (9.51)$$

$$2\partial_z S \cdot \partial_z A = \partial_z^2 (W + iS) iA. \quad (9.52)$$

Первое уравнение порядка квантовой поправки в нулевой степени $\hbar^0$, а второе — порядка $\hbar^1$. Далее в частном случае нулевых значений α и $E_0 = 0$ для классического действия получим следующее выражение

$$iS_{\text{кл}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{3} |z|^3 - \alpha^2 \gamma |z| \right) + \text{const}, \quad (9.53)$$

при этом $\partial_z W(s=0) = \frac{1}{2} (\gamma |z|^2 - \beta)$. Указанный результат получен посред-

Вначале строим некоммутирующие операторы

$$L^{\pm} = \partial_z \pm P_n(z),$$

где $P_n(z)$ — полином степени n . Далее строим оператор Шредингера и выписываем уравнение

$$H\psi = L^+ L^- \psi = (\partial_z^2 + P_n^2 - \partial_z P_n) \psi = E\psi.$$

По нашему построению основное состояние энергии равно нулю, т.е.

$E_0 = 0$, и мы можем написать волновую функцию в основном состоянии: $\psi_0(z) = \exp(-\int_z P_n(z) dz)$. После этого для исследуемого потенциала степени 2^n находим разность $\Delta U_{2^n} = U_{2^n} - P_n^2$ (легко видеть, что коэффициенты у P_n всегда можно подобрать так, чтобы степень возмущения была меньше $2n-1$). Используя затем обычную ТВ, можно вычислить для исследуемого потенциала $\Delta E'_0$. Волновая функция $\psi_1(z)$, так же как и все последующие, может быть построена в виде произведения основного состояния на полином, степень которого соответствует номеру возбужденного состояния:

$$\psi_p(z) = R_p(z) \psi_0(z).$$

Последнее необходимо для удовлетворения условия наличия соответствующего числа нулей. Коэффициенты этого полинома могут быть получены из условий ортогонализации волновых функций $\psi_p(z)$ и минимизации значения энергии. Отметим, что ТВ можно несколько улучшить, разбивая множество полиномов $P_n(z)$ на классы в соответствии с классификацией Р.Томса и обобщениями В.И.Арнольда. Последнее позволит ускорить процесс сходимости и заранее отделить характерные физические области друг от друга, так как известно, что переход от одного типа катодострой к другому приводит, вообще говоря, к изменению спектра. В нашем случае мы будем иметь переходы типа $A_k \rightarrow A_{k-1}$ и т.д. Относительно реализации указанной процедуры в многомерном случае следует указать, что, по-видимому, она может быть проведена, хотя в этом

$$\partial_z S = -\frac{1}{2} \gamma (|z|^2 - a^2) = 0;$$

$$\partial_z^2 S = -\gamma |z| = 0.$$

Вполне очевидным становится обобщение рассуждений на случай много-
членов более высоких степеней, чем те, что мы рассмотрели. В одно-
мерном случае полином $W(z)$ степени k по известной классификации
элементарных катастроф приводит нас к катастрофам типа $A_{\pm(k-1)}$.

($A_{+k} = A_{-k}$, если k - четное). В показателях экспоненты соответ-
ствующей волновой функции. Таким образом, при вычислении матричных
элементов и построении ТВ (если потенциал не совпадает точно с
 $(\partial_z W)^2$, мы вынуждены вычислять так называемые быстроосцилли-
рующие интегралы, например оценивая сдвиг уровней энергии), кото-
рые имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik((p+1)^{-1} x^{p+1} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j x^j)} dx, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

где x^{p+1} - росток катастрофы A_p . В этом случае не критические
точки дают малый вклад в значение интеграла; окрестности критичес-
ких Морсовских точек вносят вклад, а вклад окрестностей вырожденной
точки (критической) является сингулярным типа $(1/\lambda)^{\infty}$. Например, в
случае особенности складки, рассмотренной выше, сингулярность по-
добна $(1/\lambda)^{1/3}$, что очевидно следует из рассмотрения формулы (9.49).
Отмеченная сингулярность обычно связывается с инстантонным вкладом
и ее относят к непертурбативным эффектам, которые не могут быть
учтены посредством ТВ. До настоящего времени, как правило, вполне
удовлетворительной являлась модель, в которой классическое действие
представлялось в виде квадратичной функции по z . В соответствии с
упомянутой классификацией такие функции не имеют вырожденных крити-
ческих точек. Отсюда как следствие мы имеем аналитическую зави-
симость по константе связи и отсутствие непертурбативных эффектов.

Описанный выше метод позволяет построить ТВ для любого полино-
миального потенциала степени $2n$. Опишем соответствующую процедуру.

Вначале строим некоммутирующие операторы

$$L^{\pm} = \partial_z^2 + P_n(z),$$

где $P_n(z)$ — полином степени n . Далее строим оператор Шредингера и выписываем уравнение

$$H\psi = L^- L^+ \psi = (\partial_z^2 + P_n^2 - \partial_z P_n) \psi = E\psi.$$

По нашему построению основное состояние энергии равно нулю, т.е.

$E_0 = 0$, и мы можем написать волновую функцию в основном состоянии: $\psi_0(z) = \exp(-\int_{z_0}^z P_n(z) dz)$. После этого для исследуемого потенциала степени 2^n находим разность $\Delta U_{2^n} = U_{2^n} - P_n^2$ (легко видеть, что коэффициенты у P_n всегда можно подобрать так, чтобы степень возмущения была меньше $2n-1$). Используя затем обычную ТВ, можно вычислить для исследуемого потенциала $\Delta E'_0$. Волновая функция $\psi_1(z)$, так же как и все последующие, может быть построена в виде произведения основного состояния на полином, степень которого соответствует номеру возбужденного состояния:

$$\psi_p(z) = R_p(z) \psi_0(z).$$

Последнее необходимо для удовлетворения условия наличия соответствующего числа нулей. Коэффициенты этого полинома могут быть получены из условий ортогонализации волновых функций $\psi_p(z)$ и минимизации значения энергии. Отметим, что ТВ можно несколько улучшить, разбивая множество полиномов $P_n(z)$ на классы в соответствии с классификацией Р.Томса и обобщениями В.И.Арнольда. Последнее позволит ускорить процесс сходимости и заранее отделить характерные физические области друг от друга, так как известно, что переход от одного типа катодотроны к другому приводит, вообще говоря, к изменению спектра. В нашем случае мы будем иметь переходы типа $A_k \rightarrow A_{k-1}$ и т.д. Относительно реализации указанной процедуры в многомерном случае следует указать, что, по-видимому, она может быть проведена, хотя в этом

случае возникает ряд трудностей с определением предэкспоненциальной функции. Кроме того, возникают затруднения, связанные с появлением новых типов особенностей с показателем экспоненты так называемых резонансов.

9.6. Обобщение процедуры использования групповых методов на группы высших размерностей

Прежде чем провести соответствующую процедуру обобщения, сделаем некоторые замечания относительно изложенного метода построения уравнения Шредингера на основе использования генераторов группы $SU(2)$. Впервые описанная процедура была предложена в работах [96,97]: утверждение о возможности представления точно решаемых типов VIII в виде квадратичных форм от генераторов различных групп, обсуждение построения ТБ., свойств суперсимметрии сделаны в работах [98-100], в работе [101] на основе этого же подхода проведена классификация точно решаемых уравнений Шредингера, указаны потенциалы и соответствующие им квадратичные формы в заданной системе координат. Последний результат может представлять определенный интерес при выполнении расчетов и его мы ниже приведем в таблице.

Перейдем теперь к построению дифференциальных операторов, соответствующих матрицам в группе $SU(3)$. Очевидно, таких генераторов будет 8. Выберем матрицу

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 \\ z_2 & z_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ z_1 & z_1 t + 1 & 0 \\ z_2 & z_1 t + z_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z'_1 & 1 & 0 \\ z'_2 & z'_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.53)$$

где в (9.55) $a=t$; $b=c=0$; $\lambda_1=tz_1/(1+tz_1)$; $\lambda_2=1+tz_1$;
 $\lambda_3=1$; $z'_1=z_1/(1+tz_1)$; $z'_2=z_2+tz_3$; $z'_3=z$.

Используя определения представления группы

$$[\pi_\alpha(g_0) f] z = \alpha(zg_0) f(z\bar{g}_0). \quad (9.56)$$

Здесь $g_0 \in SU(n)$; $z\bar{g}_0 = \bar{z}$; $\alpha(zg_0) = \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}$ —

характер группы; $k_1 - k_2 \geq 0$, $k_2 - k_3 \geq 0$ или в яв-
ном виде

$$\left(\frac{tz_1}{1+tz_1} \right)^{k_1} (1+tz_1)^{k_2} \cdot 1^{k_3} \cdot f\left(\frac{z_1}{1+tz_1}; z_2+tz_3; z_3 \right), \quad (9.57)$$

после вычисления производной от (9.57) по t в пределе $t \rightarrow 0$
найдем:

$$X_+ = -z_1^2 \partial_1 + z_3 \partial_2. \quad (9.58)$$

Проводя описанную процедуру для оставшихся семи линейно-независи-
мых матриц, получим явное выражение для генераторов:

$$\begin{aligned} H_{1,2} &= 2z_1 \partial_1 - z_2 \partial_2 + z_3 \partial_3 - k_2; \\ H_{2,3} &= 2z_2 \partial_2 + z_3 \partial_3 - z_1 \partial_1 + k_2 - k_3; \\ Y_+ &= -z_1^2 \partial_1 - z_1 z_3 \partial_2 + (z_1 z_2 - 1) \partial_1 + k_3 z_2 - k_2 z_3; \\ Z_+ &= -z_3^2 \partial_3 - z_1 z_3 \partial_2 + (z_3 + z_1 z_2 - 1) \partial_1 + k_3 z_3 - z_1 z_2 k_2; \\ X_- &= \partial_1 + z_2 \partial_2; \quad Y_- = \partial_2; \quad Z_- = \partial_3. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Построение соответствующих форм из генераторов (9.58) и (9.59) с
базисом из f приведет к задаче, аналогичной рассмотренной в п.9.1-
9.3, однако новых типов УШ, по сравнению с рассмотренными ранее,
не появляются. Таким образом, основываясь на описанной процедуре, мы
будем, по-видимому, получать такие УШ, которые уже были получены

Потенциалы и квадратичные формы генераторов для уравнения Шрёдингера

1	$u^2 e^{-2ax} - [2b + 2M] a e^{-ax} + c(ab - a)^2 + c^2 e^{2ax}$ $z = e^{-ax}; \quad p = 1/a;$ $f = a^2 c^{-ax} / a + bx + c e^{ax} / a$	$- \alpha J^+ J^- + 2 \alpha J^+ [\alpha(2j+1) + 2b] J^- - 2 \alpha c J^-$
2	$d^2 e^{-4ax} + 2ade^{-3ax} + [a^2 + 2d(b+a+M)] e^{-2ax} + (2ab + a + 2) e^{-ax}$ $z = e^{-ax}; \quad p = e^{ax} / a; \quad E = -b^2;$ $g = d e^{-2ax} / 2 + a e^{-ax} / a - bx$	$- \alpha J^0 J^- - 2d J^+ - 2 \alpha J^0 - [\alpha(j+1) + 2b] J^-$
3	$d^2 e^{4ax} + 2ade^{3ax} + [a^2 + 2d(b-a)] e^{2ax} + (2ab - a + 2) e^{ax}$ $z = e^{-ax}; \quad p = e^{-ax} / a; \quad E = -b^2 - a^2(a+2b);$ $g = -d e^{2ax} / 2 - a - a e^{ax} / a - bx$	$- \alpha J^+ J^0 - (2b + 3\alpha j) J^+ - 2\alpha J^0 - 2d J^-$
4	$- [a(a+M) + a^2(\alpha b + a + 2a)] ch^{-2} x - c(c + 2d - 2a) ch^2 x + c^2 ch^4 x$ $z = ch^{-2} x; \quad p = 1/a;$ $f = -c ch^2 x / 4 - a b ch^2 x / 2 - b^2 ch^2 x + b[2a + 3b + \alpha(a b + 3)] ch^2 x - [a + 3b(\alpha a + b + a) + 2ab + b + 2] ch^2 x$ $z = ch^2 x; \quad p = ch^2 x / a; \quad E = -(a+b)^2;$ $f = b ch^2 x / 2 - a - (a+b) b ch^2 x / 2$	$4 \alpha J^+ J^0 - 4 \alpha J^+ J^- + 2[\alpha(bj+1) + 2a] J^+ - 4[\alpha(2j+1) + a - c] J^0 + 4c J^-$
5	$- [a + 3b(\alpha a + b + a) + 2ab + b + 2] ch^2 x$ $z = ch^2 x; \quad p = ch^2 x / a; \quad E = -(a+b)^2;$ $f = b ch^2 x / 2 - a - (a+b) b ch^2 x / 2$	$4 \alpha J^+ J^- - 4 \alpha J^0 J^- - 4b J^+ + 2[\alpha(4j+2v+1) + 2a + 4b] J^- - 4(a+2b+\alpha v) J^-$

6	$a^2 x^6 + \frac{1}{2} a b x^4 + [b^2 a(2k+3)] x^2$ $x = x^2, \quad p = a$ $g = a x^4/4 + b x^2/2$	$-4J^0 J^- + 4aJ^+ + 4bJ^0 -$ $-2(2j+2-v)J^-$
7	$a x^6 + a a b x^4 + [b^2 a(2l+4N+d+2-2c)] x^2$ $+ c(c-2l-d+2) x^{-2}$ $x = x^2, \quad p = l; \quad g = a x^4/4 + b x^2/2 + (c-l) \ln x$	$-4J^0 J^- + 4aJ^+ + 4bJ^0 -$ $-2(2j+2l+d-2c)J^-$
8	$b x^2 + a a b x - [a(2l+d-1-2c)+\lambda] x^{-1} +$ $+ c(c-2l-d+2) x^{-2}$ $x = x, \quad p = x$ $g = x^2 + b x^2/2 + (c-l) \ln x$	$-J^0 J^- + 2bJ^+ + 2aJ^0 -$ $-(2l+d-1-2c+j)J^-$
9	$b x^{-4} + b^2(c-2l-d+3)x^{-3} + [c(c-2l-d+2)+2ab+\lambda] x^{-2}$ $-a(c-l+x^2+d-1-2c)x^{-1}$ $x = x, \quad p = x^2$ $g = a x - b x^{-1} + (c-l) \ln x$	$-J^+ J^- + 2aJ^+ + (2j+2l+d-1-2c)J^0$ $+ 2bJ^-$
10	$-a^2 \cos^2 \alpha x - a a b \cos \alpha x$ $x = \cos \alpha x; \quad p = 1$ $g = a \cos \alpha x / \alpha$	$a^2 J^+ J^- - 2^2 J^- J^- + 2aJ^+ +$ $+ 2^2(2j+3-2v)J^0 - 2(2a+\mu\alpha)J^-$

и исследованы выше. Вместе с тем, несмотря на то, что построенные многомерные уравнения могут иметь весьма необычный вид и решить их без описанной процедуры затруднительно, мы знаем их решения так же, как это было ранее, при использовании генераторов группы $SU(2)$

Заключение

В данном пособии мы не ставили себе целью дать полную классическую теорию калибровочных полей, а лишь на примере полей Янга-Миллса рассмотрели некоторые характерные для этих теорий математические задачи, кратко поясняя их физический смысл. Именно математическим приемам уделялось ~~нам~~ основное внимание. Изложенные здесь математические методы являются тем минимумом, который необходим каждому теоретику, интересующемуся калибровочными теориями, однако их следует рассматривать лишь как элементарное введение, как первый шаг к изучению той изощренной и весьма красивой математики, на языке которой «говорит» современная теория калибровочных полей.

В заключение мы благодарим В.Ч. Жуковского, Б.В. Магницкого, оказавших большую помощь в процессе работы над учебным пособием. Мы признательны всем нашим коллегам, совместная работа с которыми и общение не могут быть переоценены.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Witt B. Dynamical theory of groups and fields. N.Y.:
Gordon and Breach, 1965.
2. Kaluza Th. On the Unity Problem of Physics Sitzungsber.
Press. Acad. Wiss. Berlin, Math. und Phys., 1921, B24.
S. 966-972; Klein O. Quaten theorie und fünfdimensionale
Relativitätstheorie. Zc. Phys., 1926, B37. S. 895-906;
Generalizations of Einstein's theory of gravitation con-
sidered from the point of view of quantum field theory//
Helv. Phys. Acta. Suppl. 1956. V. 4. P. 58-71.
3. Cho Y.M. Higher-dimensional unifications of gravitation
and gauge theories// J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 2029-
2035; Limensional reduction by isometry// Phys. Lett.
1987. V. 186, N 1. P. 38-42;
Duff M.J., Nilsson B.E.W., Pope C.N., Warner N.P. On the
consistency of the Kaluza-Klein ansatz.// Phys. Lett.,
1984. V. 149B, N 1-3. P. 90-94;
Mansouri R., Witten L. Dimensional Reduction in space-time
admitting Killing vectors// Phys. Lett. 1983. V. 127B, N 5.
P. 341-344;
Chong L.N.; Macrae K.J., Mansouri F. Local gauge theories
and supersymmetric strings// Phys. Rev. 1976. V. 13D, N 2.
P. 235-249.
4. Логонов А.А. Лекции по теории относительности: Современный
анализ проблемы. М.: Изд-во Мос. ун-та, 1984. 224с.
5. Поляригин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973. 520с;
Манин Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия.
М.: Наука, 1984. 336с;

Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760с.

6. Dirac P.A.M. Quantised singularities in electromagnetic field// Proc. Roy. Soc. 1931. V. A133. P. 60-72.
7. Ikeda M., Miyachi Y. On the static and spherically symmetric solutions of the Yang-Mills fields// Progr. theor. Phys. 1962. V. 27. P. 474-482.
8. Loos H.G. The range of gauge fields // Nucl. Phys. 1965. V. 72, N 3. P. 677-691.
9. Wu T.T., Yang C.N. Some remarks about unquantized nonabelian gauge fields // Phys. Rev. 1975. V. 120. P. 3843-3845;
Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. Ibid. P. 3845-3856.
10. Julia B., Zee A. Poles with both magnetic and electric charges in nonabelian gauge theory// Phys. Rev. 1975. V. 112, N 8. P. 2227-2232.
11. Hsu J.P. Form of gauge fields and nonintegrable phase factors// Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36, N 26. P. 1515-1518;
Hsu J.P., Mac E. Symmetry and exact dyon solutions for the classical Yang-Mills field equations // J. Math. Phys. 1977. V. 18, N 1. P. 100-103.
12. Matinyan S.G., Prokhorenko E.B., Savvidy G.K. Non-integrability of time-dependent spherically symmetric Yang-Mills equations. Preprint Acad. Sci. Arm. SSR, YPI-876 (27) - 86, Jerevan, 1986.
13. Coleman S. Non-Abelian plane waves// Phys. Lett. 1977. V. 670, N 1. P. 59-61.
14. Басеян Г.Э., Матинян С.Г., Саввиди Г.К. Нелинейные плоские волны в безмассовой теории Янга-Миллса//Письма в ЖЭТФ, 1979. Т. 29, вып.10. С. 641-644.

15. Матинян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г.
Классическая механика Янга-Миллса. Нелинейные колебания
цвета// ЖЭТФ, 1981. Т.80, вып.3. С. 830-838.
16. Actor A. Periodic solutions of massive and Yang-Mills
theories// Lett. Math. Phys., 1978. V. 2, N 3, P. 275-280;
Classical solutions of SU (2) Yang-Mills theories// Rev. of
Modern Phys., 1979. V. 51, N 3. P. 461-525.
17. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.Н., Питаевский Л.П.
Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
319с.
18. Никишов А.И., Ритус В.И. Квантовые процессы в поле плоской
электромагнитной волны и в постоянном поле. Ч I, II// ЖЭТФ,
1964. Т.46. С.776-796; 1768-1781.
19. Проблемы квантовой электродинамики интенсивного поля. Труды
ФИАН им. П.Н.Лебедева. Т.168. М.: Наука, 1986. 262с.
20. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских
электронов. М.: Атомиздат, 1973. 374с.
21. Бацула О.И., Гусынин В.П. Плосковолновые решения в рамках
SU(2) теории Янга-Миллса// УФЖ, 1981. Т.26, № 8. С. 1233-
-1238.
22. Kovacs E. SU (3) wave solutions // J. Math. Phys., 1982.
V. 23, N 5. P. 834-838.
23. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. QCD and reso-
nance physics: theoretical foundations // Nucl. Phys., 1979.
T. 147B. P. 385-447; QCD and resonance physics : application.
Ibid. P. 448-518.
24. Беляев В.М., Иоффе Б.Л. Определение масс барионов и барионных
резонансов из правил сумм квантовой хромодинамики. Нейтрон-
ные барионы// ЖЭТФ, 1982. Т.83. С.876-891.

25. Joffe B.L. Calculation of baryon masses in quantum chromodynamics // Nucl. Phys., 1981. V. 188B. P. 317-341.
26. Радюшкин А.В. Правила сумм и эксклюзивные процессы в квантовой хромодинамике. В кн.: Труды VI международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. 1983. Т. I. С. 69-86.
27. Агаев Ш.С., Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч. и др. Точные решения уравнений Янга-Миллса и проблема устойчивости постоянных потенциалов. Деп. в ВИНТИ 17.12.84. № 8022-84. 21с.
28. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч.2. М.: Наука, 1978.
29. Вшивцев А.С., Перес-Фернандес В.К., Татаринцев А.В. Свойства точных решений массивного классического поля Янга-Миллса // Изв. вузов. Физика, 1986. № 5. С. 96-100.
30. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. Инстантонная азбука // УФН, 1982. Т. 136, вып. 4. С. 553-592.
31. Brown L.S., Weisberger W.I. Vacuum polarization in uniform non-abelian gauge fields // Nucl. Phys., 1979. V. B157; N 2. P. 285-326.
32. Savvidy G.K. Toward the ground state in the Yang-Mills theory. Jerevan, 1979, - 13 p. (Prepr. Acad. Sci. Arm. SSR, YPI; YPI-350 (8) - 79).
33. Cabo A., Shabad A.E. Quantum theory of gauge field with external source. Prepr. Ac. de ciencia de Cuba, N 167, 1980, 61 p.
34. Фрадкин Е.С., Шварцман Ш.М. Континуальный подход в теории Янга-Миллса во внешнем неабелевом поле. Препр. ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева № 183. М., 1986. 47с.

35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука. 1988. 509с.
36. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982. 144с.
37. Богомольный Е.Б. Устойчивость классических решений // ЯФ, 1976. Т. 24. № 4. С.861-870.
Bogomolnyi E.B. Calculation of instanton-anti-instanton contributions in quantum mechanics // Phys. Lett. 1980. V. 91B. P. 431-435; Prazad M.K., Sommerfield C.M. Exact classical solution for t'Hooft monopole and Julia-Zee dyon// Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 760-762.
38. Поляков А.М. Спектр частиц в квантовой теории поля// Письма в ЖЭТФ, 1974. Т.20, вып.6. С.430-433.
t'Hooft magnetic monopoles in unified gauge theories. Nucl. Phys. 1974. V. 79B, N 2. P. 276-284.
39. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
40. Rubakov V.A. Adler-Bell-Jackiv anomaly and fermion-number breaking in the presence of magnetic monopole // Nucl. Phys., 1982. V. 203B. N 2. P. 311-348.
41. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics // Phys. Lett., 1983. V. 128B, N 1-3. P. 215-218.
42. Nielsen N.K., Olesen P. Vortex-line models for dual strings// Nucl. Phys. 1973. V. 63B, N 1. P. 45-61.
43. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985. 414с;
Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985. 472с;

- Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
44. Вшивцев А.С., Татаринцев А.В. Точные волновые решения нелинейных уравнений теории поля // Вестник Мос. ун-та. Физика, астрономия, 1987. Т.28, № 1. С.78-80;
Самосогласованные решения классических уравнений движения калибровочных полей и полей Хиггса // УФЖ, 1988, Т.33, № 2. С.165-171.
45. Матикян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г. Стохастичность классической механики Янга-Миллса и ее устранение механизмом Хиггса // Письма в ЖЭТФ, 1981. Т.34, Вып.11. С. 613-616.
Матикян С.Г. Динамический хаос неабелевых калибровочных полей // ФЭЧАЯ, 1985. Т.16. Вып.3. С.522-550.
46. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Стохастические колебания классических полей Янга-Миллса // Письма в ЖЭТФ, 1981. Т.34. Вып.4. С.171-175.
47. Берман Г.П., Маньков Ю.П., Садреев А.Ф. Стохастическая неустойчивость классических однородных $SU(2) \times U(1)$ полей со спонтанно нарушенной симметрией // ЖЭТФ, 1985. Т.88. Вып.4. С.705-714.
48. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Плосковолновые решения уравнений Янга-Миллса. Численное исследование // УФЖ, 1986 Т.31, № 2. С.168-171;
Вшивцев А.С., Перес-Фернандес В.К. Отсутствие стохастичности для системы полей Янга-Миллса, взаимодействующей с хиггсовским полем // Вестник Мос. ун-та, 1988. Т.29, № 3. С.79-81.

49. Ковалевская С.В. Научные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1948;
Аппель П. Теоретическая механика. Т.2. М.: ГИОМЛ, 1960. 487с.
50. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. М.: Изд-во Мос. ун-та, 1980. 231с.
51. Polyakov A.M. Compact gauge fields and the infrared catastrophe // Phys. Lett. 1975. V. 59B, N 1. P. 82-84;
Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations // Phys. Lett. 1975. V. 59B, N 1. P. 85-87;
t'Hooft G. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies// Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37, N 1. P. 8-II.
52. Wong S.K. Fields and particle equation for the classical Yang-Mills field and particles with isotropic spin // Nuovo Cim., 1970. V. A65, N 4. P. 689-694.
53. Bagrov V.G., Belov V.V., Ternov I.M. Quasiclassical trajectory-coherent states of a particle in an arbitrary electromagnetic field // J. Math. Phys. 1983. V. 24, N 12. P. 2855-2859.
54. Багров В.Г., Белов В.В., Тернов И.М. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния нерелятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле// ТМФ, 1982. Т.50. № 3. С.390-396.
Багров В.Г., Белов В.В. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния бесспиновой релятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле// Изв. вузов. Физика, 1982 № 4. С.48-50.
Багров В.Г., Белов В.В., Караваев А.Г. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния нерелятивистской и релятивистской бесспиновой частицы в полях специальных конфигура-

- ций. Препр. № 36, Томск: Изд-е Том, филиала СО АН СССР, 1986. 21с.
55. Переломов А.М. Обобщённые когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987. 272с;
Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979. 319с.
56. Arodz H. Colored, spinning classical partical in an external non-abelian gauge field. A remark on the classical of colored particles // Phys. Lett. 1982. V. 8116, N 4. P. 251-254; P. 255-258;
Агаев Ш.С., Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч. Нестабильность вакуума в постоянных и однородных калибровочных полях (квазиклассическое описание)// ЯФ, 1982. Т.36, вып.4. С.1023-1029;
Неустойчивость трансляционно-инвариантных конфигураций калибровочных полей (квазиклассическое описание). В кн.: Труды У международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. 1982, Т.2. С.262-277.
58. Браун У.Ф. Микромагнетизм. М.: Наука, 1981.
59. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 215с.
60. Багров В.Г., Вшивцев А.С. Движение частицы в цветовых полях. Препр. № 14. Томск: Изд-е Том, филиала СО АН СССР, 1987. 16с.
61. Savvidy G.K. Infrared instability of the vacuum state of gauge theories and asymptotic freedom // Phys. Lett. 1977. V. 71B, N 1. P. 133-134;
Matinyan S.G., Savvidy G.K. Vacuum polarization induced by

- the intense gauge field // Nucl. Phys. 1978. V. B134, N 3.
P. 539-545.
62. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.
М.: Наука, 1967. Т.3. 299с.
63. Алексеев А.И. Движение цветного заряда в поле хромозлектри-
ческого "ажа". Препр. ИФВЭ 85-89. Серпухов, 1985. 15с.
- Feher L. Bounded orbits for classical motion of colored
test particles in the Prasad-Sommerfield monopole field // *Acta Phys. Polonica*, 1984. V. B15. P. 919-925;
- Wipf A. Non-relativistic Yang-Mills particles in a spheri-
cally symmetric monopole field // *J. Phys. A. Math. Gen.*,
1985. V. 18. P. 2379-2384.
64. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: Наука,
1974. 391 с.
65. Вшивцев А.С., Перес-Фернандес В.К., Татаринцев А.В. Точные
решения уравнений Дирака во внешних неабелевых калибровоч-
ных полях // *Известия вузов. Физика*, 1985. № 7. С.50-54.
66. Волков Д.М. Электрон в поле плоских неполяризованных элек-
тромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака // *ЖЭТФ*,
1937. Т.7, № II. С.1286-1289.
67. Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Мидодашвили П.Г., Татарин-
цев А.В. Точные решения уравнений Дирака в постоянных по-
лях хромоманнитного типа // *Известия вузов. Физика*, 1986.
№ 5. С.47-52.
68. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы
в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958;
- Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в
квантовой механике. М.: Изд-во Мос. ун-та, 1985. 336 с.

69. Гриб А.А., Мамяев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М. : Атомиздат, 1980. 295 с.
70. Обухов И.А., Перес-Фернандес В.К., Халилов В.Р. Точные решения уравнений движения кварков в неабелевом поле плоской цветовой волны // Известия вузов. Физика, 1986, № 12. С. 76-78.
71. Marciano W.J., Muzinich I.J. Exact solution of the Dirac equation in the field of a t'Hooft-Polyakov monopole // Phys. Rev. Lett., 1983. V. 50, N 14. P. 1035-1037.
72. Вшивцев А.С., Татаринцев А.В. О возможности удержания кварка моноподем. М., 1987. 10 с. Деп. в ВИНТИ 09.02.87, № 934-В87.
73. Witten E. Dynamical breaking of supersymmetry // Nucl. Phys., 1981. V. B185. P. 513-554;
Constants of supersymmetry breaking // Nucl. Phys., 1982. V. B202. P. 253-317.
74. Генденштейн Л.Э., Криве И.В. Суперсимметрия в квантовой механике // УФН, 1985. Т.146. Вып.4. С. 553-590.
75. Введение в супергравитацию: Пер. с англ./Под. ред. Феррары С. Тейлора Дж. М.: Мир, 1985. 304 с.
76. Жуковский В.Ч. Суперсимметрия уравнения Дирака в неабелевом хромомagnetном поле // ЖЭТФ, 1986. Т.90. Вып.4. С.1137-1140.
77. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. 260 с.
78. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980. 239 с.
79. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М. : Наука, 1988. 272 с.;
Гитман Д.М., Тютин И.В. Каноническое квантование полей со

- связями. М. : Наука, 1986. 216 с.;
- Хуанг К. Кварки, митоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985. 382 с.;
- Иидиксон К., Зиббер Ж.Б. Квантовая теория поля. М. : Мир, 1984.
80. Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представление групп Ли. М.: Наука, 1983. 360 с.
81. Вилленкин Н.Н. Специальные функции и теория представлений групп. М. : Наука, 1965. 525 с.
82. Желобенко Д.П. Лекции по теории группы Ли. Дубна, 1965.
83. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М. : Наука, 1982. 620 с.
84. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М. : Наука, 1984. 320 с.
85. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 575 с.
86. Infeld L., Hull T.E. The factorization method // Rev. of Mod. Phys., 1951. V. 23, N 1. P. 21-68.
87. Darboux G. Sur une proposition relative aux equations lineaires // Comp. Rend. 1882. V. 94. P. 1456-1459.
88. Crum M.M. Associated Sturm-Liouville systems // Quart. J. Math., Oxford, 1955. V. 6, N 22. P. 111-127.
89. Андриянов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В. Метод факторизации и преобразование Дарбу многомерных гамильтонианов // ТМФ 1984. Т.61. Вып.2. С.183-199
90. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. М.: Мир, 1970. Т.3. 343 с.
91. Турбинер А.В. Задача о спектре в квантовой механике и процедура "нелинеаризации" // УФН, 1984. Т.144. Вып.1. С.35-79.

92. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика
М. : Наука, 1979. 528 с.
93. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Квантовая механика. М. : ГИИЛ,
1963. 702 с.
94. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1985. Т. I.
350 с.; Т. II. 285 с.
95. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике. М.:
Наука, 1976.
96. Заславский О.Б., Ульянов Р.Р. Човне классы точных решений
Уравнения Шрёдингера и описание спиновых систем с помощью
потенциальных полей// ЖЭТФ, 1984. Т. 87, вып. 5. С. 1724-1733.
97. Alhassid Y., Gursey F., Iachello F. Potential scattering,
transfer matrix, and group theory // Phys. Rev. Lett. 1983.
V. 50, N 12. P. 873-876.
98. Багров В.Г., Вшивцев А.С. Простейшие применения алгебраической
симметрии к решению задач квантовой механики. Препр, № 31,
Томск, Изд-е Том, филиала СО АН СССР, 1986. 29с.
99. Багров В.Г., Вшивцев А.С., Хорошкин С.М., Чекалин В.Н. Новые
точные решения уравнения Шрёдингера для одномерного много-
параметрического потенциала// Изв. вузов. Физика, 1988.
№ 2. С. 102-108.
100. Вшивцев А.С. ВКБ-приближение для ангармонического осциллятора
Сб. научно-метод. статей по физике Минвуза СССР, 1987. № 13.
С. 104-109;
Вшивцев А.С., Чекалин В.Н. Построение точнорешаемых дифференци-
альных уравнений на основе представлений группы $SU(2)$.
Деп. ВИНИТИ 13.03.86. № 1764-В86.
101. Turbiner A.V. Quasi-exactly-solvable problems and $SL(2)$ group
Prerp. ITEP-197, 1987, Moscow-Atominfo, 1987. II p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Лагранжиан классической теории Янга-Миллса. Уравнения движения поля	5
2. Тензор энергии-импульса и инварианты поля Янга-Миллса.	12
3. Топологическая классификация полей. Число Понтрягина-Чжена-Саймонса	17
4. Калибровочные условия. Необходимость выбора калибровки	21
5. Решение уравнений движения классического поля Янга-Миллса	22
5.1. Сферически - симметричные решения	22
5.2. Плосковолновые решения уравнений Янга-Миллса	26
5.3. Решения уравнений Янга-Миллса с током	35
5.4. Решения уравнений Янга-Миллса в мнимом времени	43
5.5. Постоянные однородные поля как решения уравнений Янга-Миллса	45
5.6. Взаимодействие полей Янга-Миллса с полями Хиггса	48
5.7. Самосогласованные решения уравнений движения калибровочных полей и полей Хиггса	58
5.8. Инстантонные решения уравнений Янга-Миллса	70
6. Уравнения движения классической частицы с изоспином	73
7. Движение классической неабелевой частицы в цветовых полях	78
8. Решения уравнения Дирака и Клейна-Гордона-Фока в неабелевых полях различной конфигурации	90
9. Использование алгебраических структур при построении точно решаемых волновых уравнений	100
9.1. Построение точно решаемых дифференциальных уравнений	102
9.2. Построение многопараметрического одномерного уравнения Шредингера и нахождение его решений	106
9.3. Уравнение Шредингера для ангармонического осциллятора	114
9.4. Суперсимметрия	116

9.5. БЖБ-приближение для ангармонического осциллятора . .	120
9.6. Обобщение процедуры использования групповых методов на группы высших размерностей	126
Заключение	130
Литература	131

Владислав Гаврилович Багров
Александр Сергеевич Вшивцев
Сергей Владимирович Кетов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
(калибровочные поля)
Учебное пособие

Редактор Н.С. Поддубная

ИБ 2276. Подписано к печати 17.01.90г. КЗ 07013
Формат 60х84 1/16. Бумага типографская № 3. Печать офсетная.
Печ. л. 9. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 1000 экз.
Заказ № 92. Цена 20 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4



Межвузовская типография ОмПИ

1. 20 к.

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00383032