ISSN 0234—7342

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Томский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового
Красного Знамени государственный университет имени
В.В.Куйбышева

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Выпуск 10

Издательство Томского университета
Томск - 1991

Абелевы группы и модули: Сборник статей /Под ред. А.В.Михалева. Вып. 10. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. - 1950. - Гр.40к. 500 экз. 1602040000.

Публикуются работы, относящиеся к проблемам теорий абелевых групп, колец и модулей. Представлены такие направления, как абелевы группы без кручения и их группы автоморфизмов, абелевы группы, близкие к алгебраически компактным, кольца непрерывных функций, совершенные кольца, кольца частных, проективные модули и другие.

Для научных работников, аспирантов, студентов, интересующихся вопросами современной алгебры.

Редакционная коллегия: А.В.Михалев (ответственный редактор), А.П.Мишина, Г.М.Рябухин, И.Х.Беккер (зам. ответственного редактора), С.Ф.Кожухов, П.А.Крылов

Рецензент - С.К.Росошек

А $\frac{1602040000}{177\ (012)\text{-}91}$ 43 - 91

© Томский государственный университет, 1991

Посвящается светлой памяти
Льва Анатольевича Скорнякова

Скорняков Лев Анатольевич
(14.02.1924 - 26.05.1989)

Данный выпуск сборника "Абелевы группы и модули" посвящен светлой памяти Льва Анатольевича Скорнякова - крупного математика, профессора кафедры высшей алгебры Московского университета, участника Великой Отечественной войны. Круг научных интересов Л.А.Скорнякова был необычайно широк, ярко отражая любимый им тезис: "все в связи и взаимодействии". Работы Л.А.Скорнякова по теории проективных плоскостей, по теории структур, по теории колец (ассоциативных и неассоциативных), по абелевым группам и модулям, по гомологической алгебре, по топологии и топологической алгебре, по теории подгрупп и автоматам, по теории категорий и универсальной алгебре, по логическим аспектам в алгебраических системах, стохастической алгебре и выпуклому анализу получили широкую известность среди специалистов. Результаты этих исследований, новые идеи и проблемы оказали и оказывают значительное влияние на развитие ряда разделов современной алгебры, они стимулировали активные исследования советских и зарубежных математиков, в частности, мощной научной школы, созданной Л.А.Скорняковым. Его научные монографии "Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца", "Абелевы группы и модули", переведенные на многие языки мира, его многочисленные обзоры в "Успехах математических наук" и в "Итогах науки и техники", его обзорные доклады на международных и всесоюзных конференциях, симпозиумах и школах сыграли важную роль в развертывании исследований в новых направлениях. Значителен вклад Л.А.Скорнякова в учебно-педагогическую литературу. Талантливо написанные им книги "Конфигурационные теоремы", "Элементы теории структур" (1 и 2 изд.), "Элементы алгебры" (1 и 2 изд.) "Элементы общей алгебры", "Системы линейных уравнений", его участие в "Сборнике задач по алгебре" находят признание у преподавателей математики, аспирантов и студентов. Много сил Л.А. Скорняков отдавал подготовке научной смены в Московском университете, будучи тесно связан со многими университетами и институтами страны. Наряду с этим Лев Анатольевич вел большую научно-организационную работу. До конца своих дней он возглавлял редколлегию межвузовского сборника "Абелевы группы и модули".

Светлая память о Льве Анатольевиче Скорнякове навсегда сохранится в сердцах его коллег, учеников и всех тех, кто его знал.

Редколлегия сборника
"Абелевы группы и модули"

ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И МАТРИЦЫ НАД МОДУЛЯРНЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

В.А.Артамонов

В работах [1,2] доказывается свобода проективных модулей над нильпотентными модулярными алгебрами Ли, заданными полиоднородными определяющими соотношениями, если ранг модулей больше размерности коммутанта алгебры Ли. Кроме того, в теореме 10 из [2] для тех же алгебр Ли доказана теорема о стабилизации функтора K_1 и теорема о транзитивности действия группы элементарных матриц на унимодулярных строках. Эти результаты в теоремах 1 и 2 данной работы распространяются на более широкий класс конечномерных модулярных алгебр Ли.

Пусть $n \geqslant 2$ - натуральное число. Через $\langle n \rangle$ обозначим множество всех наборов $(i_1, \ldots, i_n)$ целых неотрицательных чисел $i_1, \ldots, i_n$. Ясно, что $\langle n \rangle$ является свободным коммутативным моноидом с базой, состоящей из элементов $e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_n=(0,\ldots,0,1)$.

Пусть K - поле положительной характеристики p, L - конечномерная K-алгебра Ли. Предположим, что в L имеется идеал I и элементы $x_1, \ldots, x_n \in L$, $n \geqslant 2$, составляющие базис L/I, причём I является прямой суммой пространств

$$I = \bigoplus_{i \in \langle n \rangle} I_i$$

с условиями

$$[I_i, I_j] \subseteq I_{i+j}, \quad (ad\, x_i) I_j \subseteq I_{j+e_i},$$
$$[x_i, x_j] \in I_{e_i+e_j}.$$

Тогда алгебра L обладает градуировкой

$$L = \bigoplus_{m \geq 0} L_m, \qquad (1)$$

где

$$L_1 = Kx_1 \oplus \dots \oplus Kx_n \oplus I_{e_1} \oplus \dots \oplus I_{e_n},$$

и $m \neq 0$ при L_m является прямой суммой всех таких I_j, что $j = (j, \dots, j_n)$ и $j_1 + \dots + j_n = m$. Градуировка (I) индуцирует градуировку

$$U = \bigoplus_{m \geq 0} U_m \qquad (2)$$

в универсальной обёртывающей алгебре U для L, причём U_0 является универсальной обёртывающей алгеброй для подалгебры I_0 в L.

Рассмотрим в L вторую градуировку

$$L = \bigoplus_{j \geq 0} L(j), \qquad (3)$$

где $L(0)$ - прямая сумма Kx_1 и всех I_i, где $i = (m, 0, \dots, 0)$ для любого $m \geq 0$. Если $j \neq 0$, то $L(j)$ - прямая сумма всех I_i, где $i = (i_1, \dots, i_n)$, причём $i_2 + \dots + i_n = j$. Градуировка (3) индуцирует градуировку

$$U = \bigoplus_{j \geq 0} U(j) \qquad (4)$$

в алгебре U, где $U(0)$ - универсальная обёртывающая алгебра для подалгебры $L(0)$ в L.

Теорема I. Пусть P - конечно-порождённый проективный модуль над универсальной обёртывающей алгеброй U для алгебры L, рассмотренной выше. Если ранг модуля P больше размерности идеала I, то модуль P свободен.

Доказательство. Заметим, что каждый оператор $ad\, x_i$, $i = 1, \dots, n$, нильпотентен в L. Следовательно, по предложению I9 из [I] существует такое целое число q, являющееся степенью характеристики p поля K, что x_i^q лежит в центре U, $i = 1, \dots, n$. Алгебра U является модулем конечного типа над своим центром C [3]. Пусть R -

подалгебра в C, порождённая $C \cap U(I)$, и $x_1^q, \ldots, x_n^q$. По [4] U является конечно-порождённым модулем над центральным подкольцом R. Линейно независимые элементы $x_1, \ldots, x_n$ из L дополним до базиса E в L. По теореме Пуанкаре–Биргкофа–Витта для градуированной алгебры, ассоциированной с естественной фильтрацией в U, имеем $gr\, U \cong K[E]$. Рассмотрим естественное отображение из U в $gr\, U$. Обозначим через S все элементы из R, образ которых в $gr\, U$ принадлежит $K[x_1^q, \ldots, x_n^q]$. Как и в [5,6], имеем $K.\dim S^{-1}U \le \dim_K I$. Модуль P стабильно свободен [7]. Следовательно, по [8] модуль $S^{-1}P$ над кольцом $S^{-1}U$ свободен, т.е. существует такое $f \in S$, что модуль P_f свободен над кольцом U_f.

Каждое отображение $h: L \to U$, тождественное на $I + Kx_1$ и переводящее элементы $x_2, \ldots, x_n$ в элементы

$$h(x_2) = x_2 + x_1^{qm_2}, \ldots, h(x_n) = x_n + x_1^{qm_n},$$

где $m_2, \ldots, m_n$ – целые положительные числа, продолжается до автоморфизма алгебры U. Применяя автоморфизм указанного вида, как и в [6], можно добиться, чтобы образ f в $gr\, U$ имел вид ax_1^{qm}, где a – ненулевой элемент поля K; m – натуральное число. Тогда старший член f относительно градуировки (2) равен ax_1^{qm}.

Если ранг модуля P равен единице, то по условию $I = 0$. Тогда L – абелева алгебра Ли, U – кольцо многочленов над полем K. Следовательно, модуль P свободен [6]. Предположим, что ранг модуля P больше единицы. По теореме 2 из I можно считать, что $f = x_1^q$. Но тогда, как и в доказательстве теоремы 4 [1, с.1136], из рассмотрения градуировки (4) получаем

$$P \simeq U \underset{U(0)}{\otimes} Q,$$

где Q – конечно-порождённый проективный модуль над универсальной обёртывающей алгеброй $U(0)$ алгебры Ли $L(0)$. При этом ранги модулей P и Q совпадают. Следовательно, если ранг P больше размерности $L(0)$, то по [8] модули Q и P свободны.

Предположим, что ранг P не выше размерности $L(0)$. В этом случае по условию размерность идеала I не выше раз-

мерности прямой суммы компонент I_{me_i}, $m \geq 0$. Элементы $x_1, \dots, x_n$ равноправны. Поэтому, учитывая условие $n \geq 2$, можно предполагать, что $I_j = 0$ при $j \neq 0$. В этом случае элементы $x_1, \dots, x_n$ лежат в центре, $I = I_0$, поэтому U является кольцом многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами в U_0. Остаётся воспользоваться результатами [8, § 5] и стабильной свободой модуля P. Теорема доказана.

Аналогичным образом с использованием результатов работ [2,9] доказывается

Теорема 2. Пусть I, L, U из теоремы I. Предположим, что $m \geq 2 + \max(2, \dim_K I)$. Тогда $CL(m, U) = CL(m, K)\, E(m, U)$. Группа $E(m, U)$ действует справа транзитивно на множестве всех унимодулярных строк длиной m.

ЛИТЕРАТУРА

I. Артамонов В.А. Проективные модули над универсальными обёртывающими алгебрами // Изв. АН СССР, Сер.матем. 1984. Т. 48, № 6. С.1123-1137.

2. Артамонов В.А. Проективные модули и матрицы над кольцами косых многочленов // Сборник работ по алгебре. М.: Изд-во МГУ, 1989. С.5-49.

3. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 356 с.

4. Zassenhaus H. The representations of Lie algebras of prime characteristic. //Proc. Glasgow Math. Assoc. 1954. V.2. P.1-36.

5. Resco R., Small L.W., Stafford J.T. Krull and global dimensions of semiprime Noetherian PI-rings. // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 274, N 1. P.285-295.

6. Lam T.Y. Serre's conjecture. // Lecture Notes in Math. 1978. V.635.

7. Quillen D. Higher algebraic K-theory. // Lecture Notes in Math. 1973. V.341. P.85-147.

8. Суслин А.А. О структуре проективных модулей над кольцами многочленов в случае некоммутативного кольца коэффициентов. // Тр.матем.ин-та им. В.А.Стеклова. 1978. Т.148. С.233-252.

9. Kolster M. On the injective stability for K_2. // Lecture Notes in Math. 1982. V.966. P.128-168.

СКРЕЩЕННЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ В S-СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

И.Х.Беккер, Е.В.Шапошникова

В [I – 3] группы скрещенных гомоморфизмов $Z^1(\Phi, G)$, первые группы когомологий $H^1(\Phi, G)$ изучаются исходя из взаимосвязей между свойствами абелевых групп G без кручения и их групп автоморфизмов $\Phi \leq Aut\, G$. Такой подход, развиваемый в [I – 3], позволяет получить когомологические характеризации различных классов абелевых групп без кручения (в частности, сепарабельных групп и их межпрямых сумм).

В данной работе этот же подход применяется к изучению групп $H^1(\Phi, G)$ над S – сепарабельными группами G без кручения, где S – некоторая система групп без кручения конечного ранга.

Пусть $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ – система абелевых групп без кручения конечного ранга. Обозначим через $S^{\oplus}$ класс всех групп, разложимых в прямые суммы групп, изоморфных группам из S, и положим, что G замкнут относительно прямых слагаемых. Такие системы групп можно строить из групп без кручения ранга I, групп Марли (т.е. групп G без кручения конечного ранга, у которых порядок фактор – группы $G/pG \neq p$ для любого простого числа p), групп без кручения конечного ранга, кольца эндоморфизмов которых являются кольцами главных идеалов [7]. Широкие классы групп, для которых классы $S^{\oplus}$ замкнуты относительно прямых слагаемых, выделены в [5, 6].

Абелеву группу G без кручения назовем S – вполне разложимой, если она разлагается в прямую сумму групп, изоморфных группам из S. Группу G назовем S – сепарабельной, если любое конечное множество ее элементов можно включить в S-вполне

разложимое прямое слагаемое группы G. В [8] доказано, что прямое слагаемое S - сепарабельной группы также является S - сепарабельной группой.

Заметим, что не всякая S - сепарабельная группа является S - вполне разложимой. Если A - не вполне разложимая сепарабельная группа без кручения нулевого типа, то $G = G_\alpha \oplus A$ ($G_\alpha \in S$) является G_α - однородной S -сепарабельной, но не S - вполне разложимой группой (т.е. всякое прямое слагаемое группы G, изоморфное некоторой группе из S, изоморфно G_α). Если S состоит из неразложимых групп Марли, то группа $G_\alpha \oplus C$ также является не S - вполне разложимой S - сепарабельной группой, где C - любая сепарабельная группа без кручения, $G_\alpha \in S$ [7].

Приведем некоторые свойства скрещенных гомоморфизмов, которые потребуются в дальнейшем при рассмотрении первых групп когомологий $H^1(\Phi, G)$, $\Phi \leq Aut\, G$.

Лемма I [2]. Скрещенный гомоморфизм $f \in Z^1(\Phi, G)$ является главным тогда и только тогда, когда $fb \in Im(\varepsilon - b)$ хотя бы для одного регулярного автоморфизма b группы G из $C(\Phi)$.

Обозначим через Φ_1 подгруппу всех тех автоморфизмов подгруппы A группы G, которые индуцированы автоморфизмами из Φ.

Лемма 2 [I]. Если $G = G_1 \oplus G_2$ - прямое разложение группы G без кручения с характеристическим прямым слагаемым G_1, то всякий скрещенный гомоморфизм группы Φ_{G_1} в группу G_1 может быть продолжен до скрещенного гомоморфизма группы Φ в G.

Не 2 - делимую группу G без кручения назовем $B\Phi$ - группой, если действие любого ее автоморфизма $\varphi \in \Phi \leq Aut\, G$ есть умножение G на некоторое рациональное число. 2 - делимую группу G без кручения назовем $C\Phi$ - группой, если действие любого ее автоморфизма $\varphi \in \Phi \leq Aut\, G$ есть умножение на некоторое рациональное число и при условии $\varepsilon - \varphi \notin Aut\, G$ группа G содержит такие элементы g_0, что для некоторого простого числа p $g_0 \notin pG$, но $(\varepsilon - \varphi) g_0 \in pG$.

Лемма 3 [2]. Для $B\Phi$ - группы G всегда группа $H^1(\Phi, G) \neq 0$.

Лемма 4 [2]. Пусть G является 2 - делимой группой без кручения, $\Phi < Aut\, G$ и действие любого $\varphi \in \Phi$ на G есть умножение на некоторое рациональное число, притом $\varepsilon - \varphi \notin Aut\, G$. В таком случае $H^1(\Phi, G) \neq 0$ тогда и только тогда, когда G является $C\Phi$ - группой.

Полагаем далее, что группы C и Φ удовлетворяют таким усло-

виям:

(i) G имеет хотя бы один регулярный автоморфизм $\sigma \in C(\Phi)$, индуцирующий регулярный автоморфизм на каждом ее ненулевом прямом слагаемом, а Φ содержит все эти ограничения автоморфизма σ.

(ii) Φ содержит все элементарные автоморфизмы группы G.

Заметим, что вычисление группы $H^1(\Phi, V \oplus R)$, где $\Phi \leq \leq Aut\, G$; V, R – соответственно делимая и редуцированная части группы G, сводится к вычислению группы $H^1(\Phi_R, R)$. В дальнейшем будем считать абелеву группу без кручения G редуцированной.

Лемма 5 [2]. Пусть $G = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$ ($\mathfrak{A}$ – произвольное множество индексов), $\sigma = (\dots, \sigma_\alpha, \dots)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, где $\sigma \in C(\Phi)$, $\sigma_\alpha = \sigma_{G_\alpha} \in \Phi$. Тогда для любых $f \in Z^1(\Phi, G)$ и $\varphi_\alpha \in \Phi_{G_\alpha}$ всегда $f\varphi_\alpha \in G_\alpha$.

Подгруппу H группы G назовем λ – эндоморфной в G, $\lambda \in End\, G$, если всякий раз из того, что $\lambda g = h$, где $g \in G$, $h \in H$, следует $g \in H$.

Лемма 6 [2]. Если $G = G_1 \oplus G_2$ и G_1 изоморфна $(\varepsilon - \sigma)$ – эндоморфной подгруппе G_2' группы G_2, то для любого $f \in Z^1(\Phi, G)$ $fG_1 \in Im\,(\varepsilon - \sigma_1)$, где $\sigma_1 = \sigma_{G_1}$.

Рассмотрим далее S – сепарабельную группу G, где $S = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ – система абелевых групп без кручения конечного ранга. Обозначим через $\Omega(G)$ множество всех прямых слагаемых группы G, изоморфных группам из S. Говорим, что группа $A \in \Omega(G)$ изолирована в $\Omega(G)$, если в $\Omega(G)$ нет такой группы B, что $Hom\,(A, B) \neq 0$. Для S – сепарабельной группы G множество $\Omega(G)$ назовем σ – точным, если для любой неизолированной группы $A \in \Omega(G)$ условие $Hom(A, B) \neq 0$, $B \in \Omega(G)$, влечет существование хотя бы одного такого мономорфизма $\varkappa : A \rightarrowtail B$, что $Im\, \varkappa$ является $(\varepsilon - \sigma)$ – эндоморфной подгруппой в группе B.

Заметим, что S – сепарабельные группы G с σ – точными множествами $\Omega(G)$ можно строить согласно [1] с помощью групп без кручения ранга 1, положив $\sigma = -\varepsilon$. В [4] построена такая полужесткая система $\mathcal{B}$ групп без кручения конечного ранга, что всякая $\mathcal{B}$ – сепарабельная группа G будет иметь σ – точное множество $\Omega(G)$, где действие автоморфизма σ есть умножение группы G на рациональное число.

Теорема 7. Для S – сепарабельной группы G с σ – точным множеством $\Omega(G)$ группа $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда $H^1(\Phi_{G_\alpha}, G_\alpha) = 0$ для любой изолированной группы

$G_\alpha \in \Omega(G)$.

Доказательство. а) Пусть $H^1(\Phi, G) = 0$ и G_α – изолированная группа из $\Omega(G)$. Убедимся, что G_α характеристична в G. Допустим противное, пусть $G = G_\alpha \oplus G'$, $Hom(G_\alpha, G') \neq 0$ и $0 \neq \eta \in Hom(G_\alpha, G')$, $\eta g_\alpha = g' \neq 0$, $g_\alpha \in G_\alpha$, $g' \in G'$. Так как группа G' также является S – сепарабельной, то g' можно вложить в S – вполне разложимое прямое слагаемое $G_1' = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$ группы G', где $G_i \in \Omega(G)$, $i = \overline{1,m}$. Имеем $0 \neq \pi_{i_0} \eta \in Hom(G_\alpha, G_{i_0})$, где $\pi_{i_0}: \bigoplus_{i=1}^{m} G_i \to G_{i_0}$ – проекция, $\pi_{i_0}(g') \neq 0$, $i_0 \in 0\overline{r}$. Следовательно, группа G_α не является изолированной в $\Omega(G)$, что противоречит предположению. Значит, существование неглавного скрещенного гомоморфизма из Φ_{G_α} в G_α влечет согласно лемме 2 возможность его продолжения до неглавного скрещенного гомоморфизма из Φ в G. Таким образом, $H^1(\Phi_{G_\alpha}, G_\alpha) = 0$ для любой изолированной группы $G_\alpha \in \Omega(G)$.

б) Пусть для всякой изолированной группы $G_\alpha \in \Omega(G)$ группа $H^1(\Phi_{G_\alpha}, G_\alpha) = 0$. Покажем, что $H^1(\Phi, G) = 0$. Пусть $0 \neq f \in Z^1(\Phi, G)$. Вложим $f\sigma$ в S – вполне разложимое прямое слагаемое G_1 группы G. Имеем $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} A_j$, $A_j \in \Omega(G)$, $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$, $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_{G_2}$ и $f\sigma = f\sigma_1 + f\sigma_2$, $f\sigma_1 \in G_1$, $f\sigma_2 = 0$. Отсюда следует, что $f\sigma_1 = \sum_{j=1}^{s} f\sigma_j'$, где $\sigma_1 = \sigma_1' \ldots \sigma_s'$, $\sigma_j' = \sigma_{/A_j}$ и $f\sigma_j' \in A_j$, $j = \overline{1,s}$. Заметим теперь, что $f \in Z^1(\Phi, G)$ индуцирует некоторый скрещенный гомоморфизм $f_j: \Phi_{A_j} \to A_j$. Если группа A_j изолирована в $\Omega(G)$, то f_j – главный скрещенный гомоморфизм и $f\sigma_j' \in Im(\varepsilon - \sigma_j')$ по лемме I. Пусть группа A_j не изолирована в $\Omega(G)$. В случае $\varepsilon - \sigma_j' \in Aut A_j$ снова имеем $f\sigma_j' \in Im(\varepsilon - \sigma_j')$. Допустим, что $\varepsilon - \sigma_j' \notin Aut A_j$. В $\Omega(G)$ существует хотя бы одна такая группа B_j, что $Hom(A_j, B_j) \neq 0$. Имеем $f\sigma_j' = 0$ и существует гомоморфизм $\eta \in Hom(A_j, B_j)$ такой, что $\eta f\sigma_j' \neq 0$. Далее рассмотрим $\pi_1 \eta f\sigma_j' \neq 0$, где $\pi_1 \in Hom(B_j, \bigoplus_{i \neq j} A_i \oplus G_2)$, π_1 – проекция. Так как группа $\bigoplus_{i \neq j} A_i \oplus G_2$ является также S – сепарабельной, то существует ее S – вполне разложимое прямое слагаемое $\bigoplus_{k=1}^{t} C_k$, содержащее $\pi_1 \eta f\sigma_j' \neq 0$. Значит, найдется проекция $\pi_k: \bigoplus_{k=1}^{t} C_k \to C_k$ такая, что $\pi_k \pi_1 \eta f\sigma_j' \neq 0$. Итак, получили $Hom(A_j, C_k) \neq 0$, $C_k \in \Omega(G)$. Поскольку множество $\Omega(G)$ является σ – точным, то группа A_j изоморфна некоторой $(\varepsilon - \sigma)$-эндоморфной подгруппе C_k' груп-

пы C_K . Тогда согласно лемме 6 $f\sigma' \in Im\ (\varepsilon - \sigma_j')$. Следовательно, $f\sigma = f\varepsilon_1 = \sum_{j=1}^{k} (\varepsilon - \sigma_j')\, a_j$, где $a_j \in A_j$, т.е. $f\sigma \in Im(\varepsilon - \sigma)$. Таким образом, всякий скрещенный гомоморфизм из φ в G является главным, т.е. $H^1(\varphi, G) = 0$.

Следствие. Для S – сепарабельной группы G с σ – точным множеством $\Omega(G)$ без изолированных групп (в частности, для однородной S – сепарабельной группы) всегда $H^1(\varphi, G) = 0$.

Пусть A – p – редуцированная группа без кручения (p – фиксированное простое число), $\alpha = \tau_0 + \tau_1 p + \tau_2 p^2 + \ldots + \tau_n p^n + \ldots (0 \le \tau_n \le p-1;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ – целое p – адическое число, $S_n(\alpha)$ – n-я частичная сумма числа α . Если для $a \in A$ существует такой $a' \in A$, что $a' = \lim_A \{S_n(\alpha)\, a\}$, где $\lim_A \{S_n(\alpha)\, a\}$ – предел в p – адической топологии группы A , то пишем $a' = \alpha a$. Будем говорить, что действие автоморфизма φ группы A есть умножение A на целое p – адическое число $\alpha_\varphi \in U(Q_p^*)$, если $\varphi a = \alpha_\varphi a$ для любого $a \in A$. В таком случае говорим также, что автоморфизм φ определяется целым p – адическим числом α_φ (или α_φ определяет автоморфизм φ).

Пусть всякий автоморфизм $\varphi \in \Phi \le Aut\, A$ группы A определяется некоторым p – адическим числом α_φ и $\mu: \Phi \to U(Q_p^*)$ – такое вложение группы Φ в группу единиц кольца целых p – адических чисел, что $\mu\varphi = \alpha_\varphi$. Очевидно, что всякий такой автоморфизм φ регулярен на A , а φ^{-1} определяется числом α_φ^{-1} . Если $\alpha_\varphi = \tau_0 + \tau_1 p + \tau_2 p^2 + \ldots + \tau_n p^n + \ldots (0 \le \tau_n \le p-1)$ и $\tau_0 > 1$, то $\varphi - \varepsilon$ есть автоморфизм группы A , определяемый числом $\alpha_\varphi - 1$. p – редуцированную группу A без кручения назовем $\mathcal{P}\Phi$ – группой, если всякий автоморфизм $\varphi \in \Phi$ определяется целым p – адическим числом и $\varepsilon - \varphi \notin Aut\, A$.

Лемма 8 [3] . Для p – редуцированной группы A без кручения, всякий автоморфизм $\varphi \in \Phi$ которой определяется целым p – адическим числом, группа $H^1(\Phi, G) \neq 0$ тогда и только тогда, когда A является $\mathcal{P}\Phi$ – группой.

Теорема 9. Пусть G – S – сепарабельная группа с σ – точным множеством $\Omega(G)$, действие всякого $\varphi_\lambda \in \Phi_\lambda$ на изолированной группе A есть умножение либо на рациональное число, либо на целое p – адическое число в случае p – редуцированной группы A .

Для такой группы G группа $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega(G)$ не содержит изолированных групп, являющихся

$B\mathcal{P}$ - группами, $C\mathcal{P}$ - группами или $\mathcal{PP}$ - группами.

Доказательство. а) Пусть $H^1(\mathcal{P},G)=0$ и $\Omega(G)$ содержит изолированную группу A, являющуюся $B\mathcal{P}$ - группой, $C\mathcal{P}$ - группой или $\mathcal{PP}$ - группой. Согласно леммам 3, 4 и 8 соответственно в каждом из этих случаев получаем $H^1(\mathcal{P}_A, A)\neq 0$. Тогда по теореме 7 существует скрещенный гомоморфизм $f:\mathcal{P}\to G$, не являющийся главным. Следовательно, $\mathcal{P}(G)$ не содержит изолированных групп названных трех видов.

б) Обратно, пусть $\Omega(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Если $\Omega(G)$ не содержит изолированных групп, то $H^1(\mathcal{P},G)=0$. Пусть A - изолированная группа из $\Omega(G)$. Если A - группа не 2 - делимая, то, так как она не может быть $B\mathcal{P}$ - группой, A p - редуцирована по некоторому простому числу p и действие всякого $\varphi_A\in\mathcal{P}_A$ есть умножение группы A на некоторое целое p - адическое число. Но A не является $\mathcal{PP}$ - группой, поэтому согласно лемме 8 получаем $H^1(\mathcal{P}_A,A)=0$. Пусть A - группа 2 - делимая. Так как A не является ни $C\mathcal{P}$ - группой, ни $P\mathcal{P}$ - группой, то по леммам 4, 8 снова получаем, что $H^1(\mathcal{P}_A,A)=0$. Таким образом, для любой изолированной группы $A\in\Omega(G)$ всякий раз $H^1(\mathcal{P}_A,A)=0$. Обращаясь теперь к теореме 7, получаем $H^1(\mathcal{P},G)=0$.

Абелеву группу без кручения G назовем S^* - разложимой, если она является прямым произведением групп, изоморфных некоторым группам из системы S.

Следствие. Для S - вполне разложимой группы $G=\bigoplus_{i\in J}G_i$ (S^* - разложимой группы $G=\prod_{i\in J}G_i$) с σ - точным множеством $\Omega(G)=\{G_i\}_{i\in J}$, для которой действие всякого $\varphi_A\in\mathcal{P}_A$ на изолированной группе A есть умножение либо на рациональное число, либо на целое p - адическое число в случае p - редуцированной группы A, группа $H^1(\mathcal{P},G)=0$ тогда и только тогда, когда $\Omega(G)$ не содержит изолированных групп, являющихся $B\mathcal{P}$ - группами, $C\mathcal{P}$ - группами или $\mathcal{PP}$ - группами.

Рассмотрим далее межпрямую сумму G S_i - сепарабельных групп G_i с σ - точными множествами $\Omega(G_i)$, всех прямых слагаемых, изоморфных группам из S_i, где S_i - система групп без кручения конечного ранга и каждый класс $S_i^{\oplus}$ замкнут относительно прямых слагаемых, i пробегает произвольное множество индексов J. Имеем $\bigoplus_{i\in J}G_i\leq G\leq\prod_{i\in J}G_i=G'$, $\sigma_i=\sigma_{G_i}$, $\sigma'=(\ldots,\sigma_i,\ldots)_{i\in J}$, $\sigma'\in Aut\,G$. Известно, что группа G имеет прямые разложения $G=G_i\oplus G_i'$, где G_i' есть

межпрямая сумма всех групп G_j для $j \in J$, $j \neq i$. Обозначим $\Omega'(G) = \bigcup_{i \in J} \Omega(G_i)$.

Теорема 10. Пусть группа G есть межпрямая сумма S_i - сепарабельных групп G_i с $\mathcal{E}$ - точными $\Omega(G_i)$, $i \in J$, $\Phi \leq Aut\, G$, и действие любого $\varphi_{A_i} \in \Phi_{A_i}$ на всякой изолированной группе $A_i \in \Omega(G_i)$ есть умножение A_i либо на рациональное число, либо на целое p - адическое число в случае p - редуцированной A_i.

1. Если группа G $(\mathcal{E}-\mathcal{E}')$- эндоморфна в G' и каждое $\Omega(G_i)$ не содержит изолированных групп, являющихся $B\Phi$ - группами, $C\Phi$ - группами или $P\Phi$- группами, то $H^1(\Phi, G) = 0$.

2. Если группа $H^1(\Phi, G) = 0$, то $\Omega'(G)$ не содержит изолированных групп, являющихся $B\Phi$- группами, $C\Phi$ - группами или $P\Phi$ - группами.

Доказательство. а) Пусть $f \in Z^1(\Phi, G)$, $f\sigma = (\dots, g_i, \dots)_{i \in J}$, где $g_i \in G_i$. Для любого $i \in J$ имеем $G = G_i \oplus G_i'$, $\sigma = \sigma_i \sigma_i'$, где $\sigma_i' = \sigma_{G_i'}$, притом по лемме 5 $f\sigma_i \in G_i$, $f\sigma_i' \in G_i'$. Отсюда $f\sigma_i = g_i$ и $f\sigma = (\dots, f\sigma_i, \dots)_{i \in J}$. Для тех групп G_i, для которых $\mathcal{E} - \sigma_i \in Aut\, G_i$, имеем $f\sigma_i \in \mathcal{I}_m(\mathcal{E} - \sigma_i)$. Пусть для группы G_κ, $\kappa \in J$, эндоморфизм $\mathcal{E} - \sigma_\kappa$ не является автоморфизмом. Так как множество $\Omega(G_\kappa)$ σ - точно и не содержит изолированных групп, являющихся $B\Phi$ - группами, $C\Phi$ - группами или $P\Phi$ - группами, то по теореме 7 получаем $f\sigma_\kappa \in \mathcal{I}_m(\mathcal{E} - \sigma_\kappa)$, $f\sigma_\kappa = (\mathcal{E} - \sigma_\kappa) g_\kappa$, где $g_\kappa \in G_\kappa$. Так как группа G $(\mathcal{E}-\mathcal{E}')$ – эндоморфна в G', то $g_0 = (\dots, g_i, \dots)_{i \in J} \in G$. Следовательно, $f\sigma \in \mathcal{I}_m(\mathcal{E} - \sigma)$, т.е. всякий $f \in Z^1(\Phi, G)$ является главным.

б) Допустим, что $\Omega'(G)$ содержит изолированную группу одного из трех названных в условии теоремы типов. Тогда $\Omega(G_S)$ хотя бы для одной группы G_S, $S \in J$, также содержит изолированную группу A_S, являющуюся $B\Phi$ - группой, $C\Phi$ - группой или $P\Phi$ - группой. Группа G_S имеет разложение $G_S = A_S \oplus \bar{G}_S$. Переходя к группе G, получаем $G = A_S \oplus (\bar{G}_S \oplus G_S') = A_S \oplus \hat{G}_S$. Рассмотрим группу $Hom(A_S, \hat{G}_S) \cong Hom(A_S, \bar{G}_S) \oplus Hom(A_S, G_S')$. Так как A_S изолирована в $\Omega(G_S)$, то $Hom(A_S, \bar{G}_S) = 0$. Группа G_S' является межпрямой суммой S_j - сепарабельных групп G_j, $j \neq S$, $\bigoplus_{i \in J} G_j \leq G_S' \leq \prod_{i \in J} G_j$. Имеем $Hom'(A_S, G_S') \leq Hom(A_S, \prod_{j \in J} G_j)$ и $Hom(A_S, \prod_{j \in J} G_j) \cong \prod_{j \in J} Hom(A_S, G_j)$. Но A_S изолирована в $\Omega'(G)$, поэтому каждая группа $Hom(A_S, G_j) = 0$. В противном слу-

чае, если хотя бы для одной G_{j_1} группа $Hom(A_S, G_{j_1}) \neq 0$, то $Hom(A_S, A_{j_1}) \neq 0$ для некоторого прямого слагаемого A_{j_1} группы G_{j_1} из $\Omega(G_{j_1})$ и A_S не изолирована в $\Omega'(G)$. Следовательно, $Hom(A_S, G_S') = 0$ и $Hom(A_S, \hat{G}_S) = 0$, т.е. группа A_S характеристична в G. Учитывая леммы 3, 4, 8, получаем $H^1(\mathcal{P}_{A_S}, A_S) \neq 0$, т.е. существует не-главный скрещенный гомоморфизм $f' : \mathcal{P}_{A_S} \to A_S$. Продолжая f' до скрещенного гомоморфизма $f : \mathcal{P}^{A_S} \to G$, получаем $H^1(\mathcal{P}, G) \neq 0$. Противоречие. Таким образом, доказано, что $\Omega'(G)$ не содержит изолированных групп, являющихся $B\mathcal{P}$- группами, $C\mathcal{P}$ - группами или $\mathcal{PP}$ - группами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер И.Х. О группах скрещенных гомоморфизмов групп автоморфизмов абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Матем. 1973. № 7. С. 3-11.

2. Беккер И.Х. Первые группы когомологий над сепарабельными абелевыми группами без кручения // Изв. вузов. Матем. 1983. № 3. С. 3-11.

3. Беккер И.Х. Первые группы когомологий над межпрямыми суммами $\mathcal{M}$ - сепарабельных типа ρ^+ групп // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том.ун-та, 1981. С. 20-34.

4. Шапошников А.И. Сервантные вполне характеристические подгруппы $\mathcal{C}$ - сепарабельных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том.ун-та, 1990. Вып.9. С. 131-136.

5. Arnold D., Lady E. Endomorphism rings and direct sums of torsion free Abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 211. P. 225-237.

6. Arnold D.M., Murley C.E. Abelian groups A, such that Hom (A,-) preserves direct sums of copies of A // Pacif. J. Math. 1975. V. 56, N. 1. P. 7-20.

7. Fuchs L., Viljoen G. A generalization of separable torsion-free abelian groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. V. 78. P. 15-21.

8. Rangaswamy K.M. On C-separable abelian groups // Communications in algebra. 1985. V. 13, N 6. P. 1210-1227.

О КОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ КОЛЬЦАМИ БЕЗУ

Е.М.Вечтомов

Введение

Рассматривается кольцо $C(X,K)$ всех непрерывных K-значных функций на топологическом пространстве X с поточечно определенными операциями, где K – либо топологическое поле $\mathbb{R}$ действительных чисел, либо топологическое поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, либо топологическое тело $\mathbb{H}$ кватернионов. Будут приведены условия, эквивалентные тому, что кольцо $C(X,K)$ является кольцом Безу. Кольцо называется /правым/ кольцом Безу, если каждый его конечно-порожденный /правый/ идеал является главным /правым/ идеалом. В работе [1] Гиллман и Хенриксен начали изучение таких колец $C(X,\mathbb{R})$. Они назвали тихоновское пространство X F-пространством, если $C(X,\mathbb{R})$ – кольцо Безу. Мы F-пространством называем произвольное топологическое пространство, обладающее указанным "алгебраическим" свойством. Как обычно, топологическое пространство называют тихоновским, если оно вполне регулярно и хаусдорфово.

В [1] доказаны различные функционально-алгебраические и функционально-топологические характеризации F-пространств и даны примеры таких пространств. Дальнейшее исследование класса F-пространств, существенно использующее теорию упорядоченных колец, проведено в монографии Гиллмана и Джерисона [2], первое издание которой вышло в 1960 г. Другие "кольцевые" характеристики F-пространств получены нами в [3 - 5].

В §1 приведены алгебраические характеризации F-пространств. §2 содержит чисто топологическую характеристику F-пространств, основанную на топологическом описании нуль-множеств. Общетопологические описания нуль-множеств произвольных топологических пространств и

самих F-пространств получены, по-видимому, впервые. Напомним, что нуль-множеством топологического пространства X называется произвольное множество вида $Z(f)=\{x\in X \mid f(x)=0\}$, $f\in C(X,\mathbb{R})$. Конуль-множествами в X называются дополнения $X\setminus Z(f)$ нуль-множеств.

§ 1. Кольцевые характеризации F-пространств

Подкольцо A кольца $C(X,K)$ назовем z-насыщенным, если для любого нуль-множества Z топологического пространства X существует такая $f\in A$, что $Z(f)=Z$, $h\in A$ влечет $|h|\in A$ и для любых $f, g\in A$ разрешимость уравнения $fh=g$ в $C^*(X,K)$ влечет его разрешимость в A. Таковыми являются подкольцо $C^*(X,K)$ всех ограниченных функций в $C(X,K)$ и подкольца $C(X,\mathbb{R})$ в $C(X,\mathbb{C})$ и $C(X,\mathbb{H})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ и C – произвольное топологическое пространство. Тогда эквивалентны следующие условия:

1/ X – F-пространство, т.е. $C(X,K)$ – кольцо /равносильно, правое кольцо/ Безу;

2/ кольцо $C(X,K)$ дистрибутивно /дистрибутивно справа/, т.е. решетка всех его идеалов /правых идеалов/ дистрибутивна;

3/ все идеалы /правые идеалы/ кольца $C(X,K)$ являются плоскими правыми $C(X,K)$-модулями;

4/ все главные /главные правые/ идеалы в $C(X,K)$ плоские;

5/ кольцо $C(X,\mathbb{H})$ инвариантно справа, т.е. каждый его правый идеал двусторонний;

6/ каждый идеал /правый идеал/ J кольца $C(X,K)$ обладает свойством: $f+g\in J$ и $fg=0$ влекут $f\in J$ для любых $f,g\in C(X,K)$;

7/ для всякого z-насыщенного подкольца кольца $C(X,\mathbb{H})$ выполняется некоторое /любое/ из условий 1/ – 6/.

Эквивалентность утверждений 1/ – 6/ доказана в [4, теорема 1 и 5, теорема 3]. Справедливость сформулированной теоремы для z-насыщенных подколец доказывается аналогично.

Замечание 1. Можно привести и другие условия, равносильные условиям теоремы 1. Например, $fC(X,K)+gC(X,K)=(|f|+|g|)C(X,K)$ для любых $f,g\in C(X,K)$ или $fC(X,K)=|f|C(X,K)$ при $f\in C(X,K)$. Здесь $|f|(x)=|f(x)|$ – модуль числа $f(x)\in\mathbb{H}$ для любой точки $x\in X$.

Замечание 2. Теорема 1 имеет место и для ряда других тел K [4, 5] для подполей поля $\mathbb{R}$. Кроме того, интересно исследовать эти

условия для топологических колец K. В связи с этим отметим только почти очевидное утверждение о том, что любое кольцо $C(X,\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ – дискретное кольцо целых рациональных чисел, является кольцом Безу, причем $HOД(f,g)(x) = HOД(f(x), g(x))$ для любых $f,g \in C(X,\mathbb{Z})$ и $x \in X$ /считаем, что $HOД(0,0) = 0$ /.

§ 2. Одна топологическая характеристика F-пространств

Сначала дадим внутреннюю топологическую характеристику нуль-множеств произвольного топологического пространства. Для этого введем абстрактно-топологическое понятие Z-цепи множеств в топологическом пространстве.

Пусть X – произвольное топологическое пространство. Пусть A и B – его подмножества. Договоримся, что A° – внутренность A, а $\bar{A}$ – его замыкание в X и $A \subset B$ обозначает строгое включение. Счетную плотную систему S подмножеств в X относительно включения $\subseteq$ множеств, не имеющую наибольшего и наименьшего элементов, назовем Z-цепью множеств пространства X, если $\bar{A} \subseteq B^\circ$ или $\bar{B} \subseteq A^\circ$ для любых различных $A,B \in S$. Плотность цепи S означает, что для любых $A,B \in S$ $A \subset B$ влечет существование такого $C \in S$, что $A \subset C \subset B$. Отметим, что цепь $S' = \{X \setminus A \mid A \in S\}$, определенная для Z-цепи S на X, сама является Z-цепью, причем

$$X \setminus \cup S' = \cap S \quad \text{и} \quad (S')' = S .$$

Определение Z-цепи множеств, естественно, возникает из конструкции П.С.Урысона, используемой при доказательстве леммы Урысона о тихоновости нормальных пространств.

ЛЕММА. Произвольное подмножество A топологического пространства X является его нуль-множеством /конуль-множеством/ тогда и только тогда, когда существует такая Z-цепь S множеств в X, что $A = \cap S$ / $A = \cup S$ /.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что нуль-множества произвольного топологического пространства X – это в точности пересечения $\cap S$ Z-цепей S множеств этого пространства. Поскольку

$$X \setminus Z(f) = \cup S \quad \text{эквивалентно} \quad Z(f) = \cap S' ,$$

то тем самым будет доказана справедливость леммы и для конуль-множеств.

Итак, пусть $Z(f)$, $f \in C(X,\mathbb{R})$, – произвольное нуль-множество на X. Для любого действительного числа t положим

$$A_r = \{x \in X \mid |f(x)| < r\}.$$

Ясно, что цепь

$$S = \{A_r \mid r$$ – рациональное число и $0 < r < 1\}$$

является Z-цепью множеств пространства X и $\cap S = Z(f)$.

Обратно, пусть дана Z-цепь S множеств топологического пространства X. По известной теореме [6, с. 222] счетная плотная цепь S по включению, не имеющая наибольшего и наименьшего элементов, изоморфна линейно упорядоченному множеству /цепи/ L всех рациональных чисел интервала $(0,1)$. Таким образом, система S оказывается индексированной числами из L, т.е. можно считать, что

$$S = \{A_r \mid r \in L\},$$

причем если $r < s$, то $\bar{A}_r \subseteq A^0_s$. Определим функцию f из X в единичный отрезок $[0,1]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in A_r\}, & \text{если } x \in US, \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus US. \end{cases}$$

По лемме 3 главы 4 книги [7] функция непрерывна, т.е. $f \in C(X, R)$. Легко видеть, что $\cap S = \bigcap_{r \in L} A_r = Z(f)$. Лемма доказана.

Теперь в терминах Z-цепей легко получить решение задачи чисто топологического описания F-пространств.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы произвольное топологическое пространство X было F-пространством, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух Z-цепей множеств пространства X с непересекающимися объединениями A и B нашлись такие две Z-цепи множеств на X с непересекающимися пересечениями C и D, что $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы и того факта, что пространство является F-пространством тогда и только тогда, когда любые два непересекающихся конуль-множества на X функционально отделимы [2, упр. I4,№ 4], т.е. содержатся в некоторых двух непересекающихся нуль-множествах [2, теорема I.I5]. Отметим, что в [2] рассматриваются лишь тихоновские пространства. Но эти результаты верны и для произвольных топологических пространств /см., например, [4]/.

Замечание 3. Лемма позволяет дать внутренние топологические эквиваленты для тех классов топологических пространств, которые можно определить в терминах нуль-множеств, например, для вполне регулярных пространств, для совершенно нормальных пространств, для хьюиттовских

/действительно-компактных/ пространств [2]. Так, определение полной регулярности топологического пространства X переформулируется следующим образом: пространство X вполне регулярно, если для любых его замкнутого множества B и точки $x \notin B$ существуют такие две z-цепи множеств на X с непересекающимися пересечениями C и $\mathcal{D}$, что $B \subseteq C$ и $x \in \mathcal{D}$. Заметим, что эта переформулировка проще, чем теорема Фринк-Зайцева [8, упр. I.5] о топологической характеризации тихоновских пространств с помощью нормальных баз.

В заключение сделаем несколько замечаний о классе F-пространств. F-пространствами являются экстремально несвязные пространства и P-пространства [2]. Напомним, топологическое пространство X называется экстремально несвязным, если замыкание любого его открытого множества открыто, и P-пространством, если пересечения счетных семейств открытых в X множеств также открыты. Еще один класс примеров доставляет такой результат: если X - локально компактное хаусдорфово пространство, являющееся счетным объединением компактов, то его нарост $\beta X \setminus X$, где βX - компактификация Стоуна-Чеха пространства X, - F-пространство. В частности, $\beta R \setminus R$ - F-пространство. Доказательство последнего результата см. в [2, теорема I4.27]. За другими примерами отсылаем к работе [I].

Очевидно, что топологическая сумма конечного или бесконечного семейства топологических пространств является F-пространством тогда и только тогда, когда все пространства-слагаемые суть F-пространства. Однако тихоновское произведение уже двух F-пространств не обязано быть F-пространством. Гиллман [9] построил такое экстремально несвязное пространство и P-пространство, что их произведение не является F-пространством. Подмножество A топологического пространства X называется C^*-расширяемым, если любая функция f из $C^*(A, \mathbb{R})$ продолжается до функции из $C(X, \mathbb{R})$. F-пространства могут быть охарактеризованы как пространства, в которых все конуль-множества C^*-расширяемы [2, теорема I4.25]. Отсюда следует, что конуль-множества F-пространств сами являются F-пространствами. Для любого топологического пространства X существует тихоновское пространство τX и хьюиттовское расширение $\nu \tau X$ /см., например, [2 или 4]/, имеющие изоморфные кольца непрерывных функций. По теореме I пространства X, τX, $\nu \tau X$ и $\beta \tau X$ одновременно являются или не являются F-пространствами. Наконец, отметим, что F-пространства не содержат нетривиальных сходящихся последовательностей в случае тихоновских пространств [I]. Поэтому лишь дискретные пространства являются тихоновскими F-пространствами с первой аксиомой счетности.

Литература

1. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 82, N 2. P. 366-391.
2. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1976. 300p.
3. Вечтомов Е.М. Об идеалах колец непрерывных функций// Изв. вузов. Матем. 1981. № 1. С. 3 - 10.
4. Вечтомов Е.М. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F -пространства// Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 3. С. 321 - 332.
5. Вечтомов Е.М. О кольцах непрерывных функций со значениями в топологических телах/ / Матем. исследования. Кишинев: Штиинца, 1988. Вып. 105. С. 45 - 52.
6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
7. Келли Д. Общая топология. М.: Мир, 1981. 432 с.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
9. Gillman L. A P-space and an extremally disconnected space whose product is not an F-space // Arch. Math. 1960. V. 11, N 1, P. 53-55.

ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНОСТЬ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП.

С.Я.Гриншпон, В.М.Мисяков

Редуцированная абелева группа G называется вполне транзитивной, если для любых ее элементов a, b таких, что $H(a) \leq H(b)$. ($H(a)$ и $H(b)$ – высотные матрицы элементов a и b соответственно), следует существование такого эндоморфизма φ этой группы, что $\varphi(a) = b$.

В данной статье получен критерий вполне транзитивности прямого произведения сепарабельных абелевых групп. Установлены необходимые и достаточные условия вполне транзитивности расщепляемых абелевых групп с сепарабельной периодической частью. В заключение работы рассматриваются связи между вполне транзитивностью прямых сумм и прямых произведений абелевых групп.

Все рассматриваемые в работе группы – абелевы, редуцированные.

Напомним некоторые определения.

I. Абелева группа называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга I (без кручения и примарных циклических) [4] .

II. Абелева группа A называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из A содержится во вполне разложимом прямом слагаемом группы A .

III. Множество абелевых групп $\{G_i\}_{i \in J}$ назовем вполне транзитивной системой групп, если для каждой пары групп (G_i, G_j) $i, j \in J$ (i может совпадать с j) выполняется условие: из того, что $a \in G_i$, $b \in G_j$ и $H(a) \leq H(b)$, следует, что существует $\varphi \in Hom(G_i, G_j)$ со свойством $\varphi a = b$ [3].

IУ. Пусть $S = \{G_i\}_{i \in J}$ – некоторое множество абелевых групп. Будем говорить, что система групп S удовлетворяет условию монотонности

для высотных матриц, если для каждой группы G_j и для любого элемента $0 \neq a_j \in G_j$, $j \in J$, из выполнения соотношений:

1) $\inf\{H(a_{i_1}), \dots, H(a_{i_s})\} \leq H(a_j)$, где $a_{i_k} \in G_{i_k}$, $i_k \in J$, $k = \overline{1,s}$, $i_k \neq i_l$, при $k \neq l$;

2) $H(a_j) \neq H(a_{i_k})$ для всех $k = \overline{1,s}$, следует существование элементов $a_{j_1}, \dots, a_{j_r} \in G_j$ со свойствами:

1') $a_{j_1} + \dots + a_{j_r} = a_j$;

2') для каждого элемента a_{j_l} $(l = \overline{1,r})$ найдется такой элемент a_{i_k} $(k = \overline{1,s})$, что $H(a_{j_l}) \geq H(a_{i_k})$ [3].

В статье используются следующие обозначения: $H(a)$ – высотная матрица элемента a; $H_p(a)$ – p – индикатор элемента a; $\chi(a)$, $t(a)$ – соответственно характеристика и тип элемента a (рассматриваются для элемента a бесконечного порядка); $T(G)$, $T_p(G)$ – соответственно периодическая часть и p – компонента периодической части группы G; $\pi(G)$ – множество тех простых чисел p, для которых группа G не является p – делимой.

Следующий результат сводит изучение вопроса о вполне транзитивности расщепляемой группы с сепарабельной периодической частью к рассмотрению фактор-группы этой группы по ее периодической части.

Теорема 1. Смешанная расщепляемая группа с сепарабельной периодической частью вполне транзитивна тогда и только тогда, когда фактор-группа этой группы по ее периодической части вполне транзитивна.

Доказательство. Необходимость вытекает из [3, теорема 3].

Докажем достаточность. Пусть $G = A \oplus T(G)$ – смешанная группа, где $T(G)$ – ее периодическая часть, удовлетворяющая условию теоремы. Для вполне транзитивности группы G мы должны показать, что система $\{A, T(G)\}$: 1) вполне транзитивна; 2) удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц [3, теорема 3]. Так как группы A и $T(G)$ вполне транзитивны, то для доказательства вполне транзитивности системы $\{A, T(G)\}$ достаточно установить, что для любых элементов $a \in A$, $b \in T(G)$ таких, что $H(a) \leq H(b)$, существует $\varphi \in Hom(A, T(G))$ такой, что $\varphi a = b$. Имеем $b = b_{p_1} + \dots + b_{p_n}$, где $p_1, \dots, p_n$ – различные простые числа и $o(b_{p_i}) = p_i^{k_i}$, $k \in N$. Так как для любого $i = \overline{1,n}$ p_i – компонента группы $T(G)$ (подгруппа $T_{p_i}(G)$) сепарабельна, то существует конечное прямое слагаемое $T'_{p_i}(G)$ группы $T_{p_i}(G)$, содержащее элемент b_{p_i} $(i = \overline{1,n})$. Пусть $T'_{p_i}(G) = \bigoplus_{k=1}^{t(i)} \langle b'_{i_k} \rangle$ – разложение группы $T'_{p_i}(G)$ в прямую сумму циклических p_i – групп ($t(i)$ зависит от p_i). Тогда элемент b_{p_i} можно представить в виде $b_{p_i} = m_i b'_{i_1} + \dots + m_t b'_{i_{t(i)}}$. Пусть $m_k = s_k p_i^{l_k}$ $(k = \overline{1,t})$, где $(s_k, p_i) = 1$. Тогда $b_{p_i} = s_1 p_i^{l_1} b'_{i_1} + \dots + s_t p_i^{l_t} b'_{i_{t(i)}}$. Рассмотрим элемент a. Пусть $\langle a \rangle_*$ – сервантная подгруппа, порожденная элементом a в группе A. Так

как $H(a) \leq H(b)$ и $p_i \in \pi(T(G))$ для любого $i = \overline{1,n}$, то $p_i \in \pi(A)$ для любого $i = \overline{1,n}$. Пусть $h_{p_i}(a) = v_i$ в группе $\langle a \rangle_*$ $(i = \overline{1,n})$, тогда в $\langle a \rangle_*$ разрешимо уравнение $p_i^{v_i} x = a$. Пусть x_i – решение этого уравнения, тогда $h_{p_i}(x_i) = 0$. Для каждого $i = \overline{1,n}$ и $\kappa = \overline{1,t(i)}$ построим гомоморфизм $\psi_{i_\kappa} : \langle a \rangle_* \to \langle b'_{i_\kappa} \rangle$ такой, что $\psi_{i_\kappa}(x_i) = s_\kappa p_i^{t_\kappa - v_i} b'_{i_\kappa}$. Покажем, что гомоморфизм $\psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{t(i)} \psi_{i_\kappa}$ отобразит элемент a в элемент b. Действительно,

$$\psi a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{t(i)} \psi_{i_\kappa} a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{t(i)} \psi_{i_\kappa} p_i^{v_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{t(i)} p_i^{v_i} s_\kappa p^{t_\kappa - v_i} b'_{p_{i_\kappa}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{t(i)} s_\kappa p_i^{t_\kappa} b'_{p_{i_\kappa}} = \sum_{i=1}^{n} b_{p_i} = b .$$

Гомоморфизм $\psi_{i(\kappa)}$ отображает $\langle a \rangle_*$ в $\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\kappa=1}^{t(i)} \langle b'_{i_\kappa} \rangle$. Подгруппа $K = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\kappa=1}^{t(i)} \langle b'_{i_\kappa} \rangle$ – ограниченная, поэтому K – алгебраически компактная группа, а значит, она сервантно инъективна. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \langle a \rangle_* & \xrightarrow{\ i\ } & A \\ {\scriptstyle \psi}\downarrow & \swarrow_{\varphi} & \\ K & & \end{array} ,$$

где i – вложение, замыкается до коммутативной. то есть существует $\varphi \in Hom(A, K)$ такой, что $\varphi a = b$ (φ можно рассматривать как элемент группы $Hom(A, T(G))$. Покажем теперь, что система групп $\{A, T(G)\}$ удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц. Рассмотрим произвольный элемент $a \in A$ и пусть $H(a) \geq \inf\{H(\bar{a}), H(b)\}$, где $\bar{a} \in A$, $b \in T(G)$, тогда $H(a) \geq H(\bar{a})$. Действительно, если p – такое простое число, что $h_p(a) = \infty$, то $H_p(a) \geq H_p(\bar{a})$. Пусть p – такое простое число, что $h_p(a) \neq \infty$, и допустим, что $h_p(p^k a) < h_p(p^k \bar{a})$ для некоторого $k \in N$. Тогда $H_p(a) < H_p(\bar{a})$. Так как $H(a) \geq \inf\{H(\bar{a}), H(b)\}$, то $H_p(a) \geq \inf\{H_p(\bar{a}), H_p(b)\}$. Значит, $\inf\{H_p(\bar{a}), H_p(b)\} = H_p(b)$ и $H_p(a) \geq H_p(b)$. Это неравенство невозможно, так как $o(a) = \infty$, а $o(b) < \infty$. Следовательно, $H(a) \geq H(\bar{a})$. Рассмотрим произвольный элемент $d \in T(G)$ такой, что $H(d) \geq \inf\{H(a), H(c)\}$ для некоторых $a \in A$ и $c \in B$. Пусть $H(d) \neq H(a)$ и $H(d) \neq H(c)$. Пусть $d = d_{p_i} + \ldots + d_{p_k}$, $d_{p_i} \in T_{p_i}(G)$, где $T_{p_i}(G)$ – примарная p_i – компонента группы $T(G)$. Если существуют простые числа $q \in \{p_i\}_{i=\overline{1,k}}$ такие, что: 1) $h_q(a) = \infty$ или 2) $h_q(c) = \infty$, тогда в первом случае $H(d_q) \geq H(c)$, а во втором $H(d_q) \geq H(a)$. Рассмотрим все такие простые числа $q \in \{p_i\}_{i=\overline{1,k}}$, что $h_q(a) \neq \infty$ и $h_q(c) \neq \infty$. Для каждого такого q рассмотрим конечное прямое слагаемое $T'_q(G)$ примарной группы $T_q(G)$, содержащее элемент d_q. Имеем $T'_q(G) = \bigoplus_{t=1}^{\bar{t}} \langle d'_{qt} \rangle$ и $d_q = d_{q1} + \ldots + d_{q\bar{t}(q)}$, где $d'_{qt} \in \langle d'_{qt} \rangle$ $(t = \overline{1, \bar{t}(q)})$. Так как $H_q(d_{qt}) \geq \inf\{H_q(a), H_q(c)\}$, то рассмотрим два случая: 1) $H_q(c) \geq H_q(a)$, тогда $H_q(a) \leq H_q(c)$ и $H_q(d'_{qt}) \geq H_q(a)$. Значит, $H(d'_{qt}) \geq H(a)$. 2) $h_q(c) < h_q(a)$. Пусть n – такое натуральное число, что для любого натурального

$m>n$ $h_q(q^m c)\geq h_q(q^m a)$. Так как $H_q(d_q)=\inf\{H_q(d_{qt})\}_{t=\overline{1,\ell(q)}}\geq$ $\geq \inf\{H_q(a),H_q(c)\}$, то для любого $t=\overline{1,\ell(q)}$ такого, что $o(d_{qt})\leq q^n$, следует, что $H(d_{qt})\geq H(c)$. Для всех остальных индексов, для которых $o(d_{qt})>q^n$, следует, что $H(d_{qt})\geq H(a)$. Здесь необходимо заметить, что $H_q(d_{qt})$, где $t=\overline{1,\ell(q)}$, не имеет скачков, так как элемент d_{qt} принадлежит циклическому прямому слагаемому группы $T_q'(G)$. Теорема доказана.

В качестве следствия доказанной теоремы получаем критерий вполне транзитивности сепарабельной абелевой группы.

Следствие 2. Сепарабельная абелева группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любого $0\in$ неоднородного прямого слагаемого без кручения ранга 2 $A\oplus B$ $(A\neq 0, B\neq 0)$ имеем $\mathfrak{T}(A)\cap\mathfrak{T}(B)=\phi$.

Доказательство. а. Необходимость. Пусть G – сепарабельная вполне транзитивная абелева группа. Тогда ее неоднородное вполне разложимое прямое слагаемое без кручения ранга 2 $A\oplus B$ также является вполне транзитивной группой. Остается теперь применить критерий вполне транзитивности для вполне разложимых абелевых групп без кручения [2].

б. Достаточность. Пусть для любого неоднородного вполне разложимого прямого слагаемого без кручения ранга 2 $A\oplus B$ сепарабельной группы G имеем $\mathfrak{T}(A)\cap\mathfrak{T}(B)=\phi$. Покажем, что G – вполне транзитивная абелева группа. Пусть $a,b\in G$ и $H(a)\leq H(b)$. Вложим элементы a и b во вполне разложимое прямое слагаемое G' группы G. Так как G' – сервантная подгруппа группы G, то неравенство $H(a)\leq H(b)$ выполняется и в G'. G' – расщепляемая абелева группа, поэтому в силу теоремы 1 и [2] существует $\varphi'\in E(G')$ такой, что $\varphi'(a)=b$. Эндоморфизм φ' продолжается до эндоморфизма φ группы G. Значит, G – вполне транзитивная группа.

Перейдем теперь к рассмотрению прямых произведений сепарабельных абелевых групп.

Теорема 2. Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ – семейство сепарабельных абелевых групп, где I – множество неизмеримой мощности. Группа $G=\prod_{i\in I}G_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) если для простого числа p найдется группа G_i, у которой хотя бы одно прямое слагаемое без кручения ранга 1 не является p-делимым, то $T_p(G)=\prod_{i\in I}T_p(G_i)$;

2) если $A\oplus B$ – неоднородное вполне разложимое прямое слагаемое без кручения ранга 2 группы G $(A\neq 0, B\neq 0)$, то $\mathfrak{T}(A)\cap\mathfrak{T}(B)=\phi$.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа $G=\prod_{i\in I}G_i$ вполне

транзитивна и для некоторого простого числа p группа $G_{i_0}(i_0 \in J)$ содержит такое прямое слагаемое A без кручения ранга I, что $pA \neq A$. Покажем, что $T_p(G) = \prod_{i\in J} T_p(G_i)$, что эквивалентно тому, что $\prod_{i\in J} T_p(G_i)$ - периодическая группа.

Допустим противное. Пусть группа $\prod_{i\in J} T_p(G_i)$ не является периодической. Это означает, что найдется элемент $g \in \prod_{i\in J} T_p(G_i)$ такой, что $o(g) = \infty$. Покажем, что тогда существует элемент $\bar{g} \in \prod_{i\in J} T_p(G_i)$, у которого $o(\bar{g}) = \infty$ и $H_p(\bar{g}) = (0,1,2,3,\dots)$. Пусть $g = (\dots, g_i, \dots)$, где $g_i \in T_p(G_i)$. Учитывая, что $T_p(G_i)$ - сепарабельные периодические группы, получаем, что для любого $i \in J$ элементы g_i вкладываются во вполне разложимые прямые слагаемые соответствующих групп G_i. Пусть $g_i = g_{i_1} + \dots + g_{i_r}$, где $g_{i_\ell} \in F_{i_\ell}$, F_{i_ℓ} - циклические p - группы $(\ell > 1, r)$ и $F_i = \bigoplus_{\ell=1}^{r} F_{i_\ell}$ - прямое слагаемое группы $T_p(G_i)$. Тогда существует такой индекс $\ell_0 \in \{1,2,\dots,r\}$, что $o(g_i) = o(g_{i_{\ell_0}})$. Обозначим через $\bar{g}_i$ один из образующих элементов циклической группы $F_{i_{\ell_0}}$. Заменяя, таким образом, каждую координату g_i элемента g элементом $\bar{g}_i$, получим элемент $\bar{g} = (\dots, \bar{g}_i, \dots)$ такой, что $\bar{g} \in \prod_{i\in J} T_p(G_i)$, $o(\bar{g}) = \infty$ и $H_p(\bar{g}) = (0,1,2,\dots)$.

Пусть элемент $a \in A$ и $h_p(a) = 0$ (такой элемент в A существует, так как $pA \neq A$). Тогда $H(a) = \inf\{H(pa), H(\bar{g})\}$. Очевидно, что $H(a) < H(pa)$. Покажем, что $H(a) \neq H(\bar{g})$. Допустим противное, пусть $H(a) = H(\bar{g})$ (случай $H(a) > H(\bar{g})$ невозможен). Имеем $G = A \oplus G'_{i_0} \oplus \prod_{i\in J} G_i$ или, обозначая $G'_{i_0} \oplus \prod_{i\in J} G_i$ через $\bar{G}$, $G = A \oplus \bar{G}$. Ясно, что $\prod_{i\in J} T_p(G_i)$ является подгруппой группы $\bar{G}$. Из вполне транзитивности группы G следует, что система групп $\{\bar{G}, A\}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц [3]. Так как подгруппы A и $\bar{G}$ сервантны в G, то высотные матрицы элементов a и $\bar{g}$ в группах A и $\bar{G}$ соответственно совпадают с высотными матрицами этих элементов в группе G. Следовательно, существует $\varphi \in Hom(\bar{G}, A)$ такой, что $\varphi\bar{g} = a$. Пусть $\psi = \varphi|_{\prod_{i\in J} T_p(G_i)}$, тогда $\psi\bar{g} = a$. Так как A - узкая группа, то

$$Hom\left(\prod_{i\in J} T_p(G_i), A\right) \cong \bigoplus_{i\in J} Hom(T_p(G_i), A) = 0 \quad [5].$$

Значит, $\psi = 0$, поэтому $a = 0$, что противоречит выбору этого элемента. Таким образом, $H(a) > H(\bar{g})$.

Так как система групп $\{\bar{G}, A\}$ удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц, то должны существовать ненулевые элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ такие, что $a = a_1 + \dots + a_m$, и для любого $k = \overline{1,m}$ выполняется хотя бы одно из двух неравенств: $H(a_k) \geq H(\bar{g})$ или $H(a_k) \geq H(pa)$. Учитывая, что $Hom(\prod_{i\in J} T_p(G_i), A) = 0$ и система $\{\bar{G}, A\}$ вполне транзитивна, получаем $H(a_k) \neq H(\bar{g})$ для

любого $k=\overline{1,m}$. Тогда $H(a_k) \geqslant H(pa)$ для любого $k=\overline{1,m}$ и $H(a) \geqslant \inf\{H(a_k)\}_{k=\overline{1,m}} \geqslant H(pa)$, что невозможно. Таким образом, $T_p(G) = \prod_{i \in J} T_p(G_i)$. Необходимость условия I) установлена.

Необходимость условия 2) вытекает из того, что $A \oplus B$ как прямое слагаемое вполне транзитивной группы само вполне транзитивно [3]. Остается применить критерий вполне транзитивности вполне разложимой абелевой группы [2].

Достаточность. Пусть $a, b \in G$ и $H(a) \leqslant H(b)$, $a=(\dots, a_i, \dots)$, $b=(\dots, b_i, \dots)$, $a_i, b_i \in G_i$. Установим, что для всякого $i \in J$ существует $\varphi_i \in Hom(G, G_i)$ такой, что $\varphi_i a = b_i$. Отсюда будет следовать существование эндоморфизма φ группы G со свойством $\varphi a = b$ [теорема 8.2]. Рассмотрим произвольную координату b_i элемента b. Так как она вкладывается во вполне разложимое прямое слагаемое $B_i = \bigoplus_{k=1}^{s} B_{ik}$ группы G_i ($r(B_{ik})=1$), то будет поэтому иметь вид $b_i = b_{i1} + \dots + b_{is}$, где $b_{ik} \in B_{ik}$, $k=\overline{1,s}$. Покажем, что для всякого элемента b_{ik} найдется гомоморфизм $\varphi_{ik} \in Hom(G, B_{ik})$ такой, что $\varphi_{ik} a = b_{ik}$, тогда, полагая $\varphi_i = \sum_{k=1}^{s} \varphi_{ik}$ (учитываем, что все B_{ik} подгруппы группы G_i), получим $\varphi_i a = b_i$, где $\varphi_i \in Hom(G, G_i)$.

Рассмотрим два случая: 1) $o(b_{ik}) < \infty$ и 2) $o(b_{ik}) = \infty$. Пусть имеет место случай 1). Так как $H(b_{ik}) \geqslant H(a)$, то $h_p(b_{ik}) \geqslant h_p(a)$. Тогда существует координата a_j элемента a такая, что $h_p(b_{ik}) \geqslant h_p(a_j)$, где $a_j \in G_j$. Рассмотрим вложение элемента a_j во вполне разложимое прямое слагаемое $A_j = \bigoplus_{r=1}^{m} A_{jr}$ группы G_j ($r(A_j)=1$), тогда $a_j = a_{j1} + \dots + a_{jm}$, где $a_{jr} \in A_{jr}$ ($r=\overline{1,m}$). Существует такой индекс $l \in \{1,2,\dots,m\}$, что $h_p(b_{ik}) \geqslant h_p(a_{jl})$ и, значит, $H(b_{ik}) \geqslant H(a_{jl})$. Рассмотрим группу $C = B_{ik} \oplus A_{jl}$, рассматривается внешняя прямая сумма. В силу теоремы I группа C вполне транзитивна и поэтому система групп $\{B_{ik}, A_{jl}\}$ вполне транзитивна. Учитывая, что $H(b_{ik}) \geqslant H(a_{jl})$, получаем существование $\psi_{ik} \in Hom(A_{jl}, B_{ik})$ со свойством $\psi_{ik} a_{jl} = b_{ik}$. Гомоморфизм ψ_{ik} продолжается до гомоморфизма φ_{ik}, отображающего G в B_{ik}. Итак, $\varphi_{ik} \in Hom(G, B_{ik})$ и $\varphi_{ik} a = b_{ik}$.

Рассмотрим случай 2), то есть $o(b_{ik}) = \infty$. Пусть p – такое простое число, что $p B_{ik} \neq B_{ik}$. Вложим каждую координату a_i ($a_i \in G_i$) элемента a во вполне разложимое прямое слагаемое $A_i = \bigoplus_{t=1}^{s} A_{it}$ группы G_i. Пусть $a = a_{i1} + \dots + a_{ik}$ и $M_p = \{s \mid a_{is} \in T_p(G_i)\}$, $\overline{M}_p = \{1,2,\dots,k\} \setminus M_p$. Тогда $a_i = a_i^{(p)} + a_i'$, где $a_i^{(p)} = \sum_{i \in M_p} a_{is}$, $a_i' = \sum_{i \in \overline{M}_p} a_{is}$. Учитывая, что $T_p(G) = \prod_{i \in J} T_p(G_i)$, получаем существование конечной верхней грани порядков элементов $a_i^{(p)}$, $i \in J$. Пусть $p^{\mu} = \sup\{a_i^{(p)}\}_{i \in J}$. Так как $H(b_{ik}) \geqslant H(a)$, то $h_p(p^{\mu} b_{ik}) \geqslant h_p(p^{\mu} a)$. Тогда существует координата a_j элемен-

та $a(a_j \in G_j)$ такая, что $h_p(p^n b_{i_k}) \geqslant h_p(p^n a_j)$ и $o(a_j) = \infty$. Рассмотрим вложение элемента a_j во вполне разложимое прямое слагаемое $A_j = \bigoplus_{\tau=1} A_{j\tau}$. Тогда $a_j = a_{j_1} + \ldots + a_{j_m}$, где $a_{j_\tau} \in A_{j_\tau} (\tau = \overline{1,m})$, и для некоторого $\ell (\ell \in \{1,2,\ldots,m\})$ $h_p(p^n b_{i_k}) \geqslant h_p(p^n a_{j_\ell}) = h(a_{j_\ell})$. Из условия I) следует, что $B_{\gamma_k} \cong A_{j_\ell}$. Если $X(a_{j_\ell}) \leqslant X(b_{i_k})$, то существует гомоморфизм $\psi_{i_k} \in Hom(A_{j_\ell}, B_{i_k})$ такой, что $\psi_{i_k} a_{j_\ell} = b_{i_k}$, причем гомоморфизм ψ_{i_k} продолжается до гомоморфизма $\varphi_{i_k} \in Hom(G, B_{\gamma_k})$ такого, что $\varphi_{i_k} a = b_{i_k}$.

Пусть $X(a_{j_\ell}) \neq X(b_{i_k})$. Так как типы элементов a_{j_ℓ} и b_{i_k} совпадают, то для почти всех простых чисел q $h_q(a_{j_\ell}) = h_q(b_{i_k})$. Пусть $\{q_1, \ldots, q_m\}$ – множество простых чисел, для которых $h_{q_\alpha}(a_{j_\ell}) \neq h_{q_\alpha}(b_{i_k})$, $\alpha = \overline{1,m}$. Так как в вышеприведенном рассуждении p было произвольным простым числом таким, что $p B_{i_k} \neq B_{i_k}$, то для любого $\alpha = \overline{1,m}$ найдется соответствующим образом построенный элемент a_{s_α} такой, что $h_{q_\alpha}(a_{s_\alpha}) \leqslant h_{q_\alpha}(b_{i_k})$ и $t(b_{i_k}) = t(a_{s_\ell})$. Тогда из построения системы элементов $L = \{a_{j_\ell}, a_{s_\alpha}\}_{\alpha=\overline{1,m}}$ следует, что $X(b_{i_k}) \geqslant \inf\{X(a_{j_\ell}), X(a_{s_\alpha})\}$ $\alpha = \overline{1,m}$. Если среди элементов $\{a_{s_\alpha}\}_{\alpha=\overline{1,m}}$ найдется элемент a_{s_f} такой, что $X(a_{s_f}) \leqslant X(b_{i_k})$, то существует гомоморфизм $\psi_{s_f} \in Hom(A_{s_f}, B_{i_k})$ такой, что $\psi_{s_f} a_{s_f} = b_{i_k}$. Гомоморфизм ψ_{s_f} можно продолжить до гомоморфизма $\varphi_{i_k} \in Hom(G, B_{i_k})$ такого, что $\varphi_{i_k} a = b_{i_k}$.

Пусть для любого $\alpha = \overline{1,m}$ $X(a_{s_\alpha}) \neq X(b_{i_k})$. Так как система групп $\{B_{i_k}, A_{j_\ell}, A_{s_\alpha}\}$ $\alpha = \overline{1,m}$ состоит из однородных групп, то из [2 , лемма 2.2] следует существование элементов $b_{i_{k_1}}, \ldots, b_{i_{k_t}} \in B_{i_k}$ таких, что $b_{i_k} = b_{i_{k_1}} + \ldots + b_{i_{k_t}}$, причем характеристика каждого элемента $b_{i_{k_\tau}}$ $(\tau = \overline{1,t})$ больше или равна характеристике по крайней мере одного элемента из системы L. Это дает возможность построить гомоморфизмы $\varphi_\tau \in Hom(G, B_{i_k})$ такие, что $\varphi_\tau(a) = b_{i_{k_\tau}}$ $(\tau = \overline{1,t})$. Полагая теперь $\varphi_{i_k} = \sum_{\tau=1}^{t} \varphi_\tau$, получим $\varphi_{i_k}(a) = b_{i_k}$. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим интересный вопрос о связи между вполне транзитивностью группы $\bigoplus_{i \in J} G_i$ и вполне транзитивностью группы $\prod_{i \in J} G_i$.

Из результатов работы [3] вытекает, что из вполне транзитивности $\prod_{i \in J} G_i$ всегда следует вполне транзитивность $\bigoplus_{i \in J} G_i$. Там же доказано, что в случае, когда все группы $G_i (i \in J)$ периодические, $\prod_{i \in J} G_i$ вполне транзитивная группа тогда и только тогда, когда $\bigoplus_{i \in J} G_i$ вполне транзитивна. Теорема 2 данной работы дает возможность строить примеры таких систем смешанных абелевых групп $\{G_i\}_{i \in J}$, что $\bigoplus_{i \in J} G_i$ вполне транзитивная группа, а

$\prod_{i\in J} G_i$ не является вполне транзитивной группой. Рассмотрим один из таких примеров.

Пусть $\{G_i\}_{i\in N}$ – система абелевых групп ранга I, где G_1 – группа без кручения такая, что $2G_1 \neq G_1$, а все остальные группы $G_i\ (i=2,3,\dots)$ – циклические 2 – группы, порядки которых 2^i. Группа $\bigoplus_{i\in N} G_i$ сепарабельная (вполне разложимая) смешанная группа, которая в силу следствия 2 является вполне транзитивной. $\prod_{i\in N} G_i$ не является вполне транзитивной группой, так как нарушается условие I) в теореме 2 .

Какова ситуация в случае, когда все $G_i\ (i\in J)$ группы без кручения, – пока открытая проблема .

Литература

I. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. 1974. Т. I. 335с.

2. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та 1981. С. 56-92.

3. Гриншпон С.Я., Мисяков В.М. О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1986. С. 12-27.

4. Rangaswamy K.M. The theory of separable mixed abelian groups // Commun. in Alg. 1984. V. 12. P. 1813-1834.

5. Рычков С.В. О прямых произведениях абелевых групп // Матем. сб. 1982. Т. 117, №2. С. 266-278.

ТОЖДЕСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ АЛГЕБР ЛИ

А.А.Золотых

Понятие α - функции, введенное Ю.П.Размысловым (см. [I - 4]), оказывается полезным при решении ряда задач теории многообразий алгебраических систем. В данной работе, хотя явно определение α - функции не дается, метод α - функций используется для изучения тождеств со следом n- мерного представления ортогональной алгебры Ли $SO(n)$. Основные результаты работы приводятся в теореме 4.I, указывающей на связь между идеалами слабых тождеств со следом и идеалами тождеств со следом и инволюцией, и в теореме 4.2, дающей достаточно ясное описание множества полилинейных тождеств со следом ассоциативно-лиевой пары $(M_n, SO(n))$.

§ I. Алгебры обобщенных полиномов. Основные понятия

В этом параграфе мы займемся формализацией понятий слабого тождества со следом и тождества со следом и инволюцией. Для этого будут введены две алгебры обобщенных полиномов (алгебра полиномов со следом и алгебра полиномов со следом и инволюцией), играющие ту же роль, какую свободная ассоциативная алгебра играет для обычных тождеств.

Для построения алгебры полиномов со следом нам потребуется счетный алфавит $Y=\{y_1, y_2, \dots\}$ и формальная функция след $S_\rho(\ )$. Сначала мы построим вспомогательную полугруппу $G_0(Y)$, определив ее элементы индуктивно:

I) всякая переменная $y_i \in Y$ - элемент $G_0(Y)$,

2) если A , B - элементы $G_0(Y)$, то и AB - элемент $G_0(Y)$;

3) если $y_i \in Y$ и A, B – элементы $G_0(Y)$, то и $Sp(y_i)$, $Sp(Ay_i)$, $Sp(y_iB)$, $Sp(Ay_iB)$ – элементы $G_0(Y)$.

Пункт 2) этого определения задает операцию умножения на $G_0(Y)$ как приписывание к элементу A элемента B. Относительно этой операции $G_0(Y)$ превращается в полугруппу. Стоит обратить особое внимание на пункт 3), в силу которого $Sp(Sp(\dots))$ не является элементом $G_0(Y)$.

Пусть $\tilde{G}(Y)$ – полугруппа, получающаяся факторизацией полугруппы $G_0(Y)$ по определяющим соотношениям:

$$Sp(A)B = BSp(A), \tag{I.1}$$

$$Sp(AB) = Sp(BA), \tag{I.2}$$

$$Sp(ASp(B)) = Sp(A)Sp(B) \tag{I.3}$$

для любых A, $B \in G_0(Y)$, таких, что соответствующие выражения, встречающиеся в (I.1) – (I.3), определены. Алгеброй полиномов со следом над полем K мы будем называть полугрупповую алгебру над полем K полугруппы $\tilde{G}(Y)$, элементы $\tilde{G}(Y)$ – мономами со следом, а элементы алгебры – полиномами со следом. Алгебру полиномов со следом мы будем обозначать через $\mathcal{J}$.

В силу соотношений (I.1) – (I.3) ясно, что $\tilde{G}(Y)$ как полугруппа порождается элементами вида a, $Sp(b)$, где a и b – произвольные непустые слова, следовательно, любой элемент $\tilde{G}(Y)$ имеет вид

$$a_0 Sp(a_1) \cdot \dots \cdot Sp(a_t), \tag{I.4}$$

где a_i – слова, причем $a_1, \dots, a_t$ – непустые слова. Представление элементов полугруппы $\tilde{G}(Y)$ в виде (I.4), очевидно, неоднозначно, однако эту неоднозначность легко преодолеть, выбрав из каждого класса эквивалентности по одному представителю.

Положим по определению

$$Sp(\sum \alpha_{a_0, a_1, \dots, a_t} a_0 Sp(a_1) \cdot \dots Sp(a_t)) = \tag{I.5}$$

$$= \sum \alpha_{a_0, a_1, \dots, a_t} Sp(a_0) Sp(a_1) \cdot \dots \cdot Sp(a_t),$$

когда правая часть определена. Нетрудно видеть, что правая часть (I.5) определена тогда и только тогда, когда все слова a_0 непустые.

Для построения алгебры полиномов со следом и инволюцией нам потребуются счетный алфавит $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, формальная функция след $Sp(\ )$ и формальная функция инволюция $*$, действующая на алфавите X. Наряду с алфавитом X мы можем рассмотреть алфавит $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots\}$, где x_i^* – результат действия инволюции на переменную x_i. Индуктивно продолжим функцию $*$ на всю полугруппу

$G_0(X \cup X^*)$, положив:

1) для всех переменных $x_i \in X$ $(x_i^*)^* = x_i$;

2) для всех A , B из $G_0(X \cup X^*)$ $(AB)^* = B^* A^*$;

3) для всех $A \in G_0(X \cup X^*)$, таких что определено $S_p(A)$, $S_p(A^*) = S_p(A)$.

Через $G(X)$ мы будем обозначать фактор-полугруппу полугруппы $G_0(X \cup X^*)$ по определяющим соотношениям (I.I) – (I.3) и

$$S_p(A^*) = S_p(A) \qquad (I.6)$$

для любых $A, B \in G_0(X \cup X^*)$ таких, что выражения, встречающиеся в (I.I) – (I.3), (I.6), имеют смысл. Алгеброй полиномов со следом и инволюцией над полем K мы будем называть полугрупповую алгебру над полем K полугруппы $G(X)$, элементы $G(X)$ – мономами со следом и инволюцией, а элементы алгебры – полиномами со следом и инволюцией. Алгебру полиномов со следом и инволюцией мы будем обозначать буквой $\mathcal{G}$.

Нетрудно убедиться, что всякий элемент из $G(X)$ имеет вид (I.4), где a_i – слова в алфавите $X \cup X^*$, причем $a_1, \ldots, a_t$ – непустые слова. Воспользовавшись формулой (I.5), определим действие функции след на линейных комбинациях мономов со следом и инволюцией $a_0 S_p(a_1) \cdot \ldots \cdot S_p(a_t)$, таких, что a_0 – непустое слово. Положив

$$(\sum \alpha_{a_0, a_1, \ldots, a_t} a_0 S_p(a_1) \cdot \ldots \cdot S_p(a_t))^* =$$
$$= \sum \alpha_{a_0, a_1, \ldots, a_t} a_0^* S_p(a_1) \cdot \ldots \cdot S_p(a_t),$$

мы определим действие оператора $*$ на алгебре $\mathcal{G}$.

Для каждого монома со следом можно, естественно, определить его степень относительно переменной y_i как число раз, которое y_i встречается в записи одночлена. Таким образом, всякому моному со следом от переменных $y_1, \ldots, y_t$ можно поставить в соответствие набор чисел $(r_1, \ldots, r_t)$, где r_i равно степени этого монома относительно y_i . Этот набор чисел мы будем называть типом монома со следом, а полином со следом, равный линейной комбинации мономов одного типа $(r_1, \ldots, r_t)$, будем называть однородным полиномом со следом типа $(r_1, \ldots, r_t)$. Однородный полином со следом типа $(1, \ldots, 1)$ мы будем называть полилинейным полиномом со следом степени t . Например,

$$y_1 y_2 - 2 y_1 S_p(y_2) + \frac{1}{3} S_p(y_1 y_2)$$

– полилинейный полином со следом степени 2, а $y_1 + S_p(y_2)$ однородным полиномом со следом не является.

Аналогичным образом определяется тип монома со следом и инволюцией, однородные полиномы со следом и инволюцией, полилинейные полиномы со следом и инволюцией. Например,

$$x_1 x_2^* x_3^* - x_3 x_2^* \, Sp(x_1) + 2 x_1^* \, Sp(x_2 x_3)$$

– полилинейный полином со следом и инволюцией степени 3.

Пусть L – алгебра Ли над полем K, U – ее ассоциативная обертывающая с центром E, причем на U определена E – линейная функция след $Sp : U \to E$, удовлетворяющая соотношению (I.2) для всех $A, B \in U$. В этом случае для всех полиномов со следом $g(y_1, \dots, y_\ell) \in \mathcal{J}$ и для всех $u_1, \dots, u_\ell \in U$, естественно, определяется элемент $g(u_1, \dots, u_\ell) \in U$.

Полином со следом $g(y_1, \dots, y_\ell) \in \mathcal{J}$ называется тождеством со следом пары (U, L), если для всех $h_1, \dots, h_\ell \in L$ в U выполнено равенство $g(h_1, \dots, h_\ell) = 0$. Ясно, что множество тождеств со следом пары (U, L) образует двусторонний идеал в алгебре $\mathcal{J}$. Более того, очевидно, что если $\mathcal{L}$ – свободная алгебра Ли над полем K со свободными образующими $y_1, y_2, \dots$, $g(y_1, \dots, y_\ell)$ – тождество пары (U, L), и $t_1, \dots, t_\ell$ – произвольные элементы $\mathcal{L}$, то и $g(t_1, \dots, t_\ell)$ – тождество со следом пары (U, L), а если $g(y_1, \dots, y_\ell)$ – тождество со следом пары (U, L) и определен след от элемента g, то и $Sp(g(y_1, \dots, y_\ell))$ – тождество со следом пары (U, L).

Двусторонний идеал I в алгебре полиномов со следом $\mathcal{J}$ называется идеалом слабых тождеств со следом, если:

1) для всех $g(y_1, \dots, y_\ell) \in I$ и всех $h_1, \dots, h_\ell \in \mathcal{L}$ $g(h_1, \dots, h_\ell) \in I$;

2) для всех $g(y_1, \dots, y_\ell) \in I$ $Sp(g(y_1, \dots, y_\ell)) \in I$, если этот след определен.

В силу этого определения и сказанного выше множество тождеств со следом произвольной пары (U, L) образует идеал слабых тождеств со следом.

Ассоциативную K – алгебру U с центром E мы будем называть алгеброй со следом и инволюцией, если на U заданы E – линейная функция след $Sp : U \to E$ и E – линейная инволюция $* : U \to U$ такие, что для всех $A, B \in U$ выполнены соотношения (I.2) и (I.6). Для любого полинома со следом и инволюцией $f(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{J}$ и всех $u_1, \dots, u_\ell \in U$ естественным образом определяется элемент $f(u_1, \dots, u_\ell) \in U$.

Полином со следом и инволюцией $f(x_1, \dots, x_\ell)$ называется тождеством со следом и инволюцией алгебры U, если для всех $u_1, \dots, u_\ell \in U$ $f(u_1, \dots, u_\ell) = 0$. Очевидно, множество всех тождеств со следом и инволюцией алгебры U образует двусторонний идеал в $\mathcal{J}$. Кроме

того, если $f(x_1,\dots,x_\ell)\in\mathcal{G}$ – тождество со следом и инволюцией алгебры $\mathcal{U}$ и $a_1,\dots,a_p$ – произвольные непустые слова в алфавите $X\cup X^*$, то и $f(a_1,\dots,a_\ell)$, $f(x_1,\dots,x_\ell)^*$ – тождества со следом и инволюцией алгебры $\mathcal{U}$, а если при этом определен след от элемента f, то и $Sp(f(x_1,\dots,x_\ell))$ – тождество алгебры $\mathcal{U}$.

Двусторонний идеал I алгебры $\mathcal{G}$ называется вербальным идеалом, если:

1) для всех $f(x_1,\dots,x_\ell)\in I$ и любых непустых слов $a_1,\dots,a_\ell$ в алфавите $X\cup X^*$ $f(a_1,\dots,a_\ell)\in I$;

2) для всех $f(x_1,\dots,x_\ell)\in I$ $f(x_1,\dots,x_\ell)^*\in I$;

3) для всех $f(x_1,\dots,x_\ell)\in I$ $Sp(f(x_1,\dots,x_\ell)\in I$, если этот след определен.

В силу всего вышесказанного множество всех тождеств со следом и инволюцией алгебры $\mathcal{U}$ образует вербальный идеал.

§ 2. Построение вспомогательной алгебры

I. Алгебра $\mathcal{G}_n$. Пусть M_n – полная матричная алгебра порядка n над полем комплексных чисел $K=\mathbb{C}$. Центром M_n является множество скалярных матриц $K\cdot 1$, и на M_n естественным образом определены функции след $Sp: M_n\to K\cdot 1$ и транспонирование $*: M_n\to M_n$, относительно которых M_n превращается в алгебру со следом и инволюцией.

ЛЕММА 2.I. Пусть $e_1,\dots,e_{n^2}$ – произвольный базис алгебры M_n, $f_1,\dots,f_{n^2}$ – базис, дуальный к нему относительно формы $(x,y)=Sp(xy)$. Тогда для любого элемента $A\in M_n$ справедливы соотношения:

$$\sum_{t=1}^{n^2} e_t A f_t = Sp(A), \tag{2.1}$$

$$\sum_{t=1}^{n^2} e_t Sp(f_t A) = (A), \tag{2.2}$$

$$\sum_{t=1}^{n^2} e_t A f_t^* = A^*. \tag{2.3}$$

Доказательство. Справедливость равенств (2.I), (2.2) доказана в [2]. Дуальным к базису, состоящему из матричных единиц e_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$, будет базис e_{ji}. Поскольку для всех матричных единиц e_{pq}

$$\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} e_{pq} e_{ji}^* = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} e_{pq} e_{ij} = e_{qp} = e_{pq}^*,$$

нам достаточно проверить, что элемент в левой части равенства (2.3) не зависит от выбора базиса $e_1,\dots,e_{n^2}$. Пусть $\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_{n^2}$ – другой базис, причем $\tilde{e}_i=\sum_{j=1}^{n^2} c_{ji} e_j$, $\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_{n^2}$ – дуальный к нему базис. Тогда хорошо известно, что $f_i=\sum_{j=1}^{n^2} c_{ij}\tilde{f}_j$. Используя эти два

равенства, получим

$$\sum_{t=1}^{n^2} \tilde{e}_t A \tilde{f}_t = \sum_{t=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} c_{jt} e_j A \tilde{f}_t^* = \sum_{j=1}^{n^2} e_j A \Big(\sum_{t=1}^{n^2} c_{jt} \tilde{f}_t\Big)^* = \sum_{j=1}^{n^2} e_j A f_j^* ,$$

что и доказывает независимость элемента в левой части равенства (2.3) от выбора базиса. Лемма доказана.

Пусть σ – антиизоморфизм алгебры M_n, являющийся композицией транспонирования матрицы и комплексного сопряжения, $e_1, \dots, e_{n^2}$ – ортонормированный базис алгебры M_n относительно билинейной формы $(x, y) = S_\rho(xy)$, такой, что $\sigma(e_i) = e_i$ для всех $i = 1, \dots, n^2$ (в качестве первых векторов можно взять матричные единицы e_{ii}, а за остальные $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{ij} + e_{ji})$, $\sqrt{-\frac{1}{2}}(e_{ij} - e_{ji})$, $i > j$). Пусть F – коммутативная K – алгебра с образующими $x_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, n^2$, $i = 1, 2, \dots$, и определяющими соотношениями

$$x_i^{(j)} x_i^{(t)} x_i^{(k)} = 0 , \quad x_i^{(j)} x_i^{(t)} = (x_i^{(t)})^2 \delta_{jt} . \tag{2.4}$$

Обозначим через $\tilde{M}_n = F \otimes_K M_n$ матричную алгебру над кольцом F и продолжим отображения $S_\rho(\ )$ и $*$ на $\tilde{M}_n$ по F – линейности. Минимальную подалгебру алгебры $\tilde{M}_n$, содержащую все элементы $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n^2} x_i^{(j)} e_j$ и инвариантную относительно действия операторов $*$ и $S_\rho(\ )$, мы будем обозначать через $\mathcal{G}_n$.

ЛЕММА 2.2. Для всех $A \in \tilde{M}_n$, $i = 1, 2, \dots$, в $\tilde{M}_n$ выполняются соотношения:

$$\bar{x}_i^* A \bar{x}_i^* = \bar{x}_i A \bar{x}_i = (x_i^{(t)})^2 S_\rho(A) , \tag{2.5}$$

$$\bar{x}_i^* S_\rho(\bar{x}_i^* A) = \bar{x}_i S_\rho(\bar{x}_i A) = (x_i^{(t)})^2 A , \tag{2.6}$$

$$\bar{x}_i^* A \bar{x}_i = \bar{x}_i A \bar{x}_i^* = (x_i^{(t)})^2 A^* . \tag{2.7}$$

Доказательство. Вторые равенства соотношений (2.5), (2.6) доказаны в [2]. В силу леммы 2.1 и соотношений (2.4) получаем

$$\bar{x}_i A \bar{x}_i^* = (x_i^{(t)})^2 \sum_{j=1}^{n^2} e_j A e_j^* = (x_i^{(t)})^2 A^* ,$$

что доказывает второе равенство (2.7).

Заметим, что если $e_1, \dots, e_{n^2}$ – ортонормированный базис, то и $e_1^*, \dots, e_{n^2}^*$ – ортонормированный базис. В силу леммы 2.1

$$\sum_{j=1}^{n^2} e_j A e_j = \sum_{j=1}^{n^2} e_j^* A e_j^* ,$$

что доказывает первое равенство (2.5). Из этих же соображений верны первые равенства (2.6) и (2.7). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, x_{j_1}, \dots, x_{j_t})$ – однородный полином со следом и инволюцией степени 2 относительно $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ и

степени I относительно $x_{j_1},\dots,x_{j_t}$. Тогда найдется однородный полином со следом и инволюцией $g(x_{j_1},\dots,x_{j_t})$, полилинейный по переменным $x_{j_1},\dots,x_{j_t}$, такой, что в M_n

$$f(\bar{x}_{i_1},\dots,\bar{x}_{i_s},\bar{x}_{j_1},\dots,\bar{x}_{j_t})=(x_{i_1}^{(1)})^2\cdot\dots\cdot(x_{i_s}^{(1)})^2 g(\bar{x}_{j_1},\dots,\bar{x}_{j_t}) \quad (2.8)$$

Доказательство можно провести индукцией по s. В случае $s=0$ утверждение очевидно. Из (2.5) – (2.7) следует, что для всех A, $B\in M_n$

$$Sp(\bar{x}_i A)\,Sp(\bar{x}_i B)=Sp(\bar{x}_i\,Sp(\bar{x}_i A)B)= \quad (2.9)$$
$$=Sp((x_i^{(1)})^2 AB)=(x_i^{(1)})^2\,Sp(AB),$$

$$Sp(\bar{x}_i A\bar{x}_i B)=(x_i^{(1)})^2 Sp(A)\,Sp(B), \quad (2.10)$$

$$Sp(\bar{x}_i A\,\bar{x}_i^{*} B)=(x_i^{(1)})^2\,Sp(A^{*}B). \quad (2.11)$$

При помощи формул (2.5) – (2.7), (2.9) – (2.11) всегда можно понизить число s, если учесть, что для всех $A,B\in M_n$

$$Sp(A\bar{x}_i B)=Sp(\bar{x}_i BA),\ Sp(A\bar{x}_i^{*}B)=Sp(\bar{x}_i A^{*}B^{*}).$$

Лемма доказана.

Частный случай равенства (2.8), когда $t=0$, особенно интересен. В этом случае

$$f=\alpha(f)(x_{i_1}^{(1)})^2\cdot\dots\cdot(x_{i_s}^{(1)})^2, \quad (2.12)$$

где $\alpha(f)\in K$ – однозначно определенное полиномом f число, причем

$$Sp(f(\bar{x}_{i_1},\dots,\bar{x}_{i_s}))=n\alpha(f)(x_{i_1}^{(1)})^2\cdot\dots\cdot(x_{i_s}^{(1)})^2. \quad (2.13)$$

Пусть $u(x_1,\dots,x_\ell)$ – полилинейный полином со следом и инволюцией. Обозначим через $\bar{u}$ матрицу $u(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_\ell)\in\mathcal{G}_n$, тогда элемент, стоящий в ней на пересечении i-й строки и j-го столбца, имеет вид

$$a_{ij}=\sum_{\tau_1,\dots,\tau_\ell}\beta^{ij}_{\tau_1,\dots,\tau_\ell}x_1^{(\tau_1)}\cdot\dots\cdot x_\ell^{(\tau_\ell)},$$

где $\beta^{ij}_{\tau_1,\dots,\tau_\ell}\in\mathcal{C}$. Непосредственный подсчет следа матрицы $f=\bar{u}\sigma(\bar{u})$ с учетом следующего из (2.4) равенства

$$x_1^{(j_1)}\cdot\dots\cdot x_\ell^{(j_\ell)}\cdot x_1^{(t_1)}\cdot\dots\cdot x_\ell^{(t_\ell)}=\delta^{t_1,\dots,t_\ell}_{j_1,\dots,j_\ell}(x_1^{(1)})^2\cdot\dots\cdot(x_\ell^{(1)})^2,$$

где $\delta^{t_1,\dots,t_\ell}_{j_1,\dots,j_\ell}$ – символ Кронекера, дает

$$Sp(f)=\sum|\beta^{ij}_{\tau_1,\dots,\tau_\ell}|^2(x_1^{(1)})^2\cdot\dots\cdot(x_\ell^{(1)})^2, \quad (2.14)$$

и $Sp(f)=0$ тогда и только тогда, когда $\bar{u}=0$. С другой стороны, нетрудно видеть, что в силу выбора базиса $e_1,\dots,e_{n^2}$ алгебры M_n алгебра $\mathcal{G}_n$ инвариантна относительно антиизоморфизма σ. Действительно,

$$\sigma(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{n^2} x_i^{(j)} \sigma(e_j) = \bar{x}_i ,$$
$$\sigma(ab) = \sigma(b)\,\sigma(a),$$
$$\sigma(Sp(a)) = Sp(\sigma(a)) , \qquad (2.15)$$
$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* ,$$

где a, b – элементы $\mathcal{G}_n$. Следовательно, $\sigma(\bar{u}) \in \mathcal{G}_n$, а однородный полином со следом и инволюцией $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\ell) = \bar{u}\sigma(\bar{u})$ имеет тип $(2, \ldots, 2)$ и для него верна формула (2.12). Благодаря (2.13) утверждение, выражаемое равенством (2.14), можно переформулировать следующим образом: для любого полилинейного полинома со следом и инволюцией u $\alpha(\bar{u}\sigma(\bar{u})) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{u} = 0$. Но в силу определяющих соотношений (2.4)

$$u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\ell) = \sum x_1^{(r_1)} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{(r_\ell)}\, u(e_{r_1}, \ldots, e_{r_\ell})$$

и $\bar{u} = 0$ тогда и только тогда, когда все $u(e_{r_1}, \ldots, e_{r_\ell}) = 0$. Но так как u – полилинеен, эти равенства означают, что u – тождество со следом и инволюцией алгебры M_n.

Таким образом, мы получили хороший критерий для проверки, является ли u тождеством со следом и инволюцией алгебры M_n. Заметим, что для использования этого критерия алгебры M_n и $\bar{M}_n$ не нужны, так как антиизоморфизм σ можно определить формально равенствами (2.15), а для вычисления функции α нужны только соотношения (2.5) – (2.7), (2.9) – (2.11).

П. Алгебра $\mathcal{G}$. Пусть $K(\gamma)$ – поле частных кольца многочленов $K[\gamma]$ от одной переменной γ. Обозначим через $\mathcal{G}$ фактор-алгебру алгебры полиномов со следом и инволюцией $\mathcal{Z}(\gamma)$ над полем $K[\gamma]$ по следующим определяющим соотношениям:

$$x_i a x_i = x_i^* a x_i^* = \frac{x_i^2}{\gamma} Sp(a), \qquad (2.16)$$
$$x_i a x_i^* = x_i^* a x_i = \frac{x_i^2}{\gamma} a^* , \qquad (2.17)$$
$$x_i Sp(x_i a) x_i^* \; Sp(x_i^* a) = \frac{x_i^2}{\gamma} a , \qquad (2.18)$$
$$(x_i^*)^2 = x_i^2 , \; x_i x_i^* = x_i^* x_i = \frac{x_i^2}{\gamma} , \qquad (2.19)$$
$$Sp(x_i) x_i = Sp(x_i) x_i^* = \frac{x_i^2}{\gamma} , \qquad (2.20)$$
$$Sp(x_i^2 a) = x_i^2 Sp(a), \; Sp(x_i^2) = \gamma x_i^2 , \qquad (2.21)$$
$$[x_i^2 x_j] = [x_i^2 x_j^*] = 0 , \; w = 0, \qquad (2.22)$$

где a – любое непустое слово в алфавите $X \cup X^*$; w – любой моном со следом и инволюцией степени больше двух относительно некоторой из входящих в него переменных, $i, j = 1, 2, \ldots$

Строение алгебры $\mathcal{G}$ описывается следующей леммой:

ЛЕММА 2.4. а) Алгебра $\mathcal{Q}$ как линейное пространство порождается мономами со следом и инволюцией степени < 3 относительно каждой из переменных x_i;

б) как линейные пространства множества полилинейных полиномов алгебр $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}(\gamma)$ изоморфны;

в) всякий однородный полином со следом и инволюцией $f(x_{i_1},\dots,x_{i_s},x_{j_1},\dots,x_{j_t})$ степени 2 относительно $x_{i_1},\dots,x_{i_s}$ и степени I относительно $x_{j_1},\dots,x_{j_t}$ представим в виде

$$f=\frac{x_{i_1}^2}{\gamma}\cdot\dots\cdot\frac{x_{i_s}^2}{\gamma}\,g(x_{j_1},\dots,x_{j_t}), \qquad (2.23)$$

где g – полилинейный полином со следом и инволюцией от $x_{j_1},\dots,x_{j_t}$.

г) представление (2.23) однозначно в том смысле, что если $f=\left(\prod_{k=1}^{s}\frac{x_{i_k}^2}{\gamma}\right)g_1$ – другое такое представление, то $g=g_1$ в $\mathcal{Q}(\gamma)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы верно в силу последнего соотношения (2.22); второе – в силу того, что определяющие соотношения (2.I6) – (2.22) имеют степень $\geqslant 2$ относительно некоторой переменной и однородны по всем x_i. Очевидно, что формулы (2.I6) – (2.22) вместе с (I.I) – (I.3), (I.6) позволяют получить представление (2.23).

Докажем теперь однозначность представления (2.23). Пусть $f=\frac{x_{i_1}^2}{\gamma}\cdot\dots\cdot\frac{x_{i_s}^2}{\gamma}g_1$ – другое представление, причем $g=g_1$ в $\mathcal{Q}(\gamma)$. Так как коэффициентами в полиноме со следом и инволюцией $g-g_1$ являются рациональные функции от переменной γ, то существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых при $\gamma=n$ выражение $g-g_1$ имеет смысл и не равно нулю. Обозначим через $\bar f,\bar g,\bar g_1$ соответственно элементы алгебры $\mathcal{Q}_n$, получающиеся из f,g,g_1 заменой $\gamma\to n$, $x_i\to\bar x_i$ $(i=1,2,\dots)$. Тогда в силу того, что соотношения (2.5) – (2.7) для вычисления функции α получаются точно такой же заменой из определяющих соотношений (2.I6) – (2.2I), имеем

$$\alpha((\bar g-g_1)\sigma(\bar g-\bar g_1))=\alpha\left(\prod_{k=1}^{s}\frac{x_{i_k}^2}{\gamma}(\bar g-\bar g_1)\sigma(\bar g-\bar g_1)\right)=\alpha((\bar f-\bar f)\sigma(\bar g-\bar g_1))=0.$$

Но тогда критерий, полученный нами ранее, показывает, что $(g-g_1)|_{\gamma=n}$ – нетривиальное полилинейное тождество со следом и инволюцией алгебры M_n даже в том случае, когда n больше степени t полинома со следом и инволюцией $(g-g_1)|_{\gamma=n}$. Чтобы привести это утверждение к противоречию, остается доказать, что если $h(x_1,\dots,x_t)$ – полилинейное тождество со следом и инволюцией алгебры M_{t+1}, то $h=0$.

Допустим противоположное. Тогда полином со следом и инволюцией $Sp(x_{t+1}h(x_1,\dots,x_t))$ – нетривиальное тождество со следом и

инволюцией алгебры $M_{\ell+1}$. Таким образом, достаточно показать, что если полилинейный полином со следом и инволюцией $h(x_1,\dots,x_\ell)$ представим в виде линейной комбинации мономов вида $Sp(a_1)\cdots Sp(a_t)$, где a_i – непустые слова в алфавите $X \cup X^*$ и h является тождеством алгебры M_ℓ, то $h=0$.

Рассмотрим произвольный моном, входящий в h с ненулевым коэффициентом. Перенумеровав при необходимости переменные $x_1,\dots,x_\ell$ и сделав необходимое число подстановок вида $h/_{x_i = x_i^*}$, можно считать, что этот моном со следом и инволюцией имеет вид $Sp(a_1)\cdot\ldots\cdot Sp(a_t)$, где $a_1\cdot\ldots\cdot a_t = x_1\cdot\ldots\cdot x_\ell$. Обозначим через $r_1,\dots,r_t$ длины слов $a_1,\dots,a_t$.

Укажем набор матричных единиц из M_ℓ, таких что при подстановке их в $Sp(a_1)\cdot\ldots\cdot Sp(a_t)$ мы получим ненулевое значение, а при подстановке их в любой другой моном со следом и инволюцией вида $Sp(b_1)\cdots Sp(b_s)$ этот моном обратится в нуль. Положив переменные, соответствующие слову a_i $(i=1,\dots,t)$, последовательно равными $e_{q+1,q+2}, e_{q+2,q+3},\dots, e_{q+r_i-1,q+r_i}, e_{q+r_i,q+1}$, где $q=r_1+\dots+r_{i-1}$, нетрудно убедиться, что эта постановка удовлетворяет указанным выше условиям. Лемма доказана.

В заключение отметим еще одно очень важное свойство алгебры $\tilde{G}$.

ЛЕММА 2.5. Пусть f,g – однородные полиномы со следом и инволюцией, имеющие степень 1 по переменной x_i. Тогда для всех слов a,b в алфавите $X \cup X^*$ в $\tilde{G}$ выполняется равенство

$$f|_{x_i=ax_ib}\cdot g = f\cdot g|_{x_i=bx_ia}. \qquad (2.24)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если f – однородный полином со следом и инволюцией, имеющий степень 1 по переменной x_i, и a – непустое слово в алфавите $X \cup X^*$, не зависящее от x_i, то из определяющих соотношений (2.16) –(2.22) легко получить

$$f\cdot Sp(x_ia) = \frac{x_i^2}{f}\, f|_{x_i=a}. \qquad (2.25)$$

Если в записи слов a,b участвует x_i, то в силу последнего из определяющих соотношений (2.22) обе части равенства (2.24) – ненулевые. Пусть теперь a,b не зависят от x_i и x_j – некоторая переменная, не участвующая в записи элементов a,b,f,g. Тогда из (2.25)

$$\frac{x_i^2}{f} f|_{x_i=axb}\cdot g = f|_{x_i=x_j}\cdot Sp(x_jax_ib)\cdot g =$$

$$= f\cdot g|_{x_i=x_j}\cdot Sp(x_iax_jb) = \frac{x_i^2}{f}\, f\cdot g|_{x_i=bx_ia}.$$

Значит,

$$\frac{x_i^2}{\gamma}\left(f|_{x_i=ax_ib}\cdot g - f\cdot g|_{x_i=bx_ia}\right)=0,$$

откуда легко следует (2.24). Лемма доказана.

§ 3. Билинейная форма и ее аннуляторы

В алгебре $\mathcal{Q}(\gamma)$ в качестве подкольца естественным образом содержится алгебра полиномов со следом и инволюцией $\mathcal{Y}$ над полем K. Обозначим через $T_\ell(\gamma)$ и T_ℓ пространства полилинейных полиномов степени ℓ в $\mathcal{Q}(\gamma)$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. В силу пункта б) леммы 2.4 эти линейные пространства можно отождествить с линейными оболочками над полями $K(\gamma)$ и K соответственно множества мономов со следом и инволюцией типа $(1,\dots,1)$ в алгебре $\mathcal{Q}$. Пункты в) и г) той же леммы показывают, что всякому однородному полиному со следом и инволюцией $f(x_1,\dots,x_\ell)\in\mathcal{Q}(\gamma)$ типа $(2,\dots,2)$ можно однозначно сопоставить $\alpha(f)\in K(\gamma)$ по правилу

$$f=\alpha(f)\,\frac{x_1^2}{\gamma}\cdot\dots\cdot\frac{x_\ell^2}{\gamma}.$$

В том случае, когда $f\in\mathcal{Y}$, из формул (2.16) – (2.21) следует, что $\alpha(f)$ – это многочлен от переменной γ. С помощью функции α на пространстве $T_\ell<\mathcal{Y}$ можно определить билинейную форму b, принимающую значения в кольце многочленов $K[\gamma]$, положив для любых $u,v\in T_\ell$

$$b(u,v)=\alpha(u\cdot v).$$

ЛЕММА 3.1. Полилинейный полином со следом и инволюцией является тождеством M_n тогда и только тогда, когда $b(u,T_\ell)|_{\gamma=n}=0$.

Доказательство. Обозначим через ψ гомоморфизм алгебры $\mathcal{Q}$ в алгебру $\mathcal{Q}_n$, для которого $\psi(f(x_1,\dots,x_\ell))=f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$, а через σ – антиизоморфизм алгебры $\mathcal{Q}$, определенный формулами (2.15), где $\bar{x}_i$ надо заменить на x_i. Тогда, так как при $\gamma=n$ формулы (2.16) – (2.21) и (2.5) – (2.7) для вычисления функции α в $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}_n$ совпадают,

$$\alpha(uv)|_{\gamma=n}=\alpha(\psi(u)\psi(v)) \qquad (3.1)$$

для любых $u,v\in T_\ell$. Следовательно, в силу полученного ранее критерия $b(v,\sigma(u))|_{\gamma=n}=0$ тогда и только тогда, когда u – полилинейное тождество со следом и инволюцией алгебры M_n. В то же время если u – тождество M, то $\psi(u)=0$, и из (3.1) видно, что $b(u,T_\ell)|_{\gamma=n}=0$. Лемма доказана.

Равенства (3.1) и (2.13) показывают, что при всех натуральных n и всех $u, v \in T_\ell$

$$b(u,v)\big|_{\gamma=n} = b(v,u)\big|_{\gamma=n},$$

а так как при фиксированных $u, v \in T_\ell$ $b(u,v)$ и $b(v,u)$ - многочлены, то всегда $b(u,v) = b(v,u)$, т.е. b - симметрическая билинейная форма.

Пусть $Q(\gamma)$ - некоторый многочлен из $K[\gamma]$, $\{Q(\gamma)\}$ - идеал, порожденный им в $K[\gamma]$. Определим билинейную форму b_Q на пространстве T_ℓ, принимающую значения в фактор-алгебре $K[\gamma]/\{Q(\gamma)\}$, положив для всех $u, v \in T_\ell$

$$b_Q(u,v) = b(u,v) + \{Q(\gamma)\}.$$

Аннулятором формы b_Q в пространстве T_ℓ назовем

$$Ann_{T_\ell} b_Q = \{f \in T_\ell \mid b_Q(f, T_\ell) = 0 \text{ в } K[\gamma]/\{Q(\gamma)\}\}.$$

Теперь мы можем следующим образом переформулировать последнюю лемму:

ЛЕММА 3.1. Множество полилинейных тождеств со следом и инволюцией степени ℓ алгебры M_n совпадает с $Ann_{T_\ell} b_{\gamma-n}$.

Для всякого многочлена $Q(\gamma) \in K[\gamma]$ обозначим через $V_Q \subset \mathcal{Q}$ вербальный идеал, порожденный $Ann_{T_\ell} b_Q$ для всех $\ell = 1, 2, \ldots$, то есть минимальный вербальный идеал, содержащий все $Ann_{T_\ell} b_Q$.

ЛЕММА 3.2. Для всех $K = 1, 2, \ldots$ $V_Q \cap T_K = Ann_{T_K} b_Q$.

Доказательство. По существу, надо доказать, что если $f \in Ann_{T_\ell} b_Q$ и $V(f)$ - вербальный идеал в $\mathcal{Q}$, порожденный полиномом со следом и инволюцией f, то для всех $K = 1, 2, \ldots$ $V(f) \cap T_K \subset Ann_{T_\ell} b_Q$.

Заметим прежде всего, что из первых равенств (2.5) – (2.7) для всех $v \in T_\ell$ и всех $K = 1, 2, \ldots$ следует

$$b(f, v) = b\left(f\big|_{x_i = x_i^2},\ \tilde{v}\big|_{x_i = x_i^2}\right). \tag{3.2}$$

Далее, для всех $v \in T_\ell$ в $\tilde{\mathcal{Q}}$ выполнено

$$f \cdot v = \alpha(f \cdot v) \cdot \frac{x_i^2}{\gamma} \cdot \ldots \cdot \frac{x_\ell^2}{\gamma}. \tag{3.3}$$

Применив к обеим частям равенства (3.3) оператор $*$, получим

$$v^* f^* = \alpha(f \cdot v) \frac{x_i^2}{\gamma} \cdot \ldots \cdot \frac{x_\ell^2}{\gamma},$$

откуда $\alpha(f \cdot v) = \alpha(v^* f^*)$, т.е. для всех $v \in T_\ell$

$$b(f, v) = b(f^*, v^*). \tag{3.4}$$

Наконец, если определен $S_p(f(x_1, \ldots, x_\ell))$, то для всех мономов

со следом и инволюцией $v \in T_\ell$, таких что определен $Sp(v)$

$$Sp(f)\cdot Sp(v) = Sp(Sp(f)v) = \gamma\alpha(Sp(f)v)\,\frac{x_1^2}{\gamma}\cdot\ldots\cdot\frac{x_\ell^2}{\gamma} =$$
$$= \gamma\alpha(fSp(v))\,\frac{x_1^2}{\gamma}\cdot\ldots\cdot\frac{x_\ell^2}{\gamma},$$

то есть

$$b(Sp(f), v) = b(f, Sp(v)), \tag{3.5}$$

а если v – моном, для которого не определен $Sp(v)$, то v имеет вид $Sp(a_1)\cdot\ldots\cdot Sp(a_\ell)$ и

$$Sp(f)v = \alpha(Sp(f)v)\,\frac{x_1^2}{\gamma}\cdot\ldots\cdot\frac{x_\ell^2}{\gamma} = Sp(fv) =$$
$$= \gamma\alpha(fv)\,\frac{x_1^2}{\gamma}\cdot\ldots\cdot\frac{x_\ell^2}{\gamma},$$

откуда

$$b(Sp(f), v) = \gamma b(f, v). \tag{3.6}$$

Из (3.2), (3.4) – (3.6) видно, что если $f \in Ann_{T_\ell} b_Q$, то и $f|_{x_i=x_i^2} \in Ann_{T_\ell} b_Q$, а если при этом определен $Sp(f)$, то и $Sp(f) \in Ann_{T_\ell} b_Q$. Поэтому, как легко следует из определения вербального идеала $V(f)$, достаточно показать, что для всех $h_1, h_2 \in \mathcal{Q}$ и всех слов $a_1,\ldots,a_\ell$ в алфавите X, таких что $h_1 f(x_1a_1,\ldots,x_\ell a_\ell)h_2 \in T_K$, выполнено $h_1 f(x_1a_1,\ldots,x_\ell a_\ell)h_2 \in Ann_{T_K} b_Q$. Но для всех $v \in T_K$

$$b(h_1 f(x_1a_1,\ldots,x_\ell a_\ell)h_2, v) = \alpha(h_1 f(x_1a_1,\ldots,x_\ell a_\ell)\cdot(h_2 v)) =$$
$$= \alpha\left(h_1 f(x_1,\ldots,x_\ell)\cdot(h_2 v)\,\middle|\,\begin{matrix}x_1=a_1x_1\\ \ldots\\ x_\ell=a_\ell x_\ell\end{matrix}\right).$$

По пункту в) леммы 2.4 найдется полилинейный полином со следом и инволюцией v' с коэффициентами из $K[\gamma]$, такой что в $\mathcal{Q}$

$$(h_2 v)\Big|_{\substack{x_1=a_1x_1\\ \ldots\\ x_\ell=a_\ell x_\ell}} = \frac{x_{i_1}^2}{\gamma}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{i_\ell}^2}{\gamma}\,v',$$

поэтому

$$b(h_1 f(x_1a_1,\ldots,x_\ell a_\ell)h_2, v) = b(h_1 f(x_1,\ldots,x_\ell), v') =$$
$$= \alpha((v'h_1) f(x_1,\ldots,x_\ell)).$$

Для некоторого $v'' \in K[\gamma]\cdot T_\ell$ в $\mathcal{Q}$

$$v'h_1 = \frac{x_{j_1}^2}{\gamma}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{j_s}^2}{\gamma}\,v'',$$

а значит,

$$b(h_1 f(x_1a_1,\ldots,x_\ell a_\ell)h_2, v) = b(v'', f) \in Q(\gamma)\}.$$

Лемма доказана.

§ 4. Связь между идеалами слабых тождеств и вербальными идеалами

Построим гомоморфизм $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, положив для всех полиномов со следом $f(y_1, \dots, y_\ell)$ $\varphi(f(y_1, \dots, y_\ell)) = f(x_1 - x_1^*, \dots, x_\ell - x_\ell^*)$. Нетрудно убедиться, что для любого слова a $\varphi(Sp(a)) = Sp(\varphi(a))$. Введем на $\mathcal{F}$ K – линейную инволюцию $*$, положив для всех $y_i \in Y$ $y_i^* = -y_i$, а для всех непустых слов a $Sp(a^*) = Sp(a)$. Поскольку $\varphi(y_i)^* = x_i^* - x_i = \varphi(y_i^*)$ и $\varphi(Sp(a))^* = Sp(\varphi(a))^* = Sp(\varphi(a)) = \varphi(Sp(a)) = \varphi(Sp(a)^*)$, действие инволюций $*$ на алгебрах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ согласовано с гомоморфизмом φ, т.е. для всех $f \in \mathcal{F}$ $\varphi(f^*) = \varphi(f)^*$.

Определим на однородных полиномах со следом f типа $(2, \dots, 2)$ функцию $\tilde{\alpha}$, принимающую значения в кольце многочленов $K[\gamma]$, положив для всех таких $f \in \mathcal{F}$ $\tilde{\alpha}(f) = \alpha(\varphi(f))$. Из (2.16) – (2.21) легко получаются соотношения

$$\varphi(y_i a y_i) = (x_i - x_i^*)\varphi(a)(x_i - x_i^*) = \frac{2x_i^2}{\gamma}\varphi(Sp(a) - a^*), \tag{4.1}$$

$$\varphi(y_i Sp(y_i a)) = \frac{2x_i^2}{\gamma}\varphi(a - a^*), \tag{4.2}$$

$$\varphi(y_i^2) = 2(\gamma - 1)\frac{x_i^2}{\gamma}, \quad \varphi(y_i Sp(y_i)) = 0 \tag{4.3}$$

Поэтому функцию $\tilde{\alpha}$ можно вычислять при помощи формальных равенств (4.1) – (4.3), забыв про алгебру $\mathcal{G}$.

Обозначим через T_ℓ множество полилинейных полиномов со следом степени ℓ. При помощи функции $\tilde{\alpha}$ на T_ℓ можно ввести билинейную форму b, положив для всех $f, g \in T_\ell$ $b(f, g) = \tilde{\alpha}(fg)$. Естественным образом для всех многочленов $Q(\gamma) \in K[\gamma]$ вводится билинейная форма b_Q, принимающая значения в фактор-кольце $K[\gamma]/\{Q(\gamma)\}$, и аннуляторы $Ann_{T_\ell} b_Q = \{f \in T_\ell \mid b_Q(f, T_\ell) = 0 \text{ в } K[\gamma]/\{Q(\gamma)\}\}$.

Пусть U – ассоциативная алгебра со следом и инволюцией, $L = \{a \in U \mid a^* = -a\}$ – алгебра Ли с операцией $[a, b] = ab - ba$.

ТЕОРЕМА 4.1. Если для некоторого многочлена $Q(\gamma) \in K[\gamma]$ вербальный идеал тождеств со следом и инволюцией алгебры U, то множество полилинейных тождеств со следом степени ℓ пары (U, L) совпадает с $Ann_{T_\ell} b_Q$.

Доказательство. Заметим сначала, что $Ann_{T_\ell} b_Q = \{f \in T_\ell \mid \varphi(f) \in Ann_{T_\ell} b_Q\}$. Действительно, если $\varphi(f) \in Ann_{T_\ell} b_Q$, то

$$b_Q(f, T_\ell) = b_Q(\varphi(f), \varphi(T_\ell)) = 0.$$

В то же время для всех $f, g \in T_\ell$

$$b(f|_{x_i = x_i - x_i^*}, g) = \frac{1}{2} b(f|_{x_i = x_i - x_i^*}, g|_{x_i = x_i - x_i^*}) +$$

$$+ \frac{1}{2} b(f|_{x_i = x_i - x_i^*}, g|_{x_i = x_i + x_i^*}) = \frac{1}{2} b(f|_{x_i = x_i - x_i^*}, g|_{x_i = -x_i - x_i^*})$$

Поэтому для всех $f \in \tilde{T}_\ell$, $g \in T_\ell$

$$b_Q(\varphi(f), g) = \frac{1}{2^\ell} b_Q(\varphi(f), g|_{\substack{x_i = x_i - x_i^* \\ x_i = -x_i - x_i^*}}) \in$$

$$\in b_Q(\varphi(f), \varphi(\tilde{T}_\ell)) - \tilde{b}_Q(f, \tilde{T}_\ell) = 0.$$

Если $f(y_1, \dots, y_\ell)$ - тождество со следом пары (U, L), то для всех $a_1, \dots, a_\ell \in U$ $f(a_1 - a_1^*, \dots, a_\ell - a_\ell^*) = 0$, т.е. $\varphi(f)$ - тождество U, и $\varphi(f) \in Ann_{T_\ell} b_Q$. С другой стороны, если $\varphi(f)$ - тождество U, то для всех $a_1, \dots, a_\ell \in U$ $f(a_1 - a_1^*, \dots a_\ell - a_\ell^*) = 0$. В частности, если $b_1, \dots, b_\ell \in L$ (т.е. $b_i^* = -b_i$), то $2^\ell f(b_1, \dots, b_\ell) = 0$ и $f(y_1, \dots, y_\ell)$ - тождество со следом пары (U, L). Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы 4.I и леммы 3.I получается

ТЕОРЕМА 4.2. Множество полилинейных тождеств со следом степени ℓ пары $(M_n, SO(n))$ совпадает с $Ann_{\tilde{T}_\ell} b_{f-n}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Размыслов Ю.П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР, Сер. матем. I973. Т. 37, № 3. С. 483-50I.

2. Размыслов Ю.П. Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР, Сер. матем.. I974. Т. 38, № 4. С. 723-756.

3. Размыслов Ю.П. О проблеме Холла-Хигмена // Изв. АН СССР, Сер. матем. I978. Т. 42, № 4. С. 833-847.

4. Размыслов Ю.П. Тождества со следом и центральные полиномы в матричных супералгебрах $M_{n,k}$ // Матем. сб. I985. Т. I28, № 2. С. I94-2I5.

О ПРОЕКТИВНОСТИ $0-\mathcal{X}$-ЧИСТОТЫ В КАТЕГОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

С.И. КОМАРОВ

Одной из актуальных проблем теории абелевых групп является проблема описания чистот в категории абелевых групп (см. [I, с. I9, I34]). Эта проблема еще далека от своего решения, более того, нет приемлемого описания чистот, обладающих некоторыми важными свойствами, например инъективных и проективных чистот. Данная работа посвящена описанию проективных чистот в классе так называемых чистот Кепка-Иванова.

Пусть задан класс $\mathcal{X}$ в категории абелевых групп, замкнутый относительно подгрупп и расширений. Будем говорить, что подгруппа A $0-\mathcal{X}$-чиста в группе B, если существует такая подгруппа C в B, что $B/(A+C)$ принадлежит классу $\mathcal{X}$, а $A \cap C = 0$. Получаем для каждого класса $\mathcal{X}$ чистоту, обладающую рядом интересных свойств (см. [2, I3, I4]). Обозначать то, что подгруппа A $0-\mathcal{X}$-чиста в B будем так: $A \leq_{0-\mathcal{X}} B$.

Сформулируем ряд известных определений и фактов, которые можно найти в [I]. Пусть задана некоторая ω-чистота, тогда группа называется ω-плоской, если любой эпиморфизм на эту группу имеет ω-чистое ядро. Класс всех ω-плоских групп обозначаем $\mathcal{F}_\omega$. Группа называется ω-проективной, если она проективна относительно любой короткой ω-чистой последовательности. Класс всех ω-проективных групп обозначаем P_ω. Класс всех свободных групп будем обозначать через $\mathcal{F}$. Ясно, что класс $\mathcal{F}$ содержится в классах $\mathcal{F}_\omega$ и P_ω для любой ω-чистоты, а группа, которая одновременно является ω-проективной и ω-плоской, свободна. Проективным замыканием ω-чистоты называется $\underline{\omega}$-чистота, образованная всеми короткими точными последовательностями, проективными относительно всех ω-проективных групп. Чистота

называется проективно замкнутой, если она совпадает со своим проективным замыканием. Чистота называется проективной, если для любой группы A существует накрытие $B \to A \to 0$ с ω-чистым ядром, где группа B ω-проективна. Всякая проективная чистота проективно замкнута.

Продолжим формулировку определений и относящихся к ним утверждений. Пусть задан произвольный класс $\mathcal{M}$ абелевых групп. Рассмотрим два связанных с ним класса $\mathcal{M}^{Hom} = \{G \mid Hom(G,M) = 0 \ \forall M \in \mathcal{M}\}$ и $\underline{\mathcal{M}} = \{K \mid Hom(G,K) = 0 \ \forall G \in \mathcal{M}^{Hom}\}$. Класс $\underline{\mathcal{M}}$ будет всегда замкнут относительно подгрупп, расширений и прямых произведений. Можно показать, что класс абелевых групп $\mathcal{M}$ замкнут относительно подгрупп, расширений и прямых произведений тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} = \underline{\mathcal{M}}$. Такой класс $\mathcal{M}$ мы будем называть полупростым. Ясно, что $\mathcal{M}^{Hom} = \underline{\mathcal{M}}^{Hom}$ для произвольного класса $\mathcal{M}$. Также известно, что для произвольной абелевой группы в ней существует такая подгруппа, что сама она принадлежит классу $\mathcal{M}^{Hom}$, а фактор по ней принадлежит классу $\underline{\mathcal{M}}$ для произвольного класса $\mathcal{M}$.

Перейдем теперь к 0-$\mathcal{X}$-чистоте. Класс 0-$\mathcal{X}$-плоских групп состоит из всех групп, являющихся расширением свободных групп при помощи групп из класса $\mathcal{X}$ (см. [2]). Класс 0-$\mathcal{X}$-плоских групп $\mathcal{F}_{0-\mathcal{X}}$ сам оказывается замкнутым относительно подгрупп и расширений, поэтому можно говорить о 0-$\mathcal{F}_{0-\mathcal{X}}$-чистоте, которая, оказывается, совпадает с 0-$\mathcal{X}$-чистотой. Класс проективных групп для 0-$\mathcal{X}$-чистоты состоит из всех групп, для которых выполнено следующее условие: для любого гомоморфизма группы B из этого класса в группу M, принадлежащую классу $\mathcal{X}$, существует разложение $B = K \oplus F$, где K принадлежит ядру гомоморфизма, а группа F свободна (см. [4]). Этим критерием проективности группы B для 0-$\mathcal{X}$ чистоты мы будем пользоваться постоянно.

В силу сделанного замечания о совпадении 0-$\mathcal{F}_{0-\mathcal{X}}$-чистоты с 0-$\mathcal{X}$-чистотой, если не оговорено противное, считается ниже, что класс $\mathcal{X}$ содержит все свободные группы, а тем самым совпадает с классом 0-$\mathcal{X}$-плоских групп. Таким образом, утверждения, в которых будут формулироваться свойства класса $\mathcal{X}$, следует в общем случае относить к классу 0-$\mathcal{X}$-плоских групп.

Пусть класс $\mathcal{X}$ содержит только свободные группы. Тогда мы получаем пример минимальной чистоты, то есть чистоты, для которой чистыми являются только прямые слагаемые. Проективными для минимальной чистоты будут все абелевы группы, а следовательно, минимальная чистота проективна. Итак, в случае минимально возможного класса $\mathcal{X}$ вопрос о проективности 0 -$\mathcal{X}$-чистоты решен.

Для дальнейшего изучения вопроса будет удобен следующий критерий проективности 0 -$\mathcal{X}$-чистоты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. 0 -$\mathcal{X}$-чистота проективна тогда и только тогда, когда для каждой абелевой группы A существует такая подгруппа C, что она 0 -$\mathcal{X}$-проективна, а фактор по этой подгруппе принадлежит классу $\mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть 0 -$\mathcal{X}$-чистота проективна. Тогда существует накрытие $B \xrightarrow{i} A \to 0$, где группа B 0 -$\mathcal{X}$-проективна, а $R = \operatorname{Ker} i$ является 0 -$\mathcal{X}$-чистой подгруппой в B. Последнее условие означает, что $B/(R \oplus C)$ принадлежит классу $\mathcal{X}$ для подходящей подгруппы C. По критерию 0 -$\mathcal{X}$-проективности имеем разложение $B = K \oplus F$, где группа F свободна, а K содержится в $R \oplus C$. Отсюда получаем разложение $R \oplus C = K \oplus E$, где E - подгруппа в F. Следовательно, группа C как прямое слагаемое прямой суммы 0 -$\mathcal{X}$-проективных групп является сама 0 -$\mathcal{X}$-проективной группой, а значит, 0 -$\mathcal{X}$-проективной группой является и $i(C)$. Группа $A/i(C)$ принадлежит классу $\mathcal{X}$, поскольку изоморфна группе $B/(R \oplus C)$, что доказывает необходимость приведенного условия.

Докажем достаточность этого условия. Пусть A - произвольная группа, C - ее 0 -$\mathcal{X}$-проективная подгруппа, фактор по которой принадлежит $\mathcal{X}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & C & \xrightarrow{\varphi} & R & \xrightarrow{\psi} & F \to 0 \\ & & \| & & \downarrow\tau & & \downarrow\gamma \\ 0 & \to & C & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & A/C \to 0, \end{array}$$

где $\gamma : F \to A/C$ - свободное накрытие (см. [5, § 10, 50]). Получаем равенства $\varphi(C) \cap \operatorname{Ker}\tau = 0$, $\operatorname{Ker}\beta\tau = \tau^{-1}\operatorname{Ker}\beta = \tau^{-1}(\alpha(C)) = \tau^{-1}(\tau\varphi(C)) = \varphi(C) \oplus \operatorname{Ker}\tau$. Следовательно, $R/(\varphi(C) \oplus \operatorname{Ker}\tau)$ принадлежит классу $\mathcal{X}$, откуда получаем, что $\operatorname{Ker}\tau$ является 0 -$\mathcal{X}$-чистой подгруппой в R. Группа R 0 -$\mathcal{X}$-проективна, так как изоморфна $C \oplus F$. Таким образом,

мы получили накрытие группы A 0-$\mathcal{X}$-проективной группой R с 0-$\mathcal{X}$-чистым ядром. Группа A была произвольной, поэтому 0-$\mathcal{X}$-чистота проективна. Предложение I доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если класс $\mathcal{X}$ является полупростым, то 0-$\mathcal{X}$-чистота проективна.

Доказательство. Рассмотрим произвольную группу A. Так как класс $\mathcal{X}$ полупростой, то существует подгруппа R в A, принадлежащая классу $\mathcal{X}^{Hom}$, фактор по которой принадлежит классу $\mathcal{X}$. Но любая группа из $\mathcal{X}^{Hom}$ 0-$\mathcal{X}$-проективна (см. [4]). Следовательно, по предложению I получаем проективность данной 0-$\mathcal{X}$-чистоты.

Если заданы два класса абелевых групп $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, то через $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ будем обозначать класс всех абелевых групп, изоморфных прямой сумме двух групп, принадлежащих классам $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $P_{0\text{-}\mathcal{X}} = \mathcal{X}^{Hom} \oplus \mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть группа A принадлежит классу $\mathcal{X}^{Hom}$, группа F свободна. Тогда группа $A \oplus F$ 0-$\mathcal{X}$-проективна как прямая сумма двух 0-$\mathcal{X}$-проективных групп. Теперь пусть R - 0-$\mathcal{X}$-проективная группа. В ней существует подгруппа G из класса $\underline{\mathcal{X}}^{Hom}$ такая, что $R/G \in \underline{\mathcal{X}}$. В [6] показано, что фактор 0-$\underline{\mathcal{X}}$-проективной группы по подгруппе, принадлежащей классу $\underline{\mathcal{X}}^{Hom}$, сам является 0-$\underline{\mathcal{X}}$-проективной группой, поэтому группа R/G 0-$\underline{\mathcal{X}}$-проективна. Но 0-$\underline{\mathcal{X}}$-проективными группами из класса $\underline{\mathcal{X}}$ могут быть только свободные группы. Таким образом, R/G оказывается свободной группой, откуда $R = G \oplus F$, где группа F свободна, а G принадлежит $\underline{\mathcal{X}}^{Hom} = \mathcal{X}^{Hom}$, что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $P_{0\text{-}\mathcal{X}} = \mathcal{X}^{Hom} \oplus \mathcal{F}$, то:

I. $P_{0\text{-}\mathcal{X}} = P_{0\text{-}\underline{\mathcal{X}}}$.

2. Проективное замыкание 0-$\mathcal{X}$-чистоты совпадает с 0-$\underline{\mathcal{X}}$-чистотой.

3. Следующие условия равносильны:

а) 0-$\mathcal{X}$-чистота проективна;

б) 0-$\mathcal{X}$-чистота проективно замкнута;

в) класс $\mathcal{X}$ полупрост.

Доказательство. I. следует из предложения 3.

2. По предложению 2 $0-\underline{\mathcal{X}}$-чистота проективна, а значит, и проективно замкнута. Поэтому проективное замыкание $0-\mathcal{X}$-чистоты содержится в $0-\underline{\mathcal{X}}$-чистоте. Отсюда получаем $P_{0-\mathcal{X}} = P_{0-\underline{\mathcal{X}}} \subseteq P_{\underline{0-\mathcal{X}}} = P_{0-\mathcal{X}}$, то есть $P_{\underline{0-\mathcal{X}}} = P_{0-\underline{\mathcal{X}}}$. Но две проективно замкнутые чистоты совпадают, если совпадают классы проективных групп для этих чистот. Это доказывает 2.

3. То, что из а) следует б), уже отмечалось.

Теперь пусть имеется проективно замкнутая $0-\mathcal{X}$-чистота, тогда $0-\mathcal{X}$-чистота совпадает с $\underline{0-\mathcal{X}}$-чистотой, которая совпадает с $0-\underline{\mathcal{X}}$-чистотой по п. 2. Но отсюда следует, что $\mathcal{X} = \underline{\mathcal{X}}$, то есть класс $\mathcal{X}$ полупрост, что дает в).

Из в) следует а) по предложению 2. Предложение 4 доказано полностью.

Если класс $0-\mathcal{X}$-проективных групп устроен так, как сказано в условии предложения 4, то будем говорить, что он устроен "хорошо". В этом случае предложение 4 решает вопрос о проективности $0-\mathcal{X}$-чистоты. Следующее предложение показывает, когда класс $0-\mathcal{X}$-проективных групп устроен "хорошо".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Класс $0-\mathcal{X}$-проективных групп "хорошо" устроен тогда и только тогда, когда $\underline{\mathcal{X}} \cap P_{0-\mathcal{X}} = \mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть класс $P_{0-\mathcal{X}}$ "хорошо" устроен. Тогда по предложению 4 $P_{0-\mathcal{X}} = P_{0-\underline{\mathcal{X}}}$, поэтому $\underline{\mathcal{X}} \cap P_{0-\mathcal{X}} = \underline{\mathcal{X}} \cap P_{0-\underline{\mathcal{X}}} = \mathcal{F}$.

Обратно, пусть $\underline{\mathcal{X}} \cap P_{0-\mathcal{X}} = \mathcal{I}$. Рассмотрим произвольную группу R из $P_{0-\mathcal{X}}$. В ней существует максимальная подгруппа G такая, что R/G принадлежит $\underline{\mathcal{X}}$ и G принадлежит $\underline{\mathcal{X}}^{Нот} = \mathcal{X}^{Нот}$, но тогда группа R/G является $0-\mathcal{X}$-проективной, а следовательно, свободной. Отсюда $R = G \oplus F$, где группа F свободна, то есть класс $0-\mathcal{X}$-проективных групп "хорошо" устроен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если класс $\mathcal{X}$ содержит любые произведения бесконечных циклических групп, то класс $P_{0-\mathcal{X}}$ "хорошо" устроен.

Доказательство. Рассмотрим $0-\mathcal{X}$-проективную группу R и множество всех ее подгрупп, фактор по которым является бесконечной циклической группой. Пусть G - пересечение всех этих подгрупп. Тогда группа R/G изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения бесконечных циклических групп, следовательно,

она принадлежит классу $\mathcal{X}$. Тогда $R = K \oplus F$, где K-подгруппа в G, а группа F свободна. В силу выбора G ясно, что G является подгруппой в K, откуда получаем $G = K$. Итак, группа R равна $G \oplus F$, где $Hom(G, \mathbb{Z}) = 0$, а группа F свободна. В то же время группа G 0-$\mathcal{X}$-проективна. Отсюда (см. [4]) группа G принадлежит классу $\mathcal{X}^{Hom}$, а тем самым класс $P_{0\text{-}\mathcal{X}}$ "хорошо" устроен.

Теперь мы можем приступить к доказательству основного критерия проективности 0-$\mathcal{X}$-чистоты. Напомним, что мы считали до сих пор, что класс $\mathcal{X}$ содержит все свободные группы. Так же будем считать и в доказательстве сформулированной ниже теоремы I. Однако саму формулировку дадим в общем виде.

ТЕОРЕМА I. 0-$\mathcal{X}$-чистота проективна тогда и только тогда, когда либо класс $\mathcal{X}$ состоит только из свободных групп, либо класс 0-$\mathcal{X}$-плоских групп замкнут относительно прямых произведений.

Доказательство. Достаточность указанных условий уже отмечалась.

Доказательство необходимости потребует рассмотрения нескольких случаев. В каждом случае будет установлено то, что класс $\mathcal{X}$ содержит любые произведения бесконечных циклических групп. Тогда остальное будет следовать из предложений 6 и 4.

Первый случай. Класс $\mathcal{X}$ содержит ненулевые периодические группы. Значит, класс $\mathcal{X}$ содержит группу $Z(p)$ для некоторого простого p. Так как 0-$\mathcal{X}$-чистота проективна, то для любого множества индексов I группа $A = \bigoplus_{i \in I} Z(p)$ также лежит в $\mathcal{X}$. Действительно, по предложению I в группе A имеется такая подгруппа B, что сама она 0-$\mathcal{X}$-проективна, а фактор по ней принадлежит классу $\mathcal{X}$. Но тогда B не может содержать прямое слагаемое, изоморфное группе $Z(p)$, а следовательно, $B = 0$. Теперь рассмотрим 0-$\mathcal{X}$-проективную группу R. Тогда R/pR лежит в классе $\mathcal{X}$. Поэтому $R = K \oplus F$, где K содержится в pR, а группа F свободна. Далее $pR = pK \oplus pF$, отсюда $K = pK \oplus E$, где группа E свободна. Но $E \cong K/pK$, поэтому $E = 0$, а значит, группа K p-делима. Итак, в рассматриваемом случае любая 0-$\mathcal{X}$-проективная группа является прямой суммой p-делимой и свободной группы, где p - некоторое простое число, для которого группа $Z(p)$ принадлежит классу $\mathcal{X}$.

Теперь для произвольного множества индексов рассмотрим группу $C = \prod_{i \in I} \prod_{k=1}^{\infty} Z(p^k)$. В ней существует такая 0-$\mathcal{X}$-проективная подгруппа G, что C/G принадлежит классу $\mathcal{X}$. Группа

G является прямой суммой p-делимой и свободной групп, но C не содержит ненулевых p-делимых подгрупп, поэтому G оказывается свободной группой, а значит, сама группа C лежит в классе $\mathcal{Z}$. Прямое произведение I экземпляров бесконечной циклической группы можно вложить в C, следовательно, это произведение принадлежит классу $\mathcal{Z}$ для произвольного множества индексов I.

Второй случай. Класс $\mathcal{Z}$ содержит только группы без кручения и группу рациональных чисел $\mathcal{Q}$. Тогда для произвольного множества индексов I в группе $B = \prod_{i \in I} \mathcal{Q}$ содержится такая 0-$\mathcal{Z}$-проективная подгруппа G, что фактор по ней принадлежит $\mathcal{Z}$. Подгруппа G оказывается в этом случае сервантной в B, а поэтому содержит прямое слагаемое, изоморфное $\mathcal{Q}$, если она ненулевая. Но всякое прямое слагаемое 0-$\mathcal{Z}$-проективной группы само является 0-$\mathcal{Z}$-проективной группой. Группа $\mathcal{Q}$ не является 0-$\mathcal{Z}$-проективной, так как содержится в классе $\mathcal{Z}$ и не является свободной. Следовательно, $G = 0$. Поэтому группа B принадлежит классу $\mathcal{Z}$, а вместе с ней принадлежит этому классу и прямое произведение I экземпляров бесконечной циклической группы, которое можно вложить в B. Так как множество индексов I было произвольным, то и в этом случае получили обещанное.

Третий случай. Класс $\mathcal{Z}$ состоит только из редуцированных групп без кручения и содержит группу p-адических чисел J_p для некоторого простого p. Вновь берем произвольное множество индексов I и рассматриваем прямое произведение $B = \prod_{i \in I} J_p$. Группа B является редуцированной алгебраически компактной, она содержит 0-$\mathcal{Z}$-проективную подгруппу G, фактор по которой лежит в классе $\mathcal{Z}$. В силу известных свойств алгебраически компактных групп (см. [5, § 39]) можно утверждать, что G - алгебраически компактная группа. Если бы G была ненулевой, то она содержала бы прямое слагаемое, изоморфное группе J_p, но это означало бы, что J_p является 0-$\mathcal{Z}$-проективной группой, что в данном случае не так. Следовательно, $G = 0$, а группа B принадлежит классу $\mathcal{Z}$. Повторяя заключительные рассуждения второго случая, вновь получим, что класс $\mathcal{Z}$ содержит любые произведения бесконечных циклических групп.

Четвертый случай. Класс $\mathcal{Z}$ состоит только из групп без кручения, не содержит ненулевых алгебраически компактных групп, но содержит группу $P = \prod_{i=1}^{\infty} Z$. Сначала покажем, что любая ненулевая 0-$\mathcal{Z}$-проективная подгруппа произвольного прямого произведения бесконечных циклических групп является свободной.

Пусть R - подгруппа в $\prod_{i\in I} Z$ и R является $0-\mathcal{Z}$-проективной группой. Рассмотрим группу $B = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$, где все R_i изоморфны R. В группе B выделяем подгруппу G из класса $P_{0-\mathcal{Z}}$, фактор по которой принадлежит классу $\mathcal{Z}$. Пусть $\tau : B \to B/G$ - естественный эпиморфизм. Тогда для каждой компоненты R_i имеем $\tau(R_i) \cong R_i/(R_i \cap G) \cong (R_i + G)/G$. Отсюда для каждого i существует разложение $R_i = K_i \oplus F_i$, где $K_i \subseteq R_i \cap G$ и группа F_i свободна. Предположим, что ни одна из групп K_i не является нулевой. Рассмотрим произведение их как подгруппу в B, положим $K = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$. Мы знаем, что $\tau(K) \subseteq B/G$, а следовательно, $\tau(K)$ принадлежит классу $\mathcal{Z}$. Кроме того, для каждого i $\tau(K_i) = 0$, поэтому $\tau(\bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i) = 0$, откуда $\tau(K)$ является эпиморфным образом группы $\prod_{i=1}^{\infty} K_i / \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i$, которая является ненулевой алгебраически компактной группой. Но тогда и $\tau(K)$ является алгебраически компактной группой, так как она подгруппа редуцированной группы без кручения (см. [5, § 39]). Отсюда получаем, что $\tau(K) = 0$, ведь $\mathcal{Z}$ в рассматриваемом случае не содержит ненулевых алгебраически компактных групп. Значит, группа K является подгруппой в G и, как прямое слагаемое в B, является прямым слагаемым в G. Но это дает $0-\mathcal{Z}$-проективность группы K. Так как группы K_i содержатся в B, то в каждой K_i имеется прямое слагаемое, изоморфное $\mathcal{Z}$, а в K, следовательно, имеется прямое слагаемое, изоморфное P. Тем самым группа P должна быть $0-\mathcal{Z}$-проективной, чего не может быть в силу того, что она несвободна. Получили противоречие, которое показывает, что хотя бы одна из групп K_i является нулевой, но тогда некоторая R_i оказывается свободной, то есть свободной оказывается группа R.

Теперь легко увидеть, что не только P, но и любое произведение бесконечных циклических групп принадлежит классу $\mathcal{Z}$. В самом деле, в любом таком произведении должна найтись подгруппа из класса $P_{0-\mathcal{Z}}$, фактор по которой лежит в $\mathcal{Z}$. Но такая подгруппа должна быть свободной, как только что показано. Следовательно, любое произведение бесконечных циклических групп принадлежит классу $\mathcal{Z}$.

Пятый случай. Очевидно, нам еще осталось рассмотреть класс $\mathcal{Z}$ редуцированных групп без кручения, не содержащий ненулевых алгебраически компактных групп и группу P, то есть класс, содержащий только узкие группы (см. [5, § 94, 95]). Возьмем

какую-нибудь несвободную группу A из класса $\mathcal{X}$. Для произвольного множества индексов I рассмотрим группу $B = \prod_{i \in I} A$. Выберем в B $O-\mathcal{X}$-проективную подгруппу G, фактор по которой лежит в $\mathcal{X}$. Поскольку для любого гомоморфизма прямого произведения редуцированных групп без кручения в узкую группу почти все компоненты этого произведения принадлежат ядру гомоморфизма, то G содержит прямое слагаемое, изоморфное A, которое оказывается одновременно и $O-\mathcal{X}$-проективной группой, и группой из класса $\mathcal{X}$. Но такой может быть только свободная группа. Полученное противоречие показывает, что для проективной $O-\mathcal{X}$-чистоты класс $\mathcal{X}$, содержащий несвободные группы, не может содержать только узкие группы. А во всех подобных случаях, как показано выше, класс $\mathcal{X}$ обязан быть замкнутым относительно прямых произведений, так как содержит произвольные прямые произведения бесконечных циклических групп. Теорема 1 доказана.

Следует отметить, что для произвольного класса $\mathcal{X}$, замкнутого относительно подгрупп и расширений, замкнутость класса плоских групп для $O-\mathcal{X}$-чистоты относительно прямых произведений не влечет такую же замкнутость для самого класса $\mathcal{X}$. Простейшим примером может служить класс всех периодических групп, который не замкнут относительно прямых произведений. Для него классом $O-\mathcal{X}$-плоских групп будет класс всех абелевых групп, тем самым $O-\mathcal{X}$-чистота, определенная классом периодических групп, проективна. Мы получаем максимальную чистоту, для которой в любой группе оказываются чистыми все подгруппы.

Результаты, полученные выше, позволяют описать проективное замыкание одного класса ω-чистот.

ТЕОРЕМА 2. Пусть чистота ω такова, что класс ω-проективных групп "хорошо" устроен. То есть $P_\omega = \mathcal{H}^{Hom} \otimes \mathcal{F}$, где $\mathcal{H}$ – некоторый класс абелевых групп, а $\mathcal{F}$ – класс всех свободных групп. Тогда проективное замыкание ω-чистоты совпадает с $O-\underline{\mathcal{H}}$-чистотой, а значит, является проективной чистотой.

Доказательство. Во-первых, следует отметить, что если $\mathcal{H}$-ненулевой класс, то $\underline{\mathcal{H}}$ содержит все свободные группы и является полупростым. Следовательно, действительно можно говорить об $O-\underline{\mathcal{H}}$-чистоте, которая является проективной (предложение 2), а значит, и проективно замкнутой. Кроме того, $P_{O-\mathcal{H}} = \underline{\mathcal{H}}^{Hom} \otimes \mathcal{F} = \mathcal{H}^{Hom} \otimes \mathcal{F} = P_\omega$. Отсюда получаем, что ω-чистота совпадает с $O-\underline{\mathcal{H}}$-чистотой.

Если же класс $\mathcal{H}$ нулевой, то полученный из него класс

$\mathcal{H}^{Hom}$ совпадает с классом всех абелевых групп. Тогда класс ω -проективных групп так же совпадает с классом всех абелевых групп, поэтому проективным замыканием чистоты ω оказывается минимальная чистота, совпадающая с 0 -0-чистотой. Учитывая, что класс $\mathcal{H}$ нулевой, получаем нужное утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

I. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., 1969. 151 с.

2. Kepka T. On one class of purities // Comment. math. Univ. carol. 1973. V.14, N 1. p. 139-154.

3. Иванов А.В. ω-делимые и ω-плоские модули // Матем. заметки, 1978. Т. 24, № 6. С. 741-747.

4. Комаров С.И. Об $\mathcal{U}$-$\mathcal{I}$-чистоте в абелевых группах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем., механ. 1982. № 2. С. 11-18.

5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М., 1974. Т. 1. 336 с.; 1977. Т. 2. 416 с.

6. Комаров С.И. Функтор HF в категории абелевых групп // Абелевы группы и модули. Вып. 7. Томск. Изд-во Том. ун-та, 1988. С.42-63.

РАЗМЕРНОСТНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДУЛЕЙ И РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ПОЛЕЙ

А.Б.Левин, А.В.Михалев

В работе доказывается существование и устанавливаются некоторые свойства размерностных многочленов, ассоциированных с фильтрованными дифференциально-разностными модулями. Полученные результаты применяются для исследования конечно-порожденных расширений дифференциально-разностных полей.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть F — дифференциально-разностное поле с базисным множеством дифференцирований $\Delta=\langle\delta_1,\cdots,\delta_m\rangle$ и базисным множеством автоморфизмов $\sigma=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle$, т.е. поле, рассматриваемое вместе с действующими на нем операторами дифференцирования $\delta_i: F\to F$ ($i=1,\cdots,m$) и автоморфизмами α_j ($j=1,\cdots,n$) такими, что все операторы из множества $\overline{\Delta}=\Delta\cup\sigma$ попарно коммутируют между собой. Обозначим через Θ свободную коммутативную полугруппу, порожденную элементами $\delta_1,\cdots,\delta_m$, через Γ — свободную коммутативную группу, порожденную элементами $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, а через Ω — коммутативную полугруппу элементов вида

$\omega=\delta_1^{k_1}\cdots\delta_m^{k_m}\alpha_1^{s_1}\cdots\alpha_n^{s_n}$, где $k_i\in\mathbb{N}$, $s_j\in\mathbb{Z}$ (как обычно, $\mathbb{Z}$ обозначает кольцо целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел). Величину $ord\,\omega=\sum_{i=1}^{m}k_i+\sum_{j=1}^{n}|s_j|$ мы назовем порядком элемента ω, а величины $ord_\Delta\omega=\sum_{i=1}^{m}k_i$ и $ord_\sigma\omega=\sum_{j=1}^{n}|s_j|$ — соответственно Δ-порядком и σ-порядком этого элемента. Положим $\Omega(r)=\{\omega\in\Omega\mid ord\,\omega\le r\}$, $\Theta(r)=\Omega(r)\cap\Theta$, $\Gamma(r)=\Omega(r)\cap\Gamma$ для каждого $r\in\mathbb{N}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Дифференциально-разностным оператором над полем F называется выражение вида $\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega\omega$, где $a_\omega\in F$

и почти все элементы a_ω равны нулю. Два дифференциально-разностных оператора $\sum_{\omega\in\Omega} a_\omega\omega$ и $\sum_{\omega\in\Omega} b_\omega\omega$ считаются равными, если $a_\omega = b_\omega$ для каждого $\omega\in\Omega$.

Множество всех дифференциально-разностных операторов над полем F естественным образом обладает структурой левого F-модуля. Это множество становится кольцом, если положить $\delta a = a\delta + \delta(a)$, $\alpha a = \alpha(a)\alpha$ для любых $a\in F$, $\delta\in\Delta$, $\alpha\in\sigma^* = \langle\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n^{-1}\rangle$, произведение $\omega_1\omega_2$ ($\omega_1,\omega_2\in\Omega$) определить как в полугруппе Ω и потребовать выполнение законов дистрибутивности. Полученное кольцо называется кольцом дифференциально-разностных операторов над F и обозначается через $\mathcal{F}$. Подкольца элементов вида $\sum_{\theta\in\Theta} a_\theta\theta$ (почти все a_θ равны нулю) и $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma\gamma$ (почти все a_γ равны нулю) кольца $\mathcal{F}$ называются соответственно кольцом дифференциальных операторов и кольцом инверсных разностных операторов над полем F и обозначаются через $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ соответственно. Для каждого элемента $A = \sum_{\omega\in\Omega} a_\omega\omega \in \mathcal{F}$ положим $\operatorname{ord} A = \max\{\operatorname{ord}\omega \mid a_\omega \neq 0\}$ и пусть $\mathcal{F}_r = \{A\in\mathcal{F} \mid \operatorname{ord} A \le r\}$ при $r\in\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_r = 0$ при $r\in\mathbb{Z}$, $r<0$. Кроме того, положим $\mathcal{D}_r = \mathcal{D}\cap\mathcal{F}_r$ и $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}\cap\mathcal{F}_r$ для любого $r\in\mathbb{Z}$. Тогда кольца $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ оказываются наделенными возрастающими фильтрациями $(\mathcal{F}_r)_{r\in\mathbb{Z}}$, $(\mathcal{D}_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ и $(\mathcal{E}_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ соответственно. В дальнейшем, рассматривая эти кольца как фильтрованные, мы будем (если не оговорено противное) иметь в виду именно такие фильтрации.

О п р е д е л е н и е I.2. Дифференциально-разностным (соответственно дифференциальным или инверсным разностным) F-модулем называется левый $\mathcal{F}$-модуль (соответственно левый $\mathcal{D}$- или $\mathcal{E}$-модуль).

З а м е ч а н и е. Для краткости мы будем в дальнейшем заменять прилагательные "дифференциально-разностный", "дифференциальный", "инверсный разностный" приставками $\Delta\sigma$-, Δ-, σ- соответственно. Например, вместо слов "дифференциально-разностный модуль" будем писать

"$\overline{\Delta}$ - F -модуль".

Определение I.3. Фильтрацией $\overline{\Delta}$ - (Δ - , σ -) F -модуля M называется возрастающая последовательность $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ F -подмодулей модуля M такая, что $M_z=0$ при всех достаточно малых $z\in\mathbb{Z}$, $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} M_z=M$ и $\mathcal{F}_s M_z \subseteq M_{z+s}$ (соответственно $\mathcal{D}_s M_z \subseteq M_{z+s}$, $\mathcal{E}_s M_z \subseteq M_{z+s}$) для любых $z\in\mathbb{Z}$, $s\in\mathbb{N}$.

Определение I.4. Фильтрация $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ $\overline{\Delta}$ - (Δ - , σ -) F - модуля M называется отличной, если M_z — конечно-порожденное векторное пространство над полем F для любого $z\in\mathbb{Z}$, и для всех достаточно больших $z\in\mathbb{Z}$ выполняется равенство $\mathcal{F}_1 M_z = M_{z+1}$ (соответственно $\mathcal{D}_1 M_z = M_{z+1}$ или $\mathcal{E}_1 M_z = M_{z+1}$).

При сделанных выше соглашениях справедливы следующие три теоремы о размерностных многочленах конечно-порожденных Δ - , σ - и $\overline{\Delta}$ - модулей над Δ - (σ - , $\overline{\Delta}$ -) полем F .

Теорема I.I (см. [I, гл.I, §4 и гл.III, §2]). Пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ — отличная фильтрация конечно-порожденного Δ - F -модуля M . Тогда существует многочлен $\varphi(t)$ от одной переменной t с рациональными коэффициентами, обладающий следующими свойствами:

1) $\varphi(z)=\dim_F M_z$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{Z}$;

2) $\deg\varphi \le m$ и многочлен $\varphi(t)$ может быть представлен в виде $\varphi(t)=\frac{at^m}{m!}+o(t^m)$, где $a\in\mathbb{Z}$ (через $o(t^m)$ обозначается многочлен с рациональными коэффициентами от t , степень которого не превосходит $m-1$);

3) величина a не зависит от выбора отличной фильтрации $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ Δ - F -модуля M . Эта величина называется дифференциальной или Δ - размерностью Δ - F -модуля M и обозначается через $d(M)$;

4) функция $d(M)$ аддитивна на классе всех конечно-порожденных Δ - F - модулей, т.е. $d(N)+d(P)=d(M)$ для любой точной последовательности конечно-порожденных Δ - F -модулей $0\to N\to M\to P\to 0$;

5) для любого конечно-порожденного $\Delta - F$-модуля M величина $d(M)$ равна максимальному числу линейно независимых над кольцом $\mathcal{D}$ элементов модуля M.

Т е о р е м а I.2 (см. [2, теоремы I, 3-5]). Пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ — отличная фильтрация конечно-порожденного $\sigma - F$-модуля M. Тогда существует многочлен $\psi(t)$ от одной переменной t с рациональными коэффициентами, обладающий следующими свойствами:

I) $\psi(z) = \dim_F M_z$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{Z}$;

2) $\dim \psi(t) \le n$ и многочлен $\psi(t)$ может быть представлен в виде $\psi(t) = \frac{2^n a}{n!} t^n + o(t^n)$, где $a\in\mathbb{Z}$;

3) величина a не зависит от выбора отличной фильтрации $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ $\sigma - F$-модуля M. Эта величина называется инверсной разностной или σ-размерностью $\sigma - F$-модуля M и обозначается через $i\delta(M)$;

4) функция $i\delta(M)$ аддитивна на классе всех конечно-порожденных $\sigma - F$-модулей;

5) для любого конечно-порожденного $\sigma - F$-модуля M величина $i\delta(M)$ равна максимальному числу линейно независимых над кольцом $\mathcal{E}$ элементов модуля M.

Из теорем I.I и I.2 вытекает аналогичный результат для $\overline{\Delta} - F$-модулей (см. [3, §I, теорема 2 и §2, теорема 4, лемма 7]).

Т е о р е м а I.3. Пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ — отличная фильтрация конечно-порожденного $\overline{\Delta} - F$-модуля M. Тогда существует многочлен $\chi(t)$ от одной переменной t с рациональными коэффициентами, обладающий следующими свойствами:

I) $\chi(z) = \dim_F M_z$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{Z}$;

2) $\deg \chi(t) \le m+n$ и многочлен $\chi(t)$ можно представить в виде $\chi(t) = \frac{2^n a}{(m+n)!} t^{m+n} + o(t^{m+n})$, где $a\in\mathbb{Z}$;

3) величина a не зависит от выбора отличной фильтрации $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$

$\bar{\Delta}$ - F -модуля M. Эта величина называется дифференциально-разностной или $\bar{\Delta}$ -размерностью модуля M и обозначается через $d\delta(M)$;
4) функция $d\delta(M)$ аддитивна на классе всех конечно-порожденных $\bar{\Delta}$ - F -модулей;
5) для любого конечно-порожденного $\bar{\Delta}$ - F -модуля M величина $d\delta(M)$ равна максимальному числу линейно независимых над кольцом F элементов модуля M .

Пусть J — некоторое множество и $F[y_{j\omega}]$, $j\in J$, $\omega\in\Omega$ — кольцо многочленов от неизвестных $y_{j\omega}$, $(j,\omega)\in J\times\Omega$ над полем F. Тогда каждое дифференцирование $\delta\in\Delta$ и каждый автоморфизм $\alpha\in\sigma^*$ продолжаются соответственно до дифференцирования и автоморфизма кольца $F[y_{j\omega}]$, отображающих $y_{j\omega}$ в $y_{j\delta\omega}$ или $y_{j\alpha\omega}$ соответственно. Полученное $\bar{\Delta}$ -кольцо $F[y_{j\omega}]$ называется кольцом $\bar{\Delta}$ -многочленов над полем F и обозначается через $F\{y_j\}_{\bar{\Delta}}$, $j\in J$. Соответственно через $F\{y_j\}_{\Delta}$ и $F\{y_j\}_{\sigma}$ ($j\in J$) обозначаются кольца дифференциальных (Δ -) и инверсных разностных (σ-) многочленов от Δ - (σ-) неизвестных y_j ($j\in J$) над полем F . Очевидно, что последние два кольца можно естественным образом рассматривать как подкольца кольца $F\{y_j\}_{\bar{\Delta}}$, $j\in J$.

Если F_0 — подполе поля F такое, что $\beta(F_0)\subseteq F_0$ для любого $\beta\in\bar{\Delta}^*=\Delta\cup\sigma^*$, то F_0 называется $\bar{\Delta}$ -подполем $\bar{\Delta}$ -поля F , а F — $\bar{\Delta}$ -расширением $\bar{\Delta}$ -поля F_0 . Аналогично (с заменой $\bar{\Delta}^*$ на Δ или на σ^*) определяются понятия Δ -подполя и σ-подполя, Δ -расширения и σ-расширения. Легко видеть, что пересечение любого семейства $\bar{\Delta}$- (Δ - σ-) подполей поля F — снова $\bar{\Delta}$ - (Δ-, σ-) подполе F , поэтому для любого подмножества $\Sigma\subseteq F$ существует наименьшее $\bar{\Delta}$ - (Δ-, σ-) подполе поля F , содержащее F_0 и Σ . Оно обозначается через $F_0\langle\Sigma\rangle_{\bar{\Delta}}$ (соответственно через $F_0\langle\Sigma\rangle_{\Delta}$ или $F_0\langle\Sigma\rangle_{\sigma}$) и как поле совпадает с $F_0(\{\omega(a)\mid\omega\in\Omega, a\in\Sigma\})$ (соответственно с

$F_0(\{\theta(a)|\theta\in\Theta, a\in\Sigma\})$ или $F_0(\{\gamma(a)|\gamma\in\Gamma, a\in\Sigma\})$. Если множество Σ конечно, $\Sigma=\{\eta_1,\dots,\eta_k\}$ и $F_0\langle\Sigma\rangle_{\bar\Delta}=F$, то $\bar\Delta$-поле F называется конечно-порожденным $\bar\Delta$-расширением $\bar\Delta$-поля F_0 и обозначается через $F_0\langle\eta_1,\dots,\eta_k\rangle_{\bar\Delta}$. Аналогичный смысл имеют расширения $F_0\langle\eta_1,\dots,\eta_k\rangle_\Delta$ или $F_0\langle\eta_1,\dots,\eta_k\rangle_\sigma$ Δ- или σ- поля F соответственно.

О п р е д е л е н и е I.5. Пусть F — $\bar\Delta$- (Δ-, σ-) расширение $\bar\Delta$- (Δ-, σ-) поля F_0. Элементы $z_j\in F$ ($j\in J$) называются $\bar\Delta$- (Δ-, σ-) алгебраически независимыми над полем F_0 или $\bar\Delta$- (Δ-, σ-) неизвестными над F_0, если элементы $\omega(z_j)$, $\omega\in\Omega$, $j\in J$ (соответственно $\theta(z_j)$, $\theta\in\Theta$, $j\in J$ или $\gamma(z_j)$, $\gamma\in\Gamma$, $j\in J$) алгебраически независимы над полем F_0.

О п р е д е л е н и е I.6. При сделанных выше предположениях максимальное число $\bar\Delta$- (Δ-, σ-) алгебраически независимых над F_0 элементов поля F называется $\bar\Delta$- (соответственно Δ- или σ-) степенью трансцендентности расширения $F\supseteq F_0$ и обозначается через $d\delta trdeg_{F_0}F$ (соответственно через $dtrdeg_{F_0}F$ или $\delta trdeg_{F_0}F$). Если в F существует бесконечное семейство элементов, $\bar\Delta$- (Δ-, σ-) алгебраически независимое над F_0, то пишут $d\delta trdeg_{F_0}F=\infty$ ($dtrdeg_{F_0}F=\infty$, $\delta trdeg_{F_0}F=\infty$).

§ 2. Размерностные многочлены дифференциально-разностных модулей и их инварианты

Пусть F — $\bar\Delta$-поле и $\mathcal{F}$ — кольцо $\bar\Delta$-операторов над полем F (здесь и далее мы используем обозначения и соглашения предыдущего параграфа).

О п р е д е л е н и е 2.I. Стандартной Δ- (σ-) фильтрацией кольца $\mathcal{F}$ называется возрастающая последовательность $(\mathcal{F}_r^\Delta)_{r\in\mathbb{N}}$ (соответственно $(\mathcal{F}_r^\sigma)_{r\in\mathbb{N}}$) $\mathcal{E}$- ($\mathcal{D}$-) подмодулей кольца $\mathcal{F}$ та-

кая, что $\mathcal{F}_z^{\Delta}=\{\omega\in\mathcal{F}\mid \operatorname{ord}_{\Delta}\omega\le z\}$ (соответственно $\mathcal{F}_z^{\sigma}=\{A\in\mathcal{F}\mid \operatorname{ord}_{\sigma}A\le z\}$) для каждого $z\in\mathbb{N}$.

Если M — левый $\mathcal{F}$-модуль, то Δ-фильтрацией модуля M будем называть такую возрастающую последовательность $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$ его $\mathcal{E}$-подмодулей, которая является исчерпывающей и отделимой фильтрацией M как модуля над кольцом $\mathcal{F}$, снабженным стандартной Δ-фильтрацией. Аналогично определяется σ-фильтрация $\mathcal{F}$-модуля M. В частности, если модуль M конечно-порожден над кольцом $\mathcal{F}$ элементами $x_1,\dots,x_p$, то $\left(\sum_{i=1}^{p}\mathcal{F}_z^{\Delta}x_i\right)_{z\in\mathbb{N}}$ и $\left(\sum_{i=1}^{p}\mathcal{F}_z^{\sigma}x_i\right)_{z\in\mathbb{N}}$ являются соответственно Δ- и σ-фильтрациями модуля M.

О п р е д е л е н и е 2.2. Δ-фильтрация $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}$-модуля M называется отличной, если все модули M_z ($z\in\mathbb{N}$) конечно-порождены над кольцом $\mathcal{E}$, и существует такое число $z_0\in\mathbb{N}$, что $D_s M_z = M_{z+s}$ для любых $z\ge z_0$, $s\in\mathbb{N}$ (очевидно, что $\mathcal{F}_s^{\Delta}M_z = M_{z+s}$ для этих же значений z и s).

Аналогично определяется отличная σ-фильтрация $\mathcal{F}$-модуля M. Отметим, что рассмотренные выше Δ- и σ-фильтрации конечно-порожденного $\mathcal{F}$-модуля M являются отличными.

Как и ранее, для отличной Δ-фильтрации $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$ мы будем обозначать через $i\delta(M_z)$ инверсную разностную размерность σ-F-модуля M_z, а для отличной σ-фильтрации $(M'_z)_{z\in\mathbb{N}}$ будем обозначать через $d(M'_z)$ дифференциальную размерность Δ-F-модуля M'_z.

Т е о р е м а 2.1. Пусть F — $\bar{\Delta}$-поле и пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$ — отличная Δ-фильтрация конечно-порожденного $\bar{\Delta}$-F-модуля M. Тогда существует многочлен $f(t)$ с рациональными коэффициентами от одной переменной t, обладающий следующими свойствами:

1) $f(z)=i\delta(M_z)$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{N}$;

2) $\deg f(t)\le m$ и многочлен $f(t)$ может быть представлен в виде

$$f(t)=\frac{a\,t^m}{m!}+o(t^m),\quad \text{где } a\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим градуированное кольцо $gr^{\Delta}\mathcal{F}$, ассоциированное с кольцом $\bar{\Delta}$-операторов $\mathcal{F}$, снабженным стандартной Δ-фильтрацией: $gr^{\Delta}\mathcal{F}=\bigoplus_{q=0}^{\infty} gr_q^{\Delta}\mathcal{F}=\bigoplus_{q=0}^{\infty}\left(\mathcal{F}_q^{\Delta}/\mathcal{F}_{q-1}^{\Delta}\right)\cong \mathcal{E}[X_1,\cdots,X_m]$ $(\mathcal{F}_{-1}=0)$, где $X_i=\delta_i+\mathcal{E}\in gr_1\mathcal{F}$ $(i=1,\cdots,m)$. Здесь $\mathcal{E}[X_1,\cdots,X_m]$ — кольцо многочленов от попарно коммутирующих переменных $X_1,\cdots,X_m$ над кольцом $\mathcal{E}$ σ-операторов над полем F; это кольцо многочленов рассматривается как градуированное с естественной градуировкой. Градуированный $gr^{\Delta}\mathcal{F}$-модуль, ассоциированный с данным, отлично Δ-фильтрованным $\bar{\Delta}$-F-модулем M, имеет вид $grM=\bigoplus_{q=0}^{\infty} gr_qM=\bigoplus_{q=0}^{\infty}\left(M_q/M_{q-1}\right)$ $(M_{-1}=0)$. При этом grM является конечно-порожденным $gr^{\Delta}\mathcal{F}$-модулем, т.е. конечно-порожденным градуированным $\mathcal{E}[X_1,\cdots,X_m]$-модулем (это показывается точно так же, как в случае отлично фильтрованных дифференциальных модулей — см. [I, гл.I]). Положим $M^{(q)}=gr_qM$ $(q\in\mathbb{N})$, $R=\mathcal{E}[X_1,\cdots,X_m]$. Тогда $R=\bigoplus_{q=0}^{\infty}R^{(q)}$, где $R^{(q)}$ — левый $\mathcal{E}$-модуль, порожденный всеми одночленами полной степени q. Покажем, что существует такой многочлен $\varphi(t)\in Q[t]$ (как обычно, Q обозначает поле рациональных чисел, а $Q[t]$ — кольцо многочленов от одного переменного t над полем Q), что $\varphi(q)=i\delta(M^{(q)})$ для всех достаточно больших $q\in\mathbb{N}$, причем $deg\,\varphi\leq m-1$, и многочлен $\varphi(t)$ представим в виде $\varphi(t)=\frac{at^{m-1}}{(m-1)!}+o(t^{m-1})$, где $a\in\mathbb{Z}$. Для этого проведем индукцию по $m=Card\,\Delta$. При $m=0$ имеем $\mathcal{D}=F$, и второе свойство отличной Δ-фильтрации показывает, что $M_z=M_{z+1}=\cdots$ начиная с некоторого номера $z\in\mathbb{N}$ (см. определение 2.2). Следовательно, $M^{(q)}=0$ для всех достаточно больших $q\in\mathbb{N}$, доказываемое утверждение справедливо ($\varphi\equiv 0$, $deg\,\varphi=-1$). Предположим теперь, что высказанное утверждение справедливо при $Card\,\Delta=m-1$ и пусть $Card\,\Delta=m$, $\Delta=\langle\delta_1,\cdots,\delta_m\rangle$. Рассмотрим отображение ρ степени 1 градуированного R-модуля $grM=\bigoplus_{q=0}^{\infty}M^{(q)}$ в себя такое, что $\rho y=X_m y$ для любого элемента $y\in grM$.

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ имеет место точная последовательность конечно-порожденных $\mathcal{E}$-модулей

$$0 \to N^{(q)} \to M^{(q)} \xrightarrow{\rho|M^{(q)}} M^{(q+1)} \to P^{(q)} \to 0, \qquad (I)$$

где $N^{(q)} = \operatorname{Ker}(\rho|M^{(q)})$, $P^{(q)} = \operatorname{Coker}(\rho|M^{(q)})$ ($q \in \mathbb{N}$). Так как $N = \operatorname{Ker}\rho = \bigoplus_{q=0}^{\infty} N^{(q)}$ и $P = \operatorname{Coker}\rho = \bigoplus_{q=0}^{\infty} P^{(q)}$ являются градуированными R-модулями, которые аннулируются умножением на X_m, то они фактически являются градуированными $\mathcal{E}[X_1, \cdots, X_{m-1}]$-модулями. По предположению индукции существуют такие многочлены $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$, что $\varphi_1(q) = i\delta(N^{(q)})$, $\varphi_2(q) = i\delta(P^{(q)})$ для всех достаточно больших $q \in \mathbb{N}$ (скажем, при $q \geq q_0$), причем $\deg \varphi_i \leq m-2$, $\varphi_i(t) = \frac{a_i t^{m-2}}{(m-2)!} + o(t^{m-2})$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, 2$). Из точности последовательности (I) вытекает, что $i\delta(M^{(q+1)}) - i\delta(M^{(q)}) = i\delta(P^{(q)}) - i\delta(N^{(q)}) = \varphi_2(q) - \varphi_1(q) = \varphi_3(q)$ для всех достаточно больших $q \in \mathbb{N}$ (здесь $\varphi_3(t) = \frac{(a_2 - a_1)}{(m-2)!} t^{m-2} + o(t^{m-2}) \in \mathbb{Q}[t]$). Таким образом, для всех $q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$ имеем $i\delta(M^{(q)}) = i\delta(M^{(q_0)}) + \sum_{i=q_0}^{q-1} [i\delta(M^{(i+1)}) - i\delta(M^{(i)})] = c_0 + \sum_{i=q_0}^{q-1} \varphi_3(i)$, где $c_0 = i\delta(M^{(q_0)}) \in \mathbb{N}$.

Следовательно (см., например, доказательство теоремы 2.I из [4]), существует многочлен $\varphi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ такой, что $\varphi(q) = i\delta(M^{(q)})$ для всех $q \geq q_0$, причем $\deg \varphi = \deg \varphi_3 + 1 \leq m-1$ и $\varphi(t) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{a_2 - a_1}{(m-2)!} t^{m-1} + o(t^{m-1}) = \frac{a t^{m-1}}{(m-1)!} + o(t^{m-1})$, где $a = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$. Так как $i\delta(M_z) = \sum_{q=0}^{z} i\delta(M^{(q)})$ ($z \in \mathbb{N}$), то существует многочлен $\mu(t) \in \mathbb{Q}[t]$ такой, что $\mu(z) = i\delta(M_z)$ для всех достаточно больших $z \in \mathbb{N}$, причем $\deg \mu \leq m$, и многочлен $\mu(t)$ представим в виде $\mu(t) = \frac{a t^m}{m!} + o(t^m)$, где $a \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Результат, аналогичный теореме 2.I, справедлив и для Δ-F-модулей, снабженных отличной σ-фильтрацией.

Теорема 2.2. Пусть F — $\bar{\Delta}$-поле и пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ — отличная σ-фильтрация конечно-порожденного $\bar{\Delta}$-F-модуля M. Тогда существует многочлен $\nu(t)\in\mathbb{Q}[t]$, обладающий следующими свойствами:

1) $\nu(z)=d(M_z)$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{Z}$;

2) $\deg\nu\le n$ и многочлен $\nu(t)$ может быть представлен в виде

$$\nu(t)=\frac{2^n b}{n!}t^n+o(t^n),\quad \text{где } b\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим градуированное кольцо $gr^\sigma F$, ассоциированное с кольцом $\bar{\Delta}$-операторов F, снабженным стандартной σ-фильтрацией: $gr^\sigma F=\bigoplus_{q=0}^{\infty} gr_q^\sigma F=\bigoplus_{q=0}^{\infty}\left(F_q^\sigma/F_{q-1}^\sigma\right)\cong D\langle X_1,\cdots,X_{2n}\rangle$ $(F_{-1}^\sigma=0)$, где $D\langle X_1,\cdots,X_{2n}\rangle$ — кольцо косых многочленов над кольцом Δ-операторов D над полем F такое, что $X_iA=\bar{\alpha}_i(A)X_i$ при $A\in D$, $1\le i\le n$, и $X_jA=\bar{\alpha}_{j-n}^{-1}(A)X_j$ при $n+1\le j\le 2n$ (здесь $\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n$ — автоморфизмы кольца D такие, что $\bar{\alpha}_k\left(\sum_{i=1}^{p}a_i\theta_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_k(a_i)\theta_i$ для любого Δ-оператора $\sum_{i=1}^{p}a_i\theta_i\in D$ $(k=1,\cdots,n)$), $X_iX_{n+i}=0$ при $i=1,\cdots,n$. (Кольцо $D\langle X_1,\cdots,X_{2n}\rangle$ рассматривается как градуированное с естественной градуировкой по полной степени многочлена.) Градуированный $gr^\sigma F$-модуль, ассоциированный с данным отличной фильтрованным модулем M, имеет вид $gr^\sigma M=\bigoplus_{q=0}^{\infty}gr_q^\sigma M=\bigoplus_{q=0}^{\infty}\left(M_q/M_{q-1}\right)$ $(M_{-1}=0)$. При этом $gr^\sigma M$ является конечно-порожденным градуированным $gr^\sigma F$-модулем (этот факт устанавливается так же, как доказывается соответствующее утверждение для отличных фильтрованных дифференциальных модулей — см. [I, гл.I]). Так как функция $d(\cdot)$ аддитивна на классе всех конечно-порожденных левых D-модулей, то доказательство теоремы 5.I из [4] переносится на рассматриваемый случай и показывает, что существует многочлен $\lambda(t)\in\mathbb{Q}[t]$ такой, что $\lambda(q)=d(gr_q^\sigma M)$ для всех достаточно больших $q\in\mathbb{Z}$, причем $\deg\lambda\le n-1$, и многочлен $\lambda(t)$ представим в виде $\lambda(t)=\frac{2^n b}{(n-1)!}t^{n-1}+o(t^{n-1})$, где $b\in\mathbb{Z}$.

Используя тот факт, что $d(M_r) = \sum_{q=0}^{r} d(gr_q^{\sigma} M)$, получаем (как и при доказательстве теоремы 2.1), что существует многочлен $\nu(t) \in \mathbb{Q}[t]$ такой, что $\nu(r) = d(M_r)$, и многочлен $\nu(t)$ может быть представлен в виде $\nu(t) = \frac{2^n b}{n!} t^n + o(t^n)$, где $b \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2.3. Многочлены $\mu(t)$ и $\nu(t)$, существование которых устанавливают теоремы 2.1 и 2.2, называются соответственно Δ - и σ - размерностными многочленами $\bar{A}$ - F -модуля M, ассоциированными с соответствующей отличной Δ - (σ -) фильтрацией модуля M.

П р и м е р 2.1. Если $M = F$ и $M_r^{\Delta} = F_r^{\Delta}$, $M_r^{\sigma} = F_r^{\sigma}$ ($r \in \mathbb{N}$), то Δ - и σ - размерностные многочлены $\bar{A}$ - F -модуля F равны соответственно: $\mu(t) = \binom{t+m}{m} = \frac{t^m}{m!} + o(t^m)$, $\nu(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^i \binom{n}{i} \binom{t+i}{i} = \frac{2^n t^n}{n!} + o(t^n)$. Действительно, для всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ имеем $\mu(r) = \operatorname{Card} \Theta(r) = \binom{r+m}{m}$ (см. [I, гл.I, §4]) $\nu(r) = \operatorname{Card} \Gamma(r) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^i \binom{n}{i} \binom{r+i}{i}$ (см. [5]).

Пусть F — $\bar{A}$ -поле и M — $\bar{A}$ - F -модуль, снабженный Δ - фильтрацией $(M_r)_{r \in \mathbb{N}}$. Обозначим через $\mathcal{E}[x]$ кольцо многочленов от одной переменной x над кольцом σ-операторов $\mathcal{E}$, через $\tilde{F}$ — подкольцо $\sum_{r \in \mathbb{N}} F_r^{\Delta} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E} x^r$ кольца $F \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}[x]$, а через $\tilde{M}$ — левый $\tilde{F}$-модуль $\sum_{r \in \mathbb{N}} M_r \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E} x^r$. Доказательство следующих пяти лемм аналогично доказательству соответствующих утверждений для инверсных разностных модулей над разностным полем (см. [4, § 5]).

Л е м м а 2.1. При сделанных выше предположениях следующие условия эквивалентны:

(1) модуль $\tilde{M}$ конечно-порожден над кольцом $\tilde{F}$;

(2) существует такое $r_0 \in \mathbb{N}$, что $F_s^{\Delta} M_r = M_{r+s}$ для любых $r \geq r_0$, $s \geq 0$.

Лемма 2.2. Кольца F и $\tilde{F}$ нетеровы слева.

Лемма 2.3. Пусть $i : N \to M$ — инъективный гомоморфизм Δ- или σ-фильтрованных $\bar{\Delta}$-F-модулей. Тогда если фильтрация модуля M отличная, то такова же и фильтрация модуля N.

Лемма 2.4. Пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$, $(M'_z)_{z\in\mathbb{N}}$ — две отличные σ-фильтрации конечно-порожденного $\bar{\Delta}$-F-модуля M. Пусть $\varphi(t)=\frac{at^m}{m!}+o(t^m)$ и $\varphi_1(t)=\frac{a_1t^m}{m!}+o(t^m)$ — Δ-размерностные многочлены модуля M, ассоциированные с Δ-фильтрациями $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$ и $(M'_z)_{z\in\mathbb{N}}$ соответственно. Тогда существует такое число $s\in\mathbb{N}$, что $\varphi(z)\le\varphi_1(z+s)$ и $\varphi_1(z)\le\varphi(z+s)$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{N}$. (Таким образом, $a=a_1$, а степень и старший коэффициент Δ-размерностного многочлена модуля M не зависят от выбора отличной Δ-фильтрации, с которой ассоциирован этот многочлен.)

Лемма 2.5. Пусть $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$, $(M'_z)_{z\in\mathbb{N}}$ — две отличные σ-фильтрации конечно-порожденного $\bar{\Delta}$-F-модуля M. Пусть $\psi(t)=\frac{2^nb}{n!}t^n+o(t^n)$ и $\psi_1(t)=\frac{2^nb_1}{n!}t^n+o(t^n)$ — σ-размерностные многочлены модуля M, ассоциированные с σ-фильтрациями $(M_z)_{z\in\mathbb{N}}$ и $(M'_z)_{z\in\mathbb{N}}$ соответственно. Тогда существует $s\in\mathbb{N}$ такое, что $\psi(z)\le\psi_1(z+s)$ и $\psi_1(z)\le\psi(z+s)$ для всех достаточно больших $z\in\mathbb{N}$. (Таким образом, $b=b_1$, а степень и старший коэффициент σ-размерностного многочлена модуля M не зависят от выбора отличной σ-фильтрации, с которой ассоциирован этот многочлен.)

Замечание. Пусть F — $\bar{\Delta}$-поле и пусть M — конечно-порожденный $\bar{\Delta}$-F-модуль. Тогда на модуле M существуют отличные Δ- и σ-фильтрации (такими будут, например, фильтрации, рассмотренные перед определением 2.2). Из последних двух лемм вытекает, что если $\varphi(t)=\frac{at^m}{m!}+o(t^m)$ и $\psi(t)=\frac{2^nb}{n!}t^n+o(t^n)$ — соответственно Δ- и σ-размерностные многочлены, ассоциированные с ка-

кими-нибудь отличными Δ - и σ - фильтрациями модуля M, то числа $a = \Delta^m \mu(t)$, $b = \frac{\Delta^n \nu(t)}{2^n}$, $p = \deg \mu(t)$, $q = \deg \nu(t)$, $\Delta^p \mu(t)$ и $\Delta^q \nu(t)$ не зависят от выбора таких фильтраций и, следовательно, могут служить характеристиками самого модуля M. (Здесь через $\Delta^i f(t)$ обозначается i - я конечная разность многочлена $f(t)$: $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$, $\Delta^2 f(t) = \Delta(\Delta f(t))$, ... ; легко видеть, что старший коэффициент многочлена $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ степени d имеет вид $\Delta^d f(t)/d!$.) Величины $a = \Delta^m \mu(t)$ и $b = \Delta^n \nu(t)/2^n$ мы будем в дальнейшем обозначать через $\overline{d\delta}(M)$ и $\overline{\delta d}(M)$ соответственно.

Лемма 2.6. Пусть F — $\overline{\Delta}$-поле и $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} P \to 0$ — точная последовательность конечно-порожденных $\overline{\Delta}$ - F -модулей. Тогда $\overline{d\delta}(N) + \overline{d\delta}(P) = \overline{d\delta}(M)$ и $\overline{\delta d}(N) + \overline{\delta d}(P) = \overline{\delta d}(M)$.

Доказательство. Покажем, что справедливо первое равенство (второе устанавливается аналогично). Пусть $x_1, \dots, x_k$ — образующие $\overline{\Delta}$ - F - модуля M. Для каждого $z \in \mathbb{N}$ положим $M_z^\Delta = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}_z^\Delta x_i$, $N_z^\Delta = i^{-1}(i(N) \cap M_z^\Delta)$, $P_z^\Delta = j(M_z^\Delta)$. Как было отмечено выше, $(M_z^\Delta)_{z \in \mathbb{N}}$ — отличная Δ -фильтрация модуля M. Очевидно, что $(P_z^\Delta)_{z \in \mathbb{N}}$ — отличная Δ -фильтрация модуля P, а из леммы 2.3 вытекает, что $(N_z^\Delta)_{z \in \mathbb{N}}$ — отличная Δ - фильтрация модуля N. При этом для каждого $z \in \mathbb{N}$ последовательность конечно-порожденных σ - F - модулей $0 \to N_z^\Delta \xrightarrow{i|N_z^\Delta} M_z^\Delta \xrightarrow{j|M_z^\Delta} P_z^\Delta \to 0$ точна. Пусть $\mu_N(t)$, $\mu_M(t)$, $\mu_P(t)$ — Δ -размерностные многочлены, ассоциированные с фильтрациями $(N_z^\Delta)_{z \in \mathbb{N}}$, $(M_z^\Delta)_{z \in \mathbb{N}}$ и $(P_z^\Delta)_{z \in \mathbb{N}}$ соответственно. Так как инверсная разностная размерность является аддитивной функцией на классе всех конечно-порожденных σ - F -модулей (см. теорему I.2), то $\mu_N(z) + \mu_P(z) = i\delta(N_z^\Delta) + i\delta(P_z^\Delta) = i\delta(M_z^\Delta) = \mu_M(z)$ для всех достаточно больших $z \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mu_N(t) + \mu_P(t) = \mu_M(t)$ откуда вытекает, что $\overline{d\delta}(N) + \overline{d\delta}(P) = \overline{d\delta}(M)$. Лемма доказана.

С помощью леммы 2.6 так же, как и в случае дифференциальных модулей (см. [I, гл.III, § 2]), получается следующий результат.

Лемма 2.7. Пусть F — $\bar{\Delta}$-поле, $\mathcal{F}$ — кольцо $\bar{\Delta}$-операторов над F и M — конечно-порожденный $\bar{\Delta}$-F-модуль. Тогда каждая из величин $\overline{d\delta}(M)$, $\overline{\delta d}(M)$ равна максимальному числу линейно независимых над кольцом $\mathcal{F}$ элементов модуля M. (Таким образом, $\overline{d\delta}(M) = \overline{\delta d}(M) = d\delta(M)$.)

Рассмотрим на кольце $\mathcal{F}$ $\bar{\Delta}$-операторов над $\bar{\Delta}$-полем F двойную последовательность F-подмодулей F-модуля $\mathcal{F}$ вида $(\mathcal{F}_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$, где $\mathcal{F}_{rs} = 0$, если $r<0$ или $s<0$, и $\mathcal{F}_{rs} = \{\sum_{i=1}^{k} a_i\theta_i\gamma_i \in \mathcal{F} \mid \theta_i\in\Theta(r),\ \gamma_i\in\Gamma(s)\ (i=1,\dots,k)\}$, если $r,s\in\mathbb{N}$. Очевидно, что $\bar{\Delta}$-оператор A принадлежит модулю $\mathcal{F}_{rs}$ ($r,s\in\mathbb{N}$) тогда и только тогда, когда $\operatorname{ord}_{\Delta} A \leqslant r$, $\operatorname{ord}_{\sigma} A \leqslant s$.

Определение 2.4. Пусть M — $\bar{\Delta}$-F-модуль. Δ-σ-фильтрацией модуля M называется двойная последовательность $(M_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$ F-подмодулей модуля M, обладающих следующими свойствами:
I) $M_{rs}\subseteq M_{r,s+1}$ и $M_{rs}\subseteq M_{r+1,s}$ для любых $r,s\in\mathbb{Z}$;
2) $\mathcal{F}_{uv}M_{rs}\subseteq M_{r+u,s+v}$ для любых $r,s\in\mathbb{Z}$, $u,v\in\mathbb{N}$;
3) существуют числа $r_1,s_1\in\mathbb{Z}$ такие, что $M_{rs}=0$, как только $s<s_1$ или $r<r_1$; 4) $\bigcup_{r\in\mathbb{Z}}\bigcup_{s\in\mathbb{Z}} M_{rs} = M$.

Определение 2.5. Δ-σ-фильтрация $(M_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$ $\bar{\Delta}$-F-модуля M называется отличной, если каждый модуль M_{rs} ($r,s\in\mathbb{Z}$) конечно-порожден над полем F, и существуют такие числа $r_0\in\mathbb{Z}$, $s_0\in\mathbb{Z}$, что $\mathcal{F}_{uv}M_{rs} = M_{r+u,s+v}$ для любых целых чисел $r\geqslant r_0$, $s\geqslant s_0$, $u\in\mathbb{N}$, $v\in\mathbb{N}$.

Легко видеть, что если M — $\bar{\Delta}$-F-модуль, порожденный конечным семейством элементов $x_1,\dots,x_p$ (так что $M=\sum_{i=1}^{p}\mathcal{F}x_i$), то двойная последовательность $\left(\sum_{i=1}^{p}\mathcal{F}_{rs}x_i\right)_{r,s\in\mathbb{Z}}$ является отличной

Δ - σ -фильтрацией модуля M .

Т е о р е м а 2.3. Пусть F — $\overline{\Delta}$ -поле и пусть $(M_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$ — отличная Δ - σ -фильтрация конечно-порожденного $\overline{\Delta}$ - F -модуля M. Тогда существует многочлен $\Psi(x,y)\in\mathbb{Q}[x,y]$ от двух независимых переменных x и y, обладающий следующими свойствами:

1) $\Psi(r,s)=\dim_F M_{rs}$ для всех достаточно больших $r,s\in\mathbb{Z}$ (т.е. существуют $r_0,s_0\in\mathbb{Z}$ такие, что последнее равенство выполняется при всех $r\geqslant r_0$, $s\geqslant s_0$);

2) $\deg_x\Psi\leqslant m$, $\deg_y\Psi\leqslant n$ и многочлен $\Psi(x,y)$ может быть представлен в виде $\Psi(x,y)=\frac{a}{m!\,n!}x^m y^n+\psi(x,y)$, где $a=d\delta(M)$ и полная степень многочлена $\psi(x,y)$ не превосходит $m+n-1$.

Доказательство. Рассмотрим на $\overline{\Delta}$ - F -модуле M возрастающую последовательность σ - F -подмодулей $(M'_r)_{r\in\mathbb{Z}}$, где $M'_r=\sum_{s\in\mathbb{Z}}M_{rs}$. Очевидно, что при всех достаточно больших $r\in\mathbb{Z}$ $(M_{rs})_{s\in\mathbb{Z}}$ — отличная фильтрация на M'_r. По теореме I.2 существует многочлен $\varphi(y)$ от одной переменной y с рациональными коэффициентами такой, что $\varphi(s)=\dim_F M_{rs}$ для всех достаточно больших $s\in\mathbb{Z}$, причем $\deg\varphi\leqslant n$, многочлен $\varphi(y)$ может быть представлен в виде $\varphi(y)=\frac{i\delta(M'_r)}{n!}y^n+o(y^n)$. Далее, легко видеть, что $(M'_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ является отличной Δ-фильтрацией модуля M. По теореме 2.I существует такой многочлен $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ от одной переменной x, что $f(r)=i\delta(M'_r)$ для всех достаточно больших $r\in\mathbb{Z}$, причем $\deg f\leqslant m$, и многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде $f(x)=\frac{a}{m!}x^m+o(x^m)$, где $a=d\delta(M)$ (см. лемму 2.7). Таким образом, существуют такие числа $r_0,s_0\in\mathbb{N}$, что для всех $r\geqslant r_0$, $s\geqslant s_0$ выполняется соотношение

$$\dim_F M_{rs}=\frac{f(r)}{n!}s^n+o(s^n)=\frac{a}{m!\,n!}r^m s^n+\frac{r^n}{n!}o(r^m)+o(s^n). \qquad (2)$$

Здесь $o(z^m)$ — многочлен от одной переменной z с рациональными коэффициентами (не зависящими от s) степени не выше $m-1$, $o(s^n)$ — многочлен от s степени не выше $n-1$, коэффициенты которого, вообще говоря, зависят от z.

Аналогичным образом, рассматривая возрастающую последовательность Δ - F-подмодулей $M'_s = \sum_{z \in Z} M_{zs}$ модуля M и применяя к этой последовательности теоремы I.1 и 2.2, приходим к соотношению

$$\dim_F M_{zs} = \frac{a\,2^n z^m s^n}{m!\,n!} + \frac{z^m}{m!} o(s^n) + o(z^m), \qquad (3)$$

где $o(s^n)$, $o(z^m)$ — многочлены от переменных s и z, степени которых не превосходят $n-1$ и $m-1$ соответственно, причем коэффициенты многочлена $o(s^n)$ — рациональные числа, а коэффициенты многочлена $o(z^m)$, вообще говоря, зависят от s.

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$\dim_F M_{zs} = \frac{a\,2^n z^m s^n}{m!\,n!} + \frac{2^n s^n}{n!}\left(f_0 z^{m-1} + f_1 z^{m-2} + \dots + f_{m-1}\right) + d_0(z) s^{n-1} +$$

$$+ d_1(z) s^{n-2} + \dots + d_{n-1}(z) = \frac{a\,2^n z^m s^n}{m!\,n!} + \frac{z^m}{m!}\left(c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \dots + c_{n-1}\right) +$$

$$+ b_0(s) z^{m-1} + b_1(s) z^{m-2} + \dots + b_{m-1}(s), \qquad (4)$$

где $f_i, c_j \in \mathbb{Q}$ ($0 \le i \le m-1$, $0 \le j \le n-1$), $d_k(z)$, $b_\ell(s)$ ($0 \le k \le n-1$, $0 \le \ell \le m-1$) — некоторые функции от z и s соответственно. Теперь, чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно, очевидно, показать, что последние функции выражаются многочленами с рациональными коэффициентами соответственно от переменных z и s. Фиксируя произвольное значение $z = z_1 \in \mathbb{N}$, получаем, что достаточно доказать следующее утверждение: если при всех достаточно больших значениях $z = z_1 \in \mathbb{N}$ функция $g(s, z_1) = b_0(s) z_1^{m-1} + b_1(s) z_1^{m-2} + \dots + b_{m-1}(s)$ представляется многочленом с рациональными коэффициентами от s, то так же представляется и каждая из функций $b_0(s), b_1(s), \dots, b_{m-1}(s)$. (В са-

лу равенства (4) из этого утверждения будет следовать утверждение теоремы.) Выберем числа $r_1, r_2, \cdots, r_m \in \mathbb{N}$ такие, что $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_m$. По предположению

$$b_0(s) r_j^{m-1} + b_1(s) r_j^{m-2} + \cdots + b_{m-1}(s) = g_j(s) \quad (j = 1, \cdots, m), \qquad (5)$$

где $g_j(t) \in Q[t]$ ($Q[t]$ — кольцо многочленов от одной переменной t над полем Q). Разрешая систему (5) относительно $b_0(s)$, $b_1(s), \cdots, b_{m-1}(s)$ (определитель системы является определителем Ван-дер-Монда и потому отличен от нуля), получим, что $b_i(s)$ $(0 \leq i \leq m-1)$ выражаются многочленами с рациональными коэффициентами от s. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2.6. Многочлен $\Psi(x, y)$, существование которого устанавливает теорема 2.3, называется Δ-σ-размерностным многочленом $\bar{\Delta}$-F-модуля M, ассоциированным с данной отличной Δ-σ-фильтрацией $(M_{rs})_{r,s \in \mathbb{Z}}$.

П р и м е р 2.2. Если $M = \mathcal{F}$ и этот $\bar{\Delta}$-F-модуль рассматривается вместе с построенной выше отличной Δ-σ-фильтрацией $(\mathcal{F}_{rs})_{r,s \in \mathbb{Z}}$, то соответствующий Δ-σ-размерностный многочлен имеет вид

$$\Psi_{\mathcal{F}}(x, y) = \binom{x+m}{m} \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^i \binom{n}{i} \binom{y+i}{i}.$$

Действительно, для всех достаточно больших $r, s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Psi_{\mathcal{F}}(r, s) = \operatorname{Card} \{\omega = \theta_\gamma \in \Omega \mid \theta \in \Theta(r), \gamma \in \Gamma(s)\} = [\operatorname{Card} Q(r)] \cdot [\operatorname{Card} \Gamma(s)] =$$
$$= \binom{r+m}{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^i \binom{n}{i} \binom{s+i}{i}.$$

Т е о р е м а 2.4. Пусть F — $\bar{\Delta}$-поле, M — $\bar{\Delta}$-F-модуль, снабженный отличной Δ-σ-фильтрацией $(M_{rs})_{r,s \in \mathbb{Z}}$, и N — $\bar{\Delta}$-F-подмодуль модуля M. Тогда $(N \cap M_{rs})_{r,s \in \mathbb{Z}}$ — отличная Δ-σ-фильтрация модуля N.

Доказательство. Так как $N \cap M_{rs}$ — векторное F-подпространство конечно-порожденного векторного F-пространства M_{rs} ($r, s \in \mathbb{Z}$), то $N \cap M_{rs}$ конечно-порождено над полем F. Остается показать, что $\mathcal{F}_{uv} M_{rs} = M_{r+u, s+v}$ для всех достаточно больших $r, s \in \mathbb{Z}$ и любых

$u, v \in \mathbb{N}$. Так как фильтрация $(M_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$ отличная, то существуют $r_0, s_0 \in \mathbb{Z}$ такие, что $\mathcal{F}_{uv} M_{rs} = M_{r+u,s+v}$ для любых $r \geq r_0, s \geq s_0, u \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{N}$. Следовательно, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что $\mathcal{F}_{1,0}(N \cap M_{rs}) = N \cap M_{r+1,s}$ и $\mathcal{F}_{0,1}(N \cap M_{rs}) = N \cap M_{r,s+1}$, т.е. $\mathcal{D}_1(N \cap M_{rs}) = N \cap M_{r+1,s}$ и $\mathcal{E}_1(N \cap M_{rs}) = M_{r,s+1}$ для всех достаточно больших $r, s \in \mathbb{Z}$. Докажем первое из этих соотношений (второе доказывается аналогично). Для каждого $s \geq s_0$ положим $M_s' = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} M_{rs}$. Тогда $(M_{rs})_{r\in\mathbb{Z}}$ является, очевидно, отличной фильтрацией Δ-F-модуля M_s', откуда следует (см. [I, гл.III, §I]), что фильтрация $((N \cap M_s') \cap M_{rs})_{r\in\mathbb{Z}} = (N \cap M_{rs})_{r\in\mathbb{Z}}$ Δ-F-модуля $N \cap M_s'$ также отличная, т.е. существует такое $r_1 \in \mathbb{Z}$, что $\mathcal{D}_1(N \cap M_{rs}) = N \cap M_{r+1,s}$ при всех $r \geq r_1$, $s \geq s_0$. Теорема доказана.

Определение 2.7. Пусть M и N — два $\overline{\Delta}$-F-модуля, снабженные отличными Δ-σ-фильтрациями $(M_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$ и $(N_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Гомоморфизм F-модулей $\varphi: M \to N$ называется гомоморфизмом Δ-σ-фильтрованных модулей, если $\varphi(M_{rs}) \subseteq N_{rs}$ для любых $r, s \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $E_k^{u,v}$ свободный $\overline{\Delta}$-F-модуль ранга k, снабженный Δ-σ-фильтрацией $((E_k^{u,v})_{rs})_{r,s\in\mathbb{Z}}$, где $(E_k^{u,v})_{rs} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}_{r-u,s-v} e_i$ ($e_1, \dots, e_k$ — свободные образующие F-модуля $E_k^{u,v}$; $k, u, v, r, s \in \mathbb{Z}$; $k \geq 1$).

Определение 2.8. Пусть F — $\overline{\Delta}$-поле. Свободным Δ-σ-фильтрованным $\overline{\Delta}$-F-модулем называется прямая сумма Δ-σ-фильтрованных модулей $E_k^{u,v}$ ($u, v, k \in \mathbb{Z}$; $k \geq 1$), описанного выше типа.

Пример 2.8. Если $M = E_k^{u,v}$, то соответствующий этому Δ-σ-фильтрованному $\overline{\Delta}$-F-модулю Δ-σ-размерностный многочлен $\Psi_k^{u,v}(x,y)$ имеет вид $\Psi_k^{u,v}(x,y) = k \binom{x+m-u}{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^i \binom{n}{i} \binom{y+i-v}{i}$,

что сразу следует из примера 2.2. Далее, если $M = E_{K_1}^{u_1,v_1} \oplus \cdots \oplus E_{K_q}^{u_q,v_q}$ — свободный Δ - σ -фильтрованный $\overline{\Delta}$ - F -модуль, то, очевидно, Δ - σ -размерностный многочлен модуля M имеет вид

$$\Psi_M(x,y) = \sum_{j=1}^{q} K_j \binom{x+m-u_j}{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} 2^i \binom{n}{i} \binom{y+i-v_j}{i} . \qquad (6)$$

Определение 2.9. Пусть N — Δ - σ -фильтрованный $\overline{\Delta}$ - F -модуль. Свободной резольвентой модуля N называется точная последовательность Δ - σ -фильтрованных $\overline{\Delta}$ - F -модулей вида $\cdots \to M_p \xrightarrow{d_{p-1}} M_{p-1} \to \cdots \xrightarrow{d_0} M_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \to 0$, в которой все модули M_i ($i = 0, 1, 2, \cdots$) являются свободными Δ - σ -фильтрованными $\overline{\Delta}$ - F -модулями.

Лемма 2.8. Пусть $0 \to M_p \xrightarrow{d_{p-1}} M_{p-1} \to \cdots \xrightarrow{d_0} M_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \to 0$ — свободная резольвента отличнс Δ - σ -фильтрованного $\overline{\Delta}$ - F -модуля N и пусть $\Psi_i(x,y)$ — Δ - σ -размерностный многочлен свободного Δ - σ -фильтрованного $\overline{\Delta}$ - F -модуля M_i ($i = 0, 1, \cdots, p$), а $\chi_N(x,y)$ — Δ - σ -размерностный многочлен модуля N. Тогда

$$\chi_N(x,y) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Psi_i(x,y) . \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $(M_{irs})_{r,s \in \mathbb{Z}}$ — отличная Δ - σ -фильтрация, которой наделен модуль M_i ($i = 0, 1, \cdots, p$), а $(N_{rs})_{r,s \in \mathbb{Z}}$ — отличная Δ - σ -фильтрация, которой наделен модуль N. Так как гомоморфизмы ε и d_i ($i = 0, 1, \cdots, p$) согласованы с фильтрациями, то для любой пары $(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ имеет место точная последовательность векторных F - пространств $0 \to M_{prs} \to M_{p-1,rs} \to \cdots \to M_{0rs} \to N_{rs} \to 0$. Ввиду аддитивности функции $\dim_F(\cdot)$ на классе всех конечно-порожденных векторных F-пространств $\dim_F N_{rs} - \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \dim_F M_{irs} = 0$. Из этого соотношения (с учетом того, что $\chi_N(r,s) = \dim_F N_{rs}$ и $\Psi_i(r,s) = \dim_F M_{irs}$ для всех достаточно больших $r, s \in \mathbb{Z}$) следует, что $\chi_N(x,y) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Psi_i(x,y)$. Лемма доказана.

§ 3. Размерностные многочлены конечно-порожденных расширений $\overline{\Delta}$-полей и систем дифференциально-разностных уравнений

Пусть F — $\overline{\Delta}$-поле нулевой характеристики, $G_1 = F\langle \eta_1, \cdots, \eta_k \rangle_{\overline{\Delta}}$ — $\overline{\Delta}$-расширение поля F, порожденное конечным семейством элементов $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$, и $(G'_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$, $(G''_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ — возрастающие последовательности подполей поля G_1 такие, что $G'_\tau = F\langle \Theta(\tau)\eta_1 \cup \ldots \cup \Theta(\tau)\eta_k \rangle_{\sigma}$, $G''_\tau = F\langle \Gamma(\tau)\eta_1 \cup \ldots \cup \Gamma(\tau)\eta_k \rangle_{\Delta}$ ($\tau = 0, 1, 2, \cdots$).

Т е о р е м а 3.1. При сделанных выше предположениях существуют многочлены $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)$, $\chi^{\sigma}_{\eta|F}(t)$ от одной переменной t с рациональными коэффициентами, обладающие следующими свойствами:

1) $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(\tau) = \delta\, tr.deg_F G'_\tau$, $\chi^{\sigma}_{\eta|F}(\tau) = d\, tr.deg_F G''_\tau$ для всех достаточно больших $\tau \in \mathbb{N}$;

2) $\deg \chi^{\Delta}_{\eta|F} \leqslant m$, $\deg \chi^{\sigma}_{\eta|F} \leqslant n$, причем многочлены $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)$ и $\chi^{\sigma}_{\eta|F}(t)$ могут быть представлены соответственно в виде $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t) = \frac{a t^m}{m!} + o(t^m)$ и $\chi^{\sigma}_{\eta|F}(t) = \frac{a \cdot 2^n}{n!} t^n + o(t^n)$, где $a = d\delta\, tr.deg_F G_1$.

Доказательство. Установим существование многочлена $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)$, обладающего требуемыми свойствами (существование многочлена $\chi^{\sigma}_{\eta|F}(t)$ доказывается аналогично). Обозначим через $Der_F G_1$ векторное G_1-пространство всех F-линейных дифференцирований поля G_1 в себя и рассмотрим в векторном G_1-пространстве $(Der_F G_1)^* = Hom_{G_1}(Der_F G_1, G_1)$ векторное G_1-подпространство $\Omega_F(G_1)$, порожденное всеми отображениями $d\eta$ ($\eta \in G_1$), которые действуют на элементах $D \in Der_F G_1$ по правилу $(d\eta)(D) = D(\eta)$. Из [1, гл. II, §1; 4, лемма 6.1] следует, что векторное G_1-пространство $Der_F G_1$ можно рассматривать как $\overline{\Delta}$-G_1-модуль, на котором элементы $\delta \in \Delta$ и $\alpha \in \sigma^*$ действуют следующим образом: $\delta(D) = \delta \circ D - D \circ \delta$, $\alpha(D) = \alpha \circ D \circ \alpha^{-1}$ для любого $D \in Der_F G_1$. Заметим теперь, что если M и N — два $\overline{\Delta}$-G_1-модуля, то $Hom_F(M, N)$ можно рассматривать как $\overline{\Delta}$-G_1-модуль, если определить действие эле-

ментов из $\Delta \cup \sigma^*$ на $\mathrm{Hom}_F(M,N)$ по следующим правилам: $\delta(f)=\delta\circ f-f\circ\delta$ $\alpha(f)=\alpha\circ f\circ\alpha^{-1}$ ($\delta\in\Delta$, $\alpha\in\sigma^*$, $f\in\mathrm{Hom}_F(M,N)$). Аналогичным образом вводится структура $\bar{\Delta}$ - F -модуля и на $\mathrm{Hom}_G(M,N)$, что позволяет рассматривать $(\mathcal{D}er_F G)^*$ как $\bar{\Delta}$ - G -модуль. При этом $\Omega_F(G)$ становится $\bar{\Delta}$ - G -подмодулем модуля $(\mathcal{D}er_F G)^*$ таким, что $\delta d\eta = d\delta(\eta)$, $\alpha d\eta = d\alpha(\eta)$ для любых элементов $\delta\in\Delta$, $\alpha\in\sigma^*$, $\eta\in G$ (см. [I, гл.II, §I ; 4, лемма 6.I]).

Для каждого $\tau\in\mathbb{N}$ обозначим через $\Omega_F^{\Delta}(G)_\tau$ σ- G -подмодуль модуля $\Omega_F(G)$, порожденный (как левый σ - G -модуль) множеством элементов $\{d\eta \mid \eta\in G'_\tau\}$. Легко видеть, что $(\Omega_F^{\Delta}(G)_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ — отличная Δ -фильтрация $\bar{\Delta}$ - G-модуля $\Omega_F(G)$. По теореме 2.1 существует многочлен $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)\in\mathbb{Q}[t]$ такой, что $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(\tau)=i\delta\left(\Omega_F^{\Delta}(G)_\tau\right)$ для всех достаточно больших $\tau\in\mathbb{N}$, причем $\deg\chi^{\Delta}_{\eta|F}\leqslant m$, и многочлен $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)$ может быть представлен в виде $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)=\frac{a\,t^m}{m!}+o(t^m)$, где $a=d\delta(\Omega_F(G))$ в силу леммы 2.7. Так как $i\delta(\Omega_F^{\Delta}(G)_\tau)=\delta\,\mathrm{tr.deg}_F G'_\tau$ (см. [4, теорема 6.I]), то $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(\tau)=\delta\,\mathrm{tr.deg}_F G'_\tau$ для всех достаточно больших $\tau\in\mathbb{N}$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 3.I. Многочлены $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t)$, $\chi^{\sigma}_{\eta|F}(t)$, существование которых устанавливает теорема 3.I, называются соответственно Δ - и σ- размерностными многочленами $\bar{\Delta}$ -расширения $G=F\langle\eta_1,\dots,\eta_k\rangle_{\bar{\Delta}}$, ассоциированными с системой $\bar{\Delta}$ -образующих $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$.

Т е о р е м а 3.2. Пусть F — $\bar{\Delta}$ -поле нулевой характеристики и $G=F\langle\eta_1,\dots,\eta_k\rangle_{\bar{\Delta}}$ — $\bar{\Delta}$ -расширение поля F , порожденное конечным семейством элементов $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$. Для любых $\tau,s\in\mathbb{N}$ обозначим через $G_{\tau s}$ расширение $F\left(\Theta(\tau)\Gamma(s)\eta_1\cup\dots\cup\Theta(\tau)\Gamma(s)\eta_k\right)$ поля F (т.е. расширение, порожденное семейством элементов $\{\theta\gamma\eta_i \mid 1\leqslant i\leqslant k,\ \theta\in\Theta,\ \gamma\in\Gamma,\ \mathrm{ord}\,\theta\leqslant\tau,\ \mathrm{ord}\,\gamma\leqslant s\}$. Тогда существует многочлен $\Phi_{\eta|F}(x,y)$ от двух независимых переменных x, y с рациональными коэффициентами,

обладающий следующими свойствами:

1) $\Phi_{\eta|F}(r,s) = tr\deg_F G_{rs}$ для всех достаточно больших $r, s \in \mathbb{N}$ (т.е. существуют числа $r_0 \in \mathbb{N}$, $s_0 \in \mathbb{N}$ такие, что последнее равенство справедливо при всех $r \geqslant r_0$, $s \geqslant s_0$);

2) $\deg_x \Phi_{\eta|F}(x,y) \leqslant m$, $\deg_y \Phi_{\eta|F}(x,y) \leqslant n$, многочлен $\Phi_{\eta|F}(x,y)$ может быть представлен в виде $\Phi_{\eta|F}(x,y) = \frac{a 2^n x^m y^n}{m!\, n!} + \varphi_{\eta|F}(x,y)$, где $a = d\delta tr\deg_F G$, а полная степень многочлена $\varphi_{\eta|F}(x,y)$ не превосходит $m+n-1$.

Доказательство. Как и выше, для любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ рассмотрим σ-расширение $G'_r = F\langle \Theta(r)\eta_1 \cup \dots \cup \Theta(r)\eta_k \rangle_\sigma$ и Δ-расширение $G''_s = F\langle \Gamma(s)\eta_1 \cup \dots \cup \Gamma(s)\eta_k \rangle_\Delta$ поля F. Применяя к последовательности подрасширений $(G_{rs})_{r \in \mathbb{N}}$ Δ-расширения $G''_s \supseteq F$ теорему Колчина о дифференциальном размерностном многочлене (см. [6, гл. II, §12, теорема 6]), получаем, что существует многочлен $\psi(x)$ от одного переменного x с рациональными коэффициентами такой, что $\psi(r) = tr\deg_F G_{rs}$ для всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$, причем $\deg \psi \leqslant m$, и многочлен $\psi(x)$ может быть представлен в виде $\psi(x) = \frac{\lambda x^m}{m!} + o(x^m)$, где $\lambda = d\, tr\deg_F G''_s$. Далее, в силу теоремы 3.1 величина $\lambda = \lambda(s)$ сама выражается некоторым многочленом с рациональными коэффициентами: существует многочлен $\chi(y) \in \mathbb{Q}[y]$ от одного переменного y такой, что $\chi(s) = d\, tr\deg_F G''_s = \lambda(s)$ для всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$, причем $\deg \chi \leqslant n$, и многочлен $\chi(y)$ может быть представлен в виде $\chi(y) = \frac{a 2^n}{n!} y^n + o(y^n)$, где $a = d\delta tr\deg_F G$. Таким образом, существуют такие числа $r_0, s_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $r \geqslant r_0$, $s \geqslant s_0$ выполняется соотношение $tr\deg_F G_{rs} = \frac{\chi(s)}{m!} r^m + o(r^m) = \frac{r^m}{m!}\left(\frac{a 2^n}{n!} s^n + o(s^n)\right) + o(r^m) = \frac{a 2^n}{m!\, n!} r^m s^n + \frac{r^m}{m!} o(s^n) + o(r^m)$. Здесь $o(s^n) = c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \dots + c_{n-1}$ $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Q})$, а $o(r^m)$ — многочлен от r степени не выше $m-1$, коэффициенты кото-

рого, вообще говоря, зависят от s : $o(z^m) = b_0(s)z^{m-1} + b_1(s)z^{m-2} + \cdots + b_{m-1}(s)$ где $b_i(s)$ — некоторые функции от s ($i = 0, 1, \cdots, m-1$). Таким образом,

$$tr\,deg_F\, G_{zs} = \frac{a^2 n z^m s^n}{m!\,n!} + \frac{z^m}{m!}\left(c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\right) +$$

$$+ \left[b_0(s) z^{m-1} + b_1(s) z^{m-2} + \cdots + b_{m-1}(s) \right]. \qquad (8)$$

Аналогично, рассматривая $(G_{zs})_{s\in\mathbb{N}}$ как последовательность подрасширений σ-расширения $G'_z \supseteq F$, получаем с помощью теоремы 7.I из [4] и теоремы 3.I

$$tr\,deg_F\, G_{zs} = \frac{a^2 n z^m s^n}{m!\,n!} + \frac{s^n}{n!}\left(f_0 z^{m-1} + f_1 z^{m-2} + \cdots + f_{m-1}\right) +$$

$$+ \left[d_0(z) s^{n-1} + d_1(z) s^{n-2} + \cdots + d_{n-1}(z) \right]. \qquad (9)$$

(Здесь $f_0, f_1, \cdots, f_{m-1} \in Q$, а $d_0(z), d_1(z), \cdots, d_{n-1}(z)$ — некоторые функции от z .) Теперь с помощью тех же рассуждений, которые были использованы при доказательстве теоремы 2.3, получаем, что из соотношений (8) и (9) вытекает существование многочлена $\Phi_{\eta|F}(x,y)$ с требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Отметим, что каждая из теорем 3.I, 3.2 является обобщением как упомянутой выше теоремы Колчина о дифференциальном размерностном многочлене, так и аналогичной теоремы о разностном размерностном многочлене (см. [4, теорема 7.I]).

О п р е д е л е н и е 3.2. Многочлен $\Phi_{\eta|F}(x,y)$, существование которого устанавливает теорема 3.2, называется Δ - σ -размерностным многочленом $\overline{\Delta}$ -расширения $G = F\langle \eta_1, \cdots, \eta_k \rangle_{\overline{\Delta}}$, ассоциированным с системой $\overline{\Delta}$ -образующих $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$.

Рассмотрим систему алгебраических дифференциально-разностных (т.е. $\overline{\Delta}$ -) уравнений с коэффициентами из $\overline{\Delta}$-поля F :

$$f_i(y_1, \cdots, y_k) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, s), \qquad (10)$$

где $f_i(y_1, \cdots, y_k) \in F\{y_1, \cdots, y_k\}_{\overline{\Delta}}$ ($1 \le i \le s$). (Число уравнений системы можно всегда считать конечным, так как для кольца $\overline{\Delta}$ -многочленов $F\{y_1, \cdots, y_k\}_{\overline{\Delta}}$ справедлива теорема о базисе — см. [7].)

О п р е д е л е н и е 3.3. Система $\overline{\Delta}$-уравнений (I0) называется простой, если $\overline{\Delta}$-идеал $P=[f_1(y_1,\cdots,y_K),\cdots,f_s(y_1,\cdots,y_K)]$, порожденный в кольце $F\{y_1,\cdots,y_K\}_{\overline{\Delta}}$ $\overline{\Delta}$-многочленами $f_1,\cdots,f_s$, является простым.

З а м е ч а н и е. Отметим, что простой является любая система линейных однородных дифференциально-разностных уравнений (это показывается так же, как и для системы алгебраических дифференциальных уравнений — см. [6, гл. IУ, §5]).

Предположим, что система (I0) простая. Положим $R=F\{y_1,\cdots,y_K\}_{\overline{\Delta}}$ и обозначим через G $\overline{\Delta}$-поле частных фактор-кольца R/P (как и выше, $P=[f_1,\cdots,f_s]$), а через η_i — образ элемента y_i в поле G ($i=1,\cdots,K$). Тогда $G=F\langle\eta_1,\cdots,\eta_K\rangle_{\overline{\Delta}}$ и с этим $\overline{\Delta}$-расширением, порожденным конечным семейством образующих $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_K)$, ассоциированы в силу теорем 3.I и 3.2 Δ- и σ- размерностные многочлены $\chi^{\Delta}_{\eta|F}(t),\ \chi^{\sigma}_{\eta|F}(t)\in Q[t]$, а также Δ-σ-размерностный многочлен $\Phi_{\eta|F}(x,y)\in Q[x,y]$. Эти многочлены мы будем называть соответственно Δ-, σ- и Δ-σ- размерностными многочленами простой системы алгебраических дифференциально-разностных уравнений (I0). Отметим, что последний из этих многочленов можно естественным образом рассматривать как "меру жесткости" системы $\overline{\Delta}$-уравнений (I0) по аналогии с тем, как дифференциальный размерностный многочлен рассматривается в [8] в качестве дифференциально-алгебраического варианта введенного А.Эйнштейном [9] понятия "меры жесткости" системы дифференциальных уравнений, описывающих физическое поле.

Задача вычисления многочлена $\Phi_{\eta|F}(x,y)$ (представляющая, в связи с вышесказанным, интерес не только для изучения алгебраических $\overline{\Delta}$-структур, но и для анализа систем дифференциально-разностных уравнений математической физики) может быть решена с помощью построения свободной резольвенты $\overline{\Delta}$-модуля дифференциалов $\Omega_F(G)$, ассо-

ципированного с $\bar{\Delta}$-расширением $G = F\langle \eta_1, \cdots, \eta_k \rangle_{\bar{\Delta}}$. Действительно, если $0 \to M_p \xrightarrow{d_{p-1}} M_{p-1} \to \cdots \xrightarrow{d_0} M_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_F(G) \to 0$ — такая резольвента, то (см. лемму 2.8 и теорему 3.2) $\Phi_{\gamma_{IF}}(x,y) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Psi_i(x,y)$, где $\Psi_i(x,y)$ — Δ-σ-размерностный многочлен свободного Δ-σ-фильтрованного $\bar{\Delta}$-G-модуля M_i, который может быть найден по формуле (6).

Пример 3.1. Назовем $\bar{\Delta}$-оператор A над $\bar{\Delta}$-полем F симметричным тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если запись оператора A вида $A = P_1 \alpha_1^{k_{11}} \cdots \alpha_n^{k_{1n}} + \cdots + P_t \alpha_1^{k_{t1}} \cdots \alpha_n^{k_{tn}}$, где $P_i \in \mathcal{D}$, $P_i \neq 0$ и $(k_{i1}, \cdots, k_{in}) \neq (k_{j1}, \cdots, k_{jn})$ при $i \neq j$ ($1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t$), содержит слагаемое $P \alpha_1^{\ell_1} \cdots \alpha_n^{\ell_n}$ ($P \in \mathcal{D}$, $P \neq 0$), то в эту запись входят с ненулевыми коэффициентами и все остальные $2^n - 1$ слагаемые вида $P' \alpha_1^{\pm \ell_1} \cdots \alpha_n^{\pm \ell_n}$ (при всевозможных комбинациях знаков перед $\ell_1, \cdots, \ell_n$). Очевидно, что если из двух $\bar{\Delta}$-операторов A и B хотя бы один симметричен, то $ord_\sigma(AB) = ord_\sigma(BA) = ord_\sigma A + ord_\sigma B$.

Рассмотрим $\bar{\Delta}$-уравнение вида

$$A_1 y_1 + \cdots + A_k y_k = 0, \qquad (11)$$

где $A_1, \cdots, A_k$ — симметричные $\bar{\Delta}$-операторы над Δ-полем F. Положим $p_i = ord_\Delta A_i$, $q_i = ord_\sigma A_i$ ($i = 1, \cdots, k$) и пусть $p = \max_{1 \leq i \leq k} p_i$, $q = \max_{1 \leq i \leq k} q_i$. Построение свободной резольвенты ассоциированного модуля дифференциалов $\Omega_F(G)$ с помощью коротких точных последовательностей приводит к точной последовательности вида

$$0 \to E_1^{p,q} \xrightarrow{d_0} E_1^{0,0} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_F(G) \to 0$$

(обозначения те же, что в примере 2.3), так что Δ-σ-размерностный многочлен уравнения (11) имеет вид $\Phi_{\gamma_{IF}}(x,y) = \binom{x+1}{1} \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} 2^i \binom{1}{i} \binom{y+i}{i} - \binom{x+1-p}{1} \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} 2^i \binom{1}{i} \binom{y+i-q}{i} = 2qx + 2py + 2q + p - 2pq$.

Пример 3.2. Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию системы дифференциальных уравнений, описывающей упругие поперечные колебания тонкого стержня (см. [10, гл.II, §II.I, (II.3)]) при помощи замены частной производной $\frac{\partial}{\partial t}$ соответствующей центральной разностной производной, отвечающей разностной сетке с достаточно малым шагом h. Такая аппроксимация приводит к следующей системе $\bar{\Delta}$-уравнений:

$$\begin{cases} a(\alpha-\alpha^{-1})y_1+\delta^2 y_2=0, \\ \delta^2 y_1 - a(\alpha-\alpha^{-1})y_2=0 \end{cases} \qquad (12)$$

($a\in\mathbb{R}$). Здесь $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, рассматриваемое с нулевым дифференцированием δ и тождественным автоморфизмом α ($\bar{\Delta}=\langle\delta,\alpha\rangle$), $G=F\langle\eta_1,\eta_2\rangle_{\bar{\Delta}}$ — $\bar{\Delta}$-поле частных $\bar{\Delta}$-кольца $F\{y_1,y_2\}_{\bar{\Delta}}/[a(\alpha-\alpha^{-1})y_1+\delta^2 y_2,\ \delta^2 y_1-a(\alpha-\alpha^{-1})y_2]$. Свободная резольвента соответствующего модуля дифференциалов имеет вид

$$0\to E_2^{2,1}\xrightarrow{d_0} E_2^{0,0}\xrightarrow{\varepsilon}\Omega_F(G)\to 0,$$

а Δ_σ-размерностный многочлен системы (12) определяется формулой (7):

$$\Phi_{\eta|F}(x,y)=2\binom{x+1}{1}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{1-i}2^i\binom{1}{i}\binom{y+i}{i}-$$
$$-2\binom{x+1}{1}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{1-i}2^i\binom{1}{i}\binom{y+i-1}{i}=4x+8y.$$

Литература

1. Johnson J. Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules// Amer. J. Math. 1969. V. 91, N 1. P. 239-248.
2. Левин А.Б. Характеристические многочлены инверсных разностных модулей и некоторые свойства инверсной разностной размерности// Успехи матем. наук. 1980. Т.35, №1. С.201-202.
3. Джавадов Г.А. Характеристический многочлен Гильберта для дифференциально-разностных модулей и его применение. Баку, 1979. 40с.

Деп. в ВИНИТИ 6.06.1979, № 1992-79.

4. Лезин А.Б. Характеристические многочлены разностных модулей и некоторые свойства разностной размерности. М.,1980.42с. Деп. в ВИНИТИ 30.05.1980, № 2175-80.

5. Балаба И.Н. Размерностные многочлены расширения разностных полей// Вестн. МГУ. Мат.,мех. 1984. № 2. С.31-35.

6. Kolchin E.R. Differential algebra and algebraic groups. New-York - London : Acad. Press, 1973.

7. Cohn R. M. A difference - differential basis theorem // Can. J. Math. 1970. V.22, №6. P.1224 - 1237.

8. Михалев А.В., Панкратьев Е.В. Дифференциальный размерностный многочлен системы дифференциальных уравнений // Алгебра. М., МГУ,1980. С.57-67.

9. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т.2. Работы по теории относительности. 1921-1955. М.: Наука,1966, С. 777-786.

10. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.

О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В.М.Мисяков

Напомним, что произвольную абелеву группу A называют сепарабельной, если любое конечное множество ее элементов можно вложить в прямое слагаемое S группы A, являющееся прямой суммой групп ранга I (под группой ранга I понимают группу, изоморфную подгруппе группы Q или подгруппе некоторой группы $Z(p^{\infty})$ [2] .

Так как вопрос о сепарабельности произвольной абелевой группы сводится к вопросу о сепарабельности ее редуцированной части, то в данной работе рассмотрим только редуцированные группы.

Основной вопрос, который решается здесь, это получить необходимые и достаточные условия сепарабельности прямого произведения произвольных редуцированных абелевых групп.

Необходимо заметить, что данная проблема для векторных групп была решена в работе Мишиной А.П. [3] .Для прямого произведения произвольных групп без кручения ответ на него был получен недавно Альбрехтом и Хиллом в [5] .Независимо от них в 1986 г. подобное описание получили Хаут Ю.Б. и Росошек С.К. (работа не опубликована).

Все обозначения и терминология, применяемые в данной статье, взяты из [I и 2] .

Перед доказательством основной теоремы докажем вспомогательный результат.

Лемма I. Если прямое произведение редуцированных групп G_i, $i\in J$, является сепарабельной группой, то $T(\prod_{i\in J} G_i) = \prod_{i\in J} T(G_i)$.

Доказательство. Допустим противное, то есть пусть $T(\prod_{i\in J} G_i) \neq \prod_{i\in J} T(G_i)$.Тогда группа $\prod_{i\in J} T(G_i)$ содержит элемент $g=(\dots,g_i,\dots)$ такой, что $O(g)=\infty$.Так как для любого $i\in J$ $T(G_i)$ -сепарабельная группа (как периодическая часть сепарабельной группы), то каждый элемент g_i, $i\in J$, можно вложить во вполне разложимое

ограниченное прямое слагаемое A_i группы $T(G_i)$. Каждая группа A_i, $i \in J$, будет выделяться в группе G_i прямым слагаемым (как ограниченная сервантная подгруппа группы G_i), поэтому $\prod_{i\in J} G_i = \prod_{i\in J} B_i \oplus \prod_{i\in J} A_i$, где $B_i \oplus A_i = G_i$ для любого $i \in J$. Так как группы A_i, $i \in J$, в совокупности не ограничены, то в группе $\prod_{i\in J} A_i$ будет существовать элемент a такой, что $O(a) = \infty$. Группа $\prod_{i\in J} A_i$ как прямое слагаемое сепарабельной группы будет сепарабельной группой [4], значит, элемент a можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое F конечного ранга группы $\prod_{i\in J} A_i$. То есть $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_k \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_n$, где $F_1, \dots, F_k$ – группы без кручения ранга 1, а $T_1, \dots, T_n$ – циклические примарные группы. Так как каждая группа A_i $i \in J$ – алгебраически компактна, то, как следует из [1, следствие 38.3], $\prod_{i\in J} A_i$ будет алгебраически компактной группой. Группы $F_1, \dots, F_k$ как прямые слагаемые алгебраически компактной группы также будут алгебраически компактными группами без кручения. Но это невозможно, так как единственными неразложимыми алгебраически компактными группами без кручения являются группы J_p, которые имеют ранг $2^{\aleph_0}$.

Теорема 2. Прямое произведение редуцированных групп G_i, $i \in J$, является сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для любого $i \in J$ G_i – сепарабельная группа;

2) существует конечное подмножество $J \subset J$ такое, что группы $T(G_i)$, $i \in J \setminus J$, в совокупности ограничены;

3) $\prod_{i\in J\setminus J}(G_i / T(G_i))$ – сепарабельная группа.

Доказательство. Необходимость. Выполнение условия 1) следует из [4]. Докажем справедливость условий 2) и 3). Так как $\prod_{i\in J} G_i$ – сепарабельная группа, то согласно лемме 1 $T(\prod_{i\in J} G_i) = \prod_{i\in J} T(G_i)$. Из этого равенства следует, что для почти всех $i \in J$ группы $T(G_i)$, $i \in J$, в совокупности ограничены, то есть существует конечное подмножество $J \subset J$ такое, что $\prod_{i\in J} G_i = \bigoplus_{i\in J} G_i \oplus \prod_{i\in J\setminus J}(A_i \oplus T(G_i))$, где для любого $i \in J \setminus J$ $A_i \cong G_i / T(G_i)$. Тогда $\prod_{i\in J} G_i = \bigoplus_{i\in J} G_i \oplus \prod_{i\in J\setminus J} A_i \oplus \prod_{i\in J\setminus J} T(G_i)$ и, как следует из [4], $\prod_{i\in J\setminus J} A_i$ – сепарабельная группа.

Достаточность. Пусть существует конечное подмножество J множества J, что выполняются условия 2) и 3) данной теоремы, тогда $\prod_{i\in J} G_i = \bigoplus_{i\in J} G_i \oplus \prod_{i\in J\setminus J} A_i \oplus \prod_{i\in J\setminus J}(G_i)$, где для любого $i \in J \setminus J$ $A_i \cong G_i / T(G_i)$. Так как группы $T(G_i)$, $i \in J \setminus J$, в совокупности ограничены, то $\prod_{i\in J\setminus J} T(G_i)$ – ограниченная группа, а значит – сепарабельная. Группа $\prod_{i\in J} G_i$ является прямой суммой сепарабельных групп: $\bigoplus_{i\in J} G_i$, $\prod_{i\in J\setminus J}(A_i$, $\prod_{i\in J\setminus J} T(G_i)$, где для любого $i \in J \setminus J$ $A_i \cong G_i / T(G_i))$, и поэтому сама будет сепарабельной.

Учитывая то, что в работе [5] были получены необходимые и достаточные условия сепарабельности прямого произведения произвольных групп без кручения, и заменяя условие 3) предыдущей теоремы эквивалентными ему условиями из [5], получим

Следствие 3. Прямое произведение произвольных редуцированных групп G_i, $i \in I$, является сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для любого $i \in I$ G_i – сепарабельная группа;
2) существует конечное подмножество $J \subset I$ такое, что группы $T(G_i)$, $i \in I \setminus J$, в совокупности ограничены;
3) группа $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, где $\Lambda = I \setminus J$, $A_\lambda \cong G_\lambda / T(G_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Lambda$), удовлетворяет следующим условиям:
   а) не существует бесконечной строго убывающей цепочки типов $\tau_{\lambda(n)} \in \tau(A_{\lambda(n)})$, где $\tau(A_{\lambda(n)})$ – множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы $A_{\lambda(n)}$ и все $\lambda(n)$ различны для разных n;
   б) не существует бесконечной последовательности типов $\tau_{\lambda(n)} \in \tau(A_{\lambda(n)})$, в которой типы попарно несравнимы между собой, а все $\lambda(n)$ различны для разных n;
   в) для любого $\lambda \in \Lambda$ и $\tau_\lambda \in \tau(A_\lambda)$ существует конечное подмножество P_0 множества P всех простых чисел, для которых выполнено: если $\mu \in \Lambda \setminus \Lambda_0$, $p \in P \setminus P_0$, $\tau_\lambda \leq \tau_\mu$ ($\tau_\mu \in \tau(A_\mu)$) и p / τ_λ, то p^∞ / τ_μ.

Здесь p / τ_λ (соответственно p^∞ / τ_λ) означает, что в некоторой заранее фиксированной характеристике типа τ_λ на месте, соответствующем простому числу p, стоит не 0 (стоит ∞).

Литература

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416с.
3. Мишина А.П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Матем. сб. 1962. Т. 57, №3. С. 375-383.
4. Megibben C.K. Separable mixed groups Comment. // Math. Univ. Carol. 1980. V. 21. №4. P. 755-768.
5. Albrecht U., Hill P. Separable vector groups // Contemp. Math. 1989. №87. P. 155-160.

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ СЧЕТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ГРУППАМИ РАСШИРЕНИЙ

А. И. Москаленко

В монографии Л. Фукса "Бесконечные абелевы группы" сформулирована проблема: как связаны между собой группы C и C', если $Ext(C,A) \cong Ext(C',A)$ для любой группы A [1, проблема 43]. В данной работе в предположении, что справедлива гипотеза континуума, доказано, что счетная периодическая абелева группа C конечной ульмовской длины определяется группами расширений $Ext(C,A)$ с точностью до свободного прямого слагаемого.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группы X, Y назовем эквивалентными ($X \sim Y$), если для любой группы A имеет место изоморфизм

$$Ext(X,A) \cong Ext(Y,A).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $X \sim Y$. Тогда выполняются следующие условия:

1) максимальные периодические подгруппы групп X и Y эквивалентны ($tX \sim tY$);

2) если X - периодическая группа, то $Y \cong tY \oplus F$, где F - свободная группа;

3) если X - периодическая группа, то p-примарные компоненты X_p и Y_p групп X и Y соответственно эквивалентны для любого простого p.

Доказательство. 1) Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to tX \xrightarrow{i} X \to X/tX = \bar{X} \to 0.$$

Для любой группы A точна последовательность

$$Ext(\bar{X},A) \xrightarrow{i^*} Ext(X,A) \to Ext(tX,A) \to 0.$$

Так как $Ext(\bar{X},A)$ - делимая группа, а $Ext(tX,A)$ - редуцированная, то

$$Ext(X,A) \cong Im\, i^* \oplus Ext(tX,A),$$

причем второе слагаемое - редуцированная часть группы $Ext(X,A)$, и, следовательно,

$$Ext(tX,A) \cong Ext(tY,A)$$

для любой группы A.

2) Рассмотрим точную последовательность

$$E:\ 0 \to tY \to Y \xrightarrow{\sigma} \bar{Y} \to 0$$

и соответствующую ей точную последовательность

$$Hom(tY,A) \xrightarrow{E^*} Ext(\bar{Y},A) \xrightarrow{\sigma^*} Ext(Y,A) \to Ext(tY,A) \to 0.$$

Так как $Ext(\bar{Y},A)$ - делимая группа, а $Ext(Y,A)$ - редуцированная, то $Im\,E^* = Ker\,\sigma^* = Ext(\bar{Y},A)$. Если A - группа без кручения, то $Hom(tY,A) = 0$, следовательно, $Ext(\bar{Y},A) = 0$. Если A - произвольная группа, то для некоторой свободной группы имеем точную последовательность

$$F \xrightarrow{\varphi} A \to 0.$$

Тогда точна последовательность

$$Ext(\bar{Y},F) \xrightarrow{\varphi_*} Ext(\bar{Y},A) \to 0,$$

и так как $Ext(\bar{Y},F) = 0$, то $Ext(\bar{Y},A) = 0$. Таким образом, для любой группы A имеем $Ext(\bar{Y},A) = 0$, следовательно, $\bar{Y}$ - свободная группа.

3) Разложение $\bar{X} = \bigoplus_p X_p$ влечет изоморфизм

$$Ext(X,A) \cong \prod_p Ext(X_p, A).$$

Так как $Ext(X,A)$ - копериодическая группа, $Ext(X_p,A)$ - p-адическая копериодическая группа, то такое представление в виде прямого произведения определяется однозначно. Следовательно,

$$Ext(X_p,A) \cong Ext(Y_p,A)$$

для любого p. В частности, если X - p-примарная группа, то tY - также p-примарная группа.

Так как в дальнейшем рассматривается периодическая группа X,

то можно без потери общности рассуждения считать, что группа Y, эквивалентная группе X, также периодическая, более того, можно ограничиться случаем, когда обе они p-примарны.

Обозначим $X[p^n]$ – множество всех элементов группы X, порядки которых не превосходят p^n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X, Y – эквивалентные p-примарные группы. Тогда, в предположении истинности обобщенной континуум-гипотезы, $X[p^n] \cong Y[p^n]$ для любого целого неотрицательного n.

Доказательство. Пусть

$$X[p^n] = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\tau_i} \mathbb{Z}(p^i), \quad Y[p^n] = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{t_i} \mathbb{Z}(p^i).$$

Тогда [1, с.259]

$$Ext(X, \mathbb{Z}(p^n)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \prod_{\tau_i} Ext(\mathbb{Z}(p^i), \mathbb{Z}(p^n)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \prod_{\tau_i} \mathbb{Z}(p^i)$$

и аналогично

$$Ext(Y, \mathbb{Z}(p^n)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \prod_{t_i} \mathbb{Z}(p^i).$$

Отсюда, в предположении истинности обобщенной континуум-гипотезы, получаем, что $\tau_i = t_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

Все дальнейшие утверждения доказываются в предположении истинности предложения 2 и, следовательно, в предположении истинности обобщенной континуум-гипотезы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если X, Y – эквивалентные p-примарные группы, то их инварианты Ульма – Капланского f_n совпадают для всех $n < \omega$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый изоморфизм

$$\alpha: X[p^{n+2}] \to Y[p^{n+2}].$$

Легко проверить, что α индуцирует изоморфизм $p^m X[p]$ на $p^m Y[p]$ для любого $m < n+2$. Отсюда следует, что α индуцирует изоморфизм

$$p^n X[p] / p^{n+1} X[p] \cong p^n Y[p] / p^{n+1} Y[p].$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Если X, Y – эквивалентные p-примарные группы, то их базисные подгруппы изоморфны и длинные ранги равны.

Доказательство. Изоморфизм базисных подгрупп следует из совпадения инвариантов Ульма – Капланского групп X и Y. Так как

$$\operatorname{fin} r(A) = \inf_n r(p^n X), \; p^n X[p] \cong p^n Y[p],$$

$r(p^n X) = r(p^n Y)$ для любого n. Следовательно, финальные ранги групп X и Y равны.

Следующий факт, по-видимому, является фольклорно известным.

ЛЕММА 5. Пусть G – произвольная группа. Тогда существует такая группа A, что $A^1 = G$ и A/A^1 – алгебраически компактная группа.

Доказательство. Можно найти такую группу H, что $H^1 \cong G$ [I, упр. II, с. 185]. Действительно, если G – бесконечная или p-примарная циклическая группа, то можно построить H такую, что G – подгруппа всех элементов бесконечной p-высоты в H (см., например, [I, с. 177]. Пусть G – произвольная группа и B_p – ее p-базисная подгруппа, $B_p = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$. Обозначим $K_p = \bigoplus_{i \in I} S_i$, где $S_i = \langle a_i \rangle$ – подгруппа всех элементов бесконечной p-высоты S_i. Существует такая группа H_p, что коммутативна следующая диаграмма, строки и столбцы которой точны:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 \downarrow & & 0 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & K_p & \longrightarrow & K_p/B_p \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H_p & \longrightarrow & K_p/B_p \longrightarrow 0 \end{array}$$

Так как G/B_p – p-делимая группа и каждый элемент из B_p имеет бесконечную p-высоту в K_p и, следовательно, в H_p, а H_p/G – группа без элементов бесконечной p-высоты, то G – подгруппа всех элементов бесконечной p-высоты в H.

Рассмотрим прямую сумму H_p по всем простым p с объединенной подгруппой G, т.е. группу $H = (\bigoplus_p H_p)/M$, где M состоит из всех элементов, у которых каждая координата принадлежит G и сумма всех координат равна 0. Легко проверить, что H содержит подгруппу $G_1 = \{(g, 0, \ldots, 0, \ldots) + M \mid g \in G\}$, изоморфную G, любой элемент из G_1 имеет бесконечную высоту в H, так как $H/G_1 \cong \bigoplus_p (H_p/G)$, H/G_1 не содержит элементов бесконечной высоты. Будем считать, что G_1 – подгруппа группы H и $G = H^1$. Имеем точную последовательность

$$0 \to H_0 = H/G \to \hat{H}_0 \to \hat{H}_0/H_0 \to 0,$$

где $\hat{H}_0$ – пополнение H_0 в $\mathbb{Z}$-адической топологии. Ей соответствует точная последовательность

$$Ext(\hat{H}_0/H_0, G) \to Ext(\hat{H}_0, G) \to Ext(H_0, G) \to 0.$$

Следовательно, существует расширение A группы G при помощи $\hat{H}_0$

такое, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G & \to & H & \to & H_0 & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & G & \to & A & \to & \hat{H}_0 & \to & 0 . \end{array}$$

Легко видеть, что $A^1 = G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если X , Y – эквивалентные примарные группы, X не более чем счетна, то $X^n \sim Y^n$ и $X_n \cong Y_n$ для любого целого неотрицательного n .

Доказательство. Из следствия 4 вытекает, что Y также не более чем счетная группа, поэтому все ульмовские факторы X и Y – прямые суммы циклических групп. Для любой группы A имеем точную последовательность [I , с. 285]:

$$0 \to Ext(X^1, A^1) \to Pext(X, A) \to Hom(X^1, \hat{A}_0/A_0) \to 0.$$

Выберем A так, чтобы $A^1 = G$, где G – любая заданная группа, $A_0 = A/A^1$ – алгебраически компактная группа. Тогда $\hat{A}_0/A_0 = 0$ и

$$Ext(X^1, G) \cong Pext(X, A) \cong Pext(Y, A) \cong Ext(Y^1, G).$$

Отсюда следует, что $X^1 \sim Y^1$. Так как группы X^1 , Y^1 не более чем счетны, то для них также получим $X^2 \sim Y^2$ и т.д.

Группа $X_0 = X/X^1$ – прямая сумма циклических групп и поэтому $X_0 \cong B$, где B – базисная подгруппа X . По следствию 4 получаем $X_0 \cong Y_0$. Так как $X^1 \sim Y^1$, то аналогично получаем $X_1 = X^1/X^2 \cong Y^1/Y^2 = Y_2$ и т.п.

ТЕОРЕМА 7. Если X , Y – эквивалентные p-примарные группы, X – счетная группа конечной ульмовской длины, то $X \cong Y$.

Доказательство. Пусть

$$X \supsetneq X^1 \supsetneq X^2 \supsetneq \cdots \supsetneq X^n = X^{n+1}.$$

Тогда $X^n \sim Y^n$ и по следствию 4 отсюда следует, что Y^n – делимая группа и $X^n \cong Y^n$. Следовательно, ульмовская длина Y не превосходит n . В силу симметричности отношения эквивалентности групп ульмовская длина Y равна n . Так как X/X^n и Y/Y^n имеют изоморфные ульмовские факторы, то они изоморфны. Таким образом, $X \cong Y$.

Литература

I. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т.I. 335 с.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 2 С НЕСКАЛЯРНЫМ АВТОМОРФИЗМОМ

В.А.НИКИФОРОВ

Данная работа является продолжением работы [I], в которой дано полное описание групп ранга 2, группы автоморфизмов которых изоморфны $Z(4)$ или $Z(6)$. Как показала вышеназванная работа, важную роль в строении группы играет квадратичная форма, связанная с автоморфизмом. Напомним понятие f-характеристики, введенное в [I]. f-характеристикой называется последовательность (n_p) целых чисел и символов $\pm\infty$, занумерованная возрастающей последовательностью всех простых чисел $\mathcal{P}$. Две f-характеристики (t_p) и (s_p) называются эквивалентными, если $t_p = s_p$ для почти всех p либо $t_p = -s_p$ для почти всех p, причем равенство нарушается лишь для тех p, для которых $t_p \neq \pm\infty$ и $s_p \neq \pm\infty$. Очевидно, введенное отношение является отношением эквивалентности. Класс эквивалентных f-характеристик называется f-типом. Если (t_p) есть f-характеристика, то $(|t_p|)$ является обычной характеристикой. Поэтому для f-типа t, определяемого f-характеристикой (t_p), через $|t|$ обозначается тип, определяемый характеристикой $(|t_p|)$. Пусть $f(x,y) = x^2 + \delta xy + \gamma y^2$ – квадратичная форма, p – простое число, представимое формой $f(xy)$, тогда для любого натурального k_p фиксируем упорядоченную пару чисел $\{x_{k_p,p}, y_{k_p,p}\}$ такую, что $f(x_{k_p,p}, y_{k_p,p}) = p^{k_p}$. В этих терминах в [I] получена

Теорема. Группа G ранга 2 с $Aut\,G \cong Z(4+2\delta)$, $\delta = 0,1$ однозначно определяется парой (α,β), где α – тип, характеристика которого не содержит символов ∞, а β – f-тип, определяемый f-характеристикой (k_p) такой, что: а) $k_p \neq \pm\infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$; б) $k_p \neq 0$ для некоторого бесконечного множества простых чисел $\overline{\mathcal{P}}$, $p = 1(4+2\delta)$; в) $k_p = 0$ для всех $p \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathcal{P}}$. При этом имеют место утверждения:

I) $G \cong A \otimes_Z G_0$, где A – группа ранга I типа α (равного внут-

рейному типу $IT(G)$ группы G); G_0 – однородная нулевого типа группа с $Aut G_0 \cong Z(4+2\delta)$, внешний тип $OT(G_0)$ которой равен $|\beta|$;

2) $G_0 = \langle a, b, g_p \mid p \in \overline{\pi} \rangle$, где $p^{|\kappa_p|} g_p = x_{|\kappa_p|,p} a + y_{|\kappa_p|,p} b$, если $\kappa_p > 0$, и $p^{|\kappa_p|} g_p = y_{|\kappa_p|,p} a + x_{|\kappa_p|,p} b$, если $\kappa_p < 0$,где $x^2_{|\kappa_p|,p} + \delta x_{|\kappa_p|,p} y_{|\kappa_p|,p} + y^2_{|\kappa_p|,p} = p^{|\kappa_p|}$.

3) если $Aut G \cong Aut H \cong Z(4+2\delta)$ и группы G , H ранга 2 определяются парами (α_G, β_G) и (α_H, β_H) соответственно, то $G \cong H$ тогда и только тогда, когда $(\alpha_G, \beta_G) = (\alpha_H, \beta_H)$.

В настоящей работе рассматриваются однородные сильно неразложимые группы ранга 2, не содержащие по внешнему типе бесконечностей с нескалярным автоморфизмом, т.е. с автоморфизмом, не являющимся умножением на рациональное число. Известно, что у однородной сильно неразложимой группы ранга 2 любой ненулевой эндоморфизм является мономорфизмом. Поэтому из линейной зависимости элементов g , φg , $\varphi^2 g$, где $0 \neq g \in G$ и φ – нескалярный автоморфизм группы G , получаем $a\varphi^2 + b\varphi + c\varepsilon = 0$ для некоторых $a, b, c \in Z$, где ε – тождественный автоморфизм.

Лемма 1. Пусть G – однородная сильно неразложимая группа ранга 2, φ – нескалярный эндоморфизм группы G , $a\varphi^2 + b\varphi + c\varepsilon = 0$ для некоторых целых a, b, c . Тогда $ax^2 + bx + c$ неприводим над Q .

Доказательство. Допустим, что $ax^2 + bx + c = (qx + b_1)(a_2 x + b_2)$. Тогда либо $a_1 \varphi + b_1 \varepsilon = 0$, либо $a_2 \varphi + b_2 \varepsilon = 0$, где $a_i, b_i \in Q$. Но это противоречит нескалярности эндоморфизма φ .

Лемма 2. Пусть G – однородная сильно неразложимая группа ранга 2, $OT(G)$ не содержит бесконечностей, φ – нескалярный автоморфизм. Тогда $\varphi^2 + \beta\varphi + \gamma\varepsilon = 0$ для некоторого $\beta \in Z$, $\gamma = \pm 1$.

Доказательство. Имеем $a\varphi^2 + b\varphi + c\varepsilon = 0, a, b, c \in Z$. можно считать $(a, b, c) = 1$. Допустим, что $ac : p$. Тогда $a : p$ или $c : p$. Пусть $a : p$. Выберем элемент $g \in G$ нулевой p-высоты. Заметим, что $(b, p) = (c, p) = 1$. Рассмотрим элемент $b\varphi g + cg = -a\varphi^2 g$. Допустим, что для любого $k < n$ существуют b_k , c_k такие, что $(b_k, p) = (c_k, p) = 1$ и $b_k \varphi g + c_k g$ делится на p^k в группе G . Тогда $(ab\varphi + ac)(b_k \varphi g + c_k g) = (acb_k + ac_k b - b^2 b_k)\varphi g + (aa_k c - bb_k c) g$ делится на p^{k+1} в группе G и $(acb_k + ac_k b - b^2 b_k, p) = (aa_k c - bb_k c, p) = 1$. Следовательно, элементы с указанным свойством существуют для любого натурального n . Но это противоречит тому, что $OT(G)$ не содержит бесконечностей. Если $c : p$, то аналогичным образом приходим к противоречию. Поэтому $|ac| = 1$ и $\varphi^2 + b\varphi + \gamma\varepsilon = 0$ для некоторого $b \in Z$ и $\gamma = \pm 1$.

Пусть G – однородная сильно неразложимая группа без кручения

ранга 2, $OT(G)$ не содержит бесконечностей, φ – нескалярный автоморфизм группы G, $\varphi^2+b\varphi+\gamma\varepsilon=0$, где $\gamma=\pm 1$. Рассмотрим $b^2-4\gamma$ – дискриминант автоморфизма φ. Из леммы 1 следует, что $b^2-4\gamma\neq 0$. Если $b^2-4\gamma<0$, то $\gamma=1$. Следовательно, $b=0,\pm 1$. В этих случаях имеем $\varphi^2+\varepsilon=0$, $\varphi^2\pm\varphi+\varepsilon=0$ соответственно. Приведенная выше теорема из [1] дает полное описание строения таких групп. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $b^2-4\gamma>0$. Из [2] следует, что группу G можно представить в виде $G\cong A\otimes_z G_0$, где A – группа ранга 1 типа $\alpha=IT(G), G_0$ – однородная группа ранга 2 нулевого типа, причем $E(G)\cong E(G_0)$. Таким образом, можно считать, что G – однородная группа нулевого типа. Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая

Лемма 3. Пусть $f(x,y)=x^2+bxy+\gamma y^2$, $\Delta_f=b^2-4\gamma$, $p\in\mathbb{P}$ – простое число, $(\Delta_f,p)=1$, $\{x_{1,p}, y_{1,p}\}$ – упорядоченная пара чисел такая, что $f(x_{1,p}, y_{1,p})\equiv 0(p)$ $[f(x_{1,p}, y_{1,p})=p]$, $(x_{1,p},p)=(y_{1,p},p)=1$. Тогда:

1. для любого $K\in N\setminus\{1\}$ формулы

$$x_{K,p}=x_{1,p}x_{K-1,p}-\gamma y_{1,p}y_{K-1,p},\quad y_{K,p}=x_{1,p}y_{K-1,p}+x_{K-1,p}y_{1,p}+by_{K,p}y_{K-1,p}\qquad(*)$$

задают такие упорядоченные пары чисел $\{x_{K,p}, y_{K,p}\}$, что

$$(x_{K,p},p)=(y_{K,p},p)=1,\ f(x_{K,p},y_{K,p})\equiv 0(p^K)\ [f(x_{K,p},y_{K,p})=p^K]$$

2. для любой пары чисел $\{x,y\}$ таких, что $f(x,y)\equiv 0(p^K)$, $p\neq 2$, $(x,p)=(y,p)=1$, существует такое число ν из приведенной системы вычетов по модулю P, что либо $\{x,y\}\equiv\{\nu x_{K,p},\nu y_{K,p}\}(p^K)$, либо $\{x,y\}\equiv\{\nu\gamma y_{K,p},\nu x_{K,p}\}(p^K)$, где сравнение пар рассматривается покомпонентно. Если $p=2$, то существует такое число из приведенной системы вычетов по модулю 2^K, что $\{x,y\}=\{\nu x_{K,p},\nu y_{K,p}\}$.

Доказательство. То, что формулы $(*)$ задают такие упорядоченные пары $\{x_{K,p}, y_{K,p}\}$, что $f(x_{K,p},y_{K,p})\equiv 0(p^K)$ $[f(x_{K,p},y_{K,p})=p^K]$, проверяется непосредственно. Покажем, что $(x_{K,p},p)=(y_{K,p},p)=1$. Заметим, что если $(x_{n,p},p)=(y_{n,p},p)=1$, то $x_{n,p}^2\not\equiv\gamma y_{n,p}^2(p)$. Действительно, в противном случае $0\equiv x_{n,p}^2+bx_{n,p}y_{n,p}+\gamma y_{n,p}^2=2x_{n,p}^2+bx_{n,p}y_{n,p}(p)$. Откуда $2x_{n,p}\equiv -by_{n,p}(p)$, $4x_{n,p}^2\equiv b^2y_{n,p}^2(p)$ и $b^2-4\gamma=\Delta_f\equiv 0(p)$. Но это противоречит условию леммы. Из формул $(*)$ по индукции легко получить формулы $x_{K+l,p}=x_{K,p}x_{l,p}-\gamma y_{K,p}y_{l,p}$, $y_{K+l,p}=x_{K,p}y_{l,p}+x_{l,p}y_{K,p}+by_{K,p}y_{l,p}$ $(**)$. Допустим, что среди чисел $x_{K,p}, y_{K,p}$ хотя бы одно делится на p. Пусть i – минимальный индекс, для которого $x_{i,p}\equiv 0(p)$. Заметим, что для всех $K\geq i$ $x_{K,p}\equiv 0(p)$. Далее, $i>2$, так как $x_1^2\not\equiv\gamma y_1^2(p)$. Следовательно, $2(i-1)>i$. По формулам $(**)$ имеем $x_{2(i-1),p}=x_{i-1,p}^2-\gamma y_{i-1,p}^2\equiv 0(p)$. Откуда $x_{i-1}\equiv 0(p)$. Таким образом $(x_{K,p},p)=(y_{K,p},p)=1$ для любого K. Докажем теперь утверждение пункта 2. Из теории чисел известно, что сравнение $x^2+bx+\gamma\equiv 0(p^K)$ при $p\neq 2$ имеет два или ни одного решения. Следовательно, сравнение $x^2+bxy+\gamma y^2\equiv 0(p^K)$

при условии $(x,p)=(y,p)=1$, если имеет решения, то их число равно $2\varphi(p^k)$, где φ - функция Эйлера. Рассмотрим пары $\{\nu x_{k,p}, \nu y_{k,p}\}$, $\{\nu y_{k,p}, \nu x_{k,p}\}$, где ν пробегает приведенную систему вычетов по модулю p^k. Покажем, что эти пары дают различные решения $f(x,y)\equiv 0(p^k)$. Очевидно, что пары $\{\nu x_{k,p}, \nu y_{k,p}\}, \{\mu x_{k,p}, \mu y_{k,p}\}$ дают различные решения при $\nu \neq \mu(p^k)$. Допустим, что $\nu x_{k,p} \equiv \mu y_{k,p}(p^k)$, $\nu y_{k,p} \equiv \mu x_{k,p}(p^k)$. Тогда $\nu^2 x_{k,p} \equiv \mu^2 x_{k,p}(p^k)$, откуда $\nu^2 \equiv \mu^2 (p^k)$. Возведя в квадрат сравнение $\nu x_{k,p} \equiv \mu y_{k,p}(p^k)$, получаем $\nu^2 x_{k,p}^2 \equiv \mu^2 y_{k,p}^2 (p^k)$ или $y_{k,p}^2 \equiv x_{k,p}^2 (p^k)$, что невозможно. Следовательно, если пара $\{x,y\}$ - решение сравнения $f(x,y)\equiv 0(p^k)$, то либо $x\equiv \nu x_{k,p}(p^k)$, $y\equiv \nu y_{k,p}(p^k)$, либо $x\equiv \nu y_{k,p}(p^k)$, $y\equiv \nu x_{k,p}(p^k)$. Если $p=2$, то, так как $(\Delta_f, 2)=1$, имеем $(b,2)=1$. Сравнение $x^2+bxy+fy^2\equiv 0(2)$ разрешимо, если $f\equiv 0(2)$. Таким образом, имеем $f(x,y)=x^2+bxy+2f_1y^2$. Сравнение $f(x,1)\equiv 0(2)$ имеет одно решение. Действительно, допустим, что сравнение $x^2+bx+2f_1\equiv 0(2^k)$, $k>2$, имеет 2 решения. Пусть это x_1, x_2, $x_1\neq x_2(2^k)$. Тогда $x_1^2+bx_1+2f_1\equiv x_2^2+bx_2+2f_1\equiv 0(2^k)$. Откуда $(x_1-x_2)(x_1+x_2)\equiv -b(x_1-x_2)(2^k)$ или $x_1+x_2\equiv -b(2^k)$. Учитывая $1=(x_1,2)-(x_2,2)$ получаем $b\equiv 0(2)$. Следовательно, если сравнение $x^2+bx+2f_1\equiv 0(2^k)$ имеет решение, то оно единственно. Поэтому все решения $f(x,y)=x^2+bxy+fy^2\equiv 0(2^k)$ исчерпываются решениями вида $\{\nu x_{k,2}, \nu y_{k,2}\}$, где ν пробегает приведенную систему вычетов по модулю 2^k.

Заметим, что группу G с несколярным автоморфизмом φ можно представить в виде

$$G=\langle g, \varphi g, h_p \mid p^{k_p} h_p = x_{k_p,p}\, g + y_{k_p,p}\, \varphi g, p\in \overline{\pi}_G\rangle, \qquad (I)$$

где $x_{k_p,p}$, $y_{k_p,p}$ удовлетворяют сравнению $f(x_{k_p,p}, y_{k_p,p}) = x_{k_p,p}^2 - bx_{k_p,p}y_{k_p,p} + fy_{k_p,p}^2 \equiv 0(p^{k_p})$, $(x_{k_p,p}, y_{k_p,p})=1$, $\varphi^2 - b\varphi + f\varepsilon = 0$, $\overline{\pi}_G$ - бесконечное подмножество множества простых чисел, g - элемент нулевой характеристики.

В [3] доказано

Предложение 4. Пусть $\mathcal{D}$ - целое число, не содержащее квадратов. Для того чтобы натуральное число $m=a s^2$, где a свободно от квадратов, представлялось некоторой бинарной примитивной формой дискриминанта $\mathcal{D}$, необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо сравнение $x^2\equiv \mathcal{D}(4a)$.

Заметим, что предложение 4 дает необходимые и достаточные условия представимости простого числа p квадратичной формой $f(x,y)$ дискриминанта $\mathcal{D}$ в случае, когда существует только один класс эквивалентности квадратичных бинарных примитивных форм дискриминанта $\mathcal{D}$. Числа $\mathcal{D}$, обладающие таким свойством в теории чисел, называют фундаментальными.

Пусть G - сильно неразложимая группа ранга 2 с несколярным ав-

гоморизмом φ фундаментального дискриминанта $\mathcal{D}$. Рассмотрим ее представление в виде (1). Заметим, что $(\mathcal{D},2)=1$. Это следует из того, что $\mathcal{D}$ не содержит квадратов. Если $p\in\mathcal{T}_G$ и $p\mid\mathcal{D}$, то $\kappa_p=1$. Действительно, так как p входит в $\mathcal{D}$ в первой степени, то сравнение $f(x,1)\equiv 0\ (p^\kappa)$ разрешимо только при $\kappa=1$ и имеет единственное решение. По предложению 4 $f(x,y)$ представляет p. Таким образом, по предложениям 4 и лемме 5 в представлении (1) группы G можно считать, что $f(x_{\kappa_p,p},y_{\kappa_p,p})=p^\kappa$.

Заметим, что путем выбора базиса группы G можно избавиться от любого конечного множества соотношений группы G так, что остальные соотношения останутся без изменения. Действительно, пусть G имеет вид (1). Рассмотрим базу h_q, φh_q. тогда $g=(x_{\kappa_q,q}-\delta y_{\kappa_q,q})h_q-y_{\kappa_q,q}\varphi h_q,\varphi g=\delta y_{\kappa_q,q}h_q+x_q\varphi h_q$. Покажем, что в G разрешимы уравнения $p^{\kappa_p}Z_p=x_{\kappa_p,p}h_q+y_{\kappa_p,p}\varphi h_q$. Заметим, что эти уравнения разрешимы тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения $p^{\kappa_p}(q^{\kappa_q}Z_p)=(x_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-\delta y_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q})g+(x_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q}+y_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-\delta y_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q})\varphi g$. Последнее уравнение разрешимо, так как $p^{\kappa_p}h_p=x_{\kappa_q,q}+y_{\kappa_p,p}\varphi g$ разрешимо и $y_{\kappa_p,p}(x_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-\delta y_{\kappa_q,p}y_{\kappa_q,q})-(x_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q}+y_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-\delta y_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q})x_{\kappa_p,p}=-y_{\kappa_q,q}p^{\kappa_p}$ делится на p^{κ_p}. Пусть $\bar{h}_p$ – решения уравнения $p^{\kappa_p}Z_p=x_{\kappa_p,p}h_q+y_{\kappa_p,p}\varphi h_q$ для каждого $p\in\mathcal{T}_G\setminus\{q\}$. Положим $\bar{G}=\langle h_q,\varphi h_q,\bar{h}_p\mid p\in\mathcal{T}_G\setminus\{q\}\rangle$ и покажем, что $\bar{G}=G$. Для этого достаточно показать, что $h_p\in\bar{G}$ для каждого $p\in\mathcal{T}_G$. Имеем $p^{\kappa_p}h_p=x_{\kappa_p,p}g+y_{\kappa_p,p}\varphi g=[x_{\kappa_p,p}(x_{\kappa_q,q}-\delta y_{\kappa_q,q})+y_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q}\delta]h_q+[y_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-x_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q}]\varphi h_q\in\bar{G}$, $p^{\kappa_p}\bar{h}_p=x_{\kappa_p,p}h_q+y_{\kappa_p,p}\varphi h_q$. Из $y_{\kappa_p,p}(x_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-\delta x_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q}+\delta y_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q})-x_{\kappa_p,p}(y_{\kappa_p,p}x_{\kappa_q,q}-x_{\kappa_p,p}y_{\kappa_q,q})=y_{\kappa_q,q}p^{\kappa_p}$ следует, что $x_{\kappa_p,p}g+y_{\kappa_p,p}\varphi g$ делится на p^{κ_p} в $\bar{G}$. Так как решение в группе без кручения единственно, то $h_p\in\bar{G}$. Таким образом, $\bar{G}=G$. Осталось показать, что h_q – элемент нулевой характеристики. Но это очевидно, так как в противном случае $f(x_{\kappa_q,q},y_{\kappa_q,q})=q^{\kappa_q}\equiv 0\ (q^{\kappa_q}p)$, что невозможно.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 5. Однородная сильно неразложимая группа G ранга 2, не содержащая во внешнем типе $OT(G)$ бесконечностей с неквадратным автоморфизмом φ фундаментального дискриминанта, однозначно определяется парой $\{\alpha,\beta\}$, где $\alpha=TT(G)$, а β есть f-тип, определяемый f-характеристикой (ℓ_p) такой, что: а) $\ell_p\neq\infty$ для всех $p\in\mathcal{T}$; б) $\ell_p\neq 0$ для некоторого бесконечного множества $\mathcal{T}_1$ простых чисел, представимых формой $f(x,y)=x^2+\delta xy+\delta y^2,(\mathcal{D},\mathcal{D})=1$; в) $\ell_p=0$ для всех $p\in\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_1$. При этом имеют место утверждения:

а) $G\cong A\otimes_Z G_0$, где A – группа ранга 1 типа α, а G – однородная нулевого типа группа с $E(G_0)\cong E(G)$, внешний тип $OT(G_0)$ которой равен β;

2) $G_0 = \langle a, b, h_p \mid p \in \pi_1 \rangle$, где $p^{\kappa_p} h_p = m_p a + n_p b$, $\kappa_p = |\ell_p|$,
$f(m_p, n_p) \equiv 0 (p^{\kappa_p})$, $sign[m_p, n_p] = sign\, \ell_p$;

3) если φ , ψ – несингулярные автоморфизмы фундаментального дискриминанта группы G , H соответственно и группы G , H определяются парами (α_G, β_G) и (α_H, β_H) , то $G \cong H$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\varphi = \Delta_\psi$ и $(\alpha_G, \beta_G) = (\alpha_H, \beta_H)$.

Доказательство. Пусть $f(x,y) = x^2 + bxy + cy^2$ – квадратичная форма дискриминанта $\mathcal{D}$, $|C| = 1$, соответствующая автоморфизму φ . В классе эквивалентных форм зафиксируем некоторую форму $F(x,y) = x^2 + Bxy + Cy^2$, $|C| = 1$. Для каждого простого числа p такого, что $(p, \mathcal{D}) = 1$ и p представляется формой $F(x,y)$, зафиксируем упорядоченную пару $\{x_p, y_p\}$ такую, что $F(x,y) = p$, $(x_p, p) = (y_p, p) = 1$. Положим для класса $[x_p, y_p] = \{\{\nu x_p, \nu y_p\} \mid \nu$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю $p\}$ $sign[x_p, y_p] = 1$. Заметим, что $F(Cy_p, x_p) \equiv 0 (p)$ и $[Cy_p, x_p] \neq [x_p, y_p]$. Действительно, если $[Cy_p, x_p] = [x_p, y_p]$, то $0 \equiv Cy_p^2 - x_p^2 \equiv 2Cy_p^2 + Bx_p y_p (p)$. Откуда $Bx_p \equiv -2Cy_p (p)$, $B^2 x_p^2 \equiv 4C^2 y_p^2 \equiv 4Cx_p^2 (p)$ и $B^2 - 4C = \mathcal{D} \equiv 0 (p)$, что противоречит выбору p . Определим $sign[Cy_p, x_p] = -1$. Распространим функцию $sign$ на классы пар для всех форм, эквивалентных форме $F(x,y)$ следующим образом: если $T' A_f T = \kappa A_F$, то $sign[T(\frac{x_p}{y_p})] = \kappa |T|\, sign[x_p, y_p]$, где $|T| = \pm 1$, $\kappa = \pm 1$, A_f , A_F – матрицы форм $f(x,y)$ и $F(x,y)$ соответственно; T' – транспонированная матрица. Заметим, что достаточно установить равенство при $f(x,y) = F(x,y)$. Покажем выполнение равенства при $|T| = 1$, $\kappa = 1$, где $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. В остальных случаях показывается аналогично. Заметим, что в этом случае $[T(\frac{x_p}{y_p})] = [x_p, y_p]$, если $\delta - \alpha - B\gamma = 0$, $\beta + \gamma C = 0$. Из $T' A_F T = A_F$ и $|T| = 1$ имеем следующие соотношения: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2 = 1$, $\beta^2 + B\beta\delta + C\delta^2 = C$, $\alpha\beta + C\gamma\delta + B\beta\gamma = 0$. Заметим, что если $\beta\gamma \neq 0$, то из последнего и первого равенства следует, что β и γ ассоциированы. Пусть $\beta = \gamma$. Тогда из четвертого равенства имеем $\alpha + C\delta + B\gamma = 0$. Учитывая третье равенство, получаем $C = -1$, условия $\delta - \alpha - B\gamma = 0$, $\beta + \gamma C = 0$ выполнены. Если $\beta = -\gamma$, то имеем $\alpha\delta + \gamma^2 = 1$, $\alpha - C\delta + B\gamma = 0$, $C\delta^2 - B\gamma\delta + \gamma^2 = 1$ и $C\delta^2 - B\gamma\delta + \gamma^2 = C$. Откуда $C = 1$ и имеем $\delta - \alpha - B\gamma = 0$, $\beta + \gamma C = 0$. Если $\beta\gamma = 0$, то имеем при $\beta = 0$ $\alpha\delta = 1$, $C\gamma\delta = 0$. Следовательно, $\gamma = 0$ и $\beta - C\gamma = 0$, $\alpha - \delta + B\gamma = 0$. Если $\gamma = 0$, то $\alpha\delta = 1$ и $\alpha\beta = 0$. Следовательно, $\beta = 0$, $\beta - C\gamma = 0$, $\alpha - \delta + B\gamma = 0$. Таким образом, определение функции $sign$ корректно.

Пусть G – однородная сильно неразложимая группе ранга 2 с несингулярным автоморфизмом φ фундаментального дискриминанта $\mathcal{D}$,

$\varphi^2 - B\varphi + C\varepsilon = 0$. Согласно [3] $G \cong A \otimes_Z G_0$, где A – группа ранга 1 типа $\alpha = IT(G), E(G_0) \cong E(G)$. Группу G_0 можно представить в виде (1) с базисом g , φg , то есть $G_0 = \langle g, \varphi g, h_p \mid p^{k_p} h_p = m_p g + n_p \varphi g, p \in \pi_1 \rangle$, причем по замечанию, сделанному перед теоремой, можно выбрать элемент g так, что $\forall p \in \pi_1 \ (p, \mathcal{D}) = 1$. Поставим в соответствие группе G_0 f -характеристику (l_p) такую, что $l_p = 0$, если $p \notin \pi_1$ и $l_p = k_p \operatorname{sign} [m_p, n_p]$. f -тип β , определяемый f -характеристикой (l_p) , удовлетворяет условиям теоремы и $|\beta| = OT(G_0)$. Обратно, пусть (α, β) – пара, состоящая из типа α и f -типа β , удовлетворяющая условиям теоремы. $f(x,y) = x^2 + Bxy + Cy^2$ – квадратичная форма дискриминанта $\mathcal{D}$. В f -типе β выберем f -характеристику (l_p), удовлетворяющую условиям теоремы. Положим $G_0 = \langle a, b, h_p \mid p \in \pi_1 \rangle$, где $p^{k_p} h_p = m_p a + n_p b$, $k_p = |l_p|$, $f(m_p, n_p) = 0 (p^{k_p})$, $\operatorname{sign} [m_p, n_p] = \operatorname{sign} l_p$. Пусть $G = A \otimes_Z G_0$, где A – группа ранга 1 типа α . Покажем, что группа G искомая. Определим отображение $\varphi a = b$, $\varphi b = -Ca + Bb$. Тогда это отображение является эндоморфизмом группы G_0 . Действительно, уравнения $p^{k_p} Z_p = m_p b + n_p (-Ca + Bb) = -n_p Ca + (m_p + Bn_p) b$ разрешимы в группе G_0 в силу того, что $f(m_p, n_p) \equiv 0 (p^{k_p})$. Отображение $\psi b = a$, $\psi a = CBa - Cb$ является эндоморфизмом группы G_0 , так как уравнения $p^{k_p} v_p = m_p (CBa - Cb) + n_p a = (m_p CB + n_p) a - m_p Cb$ разрешимы в G_0 в силу того, что $(m_p CB + n_p) n_p - m_p^2 C = n_p^2 + CB n_p m_p + m_p^2 C = C(m_p^2 + Bn_p m_p + Cn_p^2) \equiv 0 (p^{k_p})$. Легко видеть, что φ и ψ взаимно обратны. Следовательно, φ – автоморфизм. Заметим, что $\varphi^2 a = -Ca + B\varphi a$, откуда $\varphi^2 - B\varphi + C\varepsilon = 0$ и φ соответствует квадратичная форма $f(x,y) = x^2 + Bxy + Cy^2$. Таким образом, φ – искомый автоморфизм, а G – искомая группа.

Наконец, пусть φ , ψ – нескалярные автоморфизмы дискриминанта $\mathcal{D}$ групп G , H соответственно и группы G , H определяются парами (α_G, β_G), (α_H, β_H). Покажем, что $G \cong H$, если $(\alpha_G, \beta_G) = (\alpha_H, \beta_H)$ (обратное очевидно). Так как f -типы β_G , β_H равны, то можем выбрать в них f -характеристику (l_p) , (s_p) соответственно такую, что $\pi_G = \pi_H = \pi_1$, для всех $p \in \pi_1$ выполнено условие $(p, \mathcal{D}) = 1$ и $l_p = s_p$ для всех $p \in \pi_1$ либо $l_p = -s_p$ для всех $p \in \pi_1$. Тогда по [2] и замечанию, сделанному перед теоремой, можем представить $G = A \otimes_Z G_0$, $H = A \otimes_Z H_0$, где $G_0 = \langle a, b, g_p \mid p \in \pi_1 \rangle$, $H_0 = \langle c, d, h_p \mid p \in \pi_1 \rangle$ и $p^{k_p} g_p = m_p a + n_p b$, $p^{k_p} h_p = u_p c + v_p d$, где $k_p = |l_p|$ и $\operatorname{sign} [m_p, n_p] = \operatorname{sign} l_p$, $\operatorname{sign} [u_p, v_p] = \operatorname{sign} s_p$. Так как формы $f_\varphi(x,y)$ и $f_\psi(x,y)$ эквивалентны, то путем изменения базиса группы, например H_0 , можно группу H_0 представить в виде $H_0 = \langle \bar{c}, \bar{d}, \bar{h}_p \mid p \in \pi_1 \rangle$, $f_{\bar{\psi}}(x,y) = f_\varphi(x,y)$, $p^{k_p} \bar{h}_p = \bar{u}_p \bar{c} + \bar{v}_p \bar{d}$

$sign[\bar{u}_p, \bar{v}_p] = sign[m_p, n_p]$. В силу того, что группы G_0 и H_0 будут иметь один и тот же вид (I), с точностью до обозначений, группы G_0 и H_0 изоморфны. Следовательно, группы G и H изоморфны.

Литература

1. С.Ф.Кожухов, В.А.Никифоров. Абелевы группы без кручения с конечными группами автоморфизмов // Изв. высш. уч. зав. Математика. 1989. №9. С. 30-37.
2. *R.B. Warfield, Jr. Homomorphisms and Duality for Torsion-free Groups// Math. Zeitschr. 1968. V. 107. P. 189-200.*
3. З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич. Теория чисел // М.: Наука, 1972, 375с.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ СО СЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ ПОДГРУПП

С.В.Рычков, А.А.Фомин

В данной работе рассматривается вопрос описания абелевых групп, число подгрупп которых не более чем счётно. Для удобства будем называть такие группы группами со свойством (*) . Авторы не только не обнаружили подобного описания в литературе, но и неожиданно увидели прямую связь этого вопроса с вопросом описания некоторых классов абелевых групп без кручения конечного ранга, появившихся в работах одного из авторов в последнее время. Все используемые обозначения заимствованы из монографии Л.Фукса [I, 2] .

ЛЕММА I. Мощность множества всех подгрупп группы $Z(p^\infty) \oplus Z(p^\infty)$ несчётна.

Доказательство. Рассмотрим группу $A \oplus B$, где A - группа типа p^∞ , определяемая системой образующих a_0 , a_1 , ... , a_n , ... и системой соотношений: $p \cdot a_n = a_{n-1}$ при $n > 0$ и $p a_0 = 0$, $a_0 \neq 0$. Аналогично: $B \cong Z(p^\infty)$ определяется образующими b_0 , b_1 , ... и соотношениями $p \cdot b_n = b_{n-1}$ при $n > 0$, $p \cdot b_0 = 0$, $b_0 \neq 0$.

Рассмотрим целое p -адическое число $\alpha = s_0 + s_1 \cdot p + s_2 \cdot p^2 + \ldots$, записанное в канонической форме, и подгруппу C_α группы $A \oplus B$, порождённую образующими $c_0^\alpha = a_0 + s_0 \cdot b_0$, $c_1^\alpha = a_1 + (s_0 + s_1 \cdot p) \cdot b_1$, ... , $c_n^\alpha = a_n + (s_0 + \ldots + s_n \cdot p^n) \cdot b_n$, ... Очевидно, выполнены соотношения $p \cdot c_n^\alpha = c_{n-1}^\alpha$, $p \cdot c_0^\alpha = 0$, $c_0^\alpha \neq 0$, то есть C_α является группой типа p^∞ .

Предположим, что для некоторых целых p-адических чисел α и β имеет место $C_\alpha = C_\beta = C$. Рассмотрим в группе C последовательность элементов

$$C_0^\alpha - C_0^\beta,\ C_1^\alpha - C_1^\beta,\ \dots,\ C_n^\alpha - C_n^\beta,\ \dots$$

Если хотя бы один из этих элементов отличен от нуля, то в совокупности они порождают группу типа p^∞, так как $p\cdot(C_n^\alpha - C_n^\beta) = C_{n-1}^\alpha - C_{n-1}^\beta$ для всех $n>0$, а именно всю группу C. С другой стороны, легко видеть, что $C_n^\alpha - C_n^\beta \in B$ для всякого n, следовательно, $C=B$. Но тогда $a_n = c_n^\alpha - (s_0 + s_1 p + \dots + s_n p^n) b_n \in C$ для всякого n, следовательно, $A \subseteq C$, что невозможно.

Таким образом, имеют место равенства $C_0^\alpha = C_0^\beta$, $\dots$, $C_n^\alpha = C_n^\beta$, $\dots$, из которых следует равенство $\alpha = \beta$. Следовательно, в силу несчётности Q_p^* множество $\{C_\alpha \mid C_\alpha \subseteq A \oplus B,\ \alpha \in Q_p^*\}$ несчётно, тем более множество всех подгрупп группы $A \oplus B$ несчётно. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. p-примарная группа со свойством $(*)$ является конечно-копорождённой группой, содержащей не более одного слагаемого типа p^∞.

Доказательство. Предположим, что p-примарная группа имеет бесконечный цоколь с базисом $\{a_i \mid i \in I\}$. Различные подмножества этого базиса порождают различные подгруппы цоколя, поэтому уже цоколь содержит $2^{|I|}$ различных подгрупп. Следовательно, p-примарная группа со свойством $(*)$ обязана иметь конечный цоколь, а значит, быть конечно-копорождённой, то есть являться прямой суммой конечного числа нецикличных групп [I, § 25]. При этом по лемме I число слагаемых типа p^∞ не превосходит единицы. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. Периодическая группа G обладает свойством $(*)$ тогда и только тогда, когда $G = A \oplus B$, где A - конечная группа, а B - прямая сумма конечного числа групп типа p^∞ по одной для каждого простого числа p.

Доказательство. Пусть P - множество тех простых чисел p, для которых p-примарная компонента группы G нетривиальна. Если множество P бесконечно, то множество его подмножеств несчётно, и при этом,

различным подмножествам соответствуют различные подгруппы группы G. Следовательно, группа G со свойством $(*)$ имеет конечное число ненулевых p-примарных компонент, каждая из которых, очевидно, обладает свойством $(*)$. Применив лемму 2, получим необходимость условия теоремы.

Докажем достаточность. Если всякая p-примарная компонента группы G обладает свойством $(*)$ и число p-примарных компонент конечно, то G также обладает свойством $(*)$, так как решётка подгрупп группы G есть прямое произведение решёток подгрупп её примарных компонент. Следовательно, достаточно доказать, что p-примарная группа G вида $A \oplus Z(p^\infty)$, где A - конечная группа, имеет счётное число подгрупп. В этом случае G представляется в виде объединения цепи конечных групп $G[p] \subseteq G[p^2] \subseteq \dots$ Каждая конечная подгруппа группы G включается в некоторую подгруппу вида $G[p^n]$, поэтому число конечных подгрупп группы G счётно. Число бесконечных подгрупп группы G равно числу подгрупп группы A, то есть конечно. Следовательно, общее число подгрупп группы G счётно. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Абелева группа обладает свойством $(*)$ тогда и только тогда, когда она является расширением свободной группы конечного ранга при помощи периодической группы со свойством $(*)$.

Доказательство. Всякая группа G является расширением некоторой свободной группы при помощи периодической:

$$0 \to F \to G \to T \to 0, \qquad (I)$$

Если G обладает свойством $(*)$, то, очевидно, и F, и T обязаны обладать этим свойством. Свойство $(*)$ для свободной группы равносильно конечности ранга этой группы.

В другую сторону, пусть имеется короткая точная последовательность (I), в которой F - конечного ранга свободная группа, а T - периодическая группа со свойством $(*)$. По теореме о гомоморфизмах число подгрупп группы G, содержащих F, не более чем счётно.

Далее, пусть F' - произвольная подгруппа группы F. Положим $F'_* = \{x \in G \mid (\exists\, 0 \neq n \in Z)(n \cdot x \in F')\}$. Для подгруппы F'_* группы G имеем следующую короткую

точную последовательность: $0 \to F' \to F'_* \to T' \to 0$.
Как подгруппа группы T группа $(F'_* + F)/F$ обладает свойством $(*)$, она же является гомоморфным образом группы F'_*/F с конечным ядром $(F'_* \cap F)/F'$. Поэтому периодическая группа $T' = F'_*/F'$ также обладает свойством $(*)$, и так же, как и для последовательности [I], в этом случае заключаем, что число подгрупп группы F'_*, содержащих F', не более чем счётно. Следовательно, множество подгрупп

$$\{H \leq G \mid (\exists F' \leq F)(F' \leq H \leq F'_*)\}$$

не более чем счётно, так как число подгрупп F' группы F не более чем счётно, и для каждой подгруппы F' из F число подгрупп H группы G, для которых $F' \leq H \leq F'_*$, также не более чем счётно.

Возьмём произвольную подгруппу C группы G, тогда $C \cap F \leq C \leq (C \cap F)_*$. Отсюда следует, что общее число подгрупп группы G не более чем счётно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Абелева группа без кручения обладает свойством $(*)$ тогда и только тогда, когда она является расширением свободной группы конечного ранга при помощи группы вида $Z(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus Z(p_m^\infty)$, где $p_1, \ldots, p_m$ – различные простые числа.

Доказательство. Если группа без кручения G обладает свойством $(*)$, то она является расширением свободной группы F конечного ранга при помощи периодической группы T со свойством $(*)$. По теореме I группа T имеет вид $B \oplus (Z(p_1^\infty) \oplus \cdots \oplus Z(p_m^\infty))$, где B – некоторая конечная группа, а $p_1, \ldots, p_m$ – различные простые числа. Полный прообраз F_1 группы B при гомоморфизме $G \to G/F = T$ является свободной группой того же ранга, что и F, так как при домножении F_1 на порядок n группы B получаем группу nF_1, изоморфную F_1 и содержащуюся в F в качестве подгруппы. Таким образом, группа G является расширением свободной группы конечного ранга F_1 при помощи группы

$$G/F_1 = Z(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus Z(p_m^\infty).$$

В другую сторону, данное утверждение является прямым следствием теоремы. Следствие доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество простых чисел $p_1, \ldots, p_m$ из следствия I назовём сопутствующим данной группе без кручения со свойством $(*)$.

Отметим, что данное определение не зависит от выбора свободной группы в формулировке следствия I, так как фактор - группа абелевой группы без кручения конечного ранга по её свободной подгруппе того же ранга однозначно определена с точностью до квазиизоморфизма (тип Ф.Ричмена [3]).

Расширения свободных групп конечного ранга при помощи подгрупп группы Q/Z описаны с точностью до квазиизоморфизма в [4], а в [5] описаны с точностью до квазиизоморфизма расширения свободных групп конечного ранга при помощи группы $Z(p^\infty)$, этот случай особенно близок классу групп, описанному в нашем следствии I (см. также [6]). Применим описание из [4] к классу групп со свойством $(*)$. Пусть P - произвольное конечное множество простых чисел, K_p - поле p-адических чисел. Кольцо $K = \prod_{p \in P} K_p$ будем также рассматривать как векторное пространство над полем Q.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [4]. Пусть U - подпространство пространства K конечной размерности n. Положим U эквивалентным V, если существует такой обратимый элемент α кольца K, что $V = \alpha \cdot U$. Класс эквивалентности $[U]$ относительно данного отношения эквивалентности называется P-инвариантом размерности n.

Для удобства чтения укажем, как по P-инварианту размерности n восстанавливается группа A ранга m, $m \geq n$, обратное соответствие тогда будет достаточно очевидно. Итак, берем любого представителя U класса $[U]$ и выбираем в нём любую систему образующих из m элементов $a_1, \ldots, a_m$. Фиксируем простое число $p \in P$, тогда p-проекции $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ элементов $a_1, \ldots, a_m$ являются p-адическими числами. Локально по данному p группа A определяется равенством

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_m \cdot x_m = 0,$$

которое выполняется в p-адическом пополнении $\hat{A}_p$ группы A для максимальной линейно независимой системы $x_1, \ldots, x_m$ группы A. По простым числам $p \notin P$ группа A свободна от p-соотношений. В совокупности эти

условий однозначно с точностью до квазиизоморфизма определяют группу A (подробности в [4 и 5]) .

ТЕОРЕМА 3 [4, 5] . Ранг n , число m , где $0 < m \leq n$ – сопутствующее множество простых чисел $P = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $s > 0$, и P-инвариант [U] размерности m составляют полную и независимую систему инвариантов несвободной группы без кручения со свойством (*) с точностью до квазиизоморфизма.

ТЕОРЕМА 4 . Смешанная группа G тогда и только тогда обладает свойством (*) , когда одновременно выполнены следующие условия:

1. $G = T \oplus H$, где T - периодическая группа со свойством (*) ; H - группа без кручения со свойством (*).

2. Сопутствующее множество простых чисел группы H не пересекается с множеством тех простых чисел p , для которых p -примарная компонента группы T содержит группу типа p^∞ .

Доказательство . Ясно, что если смешанная группа обладает свойством (*) , то этим свойством обладают её периодическая часть и фактор-группа по ней. Группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1, выделяется прямым слагаемым в любой группе, в которой она совпадает с периодической частью этой группы [1 , теорема 27.5] . Далее, по теоремам 1 и 2 смешанная группа G обладает свойством (*) тогда и только тогда, когда G является расширением свободной группы F конечного ранга при помощи группы вида $B \oplus (Z(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus Z(p_m^\infty))$, где B - некоторая конечная группа и $p_1, \ldots, p_m$ - различные простые числа. При гомоморфизме $G \to G/F$ группа T вкладывается в группу $B \oplus (Z(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus Z(p_m^\infty))$, следовательно, условие 2 в теореме также является необходимым, а условия 1 и 2 вместе являются и достаточными. Теорема доказана.

Полученные в данной работе результаты дают полное описание групп с не более чем счётным числом подгрупп в многообразии всех абелевых групп. Представляется интересным исследовать аналогичный вопрос в других многообразиях групп (например, разрешимых групп) и модулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т.1. 335с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т.2. 416с.
3. Richman F. A class of rank 2 torsion free groups // Studies on Abelian Groups. Paris 1968. P. 327-333.
4. Фомин А.А. Абелевы группы с одним $\mathfrak{T}$-адическим соотношением // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 1. С. 83 - 104.
5. Фомин А.А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. 1984. Т. 36. Вып. 2.С.179 - 187.
6. Фомин А.А. Сервантно свободные группы // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. Вып. 6. С. 145-164.

СОВЕРШЕННЫЕ КОЛЬЦА БАССА И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

И.И.Сахаев

Всюду предполагается, что кольца ассоциативные с единицей, а модули унитарные. Будем обозначать через R_n кольцо всех $n \times n$ матриц над кольцом R, символом 1 – его единицу, $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R. $M = \langle \mu_1, \dots, \mu_n \rangle$ означает, что R-модуль M порождается элементами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ – строка из элементов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Убывающую цепь конечно-порожденных подмодулей $M_m = \langle \mu_{1m}, \dots, \mu_{n_m m} \rangle$

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_m \supseteq \dots \qquad (1)$$

правого R-модуля M будем называть типа (3), если

$$(\mu_{1m+1} \cdots \mu_{n_{m+1}m+1}) = (\mu_{1m} \cdots \mu_{n_m m}) B_m \qquad (2)$$

и последовательность $n_m \times n_{m+1}$ матриц B_m $(m = 1,2,\dots)$ удовлетворяет условию

$$\prod_{i=1}^{q} B_{l+p+i} = Q_q \prod_{i=0}^{p+q} B_{l+i} \ , \qquad (3)$$

начиная с некоторых l и p при $q = 1,2, \dots$ для подходящих матриц Q_q. В данной статье приводится (теорема 1) гомологическое доказательство теоремы Бьерка [1] и на этой базе дается обобщение теоремы Басса [2, с.467], а именно (теорема 4): для кольца R следующие условия эквивалентны:

а) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль имеет проективное покрытие;

в) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен;

с) для любого правого R-модуля всякая убывающая цепь типа (3) его конечно-порожденных подмодулей стабилизируется. Показывается (теорема 6), что фактор-кольцо $R/Z(R)$, где $Z(R)$-сингулярный идеал [3, с.352] кольца R, вкладывается в регулярное кольцо [4, с.18], а для кольца R, имеющего конечную размерность Голди [5, с.165], его полное кольцо частных [5, с.151] является полусовершенным кольцом. Доказано, что для области целостности R в условии (с) теоремы 4 достаточно потребовать стабилизацию убывающей цепи типа (3) лишь для конечно-порожденных правых идеалов кольца R. В заключение приводится контрпример (теорема 10) к гипотезе Лазара [23, с.140]. Часть результатов анонсирована в

[25].

Теорема I. Для кольца R следующие условия эквивалентны:
(а) всякий плоский левый R-модуль имеет проективное покрытие;
(в) всякий плоский левый R-модуль проективен;
(с) для любого правого R-модуля всякая убывающая цепь его конечно-порожденных подмодулей стабилизируется.

Доказательство. Импликация (а) $\Longrightarrow$ (в) следует из теоремы 4 [6, с.156], а импликация (в) $\Longrightarrow$ (а) очевидна.

(в) $\Longrightarrow$ (с). Рассмотрим правый R-модуль M и произвольную убывающую цепь (I) его конечно-порожденных подмодулей, последовательность матриц B_m $(m = 1,2, \ldots)$, определенных равенствами (2). Введем важный для нас фактор-модуль F/Y, определенный следующим образом. Пусть F – свободный левый R-модуль с базой $x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{n_m m}$ $(m = 1,2, \ldots)$, Y – его подмодуль, порожденный элементами

$$x_{im} - \sum_{j=1}^{n_{m+1}} b_{ijm} \cdot x_{jm+1} \quad (i = 1,2, \ldots, n_m; \ m = 1,2, \ldots), \tag{4}$$

где b_{ijm} являются элементами матрицы B_m. Фактор-модуль F/Y будем называть модулем, определенным последовательностью матриц B_m $(m = 1,2, \ldots)$. Положим $Z_m = (z_{1m} \ldots z_{n_m m})^{tr}$ (tr означает операцию транспонирования), где z_{im} – образ элемента x_{im} в фактор-модуле F/Y при естественном гомоморфизме. В силу определения множества порождающих элементов (4) модуля Y имеем, что

$$Z_m = B_m \cdot Z_{m+1}. \tag{5}$$

Так же, как в лемме I.2 [2, с.468], показывается, что

$$J_m = (0 : Z_m), \tag{6}$$

где $J_m = \{D / D \in R_{t \times n_m}; \ D \cdot B_m \cdot B_{m+1} \ldots B_{m+q} = 0\}$;

$$(0 : Z_m) = \{D / D \in R_{t \times n_m}, \ D \cdot Z_m = 0\}.$$

Обозначим через N достаточно большое положительное целое число. Пусть D есть $t' \times t''$ матрица над кольцом R, причем $t', t'' < N$. Введем $N \times N$-матрицу

$$D^* = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где 0 обозначает нулевую матрицу подходящих размеров. Так же, как в лемме I.I [2, с.468], показывается, что фактор-модуль F/Y плоский, а в силу условия (в) он проективен. Значит, точная после-

довательность левых R-модулей $0 \to Y \to F \to$ $\to F/Y \to 0$ расщепляется. Как и в лемме I.3 [2, с.469], рассмотрим точную последовательность $0 \to F/Y \to$ $\to F$. Получим, что

$$Z_p = C_{p_1} \cdot X_1 + C_{p_2} \cdot X_2 + \ldots + C_{p s_p} \cdot X_{s_p}, \qquad (8)$$

где $X_i = (x_{1i} \ldots x_{n_i i})$. Пусть N – достаточно большое целое число. Положим $Y^* = \sum_{j=1}^{s_l} C_{ij}^* \cdot R_N$, где матрицы C_{ij} определены равенством (8) согласно (7). Как и в доказательстве леммы I.3 [2, с.469], показывается, что $Y^* \subseteq B_1^* B_2^* \ldots B_{\tilde{m}}^* \cdot R_N$ при $\tilde{m} > m_0$, и существует такое m^*, что

$$Y^* = B_1^* \cdot B_2^* \ldots B_{m^*}^* \cdot R_N \qquad (9)$$

и $B_1^* \cdot B_2^* \ldots B_\ell^* = B_1^* \cdot B_2^* \ldots B_{\ell+p}^* \cdot U_p^*$. Отсюда имеем, что

$$B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell = B_1 \cdot B_2 \ldots B_{\ell+p} \cdot U_p \qquad (10)$$

при $\ell \geq m^*$, $p = 1, 2, \ldots$ Тогда $(\mu_{11} \ldots \mu_{n_1 1}) B_1 \cdot B_2 \ldots$

$$\ldots B_\ell = (\mu_{11} \ldots \mu_{n_1 1}) \cdot B_1 B_2 \ldots B_{\ell+p} \cdot U_p \quad \text{и}$$

$$(\mu_{1\ell+1} \ldots \mu_{n_{\ell+1}\,\ell+1}) = (\mu_{1\ell+p+1} \ldots \mu_{n_{\ell+p+1}\,\ell+p+1}) \cdot U_p \qquad (11)$$

при $p = 1, 2, \ldots$ Соотношения (II) влекут стабилизацию убывающей цепи (I).

Импликация (c) $\Longrightarrow$ (в) следует из теоремы Р [2, с.467]. Доказательство закончено.

Лемма 2. Пусть дана последовательность $n_m \times n_{m+1}$-матриц $B_m (m = 1, 2, \ldots)$ над кольцом R. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) последовательность матриц B_m ($m = 1, 2, \ldots$) удовлетворяет условию (3);

(в) фактор-модуль F/Y, определенный последовательностью матриц B_m ($m = 1, 2, \ldots$), конечно-порожден.

Доказательство (а) $\Longrightarrow$ (в). По определению фактор-модуль F/Y порождается множеством элементов $z_{1m}, z_{2m}, \ldots, z_{n_m m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Так как имеют место соотношения (3) и (5), то

$$Z_{\ell+p} = Q_p \cdot Z_\ell \quad (\ell = 1, 2, \ldots). \qquad (12)$$

Равенства (12) показывают, что модуль $F/Y = \langle z_{1\ell}, \ldots, z_{n_\ell \ell} \rangle$ и поэтому конечно-порожден.

(в) $\Longrightarrow$ (а). Пусть фактор-модуль F/Y конечно-порожден. Тогда существует такое число $\ell > 0$, что $F/Y = \langle z_{1\ell}, \ldots, z_{n_\ell \ell} \rangle$, поэтому $Z_{\ell+p+1} = Q_p \cdot Z_\ell = Q_p \cdot B_\ell \cdot B_{\ell+1} \ldots B_{\ell+p} Z_{\ell+p+1}$,

$(-1-Q\sum_{i=0}^{p}\ell+1)\cdot Z_{\ell+p+1}=0.$

Отсюда в силу соотношения (6) следует, что $(1-Q_p\sum_{i=0}^{p}B_{\ell+i})\cdot B_{\ell+p+1}B_{\ell+p+2}\cdots B_{\ell+p+q}=0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n}B_{\ell+p+i}=Q_pB_\ell B_{\ell+1}\cdots B_{\ell+p+q}$ и выполняются условия (3). Доказательство закончено.

Теорема 3. Пусть дана последовательность $n_m\times n_{m+1}$-матриц $B_m(m=1,2,\ldots)$ над кольцом R, удовлетворяющая условию (3). Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) Фактор-модуль F/Y, определенный последовательностью матриц B_m $(m=1,2,\ldots)$, проективен.

(в) Для любого правого R-модуля всякая убывающая цепь типа (3)

$$M_1\supseteq M_2\supseteq\ldots\supseteq M_m\supseteq\ldots \qquad (13)$$

его конечно-порожденных подмодулей $M_m=\langle\mu_{1m},\ldots,\mu_{n_{m+\ell}m}\rangle$, где $(\mu_{1m+1}\cdots\mu_{n_{m+\ell-1}m+1})=(\mu_{1m}\cdots\mu_{n_{m+\ell}m})\cdot B_{m+\ell}$, стабилизируется.

Доказательство. (а) $\Longrightarrow$ (в). По условию фактор-модуль F/Y проективен. Обозначим через F' свободный подмодуль модуля F, порожденный множеством элементов $x_{1m},\ldots,x_{n_mm}$ $(m=\ell,\ell+1,\ldots)$, через Y' – подмодуль модуля Y, порожденный множеством элементов $x_{im}-\sum_{j=1}^{n_{m+1}}b_{ijm}x_{jm+1}$ $(i=1,2,\ldots,n_m;\ m=\ell,\ell+1,\ldots)$. Очевидно, что $F'\cap Y=Y'$, $F=F_1\oplus F'$, $Y=Y_1\oplus Y'$. Так как модуль F/Y проективен, то точная последовательность левых R-модулей $0\to Y/Y'\to F/Y'\to F/Y\to 0$ расщепляется. Тогда $F_1\oplus(F'/Y')\cong(F_1\oplus F')/Y'=F/Y'\cong Y/Y'\oplus F/Y$, поэтому фактор-модуль F'/Y' проективен. Далее, как и в доказательстве теоремы 1, показывается, что убывающая цепь (13) стабилизируется.

(в) $\Longrightarrow$ (а). Рассмотрим свободный правый R-модуль F^* с базой $y_1,y_2,\ldots y_{n_\ell}$ и убывающую цепь его подмодулей

$$M_m=\langle\mu_{1m},\ldots,\mu_{n_{m+\ell}m}\rangle$$
$$F^*\supseteq M_1\supseteq M_2\supseteq\ldots\supseteq M_m\supseteq\ldots, \qquad (14)$$

где $(\mu_{1m+1}\cdots\mu_{n_{m+\ell+1}m+1})=(\mu_{1m}\cdots\mu_{n_{m+\ell}m})\cdot B_{m+\ell}\cdot\ldots\cdot(\mu_{11}\cdots\mu_{n_{\ell+1}1})=(y_1\cdots y_{n_\ell})\cdot B_\ell$ $(\ell>1)$.

Согласно условию (в) убывающая цепь (14) стабилизируется и поэтому существует p такое, что $M_p=M_{p+1}=\ldots=M_{p+q}=\ldots$

Значит, $(\mu_{1p}\cdots\mu_{n_pp})=(\mu_{1p+q}\cdots\mu_{n_{\ell+p+q}p+q})\cdot U_{p+q}$.

Отсюда в силу свободности базы $y_1,y_2,\ldots,y_{n_\ell}$ получим,

что

$$B_\ell \cdot B_{\ell+1} \cdots B_{\ell+p} = B_\ell \cdot B_{\ell+1} \cdots B_{\ell+p+q} \cdot U_{p+q} \qquad (15)$$

при $q = 1,2, \ldots$. Так как последовательность матриц B_m ($m = 1,2, \ldots$) удовлетворяет условию (3), то

$$\prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} = \prod_{i=0}^{p} B_{\ell+i} \cdot Q_{p+q} \cdot \prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} . \qquad (16)$$

Отсюда, используя соотношение (15), получим, что

$$\prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} = \prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} \cdot U_{p+q} \cdot Q_{p+q} \cdot \prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} . \qquad (17)$$

Положим

$$E_{p+q} = \prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} \cdot U_{p+q} \cdot Q_{p+q} . \qquad (18)$$

Очевидно, что матрица E_{p+q} идемпотентна и

$$\prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} = E_{p+q} \cdot \prod_{i=0}^{p+q} B_{\ell+i} \qquad (19)$$

при $q = 1,2, \ldots$. Из равенств (18) и (19) следует, что

$$E_{p+q} = E_{p+q+t} \cdot E_{p+q} , \; E_{p+q+t} = E_{p+q} \cdot E_{p+q+t} . \qquad (20)$$

Отметим, что фактор-модуль F/H , определенный последовательностью матриц B_m($m = 1,2, \ldots$), согласно лемме 2, конечно-порожден, поэтому существует такое ℓ , что $F/H = \langle z_{1\ell}, \ldots, z_{n_\ell \ell} \rangle$. Теперь соотношение (19) влечет равенство

$$Z_\ell = E_{p+q} \cdot Z_\ell . \qquad (21)$$

Введем в рассмотрение свободный левый R -модуль $\tilde{F}$ с базой $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}, \ldots, \tilde{x}_{n_\ell}$. Зададим гомоморфизм $\varphi : \tilde{F} \to F/H$, полагая $\varphi(\tilde{x}_i) = z_{i\ell}$ ($i = 1,2, \ldots, n_\ell$). Пусть $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n_\ell})^{tr}$. В силу равенства (21) имеем $\varphi((1-E_{p+q})\tilde{X}) = (1 - E_{p+q}) \cdot Z_\ell = 0$. Пусть теперь $\varphi(A\tilde{X}) = AZ_\ell = 0$. Отсюда и из соотношения (6) следует, что

$$0 = A \cdot B_\ell \cdot B_{\ell+1} \cdots B_{\ell+p+q+t} = 0, \; A \cdot E_{p+q+1} = 0 ,$$

поэтому в силу (20) получим, что $A \cdot E_{p+q} = 0$, $A = A(1 - E_{p+q})$ и $A \cdot \tilde{X} = A(1 - E_{p+q})\tilde{X}$. Следовательно, $\ker \varphi$ определяется идемпотентной матрицей $1 - E_{p+q}$ и поэтому выделяется прямым слагаемым свободного левого R -модуля $\tilde{F}$. Так как φ - эпиморфизм, то $\tilde{F} = \ker \varphi \oplus F/H$ и фактор-модуль F/H проективен. Доказательство закончено. Теперь естественно формулируется обоб-

щение теоремы I.

Теорема 4. Для кольца R следующие условия эквивалентны:
(а) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль имеет проективное покрытие.
(в) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен.
(с) для любого правого R-модуля M стабилизируется всякая убывающая цепь типа (3) его конечно-порожденных подмодулей.

Доказательство. Импликация (а) $\Longrightarrow$ (в) показывается, как в теореме I.

(в) $\Longrightarrow$ (с). Рассмотрим убывающую цепь типа (3):

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_m \supseteq \dots \qquad (22)$$

конечно-порожденных подмодулей $M_m = \langle M_{1m}, \dots, M_{nm} \rangle$ правого R-модуля M и определенную ею последовательность матриц B_m ($m = 1,2, \dots$). Эта последовательность матриц удовлетворяет условию (3), и определенный ею фактор-модуль F/H - конечно-порожденный плоский левый R-модуль, потому по условию (в) он проективен. Далее, стабилизация убывающей цепи (22) следует из теоремы 3 .

(с) $\Longrightarrow$ (в). Рассмотрим произвольную возрастающую цепь

$$R_n \cdot A_1 \subseteq R_n \cdot A_2 \subseteq \dots \subseteq R_n \cdot A_m \subseteq \dots \qquad (23)$$

левых идеалов $R_n \cdot A_m$ ($m = 1,2, \dots$) кольца R_n, где матрицы A_m ($m = 1,2, \dots$) удовлетворяют соотношению

$$A_m = A_m \cdot A_{m+1} . \qquad (24)$$

Положим $B_m = 1 - A_m$. Тогда

$$B_{m+1} = B_m \cdot B_{m+1} \quad (m = 1,2, \dots) . \qquad (25)$$

Очевидно, последовательность $n \times n$-матриц B_m ($m = 1,2, \dots$) удовлетворяет условию (3). Как показано в теореме 3, условие (с) влечет стабилизацию убывающей цепи

$$B_1 \cdot R_n \supseteq B_2 \cdot R_n \supseteq \dots \supseteq B_m \cdot R_n \supseteq \dots$$

главных правых идеалов $B_m \cdot R_n$ ($m = 1,2, \dots$) кольца R_n в силу соотношения (I5). Согласно теореме 6 [7, с. 571] стабилизация последней убывающей цепи главных правых идеалов кольца R_n влечет стабилизацию возрастающей цепи (23). Из теоремы 4 [7, с.568] вытекает, что всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен. Доказательство закончено.

Теорема 5. Для кольца R следующие условия эквивалентны:

(а) всякий циклический плоский левый R-модуль имеет проективное покрытие;

(в) всякий циклический плоский левый R-модуль проективен;

(с) для любого правого R-модуля стабилизируется всякая убывающая цепь типа (3) его конечно-порожденных подмодулей, для которых матрицы B_m ($m = 1,2, \ldots$) являются диагональными.

Доказательство проводится, как в теореме 4.

Обозначим через $dim_r R$ размерность Голди [5, с.165] кольца R.

Теорема 6. Пусть R – кольцо, $Z(R)$ - его сингулярный идеал. Фактор-кольцо $R/Z(R)$ вложимо в регулярное кольцо. Если $dim_r R < \infty$, то полное кольцо частных Q кольца R полусовершенно.

Доказательство. Пусть I_R - инъективная оболочка кольца R, $H = Hom_R(I, I)$ - кольцо эндоморфизмов правого R-модуля I_R, $Q = Hom_H(I, I)$ - кольцо эндоморфизмов левого H-модуля I, которое называется полным кольцом частных кольца R [5, с.151]. В силу упражнения 2 [5, § 4.5, с.172] существует гомоморфизм колец $\theta : R \to H/J(H)$. Легко видеть, что $Ker\,\theta = Z(R)$. Согласно предложению 2 [5 с.163] кольцо $H/J(H)$ регулярно. Пусть теперь $dim_r R < \infty$. Согласно предложению 5.8 [11, с.127] и предложению 2 [5, с.165] $dim_r Q < \infty$ и I_Q - инъективная оболочка кольца Q, $I = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$ - прямая сумма неразложимых инъективных модулей. В силу упражнения 4 [5, § 4.5, с.173] $Q = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i \cdot Q$, где e_i - примитивные идемпотенты кольца Q. Согласно предложению 2 [5, с.165] $H = \bigoplus_{i=1}^{n} H \cdot E_i$, E_i - примитивные идемпотенты и $\sum_{i=1}^{n} E_i = 1$, $E_i \cdot I = I_i$. Ввиду леммы 1 [5, с.151] существует эпиморфизм H-модулей $\varphi : H \to_H I$; $\varphi(h) = h \cdot 1$, $1 \in Q$, $Ker\,\varphi = \{h \mid h \in H,\ h \cdot 1 = 0\}$. Положим $\mathfrak{A} = Ker\,\varphi$. Так как $E_i \cdot 1 = e_i$, то $h \cdot E_i \cdot 1 = 0$, $\forall h \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{A} E_i \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда $I \cong H/\mathfrak{A} = (\bigoplus_{i=1}^{n} HE_i)/(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{A} E_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (HE_i/\mathfrak{A} E_i)$.

Поэтому I является диаграммой Адзумаи и согласно предложению 18.26 [10, с.78] Q - полусовершенное кольцо. Доказательство закончено.

Теорема 7. Если для кольца R $dim_r R < \infty$, то всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен.

Доказательство. В силу теоремы 6 полное кольцо частных Q

кольца R является полусовершенным кольцом, а в силу следствия 2 [6, с.156] всякий конечно-порожденный левый Q-плоский модуль проективен. Поскольку, ввиду леммы I [5, с.151], кольцо R вкладывается в кольцо Q, то согласно теореме I.2 [8, с.66] всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен. Доказательство закончено.

Теорема 8. Для области целостности R следующие условия эквивалентны:

(а) всякая убывающая цепь типа (3) конечно-порожденных правых идеалов кольца R стабилизируется;

(в) для любого правого R-модуля всякая убывающая цепь типа (3) его конечно-порожденных подмодулей стабилизируется;

(с) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен.

Доказательство. Доказательство справедливости импликации (а) $\Longrightarrow$ (в) проведем в двух пунктах. Пусть кольцо R однородное [3, с.222]. Тогда оно будет правым кольцом Ope и поэтому вкладывается в свое правое тело частных. В силу следствия 2 [6, с.156] и теоремы I.2 [8, с.66] над кольцом R всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен. Используя теорему 4, получим стабилизацию любой убывающей цепи типа (3) конечно-порожденных подмодулей любого правого R-модуля.

2. Пусть теперь кольцо R неоднородное. Значит, существуют ненулевые элементы a и b кольца R такие, что $aR \cap bR = 0$. Тогда $aR \oplus bR$ - прямая сумма правых идеалов и $\sum_{m=1}^{n} a^m \cdot b \cdot R$ - свободный правый R-модуль ранга n для любого n. Далее, как и в доказательстве теоремы 3, показывается, что для всякой последовательности матриц B_m $(m = 1,2,\dots)$, удовлетворяющих условию (3), существует целое число l такое, что $B_l \cdot B_{l+1} \dots B_{l+p} = B_l \cdot B_{l+1} \dots B_{l+p+q} \cdot U_q$. Отсюда следует условие (в).

Импликация (в) $\Longrightarrow$ (а) очевидна, а (в) $\Longrightarrow$ (с) следует из теоремы 4. Доказательство закончено.

Будем говорить, что проективный левый R-модуль P типа P^0, если фактор-модуль $P/J(R) \cdot P$ конечно-порожден.

Теорема 9. Для кольца R следующие условия эквивалентны:

(а) всякий проективный левый R-модуль типа P^0 конечно-порожден;

(в) для любого натурального n и любого правого R-модуля стабилизируется всякая убывающая цепь типа (3):

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_m \supseteq \dots \qquad (3')$$

его конечно-порожденных подмодулей $M_m = \langle \mu_{1m}, \dots, \mu_{nm} \rangle$, причем $(\mu_{1m+1} \dots \mu_{nm+1}) = (\mu_{1m} \dots \mu_{nm}) \cdot B_m$ и $n \times n$ - матрицы B_m ($m = 1,2, \dots$) удовлетворяют дополнительному условию

$$B_m \equiv A \equiv A^2 (\mathrm{mod}\ J(R_n)) \ (m = 1,2, \dots). \qquad (28)$$

Доказательство. (а) $\Longrightarrow$ (в). Рассмотрим убывающую цепь (27). Так как последовательность матриц B_m ($m = 1,2, \dots$) удовлетворяет условию (3), то имеем

$$B_{l+1} \cdot B_{l+2} \dots B_{l+p+q} = B_{l+1} \cdot B_{l+2} \cdot Q_{p+q} \cdot B_l \cdot B_{l+1} \cdot B_{l+p+q} . \qquad (29)$$

Положим $Z_q = \prod_{i=1}^{p+q} B_{l+i} - \prod_{i=1}^{p+q} B_{l+i} \cdot Q_{p+q} \cdot B_l$. Учитывая соотношения (28), получим, что

$$C_q^2 = \mathcal{E}_q \cdot C_q , \quad Z_q \in J(R_n) \ (q = 1,2, \dots), \qquad (30)$$

где $C_q = B_{l+1} \cdot B_{l+2} \dots B_{l+p+q}$, $\mathcal{E}_q = 1 - Z_q$. Поскольку $\mathcal{E}_q$ - обратимый элемент, то соотношения (30) влекут, что

$$\mathcal{E}_q^{m-1} \cdot C_q \cdot \mathcal{E}_q^{-m} = \mathcal{E}_q^{m-2} \cdot C_q \cdot \mathcal{E}^{-m+1} \cdot \mathcal{E}_q^{m-1} \cdot C_q \cdot \mathcal{E}^{-m} \ (m = 1,2, \dots). \qquad (31)$$

Положим $\mathcal{D}_m = 1 - \mathcal{E}_q^{m-1} \cdot C_q \cdot \mathcal{E}^{-m}$. Тогда из равенства (31) следует, что

$$\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_m \cdot \mathcal{D}_{m+1} . \qquad (32)$$

Пусть F^* - свободный левый R - модуль с базой $y_1, y_2, \dots, y_n$. Положим $y = (y_1, \dots, y_n)^{tr}$, $P_m = \langle \rho_{1m}, \dots, \rho_{nm} \rangle$ - подмодуль модуля F^* , порожденный его элементами $\rho_{1m}, \rho_{2m}, \dots, \rho_{nm}$, и

$$(\rho_{1m} \dots \rho_{nm}) = \mathcal{D}_m \cdot y . \qquad (33)$$

Очевидно, что $P_m \subseteq P_{m+1}$. Положим $P_0 = \bigcup_{1}^{\infty} P_m$. Покажем, что P_0 - проективный левый R - модуль типа P^0 . Во-первых, P_0 - чистый подмодуль модуля F^* . Действительно, пусть $a_1, a_2, \dots, a_\kappa$ - элементы модуля P_0 . Легко видеть, что существует такое целое S , что $a_i \in P_S$ ($i = 1,2, \dots, \kappa$). Далее, с одной стороны, имеем $a_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} y_j = (\gamma_{i1} \dots \gamma_{in}) \cdot y$ и, с другой стороны, $a_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} \rho_{jS} = (\tau_{i1} \dots \tau_{in})(\rho_{1S} \dots \rho_{nS})^{tr} = (\tau_{i1} \dots \tau_{in}) \cdot \mathcal{D}_S \cdot y$.

Отсюда в силу свободности базы $y_1, y_2, \dots, y_n$ получим, что $(\gamma_{i1} \dots \gamma_{in}) = (\tau_{i1} \dots \tau_{in}) \mathcal{D}_S = (\tau_{i1} \dots \tau_{in}) \mathcal{D}_S \cdot \mathcal{D}_{S+1} = (\gamma_{i1} \dots \gamma_{in}) \mathcal{D}_{S+1}$. Значит, $a_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} y_j = (\gamma_{i1} \dots \gamma_{in}) y =$

$= (\gamma_{i1} \cdots \gamma_{in}) \mathcal{D}_{s+1} \cdot y = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} p_{js+1}$. Следовательно, согласно теореме 2.4 [13, с.383] P будет чистым подмодулем в модуле F^*. Так как F^* – свободный левый R-модуль, то чистота подмодуля P влечет, что фактор-модуль F^*/P плоский. Поскольку модули F^*, P счетно-порождены, то в силу теоремы 3.2 [14, с.89] модуль P будет проективным. Во-вторых, P – модуль типа P°, что мы теперь и покажем. Положим $\bar{a} = a + J(R)\cdot M$, $\bar{M}' = \{\bar{a}' / a' \in M'\}$, где a – элемент, M' – подмодуль левого R-модуля M. Так как $\bar{\mathcal{D}}_m = (\bar{d}_{ijm}) = \bar{\mathcal{D}}_{m+1}$, $d_{ijm} \in R$, то $\bar{p}_m = \bar{p}_{m+1}$ и $\bar{p} = \bar{p}_m$. Поскольку согласно предложению 3 [5, с.208] $J(R)\cdot P = P \cap J(R)\cdot F^*$, то $P/J(R)P \cong \bar{P} = \bar{P}_m$.

Поэтому фактор-модуль $P/J(R)\cdot P$ конечно-порожден, и проективный левый R-модуль P является модулем типа P°. Согласно условию (а) он будет конечно-порожденным. Значит, существует такое целое l, что $P = P_K$ при $K \geq l$. Отсюда $(p_{1K+1} \cdots p_{nK+1})^{tr} = U_K (p_{1n} \cdots p_{nK})$ и, принимая во внимание (33), получим, что

$$\mathcal{D}_{K+1} = U_K \cdot \mathcal{D}_K = U_K \cdot \mathcal{D}_K \cdot \mathcal{D}_{K+2} = \mathcal{D}_{K+2}^2 .$$

Значит, элемент $\mathcal{D}_K$ идемпотентен и поэтому идемпотентен элемент $C_q \cdot \mathcal{E}_q^{-1}$ ($q = 1,2, \ldots$). Легко видеть $C_{q+1}\mathcal{E}_{q+1}^{-1} = C_q \cdot \mathcal{E}_q^{-1} \cdot \mathcal{E}_q B_{l+p+q+1} \mathcal{E}_{q+1}$. Так как $C_q \cdot \mathcal{E}_q^{-1} \equiv C_{q+1} \cdot \mathcal{E}_{q+1}^{-1} \pmod{J(R_n)}$, то $C_q \cdot R_n = C_{q+1} \cdot R_n$ ($q = 1,2, \ldots$). Отсюда следует стабилизация цепи (27).

(в) $\Longrightarrow$ (а). Пусть P – проективный левый R-модуль типа P°. Согласно лемме 3 [12, с.72] достаточно доказать конечную порожденность левого идеала $J = U_1^\infty R_n A_m$ кольца R_n, где элементы A_m ($m = 1,2, \ldots$) удовлетворяют условию $A_m = A_m \cdot A_{m+1}$, $A_m \equiv A = A^2 \pmod{J(R^n)}$. Положим $B_m = 1 - A_m$. Очевидно, что $B_{m+1} = B_m \cdot B_{m+1}$ и последовательность матриц B_m ($m = 1,2, \ldots$) удовлетворяет условию (3) и дополнительному требованию в условии (в) нашей теоремы. Поэтому согласно условию (в) убывающая цепь $B_1 \cdot R_n \supseteq B_2 \cdot R_n \supseteq \ldots$ стабилизируется, что на основании теоремы 6 [7, с.571] влечет стабилизацию возрастающей цепи $R_n \cdot A_1 \subseteq R_n A_2 \subseteq \ldots$ главных идеалов $R_n \cdot A_m$ ($m = 1,2, \ldots$) кольца R_n. Отсюда следует, что левый идеал $J = U_1^\infty R_n A_m$ является циклическим, следовательно, исходный проективный левый R-модуль P конечно-порожден. Доказательство закончено.

Будем обозначать через $^n M$ прямую сумму n экземпляров правого R-модуля M, $\bar{R} = R/J(R)$ – фактор-кольцо. $\bar{M} = M/M\cdot J(R)$ – фактор-модуль. Если для проективного правого R-модуля P модуль $\bar{P}$ n-порожден, то назовем P модулем типа $P^\circ(n)$. Пусть

Σ либо некоторое множество гомоморфизмов конечно-порожденных проективных правых R-модулей, либо некоторое множество квадратных матриц над кольцом R. Тогда R_Σ обозначает Σ-локализацию кольца R, как в работах [I5, I6, I7], и является универсальным Σ-обращающим кольцом.

Теорема I0. Для каждого натурального числа n существует такое полулокальное кольцо T, что выполнены следующие условия:

(а) всякий проективный правый T-модуль типа $P^0(q)$ $(q \leq n-1)$ конечно-порожден;

(в) существует не конечно-порожденный проективный правый T-модуль типа $P^0(n)$;

(с) все конечно-порожденные проективные правые T-модули свободны.

Доказательство. Пусть k - некоторое поле, k - алгебра $P = k\langle A = A^2 \rangle$ получена присоединением универсальной идемпотентной $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ к полю k [I8, с.43]. Тогда матрица A определяет универсальное расщепление модуля ${}^nR$, т.е. ${}^nR = P_1 \oplus P_2$ - прямая сумма проективных правых R-модулей P_1 и P_2, определенных соответственно идемпотентными матрицами A и $1-A$.

Правый R-модуль M назвается фундаментальным [I8, с.43], если $M = M_1 \oplus M_2$ - прямая сумма R-модулей, где M_1 - свободный правый R-модуль, $M_2 = \sum_i \oplus M_{2i}$ и M_{2i} изоморфен одному из модулей P_1 или P_2. Случаи $M_1 = (0)$ или $M_2 = (0)$ не исключаются. $Fund\,R$ будет обозначать полную подкатегорию конечно-порожденных фундаментальных правых R-модулей категории AP. Согласно теореме 5.I [I8, с.43] полугруппа $S_\oplus(Fund\,R)$ порождается классами $[R], [P_1], [P_2]$, связанными с одним определяющим соотношением $[P_1] \oplus [P_2] = [{}^nR]$. В силу теоремы 5.I [I8, с.43] каждый подмодуль фундаментального правого R-модуля изоморфен фундаментальному правому R-модулю. Так как $r.gl.dim\,k = 0$, то снова согласно теореме 5.I [I8, с.43] $r.gl.dim\,R = l.gl.dim\,R \leq 1$. Поскольку кольцо R не является классически полупростым, то $r.gl.dim\,R = 1$. Следовательно, алгебра R является лево- и правонаследственной. Так как конечно-порожденный проективный правый R-модуль P является подмодулем конечно-порожденного свободного правого R-модуля, то в силу теоремы 5.I [I8, с.43] $P = {}^mR \oplus {}^lP_i^*$, где P_i^* изоморфен либо модулю P_1^*, либо модулю P_2.

Далее, можно определить проективную ранговую функцию [I9, с.369] $\rho: S_\oplus(Fund\,R) \to N$ (N - полугруппа целых положител-

ных чисел), заданную следующим образом:

$$\rho([R])=1,\ \rho([P_1])=n-i_0,\ \rho([P_2])=i_0\ ,$$

где i_0-некоторое целое число, $0<i_0<n$. Так как полугруппа $S_\oplus(Fund\,R)$ порождается элементами $[R],[P_1],[P_2]$ с определяющим соотношением $[P_1]+[P_2]=[^nR]$, то, очевидно, ρ будет гомоморфизмом. Эта функция ρ проективного ранга определяет функцию внутреннего проективного ранга [I9, с.272, теорема 23] следующим образом: если дана идемпотентная $m\times m$- матрица E над кольцом R, P - конечно-порожденный проективный правый R-модуль, определенный матрицей E, то полагаем $r(E)=\rho([P])$; если $\mathcal{D}$ -произвольная $m\times m$-матрица над кольцом R, то положим $r(\mathcal{D})=min\{r(E),\mathcal{D}=B\cdot E\cdot C\}$, где E - идемпотентная матрица. Так как $\rho([P])\neq 0$ при $P\neq(0)$, $P\in Fund$, то $r(E)=\rho([P])\neq 0$ при $E\neq 0$. Значит, функция r честная [I5, с. 272], функция r удовлетворяет закону нуля [I9, с.270], т.е. для любых матриц C_1, C_2 над кольцом R, если $C_1\cdot C_2=0$, то $r(C_1)+r(C_2)\leq r(E)$ для каждой идемпотентной матрицы E такой, что $C_1=C_1\cdot E$, $C_2=E\cdot C_2$. Теперь в силу теоремы 2.2 [I9, с.271] множество $\mathcal{P}$ всех r-неполных квадратных матриц над кольцом R образует минимальный первичный матричный идеал, и локализация $R_{\mathcal{P}}$ относительно матричного идеала $\mathcal{P}$ является телом.

Далее, построим гомоморфизм k-алгебр $\varphi: R\to k\oplus k$, полагая $\varphi(a_{ij})=\delta_{ij}$ $(0,1)$, $\varphi(1)=1$, где δ_{ij} - символ Кронекера. Обозначим через Σ множество всех квадратных матриц $\mathcal{D}$ над алгеброй R таких, что матрица $\varphi(\mathcal{D})$ обратима над алгеброй $k\oplus k$. Если $m\times m$-матрица $\mathcal{D}$ из Σ, то $\alpha_{\mathcal{D}}: {}^mR\to{}^mR$ обозначает гомоморфизм модулей, определенный матрицей $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$\alpha_{\mathcal{D}}(e_1,e_2\dots e_n)=(e_1,e_2\dots e_n)\cdot\mathcal{D}\ , \qquad (I)$$

где $e_1,e_2,\dots,e_n$ - стандартная база модуля ${}^mR$. Покажем, что всякая матрица $\mathcal{D}$ из Σ является r-полной [I9, с.271]. Пусть $m\times m$-матрица E из Σ и $E=E^2$. Тогда $\varphi(E)=\varphi(E)^2$, и в силу обратимости матрицы $\varphi(E)$ получим, что $\varphi(E)=1$. Предположим, $r(E)=\rho([P])<m$ и $P={}^lR\oplus{}^sP^*$, где для определенности положим $P^*\cong P_1$ как модули (по определению фундаментального R-модуля), ${}^mR=P\oplus P'$ - прямая сумма модулей, $\alpha_E: {}^mR\to{}^mR$, α_E - соответствующий гомоморфизм, определен соотношением (I), $\alpha_E({}^mR)=R$. Так как $\varphi({}^mR)={}^m(k\oplus k)$, $\varphi(\alpha_E)=1$, то $\varphi(P)\cong{}^m(k\oplus k)$, т.е. $(k\oplus k)\oplus{}^s\varphi(P^*)\cong{}^m(k\oplus k)$. Значит, $k\oplus k$ -модуль ${}^s\varphi(P^*)$ стабильно свободен и поэтому свободен. Пришли к противоречию, ибо $\varphi(P^*)\cong\varphi(P_1)$ и мо-

дуль ${}^{S}\varphi(P_1)$ не свободен, как $k\oplus k$-модуль. Пусть теперь $\mathcal{D}$ – произвольная $m\times m$-матрица из Σ и $r(\mathcal{D})<m$. Тогда по определению $r(\mathcal{D})$ существует идемпотентная $l\times l$-матрица E такая, что $\mathcal{D}=BE\cdot C$ и $r(\mathcal{D})=r(E)$. Если $l<m$, то $\mathcal{D}$ неполная матрица [I6, с.322] и матрица $\varphi(\mathcal{D})$ не может быть обратимой. Значит, $l=m$, из обратимости матрицы $\varphi(\mathcal{D})$ следует обратимость матрицы $\varphi(E)$. Как показано выше, для идемпотентной $l\times l$-матрицы E из Σ неравенство $r(E)<l$ невозможно. Следовательно, для любой $m\times m$-матрицы $\mathcal{D}$ из Σ имеем $r(\mathcal{D})=m$, и матрица $\mathcal{D}$ является r-полной. Отсюда следует, что гомоморфизм $\alpha_{\mathcal{D}}: {}^{m}R\to {}^{m}R$, определенный матрицей $\mathcal{D}$ из Σ, является r-полным [I5, с.360], так как $r(\alpha_{\mathcal{D}})=r(\mathcal{D})=m$. Обозначим через Σ_α множество всех гомоморфизмов $\alpha_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}\in\Sigma$. Далее, построим Σ_α-локализацию R_{Σ_α} кольца R, как в работе [I5, с.364]. Так как гомоморфизмы $\alpha_{\mathcal{D}}$ из Σ_α являются r-полными, Σ_α – фактор-замкнуто, R – наследственное кольцо, то в силу теоремы 4.2 [I6, с. 366] имеет место вложение $R_{\Sigma_\alpha}\longrightarrow R_{\varphi}$. Функция внутреннего ранга, определенная для матриц над телом R_φ, индуцирует функцию r внутреннего проективного ранга для кольца R_{Σ_α}. Так как $R_{\Sigma_\alpha}\cong R_\Sigma$ как кольцо, то эта функция в свою очередь индуцирует честную проективную функцию ρ на полугруппе $S_\oplus(R_\Sigma)$ – классов $[P]$ конечно-порожденных проективных правых R_Σ-модулей ($[P]$ означает класс всех проективных R_Σ-модулей, изоморфных конечно-порожденному проективному правому R_Σ-модулю P). Согласно следствию к теореме 3.I [20, с.686] R_Σ – полулокальное кольцо. В силу теоремы 4.2 [I5, с.366] каждый конечно-порожденный проективный правый R_Σ-модуль стабильно индуцируется некоторым конечно-порожденным проективным правым R-модулем P. Пусть F – m-порожденный проективный правый R_Σ-модуль, причем m минимальный, $m<n$, $\rho([F])<n$, и модуль F не содержит в качестве прямого слагаемого модуль R_Σ. Покажем, что $F=(0)$. Пусть модуль $F\neq(0)$. Так как согласно теореме 4.2 [I5, с. 366] проективный R_Σ-модуль F стабильно индуцируется конечно-порожденным проективным правым R-модулем P, равным ${}^{t}R\oplus {}^{q}P^{+}$ где модуль P^* изоморфен либо P_1, либо P_2, значит, ${}^{l}R_\Sigma\oplus F\cong {}^{t}R_\Sigma\oplus {}^{q}R^{+}$. Так как R_Σ – полулокальное кольцо, то согласно следствию I.4 [2I, с.I43] получим, что либо $F={}^{l-t}R_\Sigma\oplus {}^{q}P_\Sigma^{+}$ либо ${}^{l}P_\Sigma^{*}\cong {}^{l-t}R_\Sigma\oplus F$. Последний изоморфизм невозможен при $l-t>0$, потому, что фактор-модуль $\bar{P}_\Sigma^{+}$ не содержит в качестве прямого слагаемого модуль $\bar{R}_\Sigma$, ибо ${}^{q}\bar{P}^{+}\cong {}^{q}\bar{P}_1$. Значит, $F\cong$

$\cong {}^{t-\ell}R_\Sigma \oplus {}^{q}P^*_\Sigma$ – это противоречит предположению относительно модуля F. Итак, $t=\ell$ и $F \cong {}^{q}P^*_\Sigma$. Значит, фактор-модули $\bar{F}$ и ${}^{q}\bar{P}^*_\Sigma$ изоморфны. Но последний изоморфизм невозможен, потому что модуль $\bar{F}$ порождается не более чем m элементами, $m<n$, а модуль ${}^{q}\bar{P}^*_\Sigma$ не может порождаться менее чем $q \cdot n$ элементами. Итак, предположение $F \neq (0)$ приводит к противоречию.

Пусть теперь F – m-порожденный проективный правый R_Σ-модуль, причем m-минимальный, $m<n$, $p([F])<n$, $F \neq (0)$. Согласно доказанному модуль F должен содержать в качестве прямого слагаемого модуль R_Σ, предположим $F = {}^{\ell}R_\Sigma \oplus F^*$ и ℓ-максимальный. Значит, подмодуль F^* проективен и не содержит в качестве прямого слагаемого модуля R_Σ, F^* m'-порожден, $m' \leq m < n$, $p([F^*]) < n$. Согласно доказанному имеем, что модуль $F^* = (0)$. Следовательно, $F = {}^{\ell}R_\Sigma$, $\ell = m$, $p([F]) = \ell < n$ и модуль F R_Σ-свободен.

Теперь покажем, что все проективные правые R_Σ-модули типа $P^0(q)$ $(0<q<\infty)$ конечно-порождены. Пусть F – проективный правый R_Σ-модуль типа $P^0(q)$. Тогда фактор-модуль $\bar{F}$ изоморфен либо $\bar{R}_\Sigma$-модулю ${}^{\ell}\bar{R}_\Sigma \oplus {}^{t}(0 \oplus k)$, либо модулю ${}^{\ell'}R_\Sigma \oplus {}^{t'}(k \oplus 0)$.

Пусть $\bar{F} = {}^{\ell}\bar{R}_\Sigma \oplus {}^{t}(0 \oplus k)$, P^* – проективный R_Σ-модуль, определенный матрицей $\lambda_\Sigma(1)$ ($\lambda_\Sigma : R \to R_\Sigma$ – универсальный Σ-обращающий гомоморфизм). Тогда

$$ {}^{n}\bar{F} \cong {}^{n\cdot\ell}\bar{R}_\Sigma \oplus {}^{n\cdot t}(0 \oplus k) \cong {}^{n\ell}\bar{R}_\Sigma \oplus {}^{t}\bar{P}^* $$

согласно теореме 5 [22, с.233] проективные R_Σ-модули ${}^{n}F$ и ${}^{n\ell}R_\Sigma \oplus {}^{t}P^*$ изоморфны. Следовательно, модуль ${}^{n}F$ конечно-порожден. Таким будет и модуль F.

Рассмотрим теперь k алгебру $R(n) = k\langle x_{ij}^{(m)} \ (i,j=1,2,\dots,n) \mid X_m = X_{m+1} \cdot X_m \ (m=1,2,\dots)$, порожденную элементами $x_{ij}^{(m)}$ $n \times n$-матриц $X_m = (x_{ij}^{(m)})$ и определяющими соотношениями

$$ X_m = X_{m+1} \cdot X_m . \qquad (2) $$

Алгебра $R(n)$ универсальна относительно свойств $X_m = X_{m+1} \cdot X_m$ [19, с.364]. Рассмотрим свободный правый $R(n)$-модуль $F = {}^{n}R(n)$ с базой $e_1, e_2, \dots e_n$ и его подмодуль $K = U_1^{\infty} K_m$, где $K_m = \sum_{i=1}^{n} u_{mi} R(n)$ и элементы $u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mn}$ $(m=1,2,\dots)$ определяются равенством

$$ (u_{m1} u_{m2} \dots u_{mn}) = (e_1 e_2 \dots e_n) \cdot X_m . \qquad (3) $$

Пусть $a_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \gamma_{ij}$ $(j = 1,2,\dots,l)$ -произвольные элементы из модуля K. Соотношения (3) и (2) влекут включение $K_m \subseteq K_{m+1}$, поэтому существует такое q, что $a_j \in K_q$, $a_j = \sum_{i=1}^{n} u_{qi} \cdot v_{ij} =$

$= (e_1, e_2 \dots e_n) X_q \cdot (v_{1j}\, v_{2j} \dots v_{nj})$ $(j = 1,2,\dots,l)$.

Значит, $(\gamma_{1j}\, \gamma_{2j} \dots \gamma_{nj})^{tr} = X_q (v_{1j}\, v_{2j} \dots v_{nj})^{tr} =$

$= X_{q+1} X_q (v_{1j}\, v_{2j} \dots v_{nj})^{tr} = X_{q+1} (\gamma_{1j}\, \gamma_{2j} \dots \gamma_{nj})^{tr}$.

Теперь имеем $a_j = (e_1 e_2 \dots e_n)(\gamma_{1j}\, \gamma_{2j} \dots \gamma_{nj})^{tr} = (e_1 e_2 \dots e_n) X_{q+1} \cdot$

$\cdot (\gamma_{1j}\, \gamma_{2j} \dots \gamma_{nj})^{tr} = \sum_{i=1}^{n} u_{q+1,i}\, \gamma_{ij}$ $(j = 1,2,\dots,l)$.

Отсюда согласно теореме 2.4 [I3, с.383] следует, что K является чистым подмодулем F и фактор-модуль F/K - $R(n)$ - плоским. Поскольку модуль K счетно порожден, то в силу теоремы 3.2 [I4, с.89] K будет проективным $R(n)$-модулем. Определим гомоморфизм $\varphi_n : R(n) \to R$, где $R = k\langle A = A^2 \rangle$ - вышепостроенная k-алгебра, полагая $\varphi_n(x_{ij}^{(m)}) = a_{ij}$ $(i,j = 1,2,\dots,n;$ $m = 1,2,\dots)$. Очевидно, что φ_n-эпиморфизм. Обозначим через $\Sigma(n)$ множество всех квадратных матриц $\mathcal{D}$ над кольцом $R(n)$ таких, что матрица $\varphi_n(\mathcal{D})$ обратима над алгеброй R_Σ. Из свойства универсальности легко следует, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R(n) & \xrightarrow{\lambda_{\Sigma(n)}} & T \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n\Sigma} \\ R & \longrightarrow & R_\Sigma \end{array} \qquad (4)$$

где кольцо T является $\Sigma(n)$-локализацией кольца $R(n)$; $\lambda_{\Sigma(n)}$- универсальным $\Sigma(n)$-обращающим гомоморфизмом. Так как R_Σ -полулокальное кольцо, φ_n-эпиморфизм, то согласно следствию к теореме 3.I [20, с.686] T будет полулокальным кольцом. Положим $K^* = U_1^\infty K_m^*$, где $K_m^* = \sum_{i=1}^{n} u_{mi}^* T$ - подмодуль и u_{m1}^*, $u_{m2}^*, \dots, u_{mn}^*$ являются элементами правого T-модуля ${}^nT$ с базой $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$, определенные равенством

$$(u_{m1}^*\, u_{m2}^* \dots u_{mn}^*) = (e_1^* e_2^* \dots e_n^*) X_m^* \qquad (5)$$

и $X_m^* = \lambda_{\Sigma(n)}(X_m)$ $(m = 1,2,\dots)$. Далее, как и выше, показывается, что подмодуль K^* является чистым в модуле ${}^nT$,

фактор-модуль ${}^{n}T/K^{*}$ – T-плоским и K^{*} – проективный T-модуль. Так как $Ker\,\varphi_{n\Sigma} \subseteq J(T)$, $\varphi_n(X_m) = A$, то фактор-модуль $\bar{K}^{*}$ является n-порожденным. Следовательно, правый T-модуль K^{*} является модулем типа $P^{\circ}(n)$. Покажем, что модуль K^{*} не конечно-порожден. Допустим, что он конечно-порожден. Тогда равенство $X^{*}_{m} = X^{*}_{m+1} \cdot X^{*}_{m}$ и (5) влекут соотношение $K^{*}_{m} \subseteq K^{*}_{m+1}$, поэтому в силу конечной порожденности модуля K^{*}, равного $\bigcup_{1}^{\infty} K^{*}_{m}$, существует такое целое число q, что $K^{*}_{q} = K^{*}_{q+1} = \ldots$. Тогда $u^{*}_{\ell j} \in K^{*}_{\ell-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ \ell > q)$,

$$u^{*}_{\ell j} = \sum_{i=1}^{n} u^{*}_{\ell-1 i}\, c_{ij};\ (e^{*}_{1} e^{*}_{2} \ldots e^{*}_{n}) X^{*}_{\ell} = (u^{*}_{\ell 1}\, u^{*}_{\ell 2} \ldots u^{*}_{\ell n}) =$$

$$= (u^{*}_{\ell-11}\, u^{*}_{\ell-12} \ldots u^{*}_{\ell-1n}) \cdot C = (e^{*}_{1} \cdot e^{*}_{2} \ldots e^{*}_{n}) \cdot C;\ C = (c_{ij})_{n \times n}.$$

Отсюда в силу свободности базы $e^{*}_{1}, e^{*}_{2}, \ldots, e^{*}_{n}$ и соотношения $X^{*}_{\ell-1} = X^{*}_{\ell} \cdot X^{*}_{\ell-1}$ следует, что $X^{*}_{\ell} = X^{*}_{\ell-1} \cdot C = X^{*}_{\ell} \cdot X^{*}_{\ell-1} \cdot C$, т.е.

$$X^{*}_{\ell} = X^{*2}_{\ell} \quad (\ell > q). \tag{6}$$

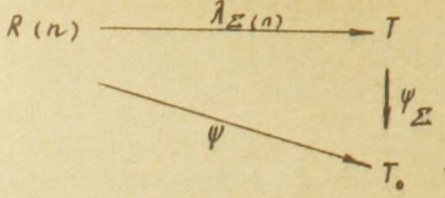
Далее, введем k-алгебру R_0, порожденную алфавитом x, y с одним определяющим соотношением $x \cdot y = 0$, т.е., как в работе [24], $R_0 = k\langle x, y \mid x \cdot y = 0 \rangle$.

Пусть $\varphi_0 : R_0 \to k \oplus k$ – гомоморфизм k-алгебр такой, что $\varphi_0(x) = (1,0)$, $\varphi_0(y) = (0,1)$, Σ_0-множество всех квадратных матриц $\mathcal{D}$ над кольцом R_0 таких, что матрица $\varphi_0(\mathcal{D})$ обратима над алгеброй $k \oplus k$, T_0 – Σ_0-локализация кольца R_0 и $\mathcal{E}_0 = x + y$.

Определим гомоморфизм k-алгебр $\psi : R(n) \to T_0$ следующим образом: $\psi(x^{(m)}_{ij}) = \delta_{ij} \cdot \mathcal{E}_0^{-m-1} \cdot y \cdot \mathcal{E}_0^{m}$ $(m = 1, 2, \ldots;$ $i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Легко видеть, что для любой матрицы $\mathcal{D}$ из множества $\Sigma(n)$ матрица $\psi(\mathcal{D})$ обратима над кольцом T_0, поскольку имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} R(n) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & T_0 \arrow[d, "\varphi_0 \Sigma"] \\ R \arrow[r, "f"] & k \oplus k \end{tikzcd},$$

где k-гомоморфизм f на k-алгебре $R = k\langle A = A^2 \rangle$ определен следующим образом: $f(a_{ij}) = \delta_{ij}\,(0,1)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Значит, можно построить коммутативную диаграмму



Теперь равенства (6) влекут, что $1 \cdot \mathcal{E}_0^{-q-1} \cdot y \mathcal{E}_0^{q} = [1 \cdot \mathcal{E}^{-q-1} y \mathcal{E}^{q}]^t$ (1 - единичная $n \times n$- матрица) и $y = y \cdot \mathcal{E}_0^{-1} \cdot y$. Как показано в работе [24], последнее равенство невозможно. Следовательно, правый T -модуль K^t типа $P^0(n)$ не конечно-порожден. Рассмотрим теперь проективный правый T -модуль P типа $P^0(q)$ $(q \leq n-1)$. Исходя из диаграммы (4), построим R_Σ-модуль $P \otimes_T R_\Sigma$. Так как $\varphi_{n\Sigma}$ в диаграмме (4) является эпиморфизмом и легко видеть $\ker \varphi_{n\Sigma} \leq J(T)$, то (положив $\ker \varphi_{n\Sigma} = \mathcal{A}$) имеем, что $R_\Sigma = T/\mathcal{A}$, $R_\Sigma / J(R_\Sigma) \cong T/J(T)$,

$$P/P \cdot J(R) \cong P \otimes_T (T/J(T)) \cong P \otimes_T (R_\Sigma / J(R_\Sigma)) \cong (P \otimes_T R_\Sigma)/(P \otimes_T R_\Sigma) J(R_\Sigma).$$

Значит, R_Σ -модуль $P \otimes_T R_\Sigma$ является модулем типа $P^0(q)$ $(q \leq n-1)$ и в силу вышедоказанного он свободен, поэтому будет свободным $\bar{T}$ -модуль $P/P \cdot J(T)$. Отсюда в силу теоремы 6 [22, с.233] и вытекает свободность T -модуля P . Итак, все проективные правые T -модули P типа $P^0(q)$ $(q \leq n-1)$ свободны. Теперь покажем, что всякий конечно-порожденный проективный правый T -модуль P свободен. Рассмотрим его фактор-модуль $\bar{P}$, он изоморфен одному из T -модулей ${}^t\bar{T} \oplus {}^t(0 \oplus k)$, ${}^t T \oplus {}^t(k \oplus 0)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{P} \cong \bar{T} \oplus {}^t(0 \oplus k)$. Отсюда ${}^n\bar{P} \cong {}^{nt}\bar{T} \oplus {}^t K^*$ как T -модуль, согласно теореме 5 [22, с.233] получим, что проективные T- модули ${}^nP$ и ${}^{nt} T \oplus {}^t K^*$ изоморфны. Значит, T -модули ${}^t K^*$ и K^t конечно-порождены. Пришли к противоречию, поскольку, как показано выше, K^*- не конечно-порожден. Следовательно, всякий конечно-порожденный проективный правый T -модуль свободен и T есть искомое кольцо. Доказательство закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Björk J. Rings satisfying a minimum condition on principal ideals // J. reine u angew. Math. 1969. V. 236. P. 466-488.
2. Bass H. Finitic dimension and a homological generalisation of semi primary rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 466-488.
3. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т.I.
4. Скорняков Л.А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М., 1961.198 с.
5. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971. 279 с.
6. Сахаев И.И. О слабой размерности модулей, колец и алгебр // Изв.вузов. Математика. 1965. № 2. С.152-157.
7. Сахаев И.И. О кольцах, над которыми всякий конечно-порожденный плоский модуль проективен // Изв. вузов. Математика. 1969. № 9. С.65-73.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т.2. 463 с.
9. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
10. Stenström B. Rings of Quotients. Springer - Verlag: Berlin, 1975.
11. Сахаев И.И. О конечной порожденности проективных модулей // Изв. вузов. Математика. 1977. № 9. С.69-79.
12. Cohn P. On the free product of associative rings // Math. Zeit. Bd. 1959. V. 71, N4. P. 380-398.
13. Lazard D. Autour de la platitude // Bull. Soc. Math. France. 1969. V. 97. P. 81-128.
14. Cohn P., Schofield A. On the law of nullity // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1982. V. 91. P. 357-374
15. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
16. Герасимов В.Н. Локализации в ассоциативных кольцах // Сиб. мат.журн. 1982. Т.23, № 6. С.36-54.
17. Bergman J. Coproducts and some universal ring constructions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 200. P. 33-88.
18. Dicks W., Sontag E. Silvester domains // J. Pure and Appl. Alg. 1978. V. 13. P. 243-275.

19. Cohn P. Inverse Localization in Noethe rian rings // Commun. Pure and appl. Math. 1973. V.26. P. 679-691.
20. Басс Х. Алгебраическая K-теория. М.: Мир, 1973.
21. Beck I. Projective and free Modules // Math. Zeit. 1972. V. 129, N3. P. 231-234.
22. Lazard D. Liberte des lacs modules projectivs // J. Alg. 1974. V. 31. P. 437-451.
23. Герасимов В.Н., Сахаев И.И. Контрпример к двум гипотезам о проективных и плоских модулях // Сиб. мат. ж. Т.25, № 6. С.31-35.
24. Сахаев И.И. К теореме Басса и совершенных кольцах // Изв. вузов. Математика. 1988. № 12.

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП СВОИМИ ПОЛУГРУППАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

А.М.Себельдин

Говорят, что абелева группа G определяется своей полугруппой $E(G)$ (своим кольцом $E(G)$) эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп, если в этом классе не существует такой группы H, что $G \ncong H$ и $E^+(G) \cong E^+(H)$, $(E(G) \cong E(H))$.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части доказываются некоторые вспомогательные результаты и рассматривается вопрос об определяемости абелевых групп некоторых классов своими полугруппами эндоморфизмов (предложения 9.1, 11.1, 12.1, 13.1). Во второй части работы рассматриваемый вопрос полностью решается в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения (теорема 4.2).

Основные результаты были доложены на семинаре по алгебре в МГУ и ТГУ и анонсированы в [1].

Обозначим через $r(G)$ ранг абелевой группы G, группу G назовем почти делимой, если множество $\mathcal{T}(G)=\{p/pG \neq G\}$ конечно.

1. Вначале докажем следующий простой факт.

Лемма 1.1. Если $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n$ - система попарно ортогональных проекций абелевой группы G, то $G=\sum_{i=1}^{n} \oplus \mathcal{E}_i G \oplus H$.

Действительно, заметим вначале, что $\mathcal{E}_j(\sum_{i\neq j}\mathcal{E}_i)=0$, $(\sum_{i\neq j}\mathcal{E}_i)^2=\sum_{i\neq j}\mathcal{E}_i$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $n=2$. Имеем $G=\mathcal{E}_1 G \oplus (1-\mathcal{E}_1)G$. Пусть $g \in \mathcal{E}_2 G$, т.е. $g=\mathcal{E}_2(g')$ для некоторого $g' \in G$. Тогда $\mathcal{E}_1(g)=\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2(g')=0$. Таким образом, $g \in (1-\mathcal{E}_1)G$ и, следовательно, $\mathcal{E}_2 G \subseteq (1-\mathcal{E}_1)G$. Группа $\mathcal{E}_2 G$ выделяется прямым слагаемым в G, а, следовательно, и в $(1-\mathcal{E}_1)G$.

Лемма 2.1. Пусть $E^+(G) \cong E^+(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп $G, \bar{G}$ и $G=\sum_{i=1}^{n} \oplus G_i$. ψ
Тогда $\bar{G}=\sum_{i=1}^{n} \bar{G}_i$ и $E^+(G_i) \cong E^+(\bar{G}_i)$, $i=1,2,\dots,n$.

Действительно, в условиях леммы имеем $\Psi(\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j) = \Psi(\mathcal{E}_i)\Psi(\mathcal{E}_j)$ где $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ – полная система ортогональных проекций разложения (1). Следовательно, $\bar{\mathcal{E}}_i = \Psi(\mathcal{E}_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ – система ортогональных проекций группы $\bar{G}$, согласно лемме 1.1 имеем прямое разложение $\bar{G} = \sum_{i=1}^{n} \oplus \bar{\mathcal{E}}_i \bar{G} \oplus \bar{H}$ (2). Обратно, если $\bar{\mathcal{E}}_1, \ldots \bar{\mathcal{E}}_n, \bar{\mathcal{E}}$ полная система ортогональных проекций, соответствующая разложению (2), то, рассмотрев Ψ^{-1} и применив снова лемму 1.1, получаем $\bar{\mathcal{E}} = O$. Отождествляя $E^*(G_i) = \mathcal{E}_i E^*(G) \mathcal{E}_i$ и $E^*(\bar{G}_i) = \bar{\mathcal{E}}_i E^*(\bar{G}) \bar{\mathcal{E}}_i$, имеем $\Psi(E^*(G_i)) = \Psi(\mathcal{E}_i E^*(G)(\mathcal{E}_i) = \bar{\mathcal{E}}_i E^*(\bar{G}) \bar{\mathcal{E}}_i = E^*(\bar{G}_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 3.1. В условиях леммы 2.1, рассматривая представление эндоморфизмов матрицами [2, с. 259], получаем, что если $\Psi(\varphi) = \bar{\varphi} \in E^*(\bar{G})$, $\varphi \in E^*(G)$, то $\Psi(\varphi_{ij}) = \Psi(\mathcal{E}_i \varphi \mathcal{E}_j) = \bar{\mathcal{E}}_i \Psi(\varphi) \bar{\mathcal{E}}_j = \bar{\varphi}_{ij}$, где $\| \varphi_{ij} \|$ и $\| \bar{\varphi}_{ij} \|$ – матрицы эндоморфизмов φ и $\bar{\varphi}$ соответственно, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $\Psi(\varphi_{ij} + \varphi_{kl}) = \Psi(\varphi_{ij}) + \Psi(\varphi_{kl})$, если $i \neq k$ или $j \neq l$. Кроме того, ясно, что Ψ индуцирует биекцию между $Hom(G_i, G_j)$ и $Hom(\bar{G}_i, \bar{G}_j)$ для любых $i, j \in [1, 2, \ldots, n)$. Обозначения леммы 2.1 используем в дальнейшем без специальных оговорок.

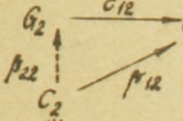
Лемма 4.1. Пусть $E^*(G) \cong E^*(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп $\bar{G}$, $G = G_1 \oplus G_2$ и существует такой гомоморфизм $\varepsilon_{12} : G_2 \to G_1$ что для любого $\alpha_{12} \in Hom(G_2, G_1)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{\varepsilon_{12}} & G_1 \\ & \searrow^{\alpha_{12}} \quad \swarrow_{\alpha_{11}} & \\ & G_1 & \end{array}$$

Тогда $Hom(G_2, G_1) \overset{\Psi}{\cong} Hom(\bar{G}_2, \bar{G}_1)$.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in Hom(G_2, G_1)$ и $\varepsilon_{12} \in Hom(G_2, G_1)$ такой, что $\alpha' \circ \varepsilon_{12} = \alpha$ для некоторого $\alpha' \in E(G_1)$. Имеем $\Psi(\alpha + \beta) = \Psi((\alpha' + \beta)(\varepsilon_{12} + \varepsilon_2))$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – проекции, соответствующие разложению $G = G_1 \oplus G_2$. Используя замечание 3.1, получаем $\Psi(\alpha + \beta) = (\Psi(\alpha') + \Psi(\beta)) \times (\Psi(\varepsilon_{12}) + \Psi(\varepsilon_2)) = \Psi(\alpha' \varepsilon_{12}) + \Psi(\beta \varepsilon_2) = \Psi(\alpha) + \Psi(\beta)$.

Лемма 5.1. Пусть $E^*(G) \overset{\Psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп $\bar{G}, G = G_1 \oplus G_2$ и существует такой гомоморфизм $\varepsilon_{12} : G_2 \to G_1$, что для любого $0 \neq \beta_{12} \in Hom(G_2, G_1)$ коммутативна диаграмма



Тогда $Hom(G_2, G_1) \overset{\Psi}{\cong} Hom(\bar{G}_2, \bar{G}_1)$.

Действительно, пусть $\alpha, \beta \in Hom(G_2, G_1)$ и $\varepsilon_{12} \in Hom(G_2, G_1)$ такой, что $\varepsilon_{12}\beta' = \beta$ для некоторого $\beta' \in E(G_2)$. Имеем $\psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha+\varepsilon_{12}\beta') = \psi((\varepsilon_1+\varepsilon_{12})(\alpha+\beta')) = \psi(\varepsilon_1+\varepsilon_{12})\,\psi(\alpha+\beta') = (\psi(\varepsilon_1)+\psi(\varepsilon_{12}))(\psi(\alpha)+\psi(\beta')) = \psi(\varepsilon_1\alpha)+\psi(\varepsilon_{12}\beta') = \psi(\alpha)+\psi(\beta)$.

Лемма 6.1. Пусть $E^*(G) \overset{\Psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп $\bar{G}, G = G_1 \oplus G_2$ и $Hom(G_2, G_1) \overset{\Psi}{\cong} Hom(\bar{G}_2, \bar{G}_1)$.

Тогда:

1) если $\bar{\gamma}_{12} = \psi(\gamma_{12})$ - мономорфизм для некоторого $\gamma_{12} \in Hom(G_2, G_1)$, то $E(G_2) \overset{\Psi}{\cong} E(\bar{G}_2)$;

2) если $\bar{\delta}_{12} = \psi(\delta_{12})$ - эпиморфизм для некоторого $\delta_{12} \in Hom(G_2, G_1)$, то $E(G_1) \overset{\Psi}{\cong} E(\bar{G}_1)$.

Действительно: 1) $\bar{\gamma}_{12} = \psi(\gamma_{12})$ - мономорфизм, $\gamma_{12} \in Hom(G_2, G_1)$, $\alpha, \beta \in E(G_2)$. Имеем $\bar{\gamma}_{12}\psi(\alpha+\beta) = \psi(\gamma_{12}\alpha+\gamma_{12}\beta) = \psi(\gamma_{12}\alpha)+\psi(\gamma_{12}\beta) = \gamma_{12}(\psi(\alpha)+\psi(\beta))$.

Следовательно, $\psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha)+\psi(\beta)$.

2) Пусть $\bar{\delta}_{12} = \psi(\delta_{12})$ - эпиморфизм, $\delta_{12} \in Hom(G_2, G_1)$, $\alpha, \beta \in E(G_1)$. Имеем $\psi(\alpha+\beta)\bar{\delta}_{12} = \psi(\alpha\delta_{12}+\beta\delta_{12}) = \psi(\alpha\delta_{12})+\psi(\beta\delta_{12}) = (\psi(\alpha)+\psi(\beta))\,\bar{\delta}_2$. Следовательно, $\psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha)+\psi(\beta)$.

Лемма 7.1. Пусть $E^*(G) \overset{\Psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп G, $\bar{G}$ и $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 \cong G_2$. Тогда $\bar{G} = \bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2$, $E(G) \overset{\Psi}{\cong} E(\bar{G})$, $E(G_i) \overset{\Psi}{\cong} E(\bar{G}_i)$,

Действительно, обозначим через ε_{12} изоморфизм $G_2 \cong G_1$, а через ε_{21} – ему обратный. Имеем $\psi(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}) = \psi(\varepsilon_{12}) + \psi(\varepsilon_{21})$ (замечание 3.1) и $[\psi(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})]^2 = \psi((\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})^2) =$ $= \psi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \psi(1_G) = 1_{\bar{G}} = (\bar{\varepsilon}_{12}+\bar{\varepsilon}_{21})^2$. Таким образом, $\bar{\varepsilon}_{12}$ и $\bar{\varepsilon}_{21}$ являются взаимно обратными, применяя леммы 4.1 и 6.1 ($\bar{\delta}_{12} = \bar{\gamma}_{12} = \bar{\lambda}_{12} = \bar{\varepsilon}_{12}$), получаем требуемые изоморфизмы.

Лемма 8.1. Пусть $E^*(G) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп G, $\bar{G}$ и $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$, где $G_1 \cong G_2$. Тогда $\bar{G} = \bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2 \oplus \bar{G}_3$, $E(G_1) \overset{\psi}{\cong} E(\bar{G}_1)$, $E^*(G_2 \oplus G_3) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G}_2 \oplus \bar{G}_3)$.

Действительно, согласно лемме 2.1 имеем $E^*(G_i) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G}_i)$, $E^*(G_2 \oplus G_3) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G}_2 \oplus \bar{G}_3)$, $E^*(G_1 \oplus G_2) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2)$, $i \in \{1,2,3\}$. Применяя лемму 7.1, имеем $E(G_1) \overset{\psi}{\cong} E(\bar{G}_1)$.

Абелеву группу G назовем S – однородной, если она разлагается в прямую сумму попарно изоморфных прямых слагаемых, т.е. $G = \sum_{i \in I} \oplus G_i$, $G_i \cong G_j$ для любых $i,j \in I$, $|I| \geqslant 2$.

Предложение 9.1. S – однородная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп тогда и только тогда, когда она определяется своим кольцом эндоморфизмов в этом классе.

Доказательство. Пусть $E^*(G) \cong E^*(\bar{G})$ для абелевых групп $\bar{G}$ и $G = \sum_{i \in I} \oplus G_i$, $G_i \cong G_j$, $i,j \in I$, $|I| \geqslant 2$. Случай, когда число слагаемых группы G конечно и нечетно, сводится к случаю четного числа слагаемых по лемме 8.1. В остальных случаях имеем $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 \cong G_2$. Применяя лемму 7.1, получаем $E(G) \cong E(\bar{G})$.

Лемма 10.1. Пусть $E^*(G) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для некоторых абелевых групп G, $\bar{G}$, полугруппа эндоморфизмов которых изоморфна подгруппе мультипликативной полугруппы кольца Q. Тогда

$$|T(G)| = |T(\bar{G})|.$$

Действительно, если эндоморфизм $\varphi_p \in E(G)$ есть умножение

на простое $p \in \mathcal{T}(G)$, то φ_p неразложим в произведение необратимых эндоморфизмов, а, следовательно, и $\psi(\varphi_p)$ обладает этим свойством. Таким образом, $\psi(\varphi_p)$ есть также умножение на некоторое простое $q \in \mathcal{T}(\bar{G})$.

Предложение 11.1. Делимые абелевы группы без кручения определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех абелевых групп.

Действительно, пусть $E^*(G) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для абелевых групп G, $\bar{G}$ и G – делимая группа без кручения. Если $r(G) = 1$, то согласно лемме 10.1 группа $\bar{G}$ делимая и без кручения. По лемме 2.1 получаем $r(\bar{G}) = 1$ и, следовательно, $G \cong \bar{G}$. Если ранг группы G не меньше двух, то согласно предложению 9.1 и [3] имеем $G \cong \bar{G}$.

Предложение 12.1. Нередуцированная абелева группа без кручения определяется своей полугруппой эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп тогда, когда ее редуцированная часть определяется своей полугруппой эндоморфизмов в этом классе.

Действительно, пусть $E^*(G) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для абелевых групп G, $\bar{G}$ и $G = G_1 \oplus G_2$ – группа без кручения, где G_1 – редуцированная, а G_2 – делимая части группы G. Тогда $\bar{G} = \bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2$, $E^*(G_i) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G}_i)$, $i \in \{1,2\}$ (лемма 2.1). Согласно предложению 11.1 имеем $\bar{G}_2 \cong G_2$.

Предложение 13.1. Нередуцированная абелева группа без кручения, ранг редуцированной части которой не превосходит ранга ее делимой части, определяется своей полугруппой эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп тогда и только тогда, когда она определяется своим кольцом эндоморфизмов в этом классе.

Действительно, пусть $E^*(G) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G})$ для абелевых групп G, $\bar{G}$ и $G = G_1 \oplus G_2$ – группа без кручения, G_1 – ее делимая, а G_2 – редуцированная части и $r(G_1) \geq r(G_2)$. Обозначим через ε_{12} изоморфное вложение группы G_2 в G_1. Используя инъективность группы G_1, согласно леммам 4.1 и 6.1 имеем $\bar{G} = \bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2$ и $E^*(G_1) \overset{\psi}{\cong} E^*(\bar{G}_1)$, $E(\bar{G}_2) \cong E(G_2)$, $Hom(G_2, G_1) \overset{\psi}{\cong} Hom(\bar{G}_2, \bar{G}_1)$. Если $r(G_1) \geq 2$, то согласно леммам 7.1 и 8.1 имеем $E(G_1) \overset{\psi}{\cong} E(\bar{G}_1)$ и $E(G) \overset{\psi}{\cong} E(\bar{G})$. Если же $r(G_1) = 1$, то $r(G_2) = 1$ (случай $G_2 = 0$ тривиален).

учитывая, что $Hom(G_2, G_1) \overset{\Psi}{\cong} Hom(\bar{G}_2, \bar{G}_1)$ и предложение 1.1, имеем $\bar{G}_1 \cong G_1$ и $E(G) \cong E(\bar{G})$.

2. Перейдем теперь к вопросу определяемости полугруппами эндоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Предложение 1.2. Абелева группа без кручения ранга 1 определяется своей полугруппой эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп, содержащем класс групп без кручения ранга 1, тогда и только тогда, когда она делимая группа.

Доказательство. Достаточность следует из предложения 1.1.

Необходимость. Пусть A - редуцированная абелева группа без кручения ранга 1. Если $|T(A)| \geq \aleph_0$, то существует абелева группа без кручения B ранга 1 такая, что $E(A) \cong E(B)$ и $A \not\cong B$ ([3]). Пусть теперь $|T(A)| < \aleph_0$. Рассмотрим такую группу B без кручения ранга 1, что $|T(B)| = |T(A)|$, $T(A) \setminus T(B) = \{p_i\}$, $T(B)/T(A) = \{p_k\}$, $i < K$, для некоторых $i, K \in \mathbb{N}$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – последовательность всех простых чисел. Имеем $E(A) \cong \mathbb{Q}[T(A)] = \{p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} \mid \alpha_s \in \mathbb{Z}$ при $p_s \notin T(A)$ и $\alpha_s \in \mathbb{N}$ при $p_s \in T(A)\}$, $E(B) \cong \mathbb{Q}[T(B)]$. Строим изоморфизм мультипликативных полугрупп $\Psi: \mathbb{Q}^*[T(A)] \cong \mathbb{Q}^*[T(B)]$ следующим образом: $\Psi(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot p_K^{\alpha_K} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_K^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_K} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$. Очевидно, что Ψ есть биекция, сохраняющая умножение, следовательно, $E^*(A) \cong E^*(B)$, $A \not\cong B$.

Предложение 2.2. Однородная вполне разложимая абелева группа G без кручения определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения тогда и и только тогда, когда она почти делима при $r(G) > 1$ и делимая при $r(G) = 1$

Доказательство. Необходимость следует из [3] и предложения 1.2.

Достаточность. Пусть $E^*(G) \cong E^*(\bar{G})$ для некоторых вполне разложимых абелевых групп без кручения G и $\bar{G}$. Если $G \cong \mathbb{Q}$, то из предложения 1.2 следует, что $G \cong \bar{G}$. Пусть теперь G - почти делима и $r(G) > 2$. Согласно предложению 9.1 и [3] имеем $G \cong \bar{G}$.

Предложение 3.2. Вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 2 определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения тогда и только тогда, когда она почти делима и типы прямых слагаемых её сравнимы.

Доказательство. Необходимость почти делимости следует из [3]. Предположим теперь, что $G = G_1 \oplus G_2$ – почти делимая вполне разложимая абелева группа и $\tau(G_1) \not\leq \tau(G_2)$. Согласно предложению 1.2 найдутся такие группы $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ ранга 1 без кручения, что типы групп G_1, G_2, $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ попарно несравнимы и $E^*(G_i) \cong E^*(\bar{G}_i)$, $i = 1,2$. Имеем $E^*(\bar{G}) = \prod_{i=1,2} E^*(G_i) \cong \cong \prod_{i=1,2} E^*(\bar{G}_i) = E^*(\bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2)$ и $G \cong \bar{G} = \bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2$.

Достаточность. Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ – почти делимая вполне разложимая группа со сравнимыми типами $\tau(G_1)$ и $\tau(G_2)$. Если $\tau(G_1) = \tau(G_2)$, то применяем предложение 2.2. Пусть теперь $\tau(G_1) > \tau(G_2)$ и $E^*(G) \cong E^*(\bar{G})$ для некоторой вполне разложимой абелевой группы $\bar{G}$ без кручения. Согласно лемме 2.1 имеем $\bar{G} = \bar{G}_1 \oplus \bar{G}_2$, $r(\bar{G}_1) = r(\bar{G}_2) = 1$. Рассмотрим $\varepsilon_{12} \in Hom(G_2, G_1)$ такой, что $\varepsilon_{12}(g_2) = g_1$, где g_1 и g_2 – элементы соответственно групп G_1 и G_2 с минимальными характеристиками $\chi(g_1)$ и $\chi(g_2)$. Пусть $\alpha_{12} \in Hom(g_2, G_1)$ и $\alpha_{12}(g_2) = g \in G_1$. Поскольку $\chi(g_1) \leq \chi(g)$, то существует такой $\alpha_{11} \in E(G_1)$, что $\alpha_{11}(g_1) = g$. Имеем $\alpha_{12} = \alpha_{11}\varepsilon_{12}$. Применяя лемму 4.1, получаем $Hom(G_2, G_1) \cong \cong Hom(\bar{G}_2, \bar{G}_1)$. Полагая $\gamma_{12} = \alpha_{12}$, согласно лемме 6.1 имеем $E(G_2) \cong E(\bar{G}_2)$. Учитывая, что группы G_1 и G_2 почти делимы, имеем $G_1 \cong \bar{G}_1$ и $G_2 \cong \bar{G}_2$, следовательно, $G \cong \bar{G}$.

Пусть $\mathcal{Q}^{(\tau)}$ – подгруппа группы $\mathcal{Q}$ типа $\tau \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ – множество всех различных типов. Положим $\Omega_n = \{\tau \in \mathcal{S} \mid |T(\mathcal{Q}^{(\tau)})| = n\}$, типы из Ω_n будем называть почти делимыми ($n = 0,1,2,\ldots$). Тип $\tau \in \Omega$ назовем изолированным в Ω', $\Omega' \subset \Omega$, если для любого $\tau \in \Omega'$ либо $\tau' = \tau$, либо $\tau' \not\leq \tau$. Множество $\Omega'' \subset \Omega$ назовем изолированным в $\Omega' \subset \Omega$, если каждый тип из Ω'' изолирован в Ω'. Подмножество $\Omega'' \subset \Omega'$ $(\Omega' \subset \Omega)$ назовем сверх изолированным в Ω', если Ω'' изолировано в Ω' и для любого $\Omega''' \subset \Omega$ из того, что Ω''' изолировано в $\Omega'' \cup (\Omega' \setminus \Omega'')$, $\Omega'' \cap (\Omega' \setminus \Omega') = \emptyset$ и $|\Omega''' \cap \Omega_n| = |\Omega'' \cap \Omega_n|$ для каждого $n = 1,2,3,\ldots$, следует $\Omega''' = \Omega''$.

Пусть $G=\sum_{i\in I}^{\oplus} G_i = \sum_{\tau\in\Omega(G)}^{\oplus} G^{(\tau)}$ - вполне разложимая абелева группа без кручения, где $G^{(\tau)}=\sum_{i\in I(\tau)}^{\oplus} G_i$, $I(\tau) = \{i\in I / \tau(G_i)=\tau\}$, $\Omega(G)$ - множество всех различных типов групп $G_i\ (i\in I)$ ранга 1. Положим $\Omega'(G)=\{\tau\in\Omega(G)/\tau$ изолирован в $\Omega(G)$ и $|I(\tau)|=1\}$.

Теорема 4.2. Вполне разложимая абелева группа G без кручения определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения тогда и только тогда, когда:

а) всякий тип из $\Omega(G)$ почти делим;

б) множество $\Omega'(G)$ сверхизолировано в $\Omega(G)$.

Доказательство. Необходимость а) следует из [3]. Предположим, что существует такое множество $\Omega'\subset\Omega$, что Ω' изолировано в $\Omega'\cup(\Omega(G)\setminus\Omega'(G))$, $\Omega'\cap(\Omega(G)\setminus\Omega'(G))=\emptyset$ и $|\Omega'\cap\Omega_n| = |\Omega'(G)\cap\Omega_n|$ для каждого $n=1,2,3,\ldots$ и $\Omega'\neq\Omega'(G)$. Положим $\bar G=\bar G_1\oplus\bar G_2$, где $\bar G_1=\sum_{\tau\in\Omega(G)\setminus\Omega'(G)}^{\oplus} G^{(\tau)}$, $\bar G_2=\sum^{\oplus} Q^{(\tau)}$. Имеем $E^*(\bar G_2)\cong\prod_{\tau\in\Omega'} E^*(Q^{(\tau)})$. Так как $|\Omega\cap\Omega_n| = |\Omega'(G)\cap\Omega_n|$ для каждого $n=1,2,3\ldots$, то, используя построение при доказательстве необходимости в предложении 1.2, получаем $E^*(\bar G_2) = E^*(\sum_{\tau\in\Omega'(G)}^{\oplus} G^{(\tau)})$. Заметим, что $\bar G_1$ и $\bar G_2$ - вполне характеристичны, следовательно, $E^*(\bar G)\cong E^*(G)$. Ясно, что $G\neq\bar G$.

Достаточность. Пусть условия а) и б) выполнены, $E^*(G)\cong E^*(\bar G)$, где $\bar G=\sum_{j\in J}^{\oplus}\bar G_j = \sum_{\tau\in\Omega(\bar G)}^{\oplus}\bar G^{(\tau)}$ - некоторая вполне разложимая абелева группа без кручения, $\bar G^{(\tau)}=\sum_{j\in J(\tau)}^{\oplus}\bar G_j$, $J(\tau)=\{j\in J/\tau(\bar G_j)=\tau\}$. Покажем вначале, что $G^{(\tau)}\cong\bar G^{(\tau)}$ для любого $\tau\in\Omega(G)$. Действительно, пусть $G_1=G^{(\tau)}$, $G_2=\sum_{\substack{\tau'\in\Omega(G)\\ \tau'\neq\tau}}^{\oplus} G^{(\tau')}$,

тогда по лемме 2.1 имеем $\bar G=\bar G_1\oplus\bar G_2$ и $E^*(G_1)\cong E^*(\bar G_1)$, $E^*(G_2)\cong E^*(\bar G_2)$. Если $|J(\tau)|>1$, то согласно предложению 2.2 получаем $G_1\cong\bar G_1$ и $\bar G_2$ не содержит прямых слагаемых ранга 1 типа τ, т.е. $G^{(\tau)}\cong\bar G^{(\tau)}$. Если $|J(\tau)|=1$ и $\tau\notin\Omega'(G)$, то

G_2 содержит прямое слагаемое ранга 1 типа, сравнимого с τ. Согласно предложению 3.2 имеем $G_1 \cong \bar{G}_1$. Учитывая предложение 2.2, имеем $\bar{G}_1 \cong \bar{G}^{(\tau)}$, т.е. $G^{(\tau)} \cong \bar{G}^{(\tau)}$.

Пусть теперь $G_1 = \sum_{\tau \in \Omega'(G)}^{\oplus} G^{(\tau)}$, тогда $\bar{G}_2$ не содержит прямых слагаемых ранга 1 типов, сравнимых с $\Omega'(G)$, и для любого $\tau \in \Omega(G) \setminus \Omega'(G)$ содержит прямые слагаемые, изоморфные $G^{(\tau)}$, кроме того, $\bar{G}_2$ не содержит прямых слагаемых ранга 1 типов, не принадлежащих $\Omega(G) \setminus \Omega'(G)$, т.е. $G_2 \cong \bar{G}_2$. Пусть $\Omega'(\bar{G})$ - множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы $\bar{G}_1$. Ясно, что $\bar{G}_1$ не содержит однородных прямых слагаемых ранга 2, $\Omega'(\bar{G})$ изолировано в $\Omega'(\bar{G}) \cup (\Omega(G) \setminus \Omega'(G))$, $\Omega'(\bar{G}) \cap (\Omega(G) \setminus \Omega'(G)) = \varnothing$, наконец, по лемме 10.1 имеем $|\Omega'(\bar{G}) \cap \Omega_n| = |\Omega'(G) \cap \Omega_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\Omega'(G)$ сверхизолировано в $\Omega(G)$, то $\Omega'(\bar{G}) = \Omega'(G)$ и, следовательно, $G \cong \bar{G}$.

Пример 5.1. Пусть τ_1, τ_2 - типы, содержащие характеристики $(0, \infty, \infty \dots)$, $(\infty, 0, \infty, \infty, \dots)$ соответственно, $G' = \sum_{\tau \in \Omega_1 \setminus \{\tau_1, \tau_2\}}^{\oplus} (\mathbb{Q}^{(\tau)} \oplus \mathbb{Q}^{(\tau)}) \oplus \mathbb{Q}^{(\tau_1)}$, $G' \oplus \mathbb{Q}^{(\tau_2)}$, тогда группа G' определяется, а группа G' не определяется своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Литература

1. Себельдин А.М. Определяемость полугруппами эндоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Ч. II. Львов, 1987. С. 253.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т.2. 416 с.

3. Себельдин А.М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 1972. Т. 11, № 4. С. 403-408.

4. Михалев А.В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. 1988. Т.2 .

ОБ УСЛОВИЯХ СОВПАДЕНИЯ МНОГООБРАЗИЯ И КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО КОНЕЧНОЙ АЛГЕБРОЙ ЛИ.

К.Н.Семенов

В работе А.Ю.Ольшанского [2] описываются многообразия финитно аппроксимируемых групп и изучаются условия совпадения многообразия и квазимногообразия, порожденного одной конечной группой. В работах [1, 3] его результаты о финитной аппроксимируемости перенесены на случай многообразий алгебр Ли над конечным полем. В данной работе рассматриваются многообразия и квазимногообразия, порожденные конечными алгебрами Ли, т.е. конечномерными алгебрами Ли над конечным полем.

Напомним, что по определению финитно аппроксимируемая алгебра Ли есть поддекартово произведение некоторого множества конечномерных алгебр. А-алгебра определяется как алгебра Ли, все нильпотентные подалгебры которой абелевы. Монолитической называется алгебра с ненулевым наименьшим идеалом - монолитом. Критическая алгебра определяется как конечная алгебра, не принадлежащая многообразию, порожденному ее собственными факторами.

Теорема 1. Пусть G - конечная алгебра над полем характеристики $p \neq 2, 3$. Равенство $qvar(G) = var(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда:

i) G - А-алгебра;

ii) все монолитические алгебры из $var(G)$ изоморфно вкладываются в G.

Утверждение остается справедливым над любым конечным полем, если дополнительно предположить, что алгебра G разрешима.

Замечание 1. Проверка условия *ii)* для конкретной конечной алгебры может оказаться затруднительной, в отличие от теоретико-

-группового аналога [2], где достаточно изоморфного вложения в порождающую группу лишь факторов самой этой группы. Однако, как следует из доказательств в [1 и 3], порядок (т.е. количество элементов) монолитической алгебры из многообразия, порожденного конечной алгеброй Ли G, легко оценить константой, зависящей только от G. В частности, многообразие $var(G)$ содержит лишь конечное число монолитических алгебр.

Замечание 2. Из предыдущего следует также, что в $var(G)$ найдется конечная алгебра Ли L такая, что любая другая алгебра из $var(G)$ вкладывается в некоторую полную прямую степень алгебры L - факт, отмеченный в [2] в групповом случае. Действительно, достаточно в качестве L взять прямое произведение всех неизоморфных монолитических алгебр из $var(G)$.

Замечание 3. В отличие формулировки теоремы 1 от ее теоретико-группового аналога [2, теорема], сказывается своеобразие теории многообразий А-алгебр Ли. Дело в том, что любая монолитическая группа из многообразия, порожденного конечной А-группой, является, во-первых, критической группой и, во-вторых, фактором порождающей группы [2]. Приведенные утверждения об А-группах не переносятся на А-алгебры Ли. Пример монолитной некритической А-алгебры построен в [5].

Теорема 2. Критическая алгебра из многообразия, порожденного конечной А-алгеброй, может не быть фактором порождающей алгебры.

Доказательство теоремы 1. Необходимость.

Предположим, что G содержит неабелеву нильпотентную подалгебру и пусть m - максимальный порядок нильпотентных индекса 2 неабелевых подалгебр в G. Тогда в каждой такой подалгебре выполняется квазитождество

$$\bigwedge_{0<i<j\le m+1} [x_i x_j] = x_0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Соответственно в $q\,var(G)$ выполнено квазитождество

$$\Big(\bigwedge_{i,j,k\in\{0,1,\dots,m+1\}} [[x_i x_j] x_k] = 0\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{0<i<j\le m+1} [x_i x_j] = x_0\Big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 = 0.$$

С другой стороны, тогда $N_2 \subset var(G)$, а в N_2 и, следовательно, в $var(G)$ последнее квазитождество не выполняется. Достаточно рассмотреть алгебру

$$N = alg\langle e_1, \dots, e_{m+1}, z \mid [e_i e_j] = z,\ i<j,\ z = z(N)\rangle$$

Таким образом, если G содержит неабелеву нильпотентную подалгебру, то $q\,var(G) \neq var(G)$.

Для доказательства условия $ii)$ предположим, что L - монолитическая алгебра из $var(G)$. Известно, что для конечной

алгебры Ли G $q\,var(G)$ может быть отождествлено с всевозможными подалгебрами прямой степени G. Так что условие $var(G) = q\,var(G)$ дает вложение $L \hookrightarrow \Pi^x G_i$, $G_i \cong G$. Пусть π_i – проектирование на i-ю компоненту в $\Pi^x G_i$. Тогда $(\ker \pi_i \cap L) \triangle L$, $(\bigcap_i \ker \pi_i) \cap L = \bigcap_i (\ker \pi_i \cap L) = 0$. Но L – конечная (по замечанию 1) монолитическая алгебра, последнее равенство дает для некоторого i_0: $\ker \pi_{i_0} \cap L = 0$. Тогда $\pi_{i_0}|_L : L \hookrightarrow G$ – искомое вложение.

Достаточность. Пусть G – конечная алгебра Ли, удовлетворяющая условиям $i)$ и $ii)$. Из условия $i)$ и работ [1, , 3] следует, что $var(G)$ – многообразие финитно аппроксимируемых алгебр Ли. Пусть $H \in var(G)$. Алгебра H вкладывается в декартово произведение своих монолитических факторов, конечных в силу финитной аппроксимируемости. По условию $ii)$ каждый такой фактор в свою очередь вкладывается в G, что дает вложение $H \hookrightarrow \Pi^x G_i$, $G_i \cong G$. Поэтому $var(G) \subseteq q\,var(G)$, обратное включение очевидно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть k – любое конечное поле, $|k| = q$, K – его квадратичное расширение, $K = k[\alpha]$ для некоторого α и β – сопряженный с α относительно группы Галуа $Gab(K/k)$ элемент K. Тогда по формуле Виета для квадратного уравнения имеем $\alpha + \beta = a \in k$. Положим

$$A_1 = \alpha E \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad B_2 = aE = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Обозначим через V двумерное векторное пространство над K с базисом $\{e_1, e_2\}$. Матрицы A_i, B_i естественным образом действуют как автоморфизмы пространства V. Положим $S_1 = kA_1 + kB_1$, $S_2 = kA_2 + kB_2$, $S_3 = kA_2 + kB_1$. Рассматривая S_1, S_2, S_3, V как алгебры Ли с нулевым умножением, определим следующие метабелевы алгебры Ли над k: $G_i = S_i \wr V$, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, что $V = G^2$. Поскольку любое преобразование из S_i действует на V как автоморфизм, G_1, G_2, G_3 – A-алгебры [4], лемма 3]. Обозначим через A_1, A_2, A_3 ассоциативные алгебры, порожденные соответственно S_1, S_2, S_3. Так как $A_1^q = \alpha E$, $B_1^q = aE$, алгебры A_1, $i = 1, 2, 3$, содержат KE, так что любой идеал алгебры G_i, лежащий в V, будучи A_i – под-

модулем, должен быть и K – подмодулем. Теперь становится ясно, что G_1, G_2, G_3 – монолитические алгебры с монолитом $\mathfrak{k}e_1$. Более того, они критические в силу предложения 1 [4].

Заметим, что $G_3 \cong G_1$. Для этого рассмотрим алгебру $G_1' = G_1$, где $G_1' = S_1' \wedge V$, $S_1' = k(-A_1 + B_1) + k\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + kB_1$. Пусть $\sigma\alpha = \beta$, $\sigma \in Gal(\wedge/k)$ и $\{\xi_1, \xi_2\}$ – базис K над k, тогда $\{\xi_1 e_1, \xi_2 e_1, \xi_1 e_2, \xi_2 e_1\}$ – базис V над k. Изоморфизм $G_1' \cong G_3$ задается заменой этого базиса на $\{\sigma\xi_1 e_1, \ldots, \sigma\xi_2 e_2\}$. Действительно, если $\beta\xi_i = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$, то $\alpha\sigma\xi_i = \sigma\beta\sigma\xi_i = \sigma(\beta\xi_i) = a_1\sigma\xi_1 + a_2\sigma\xi_2$, и матрица умножения на β в базисе $\{\xi_1, \xi_2\}$ совпадает с матрицей умножения на α в базисе $\{\sigma\xi_1, \sigma\xi_2\}$.

Для доказательства теоремы покажем теперь, что $G_2 \in var(G_1)$, а именно представим G_2 в виде фактора $G_1 \times G_2$. Обозначим через H подалгебру в $G_1 \times G_3$, порожденную элементами $(0, e_1)$, (e_2, e_2), (e_1, e_1), (A_1, A_2), (B_1, B_2). Легко проверить, что матрицы действия элементов (A_1, A_2) и (B_1, B_2) в базисе $\{(0, e_1), (e_2, e_2), (e_1, e_1)\}$ имеют вид соответственно

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Так что очевидно, что $k(e_1, e_1) \triangleleft H$ и $H/k(e_1, e_1) \cong G_2$.

Остается добавить, что $G_1 \cong G_2$, например, потому, что G_2 содержит элемент B_2 со скалярным действием на $G_2^2 = V$, вид которого не зависит от базиса в V. Такой элемент не представляется в виде $\alpha E = BA_1 + eB_2$, так как отсюда $c = 0$, а оператор A_1 не может быть диагонализируем над k, поскольку он аннулируется неприводимым над k многочленом – минимальным многочленом для α. Теорема 2 доказана.

Отметим, что большое количество примеров, иллюстрирующих отличия многообразий А-алгебр Ли от А-групп, изложено в работах Г.В.Шевной [4, 5]. В частности, указанный выше пример построен под влиянием работы [4].

Автор приносит благодарность Ю.А.Бахтурину за постановку задач и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтурин Ю.А., Семенов К.Н. О финитной аппроксимируемости разрешимых многообразий алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Матем., мех. 1986. №6. С.59-61.
2. Ольшанский А.Ю. Многообразия финитно аппроксимируемых групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т.33. С. 915-927.
3. Премет А.А., Семенов К.Н. Многообразия финитно аппроксимируемых алгебр Ли // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179), №1 (9). С. 103-113.
4. Шеина Г.В. Многообразия метабелевых А-алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Матем., мех. 1977. №4. С. 37-46.
5. Шеина Г.В. Метабелевы многообразия А-алгебр Ли: Дис.... канд. физ.-мат. наук. М.: 1979.

ЭНДОЦЕПНЫЕ МОДУЛИ НАД ДЕДЕКИНДОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

Е.В.ТАРАКАНОВ

В последнее время в литературе широко изучаются различные эндосвойства модулей и абелевых групп. Под эндосвойством модуля понимается его свойство как модуля над кольцом своих эндоморфизмов. К изучаемым в ряде работ классам относятся и эндоцепные абелевы группы, то есть абелевы группы, у которых вполне характеристические подгруппы образуют цепь. В [1] без доказательства приведено описание эндоцепных абелевых групп, содержащих ненулевые элементы конечного порядка, а в работе [2] отмечены некоторые свойства эндоцепных сильно неразложимых редуцированных групп без кручения, а также групп без кручения конечного ранга. В данной статье описаны периодические эндоцепные модули над коммутативными дедекиндовыми кольцами. Изучение эндоцепных модулей сведено к случаю модулей без кручения.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули – унитарными. Под словом "группа" понимается абелева группа. Через $E_R(M)$ обозначается кольцо эндоморфизмов модуля M над кольцом R, через $M^{(\alpha)}$ – прямая сумма α экземпляров модуля M (α – некоторое кардинальное число). Напомним, что дедекиндовым кольцом называется коммутативная область, в которой всякий собственный идеал представляется в виде произведения конечного числа максимальных идеалов.

Определения, обозначения и основные факты, касающиеся модулей над дедекиндовыми кольцами, приведены в [3], обозначения, относящиеся к абелевым группам, – в [4].

§ I. Общие свойства

Модуль M_R над кольцом R называется эндоцепным, если он является цепным как левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов. Очевидно, что модуль M_R над коммутативным кольцом эндоцепной тогда и только тогда, когда его вполне инвариантные подмодули образуют цепь, то есть для любых двух вполне инвариантных подмодулей K и L в M_R выполнено $K \subseteq L$ или $L \subseteq K$.

Лемма I.I. Пусть M_R – модуль над кольцом R, $M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Тогда любой вполне инвариантный подмодуль $H \subseteq M_R$ представляется в виде $H = \bigoplus_{i \in I} H_i$, где каждый $H_i = H \cap M_i$ – вполне инвариантный подмодуль в M_i, $i \in I$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_i : M \to M_i$ – естественные проекции M на M_i, $i \in I$. Так как H вполне инвариантен в M_R, $\mathcal{T}_i H \subseteq H$ для любого $i \in I$. Далее, поскольку $\mathcal{T}_i H \subseteq M_i$, для любых i и j из J имеем $\mathcal{T}_i H \cap \mathcal{T}_i H = 0$. Таким образом, очевидно, $M_R = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{T}_i H$, из включений $\mathcal{T}_i H \subseteq H \cap M_i$ для любого $i \in I$ получаем, что $\mathcal{T}_i H = H \cap M_i$.

Лемма I.2. Пусть M_R – модуль над дедекиндовым кольцом R. $M_R^{(\alpha)}$ является эндоцепным тогда и только тогда, когда M_R – эндоцепной модуль над R.

Доказательство утверждения непосредственно вытекает из леммы I.I.

Лемма I.3. Фактор-модуль M/N эндоцепного модуля M по вполне инвариантному подмодулю $N \subseteq M$ является эндоцепным модулем.

Доказательство. Пусть K и L – два вполне инвариантных подмодуля в M и $\varphi : M \to M/N$ – естественный эпиморфизм. Тогда, очевидно, из $K \subseteq L$ $(L \subseteq K)$ вытекает, что $\varphi K \subseteq \varphi L$ $(\varphi L \subseteq \varphi K)$.

Лемма I.4. Пусть M – модуль над дедекиндовым кольцом R, $M = A \oplus B$, причем A – вполне инвариантный подмодуль в M. M является эндоцепным модулем над R тогда и только тогда, когда A и B – эндоцепные над R и для любого элемента $\beta \in B$ имеет место включение $A \subseteq E_R(M)\beta$.

Доказательство. Необходимость. Пусть M – эндоцепной модуль. По лемме I.3 $B \cong M/A$ – эндоцепной модуль. Далее, поскольку $E_R(M)\beta$ – вполне инвариантный подмодуль в M, $E_R(M)\beta \subseteq A$ или $A \subseteq E_R(M)\beta$ для любого $\beta \in B$.

Пусть $E_R(M)B \subseteq A$. Тогда $1_M \cdot B \subseteq A$ и $A \cap B \neq 0$ (1_M – тождественный эндоморфизм модуля M, $1_M \in E_R(M)$). Таким образом, $A \subseteq E_R(M)b$ для любого $b \in B$.

Достаточность. Пусть $M = A \oplus B$, A и B – эндоцепные модули над R. Любые два вполне инвариантных подмодуля M_1 и M_2 в B по лемме I.I имеют вид $M_1 = (M_1 \cap A) \oplus (M_1 \cap B)$, $M_2 = (M_2 \cap A) \oplus (M_2 \cap B)$.

Пусть, для определенности, $M_1 \cap A \subseteq M_2 \cap A$. Поскольку $A \subseteq E_R(M)b$ для любого $b \in B$, $M_1 \cap B \subseteq M_2 \cap B$, следовательно, $M_1 \subseteq M_2$.

Лемма I.5. Пусть M – эндоцепной модуль над дедекиндовым кольцом R, не являющийся инъективным модулем. Тогда существует единственный ненулевой простой идеал $P \lhd R$ такой, что $M \neq MP$.

Доказательство. Существование ненулевого простого идеала $P \lhd R$ со свойством $M \neq MP$ очевидно; иначе $MP = M$ для любого $MP \lhd R$, следовательно, $Ar = A$ для любого $r \in R$ и M_R – делимый модуль над дедекиндовым кольцом, а следовательно, и инъективный модуль. Пусть существуют два ненулевых простых идеала $P \lhd R$ и $Q \lhd R$, для которых $MP \neq M$ и $MQ \neq M$. Поскольку P и Q – простые собственные идеалы в дедекиндовом кольце, P и Q – максимальные идеалы в R (см. [5, с. 243]). Таким образом, из $P \subseteq P+Q \subseteq R$ следует, что $P + Q = R$ (иначе $Q \subseteq P$ или $P \subseteq Q$, что противоречит максимальности P и Q). Очевидно, MP и MQ – вполне инвариантные подмодули в M. Но M – эндоцепной модуль, значит, либо $MP \subseteq MQ$, либо $MQ \subseteq MP$. В первом случае $M = M(P+Q) \subseteq MP + MQ \subseteq MQ$, во втором случае $M \subseteq MP$, таким образом, получено противоречие с выбором простых идеалов P и Q. Следовательно, существует единственный ненулевой простой идеал $P \lhd R$ со свойством $MP \neq M$.

§ 2. Периодические модули

Перейдем к рассмотрению периодических модулей над дедекиндовыми кольцами. Напомним, что модуль M над дедекиндовым кольцом R называется периодическим, если для любого элемента a из M существует такой ненулевой идеал $I \lhd R$, что $aI = 0$. Известно, что всякий периодический модуль представ-

ляется в виде прямой суммы P – примарных модулей, т.е. модулей, каждый элемент которых аннулируется некоторой степенью ненулевого простого идеала P. Эти модули называются P – примарными компонентами модуля M.

Лемма 2.1. Всякий периодический эндоцепной модуль M над дедекиндовым кольцом R является P – примарным для некоторого ненулевого простого идеала P.

Доказательство. Согласно предыдущему замечанию модуль M представляется в виде прямой суммы $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, где M_i – P_i – примарные модули для различных ненулевых простых идеалов $P_i \lhd R$ $(i \in I)$. Очевидно, что каждый M_i является вполне инвариантным подмодулем в M. По лемме I.4 для любых двух ненулевых M_i и M_j должно выполняться включение $M_i \subseteq Sb$, где $S = E_R(M)$, $b \in M_j$. Однако, поскольку M_j – вполне инвариантный подмодуль, $Sb \subseteq M_j$ и $M_i \subseteq M_j$, что невозможно. Таким образом, в прямой сумме все слагаемые, кроме одного, равны нулю, и M_R – P – примарный модуль.

Напомним, что модулем типа P^∞ называется P – примарная компонента фактор-модуля K/R, где K – классическое поле частных дедекиндового кольца R. Известно [3], что периодический модуль E_R над дедекиндовым кольцом является инъективным тогда и только тогда, когда он представляется в виде прямой суммы модулей типа P_i^∞ для различных ненулевых простых идеалов $P_i \lhd R$. Из этого факта следует

Лемма 2.2. Пусть M_R – периодический инъективный модуль над дедекиндовым кольцом R. M_R является эндоцепным тогда и только тогда, когда $M_R \cong L^{(\alpha)}$, L – модуль типа P^∞ для некоторого ненулевого простого идеала $P \lhd R$, α – некоторое кардинальное число.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из предыдущего замечания. Для доказательства достаточности, учитывая лемму I.2, нужно показать, что модуль типа P^∞ является эндоцепным. Известно [3], что все собственные вполне инвариантные подмодули модуля L типа P^∞ имеют вид $L[P^k] = \{a \in L \mid aP^k = 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$.
Очевидно, что $L[P] \subseteq L[P^2] \subseteq \ldots \subseteq L[P^n] \subseteq \ldots$,
что и доказывает достаточность утверждения.

Известно [3], что над дедекиндовым кольцом R всякий модуль M представляется в виде $M = E \oplus H$, где E – инъ-

ективный, а H – редуцированный модуль, т.е. модуль, не содержащий ненулевых инъективных подмодулей. В этом случае H называется редуцированной частью модуля M.

Лемма 2.3. Пусть M – периодический эндоцепной модуль над дедекиндовым кольцом R, $M = E \oplus H$, где E – инъективный, а H – редуцированный подмодуль M. Тогда либо $E = 0$, либо $H = 0$.

Доказательство. Пусть $M = E \oplus H$, H – ненулевой подмодуль в M. Известно, что E вполне инвариантен в M. По лемме I.4 для любого $0 \neq h \in H$ имеет место включение $E \subseteq Sh$, где $S = E_R(M)$ – кольцо эндоморфизмов модуля M. Поскольку M – периодический модуль, существует такой $I \lhd R$, что $hI = 0$. Отсюда следует, что $(Sh)I = S(hI) = 0$, значит, и $EI = 0$. Однако E – инъективный модуль над дедекиндовым кольцом, а значит, и делимый модуль, так что для любого $r \in I$ имеет место $E_r = E$. Таким образом, $E = 0$, и лемма доказана.

Напомним, что модуль M над дедекиндовым кольцом R называется ограниченным, если существует такой ненулевой элемент $r \in R$, что $Mr = 0$. Аналогично случаю абелевых групп, нетрудно показать, что всякий ограниченный модуль разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных R/P^h, для $P \lhd R$ – простых идеалов в R, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Теперь мы можем дать описание периодических эндоцепных модулей над дедекиндовыми кольцами.

Теорема 2.4. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) M – периодический эндоцепной модуль над дедекиндовым кольцом R;

(2) $M \cong L^{(\alpha)}$ или $M \cong (R/P^h)^{(\alpha)} \oplus (R/P^{h-1})^{(\beta)}$,

где $P \lhd R$ – ненулевой простой идеал в R; L – модуль типа P^∞; $n \in \mathbb{Z}^+$; α и β – некоторые кардинальные числа.

Доказательство. (I) $\Longrightarrow$ (2). Пусть M_R – периодический эндоцепной модуль. По лемме 2.I M_R – P – примарный модуль. Далее, согласно лемме 2.3 в разложении $M = E \oplus H$ либо E, либо H равны нулю. Если $H = 0$, то M_R – инъективный P – примарный модуль, и по лемме 2.2 $M \cong L^{(\alpha)}$, где L – модуль типа P^∞. Рассмотрим теперь случай $E = 0$. Итак, пусть M – редуцированный P – примарный модуль. По лемме I.5 существует такой ненулевой простой идеал $P \lhd R$, что $MP \neq M$. Выберем элемент $0 \neq x \in M \setminus MP$.

Очевидно, существует такое $k \in \mathbb{Z}^+$, что $x \in M[p^k] = \{a \in M \mid ap^k = 0\}$. Поскольку M – эндоцепной модуль, а MP и $M[p^k]$ – , очевидно, вполне инвариантные подмодули в M, верно включение $MP \subseteq M[p^k]$. Очевидно, что M/MP – ограниченный модуль, следовательно, и $M/M[p^k]$ – ограниченный. Это значит, что существует такое $l \in \mathbb{Z}^+$, что для любого $a \in M$ имеет место включение $ap^l \subseteq M[p^k]$, то есть для любого a из M выполнено ap^{l+k}, M – ограниченный модуль. Таким образом, существует $n \in \mathbb{Z}^+$ со свойством $Mp^n = 0$, $Mp^{n-1} \neq 0$, согласно замечанию перед теоремой 2.4, M представляется в виде прямой суммы модулей, изоморфных R/p^S, $P \lhd R$, $s \in S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in S$.
Предположим, что в прямой сумме есть ненулевые слагаемые вида R/p^{n-r}, $r \geq 2$. Сравним вполне инвариантные подмодули $M[p]$ и Mp^{n-r}. Поскольку M – эндоцепной, либо $Mp^{n-r} \subseteq M[p]$, либо $M[p] \subseteq Mp^{n-r}$.
В первом случае, очевидно, $(Mp^{n-r})p = Mp^{n-r+1} = 0$ что противоречит выбору $n \in \mathbb{Z}^+$. Значит, $M[p] \subseteq Mp^{n-r}$, следовательно, должно быть выполнено $M[p] \cap (R/p^{n-r}) \subseteq (Mp^{n-r}) \cap (R/p^{n-r})$. Однако, поскольку R/p^{n-r} – прямое слагаемое в M, имеем $Mp^{n-r} \cap (R/p^{n-r}) = (R/p^{n-r})p^{n-r} = 0$. С другой стороны, поскольку в R/p^{n-r}, очевидно, существует такой элемент b, что $bp = 0$, пересечение $M[p] \cap (R/p^{n-r})$ непусто. Таким образом, в прямой сумме модулей вида R/p^S все слагаемые изоморфны R/p^{n-1} или R/p^n, и импликация (I) $(I) \Rightarrow$ (2) доказана.

(2) $\Rightarrow$ (I). Согласно лемме 2.2 всякий модуль L типа p^∞ является эндоцепным, а по лемме I.2 и прямая сумма $L^{(\alpha)}$ является эндоцепным модулем.

Пусть теперь $M = M_1 \oplus M_2$, $M_1 \cong (R/p^h)^{(\alpha)}$, $M_2 \cong (R/p^{n-1})^{(\beta)}$. Рассмотрим произвольный вполне инвариантный подмодуль $N \subseteq M$. Очевидно, существует t в интервале от 0 до h такое, что $N \subseteq M[p^t]$. С другой стороны, нетрудно показать, что существует такой S в интервале от 0 до h, что $Mp^S \subseteq N$. Для модуля M выполнено условие $Mp^h = 0$, значит, $S + t \leq n$ и $Mp^S \subseteq N \subseteq M[p^{h-S}]$. Однако в нашем случае $Mp^S \cong (R/p^{h-S})^{(\alpha)} \oplus (R/p^{n+1-S})^{(\beta)}$, $M[p^{h-S}] \cong (R/p^{h-S})^{(\alpha)} \oplus (R/p^{h-S})^{(\beta)}$. Таким образом, либо $N = Mp^S$, либо $N = M[p^{h-S}]$.

Для завершения доказательства отметим, что в модуле M все вполне инвариантные подмодули вида MP^{ℓ} и $M[P^{\kappa}]$ образуют цепь, а именно

$$0 = MP^{n} \subseteq M[P] \subseteq MP^{n-1} \subseteq M[P^{2}] \subseteq \ldots \subseteq MP \subseteq M[P^{n}] = M,$$

и справедливость (2) $\Longrightarrow$ (I) доказана.

§ 3. Модули без кручения и смешанные модули

Модуль M над дедекиндовым кольцом R называется модулем без кручения, если для любого $0 \neq a \in M$ и любого ненулевого идеала $I \lhd R$ имеем $aI \neq 0$.

Предложение 3.1. Всякий инъективный модуль E без кручения над дедекиндовым кольцом R является эндоцепным.

Доказательство. Известно [3], что всякий инъективный модуль без кручения над дедекиндовым кольцом изоморфен векторному пространству над классическим полем частных K кольца R. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\alpha : K \longrightarrow K$. Очевидно, он вполне определяется элементом $\alpha \cdot 1 = b (b \in K)$. Соответствие $E_R(K) \ni \alpha \longmapsto \alpha \cdot 1 = b \in K$, как нетрудно показать, является изоморфизмом между $E_R(K)$ и K. Отсюда следует, что $K \cong {}_{E_R(K)}K$, то есть единственными вполне инвариантными подмодулями в K_R являются 0 и само K_R. По лемме I.2 $(K_R)^{(\alpha)}$ также является эндоцепным модулем, и предложение доказано.

Предложение 3.1 позволяет свести изучение эндоцепных модулей без кручения к случаю редуцированных модулей. Хаузен в работе [6] описала эндоцепные абелевы группы без кручения конечного ранга. Однако вопрос о полном описании эндоцепных R-модулей без кручения остается открытым даже для случая $R = \mathbb{Z}$.

Рассмотрим смешанные модули над дедекиндовыми кольцами. Теорема 3.2 сводит изучение смешанных эндоцепных модулей к случаю модулей без кручения.

Теорема 3.2. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) M – эндоцепной модуль над дедекиндовым кольцом R;

(2) $M \cong (R/P^{n-1})^{(\alpha)} \oplus (R/P^{n})^{(\beta)}$ или $M \cong L^{(\alpha)} \oplus K^{(\beta)} \oplus A$, где $P \lhd R$ – некоторый ненулевой простой идеал в R; L – модуль типа P^{∞}; K – классическое поле частных кольца R; A – редуцированный эндоцепной модуль без кручения.

Доказательство. (I) $\Longrightarrow$ (2). Предположим, что M не является редуцированным модулем, $M = E \oplus H$, $E \neq 0$. Тогда согласно лемме 2.3 в H нет элементов конечного порядка, следовательно, $M \cong L^{(\alpha)} \oplus K^{(\beta)} \oplus A$, причем A – редуцированный эндоцепной модуль без кручения. Осталось рассмотреть случай редуцированного модуля, содержащего элементы конечного порядка. Рассмотрим периодическую часть $T(M)$ модуля M. Очевидно, $T(M)$ – вполне инвариантный P – примарный подмодуль в M. Если $T(M) \subseteq MP^t$ для любого $t \in \mathbb{Z}^+$, то $T(M)$ – P – делимый P – примарный модуль, следовательно, $T(M)$ – делимый подмодуль M. Но M – редуцированный эндоцепной модуль, значит, существует $S \in \mathbb{Z}^+$ такой, что $MP^S \subseteq T(M)$. Таким образом, любой элемент из MP^S имеет конечный порядок. Пусть в M существует элемент x бесконечного порядка. Тогда $xP^S \neq 0$, но $xP^S \subseteq MP^S \subseteq T(M)$, значит, существует такой $J \lhd R$, что $(xP^S)J = 0$, следовательно, $x(P^S J) = 0$, что противоречит выбору x. Таким образом, $T(M) = M$ и M – редуцированный P – модуль, а следовательно, по теореме 2.4 $\oplus (R/P^n)^{(\beta)}$, и импликация (I) $\Longrightarrow$ (2) доказана.

(2) $\Longrightarrow$ (I). Если $M \cong (R/P^{n-1})^{(\alpha)} \oplus (R/P^n)^{(\beta)}$, то по теореме 2.4 M – эндоцепной R – модуль. Предположим теперь, что $M \cong L^{(\alpha)} \oplus K^{(\beta)} \oplus A = E \oplus A$, где E – инъективный модуль; A – редуцированный модуль без кручения, являющийся эндоцепным.

Поскольку E – вполне инвариантный подмодуль в M, для завершения доказательства осталось применить лемму I.4.

Литература

1. Brameret M.-P. Sous-groupes Completement invariant d'un groupe abélien // C. r. Acad. Sci. 1962. V. 255, N11. P. 1369-1370.
2. Hausen J. Abelian groups which are uniserial as modules over their endomorphism rings // Lect. Notes Math. 1983. V. 1006. P. 204-208.
3. Kaplansky I. Modules over Dedekind rings and valuation rings // Trans. Amer. Math. soc. 1952. V. 72. P. 327-340.

4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т.1. 335 с.
5. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. М.: ИЛ, 1963. Т.1.
6. Hausen J. Finite rank torsion-free abelian groups uniserial over their endomorphism rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V.93, N2 P. 229-231.

КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ КОЛЕЦ

А.А.Туганбаев

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули – унитарными и, когда не указана сторона, правыми. Дистрибутивным модулем называется модуль с дистрибутивной решеткой подмодулей. В [1] доказано, что классическое кольцо частных, или локализация по простому идеалу коммутативного дистрибутивного кольца, является дистрибутивным кольцом. В то же время в [2] приведен пример коммутативного дистрибутивного кольца с недистрибутивным максимальным кольцом частных. Так как максимальное кольцо частных коммутативного кольца изоморфно кольцу частных относительно радикального фильтра плотных идеалов, то отсюда следует, что кольцо частных коммутативного дистрибутивного кольца относительно радикального фильтра идеалов не обязано быть дистрибутивным кольцом.

Основным результатом работы является теорема 1, а среди других результатов выделим теорему 2.

Теорема 1. Пусть Q – кольцо частных коммутативного дистрибутивного кольца A относительно радикального фильтра T, обладающего базисом из конечно-порожденных идеалов. Тогда кольцо Q дистрибутивно и является дистрибутивным модулем над кольцом A.

Теорема 2. Для того чтобы классическое кольцо частных Q коммутативного кольца A было дистрибутивным кольцом, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов m и n кольца A существовали такие элементы a и b кольца A, что $a+b$ – регулярный элемент кольца A и $ma \in A \cap nA$, $nb \in A \cap nA$.

В связи с теоремой 1 заметим, что как классическое кольцо частных коммутативного кольца, так и его локализация по простому идеалу являются кольцами частных относительно некоторых радикальных фильтров, обладающих базисами из главных идеалов. Поэтому теорема 1 обобщает упомянутые выше результаты работы [1].

Доказательство теоремы I разобьем на ряд утверждений. Приведем необходимые определения. Через $r(B)$ и $l(B)$ обозначим соответственно правый и левый аннуляторы подмножества B кольца A. Элемент a кольца A называется регулярным, если $r(a)=l(a)=0$. Подмножество T кольца A называется множеством правых знаменателей в A, если существует такое кольцо A_T и кольцевой гомоморфизм $f_T = f: A \to A_T$, что все элементы множества $f(T)$ обратимы в кольце A_T, причем $A_T = \{f(a)f(t)^{-1} | a \in A, t \in T\}$, $Ker(f) = \{a \in A | at = 0$ для некоторого $t \in T\}$. В этих условиях кольцо A_T называется правым кольцом частных кольца A относительно множества T, а гомоморфизм f_T – каноническим кольцевым гомоморфизмом. Кроме того, для любого модуля M_A над кольцом A, естественно, определен гомоморфизм правых A-модулей $g_T = g: M \to (M_T)_A$, где через M_T обозначается модуль частных $M \otimes_A (A_T)$ модуля M, являющийся правым модулем над A_T. Гомоморфизм g называется каноническим модульным гомоморфизмом. Если $T = A \setminus N$, где N – правый идеал кольца A, то будем писать A_N, f_N, M_N, g_N вместо A_T, f_T, M_T, g_T. Кроме того, иногда вместо $f_T(a)$ или $g_T(m)$ мы будем писать $\bar{a}$, $\bar{m}$. Через $max(A)$ обозначается множество всех максимальных правых идеалов кольца A. Кольцо A называется локализуемым справа, если для любого $N \in max(A)$ существует правое кольцо частных A_N. Любое коммутативное кольцо является локализуемым кольцом.

Лемма I. Для модуля M_A над кольцом A равносильны условия:

(а) M – дистрибутивный модуль;

(б) для любых элементов m и n модуля M существуют такие элементы a и b кольца A, что $1 = a + b$, $mA \cap nBA \subseteq mA \cap nA$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Пусть $t = m + n$, $G = mA \cap nA$. Так как $tA = tA \cap (mA + nA) = tA \cap mA + tA \cap nA$, то найдутся такие элементы b и d кольца A, что $t = tb + td$, $tb \in mA$, $td \in nA$. Тогда $nb = tb - mb \in G$, $md = td - nd \in G$. Положим $a = 1 - b$, $f = a - d = 1 - b - d$. Тогда a и b – искомые элементы, поскольку $1 = a + b$, $tf = t - tb - td = 0$, $mf = mf - tf = -nf \in G$, $ma = md + mf \in G$, $nb \in G$.

(б)$\Rightarrow$(а). Пусть F, G, H – подмодули модуля M, f – элемент модуля $F \cap (G + H)$, причем $f = g + h$, $g \in G$, $h \in H$. По условию найдутся такие элементы a и b кольца A, что $1 = a + b$, $ha \in gA$, $gb \in hA$. Тогда $fa = ga + ha \in fA \cap gA \subseteq F \cap G$, $fb = gb + hb \in fA \cap hA \subseteq F \cap H$, $f = fa + fb \in F \cap G + F \cap H$, $F \cap (G + H) \subseteq F \cap G + F \cap H \subseteq F \cap (G + H)$.

Предложение I. Пусть M – прямой предел дистрибутивных модулей M_j над кольцом A, $j \in J$. Тогда M – дистрибутивный модуль.

Доказательство. Пусть $\{f_j : M_j \to M\}_{j\in J}, \{h_{ij} : M_i \to M_j$ при $i \leq j\}$ – системы гомоморфизмов, входящих в определение прямого предела модулей, m и n – элементы модуля M. Тогда $m = f_i(m_i)$, $n = f_j(n_j)$ для некоторых $m_i \in M_i$, $n_j \in M_j$. Пусть t – такой индекс из J, что $t \geq i$, $t \geq j$. Тогда $m = f_t(m_t)$, $n = f_t(n_t)$, где $m_t = h_{it}(m_i)$, $n_t = h_{jt}(n_j)$. По лемме I, примененной к элементам m_t и n_t дистрибутивного модуля m_t, найдутся такие элементы a и b кольца A, что $1 = a+b$, $m_t a \in n_t A$, $n_t b \in m_t A$. Тогда $ma \in nA$, $nb \in mA$, по лемме I M – дистрибутивный модуль.

Лемма 2. Пусть Q – правое кольцо частных кольца A относительно множества правых знаменателей T, $f : A \to Q$ – канонический гомоморфизм, M_A – модуль над кольцом A, $g : M \to M_T$ – канонический гомоморфизм. Тогда:

(а) для любых элементов $a \in A$, $t \in T$ найдутся такие элементы $b \in A$, $u \in A$, что $au = tb$;

(б) если $a \in A$, $t \in T$ и $ta = 0$, то найдется такой элемент $u \in T$, что $au = 0$;

(в) $Ker(g) = \{m \in M \mid mt = 0$ для некоторого $t \in T\}$;

(г) для любых элементов $d_1, \ldots, d_n$ кольца Q найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ кольца A и элемент t множества T, что $d_i = f(a_i)\, f(t)^{-1}$ при $1 \leq i \leq n$;

(д) $M_T = \{g(m) f(t)^{-1} \mid m \in M, t \in T\}$;

(е) для любых элементов $h_1, \ldots, h_n$ модуля M_T найдутся такие элементы $m_1, \ldots, m_n$ модуля M и элемент t множества T, что $h_i = \bar{m}_i\, \bar{t}^{-1}$ при $1 \leq i \leq n$;

(ж) $(F+G)_T = F_T + G_T$, $(F \cap G)_T = F_T \cap G_T$ для любых подмодулей F и G модуля M;

(з) если M_A – дистрибутивный модуль, то и $(M_T)_Q$ – дистрибутивный модуль;

(и) если m – элемент модуля M, F – подмодуль модуля M и $\bar{m} \in F_T$, то $mt \in F$ для некоторого $t \in T$;

(к) если $T = A \setminus N$, где N – правый идеал кольца A, то Q – локальное кольцо;

(л) если M – дистрибутивный модуль, $T = A \setminus N$, где N – правый идеал кольца A, то для любых элементов m и n модуля M найдутся такие элементы a и b кольца A, что $1 = a+b$, $(mA \cap nA)_M = \bar{m}Q \cap \bar{n}Q = (maA + nbA)$, модуль $\bar{m}Q \cap \bar{n}Q$ совпадает с одним из модулей $\bar{m}Q$, $\bar{n}Q$ и $(M_T)_Q$ – цепной модуль.

Доказательство. Пункты (а),(б),(в),(г) см. в [3, с. 51, 57, 61]. Пункты (д) и (е) проверяются с помощью пунктов (а),(б),(г). Пункт (ж) следует из пунктов (д) и (е). Пункт (з) проверяется с помощью пунктов (ж) и (в). Пункт (и) вытекает из пунктов (д),(е),(в). Пункт (к) доказан в лемме 8(и) работы [4]. Докажем пункт (л). По лемме I найдутся такие элементы a и b кольца A, что $1 = a+b$ и $maA+nbA \subseteq F$, где $F = mA \cap nA$. Так как по пункту (к) кольцо Q локально, то хотя бы один из элементов $\bar{a}$, $\bar{b}$ обратим в кольце Q, следовательно, либо $\bar{m}\bar{a}Q = \bar{m}Q$, либо $\bar{n}\bar{b}Q = \bar{n}Q$, откуда модуль $\bar{m}\bar{a}Q + \bar{n}\bar{b}Q$ совпадает как с одним из модулей $\bar{m}Q$, $\bar{n}Q$, так и с модулем $\bar{m}Q \cap \bar{n}Q$. Поэтому модули $\bar{m}Q$, $\bar{n}Q$ сравнимы по включению. По пунктам (д) и (ж) получаем оставшиеся утверждения.

Лемма 3. Пусть M_A – модуль над локализуемым справа кольцом A. Тогда:

(а) если m – элемент модуля M, F – подмодуль модуля M и $g_N(m) \in F_N$ для любого $N \in max(A)$, то $m \in F$;

(б) если F и G – такие подмодули модуля M, что $F_N = G_N$ для любого $N \in max(A)$, то $F = G$;

(в) если для любого $N \in max(A)$ модуль M_N над кольцом A_N является дистрибутивным, то M – дистрибутивный модуль;

(г) если M – дистрибутивный модуль, то для любых элементов m и n модуля M найдутся такие элементы a и b кольца A, что $1 = a+b$ и $maA + nbA = mA \cap nA$ 2-порожденный модуль.

Доказательство. Докажем пункт (а). Пусть $B = \{a \in A \mid ma \in F\}$. Надо доказать, что $B = A$. Допустим противное. Тогда $B \subseteq N$ для некоторого $N \in max(A)$. Пусть $T = A \setminus N$. Так как $g_N(m) \in F$, то по лемме 2(и) $mt \in F$ для некоторого $t \in T$. Тогда $t \in T \cap M = \emptyset$, получено противоречие. Пункт (б) вытекает из пункта (а). Пункт (в) следует из пункта (б) и леммы 2(ж). Пункт (г) вытекает из пункта (б) и леммы 2(л).

Предложение 2. Пусть M_A – модуль над локализуемым справа кольцом A. Тогда дистрибутивность модуля M равносильна тому, что для любого $N \in max(A)$ модуль M_N над кольцом A_N является цепным, причем в этих условиях пересечение любых двух конечно-порожденных подмодулей модуля M является конечно-порожденным модулем.

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 2(л) и 3(в). Второе утверждение вытекает из леммы 3(г) и того, что для любых элементов $f_1, \dots, f_m$, $g_1, \dots, g_n$ дистрибутивного модуля M верно равенство $(\Sigma_{1 \le i \le m} f_i A) \cap (\Sigma_{1 \le j \le n} g_j A) = \Sigma_{1 \le i \le m} \Sigma_{1 \le j \le n} (f_i A \cap g_j A)$.

Следствие I. Дистрибутивность конечно-порожденного модуля M_A над локализуемым справа кольцом A равносильна тому, что для любого $N \in max(A)$ модуль M_N над кольцом A_N является циклическим цепным модулем.

Утверждение вытекает из предложения 2 и цикличности любого конечно-порожденного цепного модуля.

Лемма 4. Пусть F и M – дистрибутивные модули над коммутативным кольцом A, $H = Hom_A(F, M)$, причем F – конечно-порожденный модуль. Тогда H_A – дистрибутивный модуль.

Доказательство. Пусть $N \in max(A)$, $B = A_N$, $G = F_N$, $L = M_N$, $\mathfrak{D} = H_N$, $E = Hom_B(G, L)$, $W = Hom_B(B, L)$. Так как $\mathfrak{D}_B \cong E_B$, то по предложению 2 достаточно доказать дистрибутивность модуля E_B. По следствию I модуль G_B цикличен. Тогда существует мономорфизм $E_B \to W_B$, причем $W_B \cong L_B$, и по предложению 2 модуль L_B дистрибутивен. Поэтому E_B – дистрибутивный модуль.

Предложение 3. Пусть M – дистрибутивный модуль над коммутативным дистрибутивным кольцом A, Q – кольцо частных кольца A относительно радикального фильтра T с базисом $\mathfrak{D}$ из конечно-порожденных идеалов, R – модуль частных модуля M по T. Тогда R является дистрибутивным модулем как над кольцом A, так и над кольцом Q.

Доказательство. Так как R_A изоморфен прямому пределу модулей вида $Hom_A(F, G)$, где $F \in T$, а G – некоторый фактор-модуль модуля M [3, с. 197], причем $\mathfrak{D}$ – базис для T, то R_A изоморфен прямому пределу модулей вида $Hom_A(F, G)$, $F \in \mathfrak{D}$. По предложению I и лемме 4 R – дистрибутивный модуль над кольцом A и, следовательно, над кольцом Q.

Доказательство теорем I и 2. Теорема I следует из предложения 3. Теорема 2 вытекает из лемм I и 2(г).

ЛИТЕРАТУРА

I. Jensen C.U. Arithmetical rings // Acta math. acad. Sci. hung. 1966. V. 17, № I-2. P. 115 – 123.

2. Туганбаев А.А. Дистрибутивные кольца и модули // Труды Моск. матем. об-ва. 1988. Т. 51. С. 97 – 113.

3. Stenström B. Rings of quotients. Berlin: Springer, 1975. 310 p.

4. Туганбаев А.А. Наследственные кольца // Матем. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 303 – 312.

ЧИСТОТА НАД КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

М. А. Турманов

В работе всюду под R будем понимать ассоциативное кольцо с 1, а под чистотой – чистоту по Кону [1]. Правый R-модуль M_R называется чисто вполне приводимым, если всякий его чистый подмодуль выделяется в нем прямым слагаемым.

С произвольным модулем M_R можно связать левые модули ${}_E M$ и ${}_{\tilde{E}} M$, где $E = End_R M$ – кольцо эндоморфизмов модуля M_R, а $\tilde{E} = Biend_R M$ – кольцо биэндоморфизмов модуля M_R. Отсюда, по аналогии с понятием классически полупростого кольца, естественно возникает вопрос о строении кольца R, над которым для каждого правого R-модуля M_R модуль ${}_E M$ (соответственно ${}_{\tilde{E}} M$) чисто вполне приводим.

Определение 1. Будем говорить, что кольцо R принадлежит классу $\mathcal{X}$ (соответственно $\mathcal{X}'$), если для каждого правого R-модуля M_R модуль ${}_E M$ (соответственно ${}_{\tilde{E}} M$) чисто вполне приводим.

Лемма 2. Пусть R – коммутативное кольцо, M_R – простой R-модуль, $\bar{M}_R$ – рациональное расширение модуля M_R [2] и $E = End_R M$, $\bar{E} = End_R \bar{M}$. Тогда модуль ${}_E M$ является чистым подмодулем модуля ${}_{\bar{E}} \bar{M}$.

Доказательство. Если через $\tilde{M}_R$ обозначим инъективную оболочку модуля M_R и $\tilde{E} = End_R \tilde{M}$, то можно считать, что $M \subseteq \bar{M} \subseteq \tilde{M}$. Тогда для любого $e \in \bar{E}$ существует $\tilde{e} \in \tilde{E}$ такой, что $\tilde{e}|_{\bar{M}} = e$. Отсюда для любого элемента $m \in M$ имеем $e(m) = \tilde{e}(m) \in M$, так как модуль M_R квазиинъективен (т.е. $\tilde{E} \cdot M = M$). Таким образом, $\bar{E} \cdot M = M$ и, значит, M является $\bar{E}$-модулем. Покажем, что подмодуль ${}_E M$ модуля ${}_{\bar{E}} \bar{M}$ является чистым. Пусть дана система уравнений

$$(*)\ \sum_{i=1}^{n} e_{ij} x_i = m_j \in M \quad (e_{ij} \in \bar{E},\ j = 1, \ldots, \kappa),$$

имеющая решение $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n \in \bar{M}$ в модуле $\bar{E}\bar{M}$. Рассмотрим элементы $0 \neq m_1,\ a_1, \ldots, a_n \in \bar{M}$. По определению модуля $\bar{M}$ найдется такой элемент $r \in R$, что $ra_1, \ldots, ra_n \in M$ и $rm_1 \neq 0$. Умножая (*) на r, получаем тождество

$$(**)\ \sum_{i=1}^{n} e'_{ij}(ra_i) = rm_j \quad \text{, где} \quad e'_{ij} = e_{ij}|_M \in E.$$

Однако элементу $r \in R$ соответствует эндоморфизм $\bar{r} \in E$ (действительно, пусть $M_R \cong (R/L)_R$, где L – некоторый максимальный идеал кольца R, тогда $E = End_R M \cong End_R (R/L) \cong R/L$, и поэтому можно считать, что $r = r + L \in E$). Так как $rm_1 \neq 0$, то имеем $0 \neq rm_1 = r(r_1 + L) = (r + L)(r_1 + L) = \bar{r} m_1$, где $m_1 = r_1 + L$ для некоторого $r_1 \in R$. Отсюда $\bar{r} \neq 0$, значит, существует $0 \neq f \in E$ такой, что $f \cdot \bar{r} = \bar{r} \cdot f = 1_M$. Применяя f к (**), получаем $f(\sum_{i=1}^{n} e'_{ij} ra_i) = \sum_{i=1}^{n} e'_{ij} f(ra_i) =$
$= \sum_{i=1}^{n} e_{ij}(ra_i) = f(rm_j) = f(\bar{r} m_j) = m_j$ для $\forall j = \overline{1,\kappa}$.

Таким образом, элементы $f(ra_1), \ldots, f(ra_n) \in M$ образуют решение системы (*) в модуле $\bar{E}M$.

Теорема 3. Пусть R – коммутативное кольцо. Если $R \in \mathfrak{X}$, то: 1) всякий простой R-модуль рационально замкнут (т.е. совпадает со своим рациональным расширением);
2) всякий антисингулярный простой R-модуль инъективен.
Доказательство очевидно при использовании леммы 2 и [2, 19.32 (d)].

Теорема 4. Пусть R – антисингулярное слева кольцо и $R \in \mathfrak{X}$, тогда цоколь кольца R выделяется в R прямым слагаемым, т.е. $R = soc\, R \oplus R'$.

Доказательство. Пусть A – минимальный левый идеал в R; покажем, что ${}_R A$ – чистый подмодуль модуля ${}_R R$. Для этого воспользуемся предложением 8.1 [3], согласно которому левый идеал A чист в ${}_R R$ тогда и только тогда, когда $B \cdot A = B \cap A$ для каждого правого идеала B кольца R.

1. Пусть B – произвольный правый идеал в R и $b = a \in B \cap A$. Тогда уравнение $b \cdot x = a \in A$ ($b \in R = End_{\bar{E}} R$) имеет решение $x = 1$ в R. Если ${}_R\bar{A}$, ${}_R\bar{R}$ обозначают соответственно рациональное расширение ${}_R A$ и ${}_R R$, то имеем ${}_R R \subset {}_R\bar{R} = {}_R\bar{A} \oplus {}_R C$ в силу инъективности модуля ${}_R\bar{A}$ [2, 19.32 (d)]. Отсюда $1 = c_1 + c_2$ ($c_1 \in \bar{A}$, $c_2 \in C$) и $a = bc_1 + bc_2$.

Но $C \ni bc_2 = a - bc_1 \in \bar{A}$ и, значит, $a = b \cdot c_1 (b \in R , c_1 \in \bar{A})$.

2. Покажем, что $b \in End_R \bar{A}$. Действительно, $\bar{R}$ является ассоциативным кольцом с единицей, а R – подкольцо в $\bar{R}$ [2]. Отсюда $\bar{R} = End_{\bar{R}} \bar{R}$. Так как $b \in R \subseteq \bar{R}$, то b является $\bar{R}$ – эндоморфизмом модуля $_{\bar{R}}\bar{R}$, а значит, b является и R – эндоморфизмом модуля $_R\bar{R}$, т.е. $b \in End_R \bar{R}$. Отсюда $b \in End_R \bar{A}$.

3. Итак, $b \cdot c_1 = a \in A$, где $b \in End_R \bar{A}$, $c_1 \in \bar{A}$. По определению $_R\bar{A}$ существует $r \in R$ такой, что $rc_1 \in A$ и $ra \neq 0$. Отсюда $b \cdot (r \cdot c_1) = r \cdot a \neq 0$, значит, $r \cdot c_1 \neq 0$, эндоморфизм $b|_A$ ненулевой. Так как $b|_A \in End_R A$ – тело, то существует $f \in End_R A$ такой, что $f \cdot (b|_A) = (b|_A) \cdot f = 1_A$. Тогда элемент $a_1 = f(a) \in A$ таков, что $b \cdot a_1 = a$. Таким образом, если $b = a \in B \cap A$, то $b = a = b \cdot a_1 \in B \cdot A$, т.е. $B \cap A \subseteq B \cdot A$. Окончательно $B \cdot A = B \cap A$, значит, $_RA$ – чистый подмодуль в $_RR$. Отсюда по условию $R = A \oplus R_1$. Если $Soc\, R = \bigoplus_{i \in J} A_i$, где A_i – минимальные левые идеалы, а индексное множество J вполне упорядочено, то, применяя индукцию $R = A_{i_1} \oplus R_1 = A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus R_2 = \ldots$, получаем $R = Soc\, R \oplus R' (i_1 , i_2 , \ldots \in J)$.

Следствие 5. Пусть R – антисингулярное артиново кольцо. Тогда $R \in \mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда R – классически полупростое кольцо.

Следствие 6. Пусть R – антисингулярное коммутативное кольцо. Кольцо R чисто полупростое тогда и только тогда, когда кольцо R классически полупростое.

Доказательство. Напомним, что кольцо R называется чисто полупростым, если над R всякая точная чистая последовательность R-модулей расщепляется [4]. Над чисто полупростым кольцом каждый модуль разлагается в прямую сумму чисто простых модулей [4]. Используя этот факт, легко показать, что чисто полупростое кольцо $R \in \mathcal{X}$.

Наконец, последняя теорема даст полное описание класса $\mathcal{X}'$.

Теорема 7. Кольцо $R \in \mathcal{X}'$ тогда и только тогда, когда R есть чисто полупростое кольцо справа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $R \in \mathcal{X}'$ и M_R – произвольный правый R-модуль. Если I_R – чисто инъективная оболочка модуля M_R, то модуль I_R – алгебраически компактный и подмодуль M_R чист в I_R. Тогда $(R \oplus M)_R$ чист в $(R \oplus I)_R$. Имеем $Biend_R^R (R \oplus I) = \mathcal{E} \cong R$ [5]. Значит, подмодуль $\mathcal{E}(R \oplus M)$ чист в модуле $\mathcal{E}(R \oplus I)$. Отсюда $\mathcal{E}(R \oplus I) = \mathcal{E}(R \oplus M) \oplus_{\mathcal{E}} N$ для некоторого $\mathcal{E}$-модуля N. Отсюда $R \oplus I = R \oplus M \oplus N$ как R-модули. Факторизуя обе части равенства по R, получаем

$I \cong M \oplus N$. Значит, модуль M_R алгебраически компактен, а кольцо R чисто полупростое справа [4].

Достаточность. Пусть R – чисто полупростое справа кольцо и M_R – произвольный правый R – модуль. Пусть $\mathcal{E} = Biend_R M$ и ${}_{\mathcal{E}}N$ – чистый $\mathcal{E}$ – подмодуль модуля ${}_{\mathcal{E}}M$. Так как $R \subseteq \mathcal{E}$, то N_R является чистым R –подмодулем модуля M_R и, значит, $M_R = N_R \oplus K_R$ для некоторого R–модуля K_R. Покажем, что K является левым $\mathcal{E}$ –модулем:

$$\mathcal{E} \subseteq E(M^+) \cong \begin{pmatrix} E(N^+) & Hom_Z(N^+, K^+) \\ Hom_Z(K^+, N^+ & E(K^+) \end{pmatrix} \cap End_R M \cong \begin{pmatrix} End_R N & Hom_R(K,K) \\ Hom_R(K,N) & End_R K \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для произвольного $e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ имеет место $\beta = \gamma = 0$. Действительно, для эндоморфизма $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in End_R M$ должно иметь место равенство $\mathcal{E}e = e\mathcal{E}$. Но $\mathcal{E}e = e\mathcal{E} \Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$.

Таким образом, $\mathcal{E} \subseteq Biend_R N \oplus Biend_R K$, значит, K является $\mathcal{E}$ –модулем. Отсюда ${}_{\mathcal{E}}M = {}_{\mathcal{E}}N \oplus {}_{\mathcal{E}}K$ и $R \in \mathcal{Z}'$.

Литература

1. *Cohn P. On the free product of associative rings I // Math. Zeith. 1959. V. 71. P. 380-398.*
2. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т.2. 463 с.
3. *Fieldhouse D. Pure theories // Math. Ann. 1969. V. 184. P. 1-18.*
4. Росошек С.К. Чисто полупростые модули, I //Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985. С. 80-87.
5. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т.I. 688 с.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО p-РАНГА С ДОПОЛНЯЕМЫМИ ЗАМКНУТЫМИ СЕРВАНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А.Р. Чехлов

Все группы в данной статье предполагаются абелевыми редуцированными без кручения.

В § I данной работы рассматриваются группы, в которых все замкнутые в $\mathcal{Z}$-адической топологии сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми (здесь такие группы называются CS-группами). В [I] показано, что изучение редуцированных CS-групп без кручения сводится к квазиоднородному случаю (абелеву редуцированную группу A без кручения называют квазиоднородной, если для каждого простого числа p такого, что $pA \neq A$, она не имеет ненулевых элементов с бесконечной p-высотой), причем квазиоднородные CS-группы p-ранга $\geqslant 2^{\aleph_0}$ алгебраически компактны. Здесь найдены необходимые и достаточные условия, при которых квазиоднородная группа конечного p-ранга является CS-группой (лемма I.5, теорема I.I). Приведены некоторые следствия полученных результатов (следствия I.I-I.3).

В § 2 исследуются квазисервантно инъективные группы, сокращенно QPI-группы. Группа A называется QPI-группой, если всякий гомоморфизм $G \to A$ любой сервантной подгруппы G в A продолжается до эндоморфизма A. Описание QPI-групп из класса $\mathcal{X}$ получено в [2]. Класс $\mathcal{X}$ – это класс всех групп, у которых тип каждого ненулевого элемента меньше или равен некоторому максимальному типу в множестве типов всех ненулевых элементов группы. П.А.Крылов построил пример связанной QPI-группы без ненулевых элементов максимального типа [3] (группа называется связанной, если все ее фактор-группы по ненулевым сервантным подгруппам делимы) и описал все QPI-группы p-ранга $\leqslant 1$ для каждого простого p [4]. Автор свел задачу характеризации QPI-групп к квазиоднородным QPI-группам и доказал, что квазиоднородная квазиразложимая QPI-группа является однородной [5]. Здесь получены характеризации QPI-групп, все ненулевые

эндоморфизмы которых - мономорфизмы (теорема 2.4), и связанных транзитивных групп (теорема 2.2). Строится пример транзитивной, но не вполне транзитивной группы (теорема 2.3). Первый пример такой группы получен в [6]. Построенная здесь группа не имеет ненулевых элементов максимального типа, тем самым получен положительный ответ на вопрос из [6]. Показано, что квазиоднородная QDT-группа, содержащая ненулевые элементы максимальных типов, лежит в классе $\mathfrak{X}$ (теорема 2.5). Теорема 2.6 сводит изучение квазиоднородных QDT-групп к квазинеразложимым QDT-группам мощностям, не превосходящим мощности континуума.

Через $r_p(A)$ обозначим p-ранг группы A, т.е. ранг ее факторгруппы A/pA; G^- ($G^\wedge$) - замыкание в p-адической (в $\mathcal{Z}$-адической) топологии подгруппы G; $\langle G\rangle_*$ - соответственно $\langle G\rangle_p$, сервантная, соответственно p-сервантная подгруппа, порожденная подмножеством G; $E(A)$ - кольцо эндоморфизмов группы A; $h_p^A(a)$, $\chi_A(a)$, $t_A(a)$ - соответственно p-высота, характеристика, тип элемента a в A. Если χ - характеристика, t - тип, то $A(\chi)=\{a\in A \mid \chi(a)\geq\chi\}$, $A(t)=\{a\in A \mid t(a)\geq t\}$; Q_p^* - кольцо или группа целых p-адических чисел; Π - множество всех простых чисел, $\Pi(A)=\{p\in\Pi \mid pA\neq A\}$; N - множество всех натуральных чисел.

Пусть R_p - класс всех групп без ненулевых элементов бесконечной p-высоты при данном $p\in\Pi$. Напомним, что p-характеристикой $H_p^A(a)$ [7, опр. 1] элемента a группы $A\in R_p$ называется множество $\{\xi\in Q_p^* \mid \xi a$ определено$\}$, где ξa обозначает элемент из A, являющийся пределом в p-адической топологии последовательности $s_n(\xi)a$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $s_n(\xi)$ есть n-я частичная сумма числа ξ, записанного в виде формального степенного ряда. p-характеристики H_1, H_2 назовем эквивалентными, если существуют $n,m\in N$ со свойствами $nH_1\subseteq H_2$, $mH_2\subseteq H_1$. Класс эквивалентности p-характеристик называется p-типом [1]. p-тип элемента $a\in A\in R_p$ обозначается $\tau_p^A(a)$; $T_p(A)$ - множество p-типов всех ненулевых элементов группы A. Если $r_p(A)=1$ и $a\in A\setminus pA$, то каждый $b\in A$ представим в виде $b=\xi a$ для некоторого $\xi\in Q_p^*$ [7, теорема 3], a называется p-образующим A. Из [7, теорема 3, лемма 7] следует, что если $r_p(A)=1$, $a\in A\setminus pA$, $b\in B$ и $H_p(a)\subseteq H_p(b)$, то существует гомоморфизм $f: A\to B$, $f(a)=b$. Если τ_1,τ_2 есть p-типы, $H_1\in\tau_1$, $H_2\in\tau_2$, то под $\tau_1\cap\tau_2$ ($\tau_1\cup\tau_2$) будем понимать p-тип, содержащий $H_1\cap H_2$ ($\langle H_1+H_2\rangle_p\subseteq Q_p^*$). На множестве p-типов можно ввести отношение частичного порядка: $\tau_1\leq\tau_2$ означает, что существуют $H_1\in\tau_1$, $H_2\in\tau_2$, $n\in N$ со свойством $nH_1\subseteq H_2$. Знак $\not\leq$ обозначает несравнимость.

Группа A называется вполне транзитивной (транзитивной), если для любых ее элементов $0 \neq a, b$ условие $\chi(a) \leq \chi(b)$ $(\chi(a) = \chi(b))$ влечет существование эндоморфизма (автоморфизма) A, переводящего a в b. Связанная группа A квазиоднородна и $r_p(A) = 1$ для каждого $p \in \in \Pi(A)$. Это вытекает из того, что для таких p она изоморфна некоторой p-сервантной подгруппе группы Q_p^* [8, § 88, упр. 17].

§ 1. CS-группы конечного p-ранга

ЛЕММА 1.1. Если A есть CS-группа и $r_p(A) \geq \aleph_0$, то $|A| \geq 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть $g \in A \setminus pA$ и $G = \langle g \rangle_*^A$. Так как $r_q(G) = 1$, $q \in \Pi(G)$, и по [1, теорема 2.1] A можно считать квазиоднородной, то в силу квазиоднородности G связана [8, § 88, упр. 17]. Имеем $A = B \oplus G$. p-базисная подгруппа F в B есть свободная группа ранга $r_p(A)$. Поэтому F имеет в качестве гомоморфного образа сервантную подгруппу E в Q_p^* с некоторым элементом, содержащим в своей p-характеристике фиксированный $\xi \in Q_p^*$ [7, лемма 4]. Пусть H - замыкание в B сервантной оболочке ядра этого гомоморфизма. Тогда $B = H \oplus \mathfrak{D}$, $F \not\subseteq H$ и $(F+H)/H \cong F/(F \cap H) \cong E \cong \mathfrak{I}(F)$, где $\mathfrak{I}$ - проекция B на $\mathfrak{D}$. Откуда $\mathfrak{D}$ содержит подгруппу, изоморфную E. Квазиоднородность A влечет $\Pi(A) = \Pi(E) = \{p\}$. Из плотности F в B следует плотность $(F+H)/H$ в $B/H \cong \mathfrak{D}$. Поэтому $r_p(\mathfrak{D}) = r_p(E) = 1$. Следовательно, $\mathfrak{D}$ - связанная группа.

Если $0 \neq x \in \mathfrak{D}$, то $C = \langle x + pg \rangle_*^{\bar{}}$ - прямое слагаемое в A. Поэтому гомоморфизм $f: C \to G$, $f(x + pg) = g$, продолжается до $\psi \in E(A)$. Имеем $g = \psi(x) + p\psi(g)$, где $\psi = \theta\psi$, θ - проекция A на G. Если $\psi(x) = 0$, то $g \in pG$. Противоречие. Далее, $0 \neq \psi(\mathfrak{D}) \subseteq G$. Следовательно, G также содержит подгруппу, изоморфную E. Поэтому для g существует $\eta \in Q_p^*$ со свойством $\xi \in \in H_p(\eta g)$ (ηg - элемент, для которого определен $\xi \eta g$). Таким образом, для каждого $\xi \in Q_p^*$ найдется $\eta \in H_p(g)$ (зависящий от ξ) со свойством $\xi\eta \in H_p(g)$. Поэтому если $|H_p(g)| < 2^{\aleph_0}$, то в силу $|Q_p^*| = 2^{\aleph_0}$ для некоторых $\alpha, \beta \in Q_p^*$, $\alpha \neq \beta$, следует $\alpha\eta = \beta\eta$, $\eta \in H_p(g)$. Это противоречит тому, что Q_p^* - область целостности. Так как $|G| = |H_p(g)|$ (g есть p-образующий G), то $|A| \geq |G| = 2^{\aleph_0}$.

В дальнейшем в этом параграфе под словом "группа" понимается квазиоднородная группа, не имеющая ненулевых элементов с бесконечной p-высотой для данного $p \in \Pi$.

ЛЕММА 1.2. Связанные группы B и G изоморфны тогда и только тогда, когда $T_p(B) \cap T_p(G) \neq \phi$.

Доказательство. Поскольку изоморфизм сохраняет p-типы элементов групп, то необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $b \in B \setminus pB$, $g \in G \setminus pG$ и $\tau_p(b) = \tau_p(g)$. Существуют $n, m \in N$ со свойствами $H_p(b) \subseteq H_p(ng)$, $H_p(g) \subseteq H_p(mb)$. Поэтому $\varphi(b) = ng$, $\psi(g) = mb$ для некоторых $\varphi: B \to G$, $\psi: G \to B$. Тогда $\psi\varphi(b) = nmb$, $\varphi\psi(g) = nmg$ и, значит, $\psi\varphi = nm \cdot 1_B$, $\varphi\psi = nm \cdot 1_G$ (все ненулевые гомоморфизмы связанных групп в редуцированные группы - мономорфизмы). Откуда $nmB = \psi\varphi(B) \subseteq \psi(G) \subseteq B$ и $nmG = \varphi\psi(G) \subseteq \varphi(B) \subseteq G$. Далее, $\varphi(B) \cong B$, $\psi(G) \cong G$. Известно, что квазиизоморфизм связанных групп влечет их изоморфизм [8, предложение 92.1].

ЛЕММА 1.3. Пусть G - связанная, A - некоторая группы. Тогда если $\tau_G(g) \leq \tau_A(a)$, $\tau_p^G(g) \leq \tau_p^A(a)$, где $g \in G$, $a \in A$, то существует гомоморфизм $\varphi: G \to A$ со свойством $\varphi(g) = a$.

Доказательство. Имеем $H_p^G(g) \subseteq H_p^A(ma)$ для некоторого $m \in N$ и пусть $f: G \to A$, $f(g) = ma$. Из квазиоднородности A вытекает, что $\Pi(A) \subseteq \Pi(G)$. Если $qA = A$, то умножение на q - автоморфизм A. Автоморфизмы сохраняют p-характеристики элементов, поэтому считаем, что все простые делители m содержатся в $\Pi(A)$. Если q - один из таких делителей и n - частное от деления m на некоторую степень q, то $H_q^G(g) \subseteq H_q^A(na)$ и, значит, $\psi(g) = na$ для некоторого гомоморфизма $\psi: G \to A$. Гомоморфизмы не понижают p-характеристики. Следовательно, по индукции $H_p^G(g) \subseteq H_p^A(a)$. Поэтому искомый φ найдется.

ЛЕММА 1.4. Пусть $A = B \oplus G$, $\tau_p(B) = \tau_p(G) = 1$, $H = \langle b + g \rangle_*^-$, где $b + g \in A \setminus pA$, $0 \neq b \in B$, $0 \neq g \in G$. Тогда $\tau_p(b+H) = \tau_p(b) \cup \tau_p(g)$.

Доказательство. $\tau_p(A/H) = 1$, пусть $a + H = \xi(b + H)$. Для всякого n имеем $a = s_n(\xi)b + d_n + p^n a_n$, где $d_n \in H$, $a_n \in A$. Пусть $a = x + y$, $d_n = \gamma_n(b+g)$, $a_n = b_n + g_n$, $x, b_n \in B$, $y, g_n \in G$, $\gamma_n \in Q_p^*$. Если $x = k_n^n(b)$, то $p^k x = \alpha b$, $y = \beta g$, $\alpha, \beta \in Q_p^*$. Тогда $p^k x = p^k s_n(\xi)b + p^k \gamma_n b + p^{n+k} b_n$, $y = \gamma_n g + p^n g_n$. Отсюда $\alpha = p^k s_n(\xi) + p^k \gamma_n + p^n \alpha_n$, $\beta = \gamma_n + p^n \beta_n$, где $\alpha_n \in H_p(b)$, $\beta_n \in H_p(g)$, значит, $\alpha - p\beta$ есть предел последовательности $p^k s_n(\xi)$ в группе $V = H_p(b) + H_p(g)$, т.е. $\xi \in \langle V \rangle_p \subseteq Q_p^*$.

ЛЕММА 1.5. Группа A конечного p-ранга $n \geq 2$ является CS-группой тогда и только тогда, когда она представима в виде $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, где A_i - связанные группы, и всякое прямое слага-

мое в A p-ранга 2 есть CS-группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $0 \neq a \in A$. Подгруппа $H = \langle a \rangle_*$ - прямое слагаемое в A. В H всякая сервантная подгруппа плотна, так как в противном случае H в силу $r_p(H)=1$ содержала бы p-делимое прямое слагаемое. Остальные утверждения вытекают из того, что прямые слагаемые CS-групп являются CS-группами.

Достаточность. Индукцией по n. При $n=2$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для групп p-ранга $<n$, причем всякое прямое разложение таких групп продолжается до прямого разложения в связанные группы. Пусть H -замкнутая сервантная подгруппа в A, $n>2$. Если $G = H \cap A_\gamma \neq 0$, где $A_\gamma = \bigoplus_{j \in \gamma} A_j$, $\gamma \subset \{1,\dots,n\}$, $|\gamma| = n-1$, $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ - разложение, указанное в условии леммы, то по индукции $A_\gamma = G \oplus M$, причем разлагается в прямую сумму связанных групп. Имеем $H = G \oplus F$, где $F = H \cap (M \oplus A_i)$, $i \notin \gamma$. По предположению F - прямое слагаемое в $M \oplus A_i = F \oplus E$. Тогда $A = (G \oplus F) \oplus E = H \oplus E$. Пусть $H \cap A_\gamma = 0$ для всякой такой подгруппы A_γ. Если $0 \neq a \in H$, то $a = a_1 + \dots + a_n$, $0 \neq a_i \in A_i$, $A_1 \oplus A_2 = G \oplus B$, где $G = \langle a_1 + a_2 \rangle_*$, $H \cap (G \oplus \bigoplus_{j=3} A_j) \neq 0$. Поэтому этот случай сводится к уже рассмотренному выше.

Если H - некоторая p-характеристика, $\xi, \eta \in Q_p^*$, то $\xi H = \{\xi h \mid h \in H\}$, если τ, τ_1, τ_2 есть p-типы, то $\xi \tau = \{\xi H \mid H \in \tau\}$. Будем писать $\tau_1 \leq \xi \tau$, если nH_1, где $H_1 \in \tau_1$, содержится в множестве ξH для некоторых $n \in N$, $H \in \tau$. $\tau_2 \leq (\xi \tau) \cap (\eta \tau_1)$, если mH_2, где $H_2 \in \tau_2$, содержится в множестве $(\xi H) \cap (\eta H_1)$ для некоторых $m \in N$, $H \in \tau$, $H_1 \in \tau_1$.

Будем говорить, что упорядоченная пара (τ_1, τ_2) p-типов τ_1, τ_2 удовлетворяет условию $(*)$ для простого числа q и целого числа $n \geq 0$, если существует $\mu \in Q_p^*$ со свойствами

$$\tau_i \leq \xi^{-1} \tau_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{и} \quad \tau_1 \cup \tau_2 \leq (\eta^{-1} \tau_1) \cap (\xi^{-1} \tau_2),$$

где $p^\tau \xi = \mu$, $p^m \eta = 1 - q^n \mu$, $\tau, m \geq 0$ - целые числа, $\xi, \eta \notin pQ_p^*$.

Заметим, что если A - группа p-ранга 1, $b \in A$ и $H_p(b) \subseteq \xi^{-1} H_p(b)$, то ξ можно рассматривать как эндоморфизм A, в частности, $H_p(b) \subseteq H_p(\xi b)$. Действительно, $H_p(b) \ni 1 = \xi^{-1} \eta$ для некоторого $\eta \in H_p(b)$. Откуда $\eta = \xi \in H_p(b)$. Далее, $H_p(b) \subseteq \xi^{-1} H_p(b) = H_p(\xi b)$, поэтому существует $f \in E(A)$, $f(b) = \xi b$. Ясно, что $f = \xi$.

ТЕОРЕМА I.I. Группа A p-ранга 2 является CS-группой тогда и только тогда, когда она представима в виде $A = A_1 \oplus A_2$, где A_i - связанные группы, и для любых $\tau_i \in T_p(A_i)$ $(i=1,2)$, $q \in \Pi(A)$ следует, что если $\tau_1 \neq \tau_2$, то (τ_1, τ_2) удовлетворяет условию $(*)$

для q и любого целого числа $n \geq 0$, если же $\tau_2 \neq \tau_1$, соответственно $\tau_1 \leq \tau_2$, то пара (τ_1, τ_2), соответственно (τ_2, τ_1), удовлетворяет условию (*) для q и любого $n \in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $0 \neq b \in A_1 \setminus pA_1$, $n \geq 0$ - целое, $q \in \Pi(A)$, $g \in A_2 \setminus (qA_2 \cup pA_2)$ и $H = \langle x \rangle_*^-$, где $x = \kappa b + g$, $\tau_1 = \tau_p(b)$, $\tau_2 = \tau_p(g)$, $\kappa = q^n$. Имеем $A = H \oplus M$, где, как в лемме 1.5, H и M связаны. Выберем p-образующий $y \in M \setminus qM$. Далее, $y = \alpha b + \beta g$, $b = \mu x + \theta y$, $g = \gamma x + \lambda y$, где $\alpha, \beta, \mu, \theta, \gamma, \lambda \in Q_p^*$. Так как x есть q-образующий H, то $\mu x = \mu' x$ для некоторого $\mu' \in Q_q^*$. Имеем $\mu' x = \mu' \kappa b + \mu' g$ и $\mu' \kappa b = \kappa \mu' b$, $H_q(b) \leq H_q(\mu' x) \leq H_q(\kappa \mu' b) = H_q(\mu' b)$ $(\kappa = q^n)$, $h_q(b) \leq h_q(\mu' b)$. Следовательно, $\mu = \mu'$ эндоморфизм A_1.

Из $b = \mu(\kappa b + g) + \theta(\alpha b + \beta g)$, $g = \gamma(\kappa b + g) + \lambda(\alpha b + \beta g)$ соответственно имеем

$$\mu = -\theta\beta, \quad \mu\kappa + \theta\alpha = 1, \tag{1}$$

$$\gamma\kappa = -\lambda\alpha, \quad \gamma + \lambda\beta = 1. \tag{2}$$

Если $\alpha = 0$, то $\kappa\mu = 1$. Так как $\mu \in E(A_1)$, то $q^n(\mu A_1) = A_1$. Откуда $n = 0$, $\mu = 1$, $\tau_1 \leq \tau_p(\mu g) = \tau_2$. Аналогично показывается, что $\beta = 0$ влечет $\tau_2 \leq \tau_1$.

Из (1) следует $\theta(\alpha - \beta\kappa) = 1$, а из (2) $\lambda(\kappa\beta - \alpha\alpha) = \kappa$. Откуда $\lambda = -\kappa\theta$. Далее, $\kappa b + g - \kappa\mu(\kappa b + g) + \gamma(\kappa b + g) = (\kappa\mu + \gamma)(\kappa b + g)$. Отсюда $\kappa\mu + \gamma = 1$, $g = (1 - \kappa\mu)(\kappa b + g) + (-\kappa(1 - \kappa\mu)b + \kappa\mu g)$, где первое слагаемое в этом равенстве из H, второе - из M. Из этого вытекает $H_p(g) \leq H_p(\kappa(1 - \kappa\mu)b) \cap H_p(\kappa\mu g)$ и, так как $\lambda = -\kappa\theta$, $H_p(b) \leq H_p((1 - \kappa\mu)b) \cap H_p(\mu g)$. Итак, $H_p(g) \leq H_p(\kappa\mu g)$, $H_p(b) \leq H_p(\mu b)$ и $< H_p(b)$, $H_p(g) >_p \leq H_p(\kappa(1 - \kappa\mu)b) \cap H_p(\kappa\mu g)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть H - замкнутая сервантная подгруппа в A p-ранга 1. Будем предполагать, что $H = H^-$ (в противном случае рассмотрим H^-). Пусть $b + g \in H \setminus pH$, $0 \neq b \in A_1$, $0 \neq g \in A_2$, $\tau_1 = \tau_p(b)$, $\tau_2 = \tau_p(g)$ и, например, $g \notin pA$.

Предположим, что $\tau_1 \not\leq \tau_2$, $b = \xi^s d$, $d \notin pA$, $\kappa = p^s$. Согласно условию найдутся μ, η, $\xi \in Q_p^*$, $u \in N$, $(u, p) = 1$, со свойствами $H_p(b)$, $H_p(g) \leq (\eta^{-1} H_p(ub)) \cap (\xi^{-1} H_p(ug))$, $H_p(b) \leq \xi^{-1} H_p(ub)$, $H_p(g) \leq \eta^{-1} H_p(ug)$. Далее, $ud = \mu u(b + g) +$

$+(1-k\mu)ud-\mu ug$, $ug=(1-k\mu)u(b+g)+k((k\mu-1)ud+\mu ug)$,
где p-характеристики $ud, ug\leq$ в p-характеристике каждого элемента в правой части соответствующего равенства. В силу $(u,p)=1$ ud и ug являются p-образующими соответственно A_1 и A_2. Поэтому $A=H\oplus M$, где $M=\langle(1-k\mu)ud-\mu ug\rangle_*^-$.

Пусть $\tau_1\leq\tau_2$, $\tau_2\neq\tau_1$ и $\chi(b)\neq\chi(g)$. Тогда $s=h_g(b)>h_g(g)$ для некоторого $q\in\Pi(A)$ (возьмем $q=p$, если для него выполнено это условие). Согласно предположению $\tau_1\cup\tau_2=\tau_2=$
$=\tau_p((1-q^s\mu)b)\cap\tau_p(\mu g)$, $\mu\in Q_p^*$. Тогда, как и выше, $A=H\oplus M$, где $M=\langle(1-q^s\mu)ud-\mu ug\rangle_*^-$, $u\in N$, $b=q^sd$. Доказательство аналогично, если $\tau_2\leq\tau_1$, $\tau_1\neq\tau_2$ и $\chi(g)\neq\chi(b)$.

Если же $\tau_1\leq\tau_2$ и $\chi(b)\leq\chi(g)$, то из леммы I.3 следует, что $H_1(b)\leq$ $\leq H_p(g)$. Тогда, как легко видеть, $A=H\oplus A_2$. Аналогично $A=H\oplus A_1$, если $\tau_2\leq\tau_1$ и $\chi(g)\leq\chi(b)$.

Наконец, пусть $\tau_1=\tau_2$ и, значит, $t(b)=t(g)$. Случаи сравнимости $\chi(b)$ и $\chi(g)$ рассмотрены выше. Пусть $\chi(b)\leq\chi(g)$. Имеем $t(b+g)=$ $=t(b)\cap t(g)=t(b)$. Поэтому существует $d\in\langle b\rangle_*$, $\chi(b+g)=$ $=\chi(d)$. Найдутся $n, m\in N$ такие, что $\chi(nd)=\chi(b)$, $\chi(md)=\chi(g)$, $(m,n)=1$. Пусть $\varphi: A_1\to A_2$, $\psi: A_2\to A_1$, $f: A_1\to H$ - гомоморфизмы со свойствами $\varphi(A_2)=\psi(A_1)=f(A_2)=0$, $\varphi(b)=nd$, $\psi(g)=md$, $f(d)=b+g$ (они существуют по лемме I.3), $r,s\neq0$ - целые числа, $nr+sm=1$. Тогда для $\alpha=r\varphi+s\psi$ имеем $\alpha(b+g)=(nr+sm)d=d$. Далее, $(p\alpha)A\leq H$ и $(p\alpha)|_H=1_H$. Поэтому H - прямое слагаемое в A.

Итак, для всякой сервантной подгруппы H в A p-ранга 1 H^- связана (значит, $H^-=H^\wedge$) и H^- есть прямое слагаемое в A. Всякая же замкнутая сервантная подгруппа в A p-ранга 2 совпадает с A. Следовательно, A является CS-группой.

ЛЕММА I.6. Если A - связанная группа и $\tau\in T_p(A)$ такой, что для любых $\tau_i, \tau_2\in T_p(A)$ из $\tau_1,\tau_2\geq\tau$ следует сравнимость τ_1, τ_2, то это условие выполняется для любого элемента из $T_p(A)$ и для всякого $\alpha\in E(A)$ α или $1-\alpha$ есть целое кратное автоморфизма.

Доказательство. Пусть $b, g, c, d\in A\setminus pA$, $\tau_p(b)=\tau$, $H_p(g)\leq$ $\leq H_p(c)$, $H_p(d)$. Существуют $f,\varphi\in E(A)$, $f(g)=c$, $\varphi(g)=d$. Имеем $\tau_p(f(b))$, $\tau_p(\varphi(b))\geq\tau_p(b)$. Поэтому, например, $H_p(f(b))\leq$ $\leq H_p(n\varphi(b))$, $h_p(f(b))\leq h_p(n\varphi(b))$ для некоторого $n\in N$. Откуда $\psi f(b)=n\psi(b)$, $\psi\in E(A)$. Тогда $\tau_p(c)\leq\tau_p(\psi f(g))=\tau_p(\psi(g))=$ $=\tau_p(d)$. Далее, если $\alpha\in E(A)$, то $H'=H_p(\alpha(b))\cap H_p((1-\alpha)b)\geq$ $\geq H_p(b)$. Если $x\in H'$, то $x(1-\alpha)b=xb-x\alpha b$. Отсюда $x\in H_p(b)$. Следовательно, $H'=H_p(b)$. Из сравнимости $\tau_p(\alpha(b))$, $\tau_p((1-\alpha)b)$ вытекает, что, например, $\tau_p(\alpha(b))=\tau_p(b)$. Тогда $t(\alpha(b))=t(b)$,

$\chi(b) \leq \chi(\alpha(b))$. Поэтому $\alpha(b) = kx$, где $\chi(x) = \chi(b)$, $k \in N$. Согласно лемме I.3 существуют $\mu, \gamma \in E(A)$, $\mu(x) = b$, $\gamma(b) = x$. Имеем $\mu\gamma = \gamma\mu = 1$ и $\alpha = k\gamma$.

ЛЕММА I.7. Пусть $A = B \oplus G$ есть CS -группа, где B и G - связанные группы, и для всякого $\alpha \in E(B)$ α или $1-\alpha$ есть целое кратное автоморфизма. Тогда любые $\tau_1 \in T_p(B)$, $\tau_2 \in T_p(G)$ сравнимы.

Доказательство. Пусть $b \in B \setminus pB$, $g \in G \setminus pG$, $\tau_p(b) = \tau_1$, $\tau_p(g) = \tau_2$ и $\tau_1 \neq \tau_2$. Согласно теореме I. I существует $\mu \in Q_p^*$ со свойствами $\tau_1 \cup \tau_2 \leq \tau_p((1-\mu)b) \cap \tau_p(\mu g)$ и $\tau_3 = \tau_p(\mu b) > \tau_1$, $\tau_4 = \tau_p(d) > \tau_1$, где $d = (1-\mu)b$. Согласно доказательству леммы I.6 $\tau_3 \cap \tau_4 = \tau_1$. Из сравнимости τ_3, τ_4 и $\tau_4 > \tau_1$ вытекает, что $\tau_3 = \tau_1$. Для некоторого $m \in N$ $m\mu \in E(B)$. Как в лемме I.6, существуют $p \in E(B)$, $k \in N$, $p\mu = k \cdot 1$. Для некоторых гомоморфизмов $f: B \to G$, $n \in N$, $f(b) = n\mu g$, p индуцирует эндоморфизм на $f(B) \leq G$, для которого $pf(b) = p(n\mu g) = kng$. Откуда $\tau_p(b) \leq \tau_p(g)$. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ I.1. Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, где A_i - связанные группы, $n \geq 2$, такие, что для всякого $\alpha \in E(A_j)$ α или $1-\alpha$ есть целое кратное автоморфизма, где $j \in \mathbb{Z} \leq \{1, \ldots, n\}$, $|\mathbb{Z}| \geq n-1$. A является CS-группой тогда и только тогда, когда любые $\tau_i \in T_p(A_i)$, $\tau_j \in T_p(A_j)$ $(i \neq j)$ сравнимы, причем если $\tau_i \leq \tau_j$, то существует $\tau_i' \in T_p(A_i)$, $\tau_i' \geq \tau_j$.

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 1.7 и из того, что для $i \neq j$ существуют ненулевые гомоморфизмы $A_i \to A_j$ (см. доказательство леммы I.I) .

Достаточность. Пусть $i \neq j$, $\tau_i < \tau_j$, $0 \neq b \in A_i$, $0 \neq g \in A_j$, $\tau_p(b) = \tau_i$, $\tau_p(g) = \tau_j$ и $\chi(b) \neq \chi(g)$. Тогда $n = h_q(b) > h_q(g)$, где $q \in \Pi(A)$. Предполагаем, что $g \notin qA_j$ (в противном случае разделим b и g на нужную степень q). Поскольку $\tau_j \leq \tau_i' \in T_p(A_i)$, то существует гомоморфизм $0 \neq f: A_j \to A_i$. Если $q^n d = b$, то d есть q -образующий A_i . Поэтому $\xi d = f(g)$ и $H_q(d) \leq H_q(\xi d)$. Предполагаем, что $\xi \in Q_q^* \setminus qQ_q^*$ (в противном случае делим ξ на нужную степень q). Для некоторого $m \in N$, $(m,q) = 1$, $H_q(d) \leq H_q(mg)$. Откуда $H_q(d) \leq H_q(\eta d)$ и $H_q(g) \leq H_q(\eta g)$, где $\eta = \xi m$. η можно рассматривать как элемент из $E(A_i) \cap E(A_j)$. Пусть $\eta = s_0 + s_1 q + \ldots$ - представление η в виде формального степенного ряда. Так как $(s, q) = 1$, где $s = s_{n-1}(\eta)$, то найдутся целые k, l со свойствами $sk + q^n l = 1$. Тогда $k\eta = 1 - lq^n + s_n q^n + s_{n+1} q^{n+1} + \ldots = 1 - q^n \mu$, где $\mu = s_n - l + s_{n+1} q + \ldots \in E(A_i) \cap E(A_j)$. Откуда $\tau_i \cup \tau_j \leq \tau_p((1-q^n\mu)b) \cap \tau_p(\mu g)$. Согласно доказательству теоремы I.I $A_i \oplus A_j$ есть CS-группа.

Предположим теперь, что $n>2$ и что утверждение доказано для групп p-ранга $<n$, причем всякое прямое разложение таких групп продолжается до прямого разложения, изоморфного исходному. Ссылаясь на доказательство леммы I.5, видим, что осталось показать изоморфность прямых разложений $G \oplus B$ и $A_1 \oplus A_2$, где $G = \langle a_1 + a_2 \rangle_*$. Имеем, например, $\tau_p(a_1) \leq \tau_p(a_2)$. Поэтому $\tau_p(a_1 + a_2) = \tau_p(a_1)$ и, значит, $G \cong A_1$. По лемме I.4 $\tau_p(a_2 + G) = \tau_p(a_1) \cup \tau_p(a_2) = \tau_p(a_2)$. Откуда $B \cong (A_1 \oplus A_2)/G \cong A_2$.

СЛЕДСТВИЕ I.2. Пусть G - связанная группа такая, что для любых $\tau, \tau_1, \tau_2 \in T_p(G)$ из $\tau < \tau_1, \tau_2$ следует сравнимость τ_1, τ_2. Группа $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \cong G$, $n \geq 2$, является CS-группой тогда и только тогда, когда $T_p(G)$ линейно упорядочено.

Пусть $\mathfrak{R} \cap R_p$ - класс всех групп, у которых в множестве p-типов всех ненулевых элементов группы имеются максимальные элементы. Группу назовем p-однородной, если p-типы ее ненулевых элементов равны.

СЛЕДСТВИЕ I.3 [9]. Несвязанная группа $A \in \mathfrak{R} \cap R_p$ конечного p-ранга является CS-группой тогда и только тогда, когда для нее выполнены следующие эквивалентные условия:

1) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, где A_i есть p-однородные изоморфные связанные группы;

2) A p-однородна и разлагается в прямую сумму связанных групп;

3) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, где A_i - однородные изоморфные связанные вполне транзитивные группы;

4) A - разложимая однородная QDT-группа.

Доказательство. Пусть A - несвязанная CS-группа из $\mathfrak{R} \cap R_p$. Тогда A разлагается в конечную прямую сумму связанных групп $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ $(n = \tau_p(A))$. Хотя бы одна группа, скажем A_1, содержит ненулевой элемент максимального p-типа. Так же, как в лемме I.6, можно получить, что все эндоморфизмы A_1 есть целые кратные автоморфизмов. Откуда вытекает, что $T_p(A_1)$ состоит из попарно несравнимых элементов, в частности, все они максимальны. Из существования гомоморфизмов $A_1 \to A_i$ следует, что $T_p(A_i)$ тоже имеют максимальные элементы, значит, все элементы из $T_p(A_i)$ также максимальны, кроме того, они максимальны в $T_p(A)$. Из леммы I.7 следует, что A_i есть p-однородные группы одного и того же p-типа. По лемме I.2 A_i изоморфны. Итак, справедливо 1). По следствию I.2 группа, удовлетворяющая 1), является CS-группой.

1) $\Rightarrow$ 2) очевидно. 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из лемм I.2, I.3. Эквива-

лентность 3) и 4) доказана в [2, теорема I.9] . 3) $\Rightarrow$ I) вытекает из того, что всякая однородная вполне транзитивная группа p-однородна.

ЗАМЕЧАНИЯ. Всякая квазиоднородная группа конечного ранга лежит в $\mathcal{R} \cap R_p$ для некоторого p [9] . Группы из следствия I.2 существуют. Действительно, для каждого $p \in \Pi$ выберем в Q_p^* обратимый элемент σ_p , не являющийся алгебраическим числом. Затем для $n = 0,1,2,\ldots$ положим $\sigma_n = \langle \ldots, p^n \sigma_p^n, \ldots \rangle \in \Pi Q_p^* = V$. Пусть R - сервантное подкольцо в V , порожденное множеством $\{\sigma_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $S = \{b/a \mid a, b \in R$, $\chi(a) \leq \chi(b)\}$. Согласно [3, пример 2.3] S - связанная вполне транзитивная группа (аддитивные группы колец обозначаем так же, как и сами кольца) . $R = \langle \sigma_n \mid n = 0,1,\ldots \rangle_* \subset V$. Поэтому любой элемент из R имеет тип, совпадающий с типом некоторого σ_n . Следовательно, множество типов $t(R)$ всех ненулевых элементов в R линейно упорядочено. Поскольку $\chi(b/a) = \chi(b) - \chi(a)$, $b/a \in S$ [3, пример 2.3] , то из свойств элементов P следует, что $t(S) = t(R)$. В связанной вполне транзитивной группе для любых ее элементов a, b выполняется условие $\tau_p(a) \leq \tau_p(b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t(a) \leq t(b)$ (теорема 2.I) . Следовательно, $T_p(S)$ линейно упорядочено. По следствию I.2 для каждого $m \in N$ $A = {}^m S$ является CS-группой. Пусть $v_n = \langle \ldots, p^{2n} \sigma_p^n, \ldots \rangle \in V$, ${}^m T$ - сервантное подкольцо, порожденное $\{v_n \mid n = 0,1,\ldots\rangle$, $T \subset F$ - подкольцо в V , построенное аналогично S . Тогда $T_p(F)$ также линейно упорядочено, F и S не изоморфны $(t(F) \neq t(S))$, но по следствию I.I $F \oplus S$ есть CS-группа. Приведенные группы не квазисервантно инъективны, так как согласно [5] разложимые квазиоднородные QDI-группы однородны.

§ 2. QDI-группы, все ненулевые эндоморфизмы которых есть мономорфизмы

Кольцо R называется E-кольцом, если всякий эндоморфизм его аддитивной группы R^+ совпадает с умножением R слева на некоторый элемент из R . Подкольцо K кольца R называется сервантным, если K^+ - сервантная подгруппа в R^+. Кольцо R называется кольцом без кручения, если R^+ - группа без кручения. Хорошо известно, что любое сервантное подкольцо в $\prod_{p \in \Pi} Q_p^*$ является E-кольцом.

Будем говорить, что кольцо R обладает свойством $(*)$, если R - коммутативная область целостности без кручения такая, что для всех $p \in \Pi$ фактор-кольца R/pR - области целостности, а R^+ - редуцированная квазиоднородная группа. Пусть $\hat{R}$ - поле частных кольца R со свойством $(*)$. В [3, § 2] показано, что $\bar{R} = \{b/a \in \hat{R} \mid$

$a, b \in R$, $\chi(a) \leq \chi(b)\}$ - такое подкольцо в $\hat{R}$, что $\hat{R}^+$ - вполне транзитивная и транзитивная группа, а R - сервантное подкольцо в $\bar{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В [3, § 2] также показано, что кольцо R со свойством (*) обладает следующими свойствами:

1) если $a, b \in R$, то $\chi(ab) = \chi(a) + \chi(b)$;

2) если $b / a \in \bar{R}$, то $\chi(b/a) = \chi(b) - \chi(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если R - кольцо со свойством (*), то из построения и свойств кольца $\bar{R}$ вытекает, что $\bar{R} = \bar{\bar{R}}$, кроме того, если R есть E-кольцо, а R^+ - вполне транзитивная группа, то $R = \bar{R}$. Поэтому если R есть E-кольцо со свойством (*), то вполне транзитивность R^+ равносильна тому, что $R = \bar{R}$.

Отметим, что если G и A - связанные группы, то $Hom(G,A)$- связанная группа [10], в частности, $E(A)^+$ связана. Пополнение связанной группы A в χ-адической топологии изоморфно $\prod_{p \in \Pi} Q_p^*$

Поэтому $E(A)$ вкладывается в $\prod_{p \in \Pi} Q^*_p$. Следовательно, $E(A)$ есть E-кольцо со свойством (*).

ТЕОРЕМА 2.1. Для связанной группы A эквивалентны следующие условия:

1) A - вполне транзитивная группа;

2) для любых ее элементов $0 \neq a, b$ $t(a) \leq t(b) \Leftrightarrow \tau_p(a) \leq \tau_p(b)$ для каждого (равносильно для некоторого) $p \in \Pi(A)$;

3) A есть QDT-группа;

4) для характеристики χ любого ненулевого элемента A имеет место изоморфизм $E(A)^+ \cong A(\chi)$ и $E(A) = \bar{E}(A)$;

5) на A можно задать модуль без кручения над таким кольцом R, что R^+ - связанная группа, $R = \bar{R}$, $\Pi(A) = \Pi(R^+)$ и любые два линейно независимых над R элемента A имеют несравнимые типы.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Поскольку связанные группы квазиоднородны, то можно говорить о p-типах элементов A для каждого $p \in \Pi(A)$. Пусть $0 \neq a, b \in A$ и $t(a) \leq t(b)$. Тогда $\chi(a) \leq \chi(nb)$ и $f(a) = nb$ для некоторых $n \in N$ и $f \in E(A)$. Откуда $\tau_p(a) \leq \tau_p(nb) = \tau_p(b)$ для любого $p \in \Pi(A)$. Импликация $\tau_p(a) \leq \tau_p(b) \Rightarrow t(a) \leq t(b)$ справедлива всегда для любой группы $G \in R_p$. В самом деле, без потери общности можно считать, что $a, b \in G \setminus_p G$. Тогда замыкания $\langle a \rangle^-$ и $\langle b \rangle^-$ в p-адической топологии p-сервантных подгрупп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ группы G являются замкнутыми сервантными подгруппами p-ранга 1 в G. Для некоторого $n \in N$ имеем $H_p(a) \subseteq H_p(nb)$. Существует гомоморфизм $f: \langle a \rangle^- \to \langle b \rangle^-$, $f(a) = nb$. Откуда $t(a) \leq t(b)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $0 \neq a, b \in A$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$. По условию $\tau_p(a) \leq \tau_p(b)$. Поэтому $H_p(a) \subseteq H_p(kb)$ для некоторого $k \in N$. Так как p-харак-

теристика есть p-сервантная подгруппа в Q_p^* [7, лемма I], то можно считать, что $(\kappa, p) = 1$. Пусть $\kappa = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ - разложение κ в произведение степеней своих простых делителей p_i $(i = 1, \dots, n)$. Если $qA = A$, то деление на q есть автоморфизм A. Так как гомоморфизмы не понижают p-характеристики, то можно считать, что $p_i \in \Pi(A)$. В силу связанности $r_p(A) = 1$ при $p \in \Pi(A)$, значит, существует $f \in E(A)$ со свойством $f(a) = \kappa b$ (см. введение). Откуда $H_q(a) \leq H_q(\kappa b)$ для каждого $q \in \Pi(A)$. Следовательно, $H_{p_i}(a) \leq H_{p_i}(\kappa_i b)$, где $\kappa_i = p_i^{-m_i} \kappa$. Имеем $(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = 1$. Пусть $\varphi_i \in E(A)$, $\varphi_i(a) = \kappa_i b$, и l_i - такие целые числа, что $\kappa_1 l_1 + \dots + \kappa_n l_n = 1$. Тогда $(l_1 \varphi_1 + \dots + l_n \varphi_n) a = b$, т.е. A вполне транзитивна.

I) $\Rightarrow$ 3). Пусть G - сервантная подгруппа в A, $\varphi : G \to A$ - некоторый гомоморфизм. Для $0 \neq g \in G$ имеем $\chi(g) \leq \chi(\varphi(g))$. Пусть $f \in E(A)$, $f(g) = \varphi(g)$. Так как G связана, то все ненулевые гомоморфизмы $G \to A$ - мономорфизмы. Откуда $f|_G = \varphi$. 3) $\Rightarrow$ I) справедлива всегда [2].

I) $\Rightarrow$ 4). Пусть $0 \neq a \in A$ и $\chi = \chi(a)$. В силу вполне транзитивности A и так как все ненулевые эндоморфизмы A - мономорфизмы, отображение $\varphi \to \varphi(a)$ осуществляет изоморфизм $E(A)^+$ на $A(\chi)$. Если $G = \langle a \rangle_*$, то $A(\chi) \cong Hom(G, A)$. Поэтому по лемме I.3 [2] $A(\chi)$ вполне транзитивна. Поскольку $A(\chi)$ связана и $A(\chi) \cong E(A)^+$, то согласно замечанию 2.2 $E(A) = \overline{E(A)}$.

4) $\Rightarrow$ I). Пусть $0 \neq a, b \in A$ и $\chi = \chi(a) \leq \chi(b)$, $t = t(a)$, $G = \langle a \rangle_*$. Имеем $G \otimes Hom(G, A) \cong G \otimes A(\chi) \cong A(t)$ [II, следствие 2]. Вполне транзитивность $A(\chi)$ влечет вполне транзитивность $A(t)$ [2, лемма I.3]. Поэтому по доказанной части I) $\Rightarrow$ 4) $E(A(t))^+ \cong A(t)(\chi) = A(\chi)$. Отображение $f \to f|_{A(t)}$ осуществляет вложение $E(A)$ в $E(A(t))$. Это сервантное вложение. Действительно, так как A связана, то $E(A)$ можно рассматривать как p-сервантное подкольцо в G_p^*, значит, $E(A)$ p-сервантно в $E(A(t))$ для каждого $p \in \Pi(A)$. Следовательно, $E(A)$ - сервантное подкольцо в $E(A(t))$. Поскольку сервантная подгруппа QPJ-группы, изоморфная самой группе, выделяется в ней прямым слагаемым [2, доказательство теоремы I.12], то в силу того, что $E(A(t))^+ \cong A(\chi)$ есть QPJ-группа, $E(A)^+ \cong A(\chi)$ и $A(\chi)$ неразложима ($A(\chi)$ связанна), $E(A) = E(A(t))$. Для фиксированных a и b существует $f \in E(A(t))$, $f(a) = b$. По доказанному найдется $\psi \in E(A)$, $\psi(a) = b$, т.е. A вполне транзитивна.

I) $\Rightarrow$ 5). В качестве R возьмем $E(A)$. Для всякой группы G $\Pi(G) = \Pi(E(G)^+)$. Далее, $R = R$. Если $0 \neq a, b \in A$ и $t(a) \leq t(b)$, то $\chi(a) \leq \chi(nb)$ для некоторого натурального n. Тогда для $f \in R$, $f(a) = nb$, имеем $f, n \in R$, т.е. a и b линейно зависимы над R.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $0 \neq a, b \in A$, $\chi(a) \leq \chi(b)$. Если $ra = sb$, $r, s \in R$, то $\chi(ra) = \chi(sb)$. Так как A связана, то A и R^+ можно рассматривать как p-сервантные подгруппы в Q_p^* ($p \in \Pi(A)$). Следовательно, $h_p(ra) = h_p(r) + h_p(a) = h_p(sb) = h_p(s) + h_p(b)$ (в Q_p^*). Так как $\Pi(R^+) = \Pi(A)$, то $h_p(r) \geq h_p(s)$ для всех $p \in \Pi(R^+)$, т.е. $\chi(r) \geq \chi(s)$ (в R^+). По условию $\frac{r}{s} \in R$. Откуда $\frac{r}{s} a = b$, значит, A вполне транзитивна.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для связанной группы A следующие условия эквивалентны:

1) A есть QDT-группа такая, что множество типов всех ее ненулевых элементов содержит максимальные элементы;

2) A есть QDT-группа такая, что $Soc\, A \neq 0$ (определение псевдоцоколя см. в [12]);

3) для характеристики χ любого ненулевого элемента A имеет место изоморфизм $E(A)^+ \cong A(\chi)$ и $E(A^+)$ вкладывается в Q_p^* для каждого $p \in \Pi(A)$ как p-сервантное подкольцо, в котором каждый элемент есть целое кратное обратимого;

4) для любых $0 \neq a, b \in A$ условие $t(a) = t(b)$ эквивалентно $\tau_p(a) = \tau_p(b)$ для каждого (равносильно для некоторого) $p \in \Pi(A)$, и тип любого ненулевого элемента A является максимальным;

5) на A можно задать такой модуль без кручения над кольцом R, все элементы которого являются целыми кратными обратимых, что $\Pi(A) = \Pi(R^+)$, и любые два линейно независимых над R элемента A имеют несравнимые типы.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) очевидно и вытекает из соответствующих определений. Действительно, если A вполне транзитивна и t - максимальный тип в множестве типов всех ненулевых элементов A, то $A(t)$ будет минимальной сервантной вполне характеристической подгруппой, поэтому $Soc\, A \neq 0$. И, обратно, если G - некоторая минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа вполне транзитивной группы A, то любой ненулевой элемент из G имеет максимальный тип в A.

1) $\Rightarrow$ 3). Так как все ненулевые эндоморфизмы A - мономорфизмы, то существование ненулевого элемента с максимальным типом влечет, что все типы ненулевых элементов A - максимальны, а в $E(A)$ каждый элемент есть целое кратное обратимого [2, теорема I.I2; 6, теорема 5.2]. Поскольку $\Pi(A) = \Pi(A(\chi)) = \Pi(E(A)^+)$, $A(\chi) \cong E(A)^+$ - связанные группы, то справедливость импликации доказана.

3) $\Rightarrow$ 1). В силу теоремы 2.1 достаточно показать, что для $R = E(A)$, если $0 \neq a, b \in R$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$, то $\frac{b}{a} \in R$. По условию $a = nu$, $b = mv$, где $n, m \in N$, а u, v обратимы в R. Можно предполагать, что про-

тые делители n и m не делят A. Так как $\chi(nu) \leq \chi(mv)$, а $\chi(u) = \chi(v)$ (в силу обратимости), то n делит m: $m = nm'$. Откуда следует, что элемент $\frac{b}{a} \in \bar{R}$ равен $\frac{m'v}{u} \in R$, т.е. $R = \bar{R}$.

Справедливость 1)⇒4) уже отмечалось в 1) ⇒ 3). А 4)⇒1) вытекает из теоремы 2.1. 1)⇔5) доказывается аналогично теореме 5.2 из [6].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для связанной группы A следующие условия эквивалентны:

1) A - однородная $QP\mathcal{J}$-группа;

2) A есть p-однородная группа (т.е. $\tau_p(a) = \tau_p(b)$ для всех $0 \neq a, b \in A$) для каждого (равносильно для некоторого) $p \in \Pi(A)$;

3) на A можно задать модуль без кручения над таким кольцом R, все элементы которого являются целыми кратными обратимых, что $\Pi(A) = \Pi(R^+)$ и A есть R-модуль ранга 1.

Доказательство. 1)⇒2). Всякая однородная вполне транзитивная группа A будет, очевидно, p-однородной для всех $p \in \Pi(A)$. 2) ⇒ 1) доказывается так же, как 2)⇒1) теоремы 2.1. 1)⇔3) вытекает из следствия 2.1.

Если R - кольцо со свойством $(*)$, то обозначим через R^* - сервантное подкольцо в $\bar{R}$, порожденное элементами $\{r, \frac{b}{a}\}$, $r \in R$, $0 \neq a$, $b \in R$, $\chi(a) = \chi(b)\}$.

ЛЕММА 2.1. Если R - кольцо со свойством $(*)$, то R - сервантное подкольцо в R^*, аддитивная группа G кольца R^* транзитивна. Если, кроме того, R есть E-кольцо, то транзитивность R^+ равносильна тому, что $R = R^*$.

Доказательство. Сервантность R в R^* следует из сервантности R в $\bar{R}$. Пусть $0 \neq x, y \in G$, $\chi(x) = \chi(y)$. Так как $R^* \leq \bar{R}$, то $x = a/b$, $y = c/d$ для некоторых $0 \neq a, b, c, d \in R$. Согласно замечанию 2.1 $\chi(a/b) = \chi(a) - \chi(b) = \chi(c) - \chi(d)$. Откуда в силу квазиоднородности аддитивных групп рассматриваемых колец $\chi(ad) = \chi(a) + \chi(d) = \chi(c) + \chi(b) = \chi(cb)$. Следовательно, $u = (ad)/(cb)$, $v = (cb)/(ad) \in R^*$. Умножения на u и v являются автоморфизмами G ($uv = 1$), переводящими y в x и x в y соответственно. Справедливость последнего утверждения вытекает из определения E-кольца и построения R^*.

ТЕОРЕМА 2.2. Для связанной группы A следующие условия эквивалентны:

1) A - транзитивная группа;

2) для любых $0 \neq a$, $b \in A$ $t(a) = t(b) \Leftrightarrow \tau_p(a) = \tau_p(b)$ для каждого (равносильно для некоторого) $p \in \Pi(A)$;

3) на A можно задать модуль без кручения над таким кольцом R, что R^+ - связная группа, $R = R^*$, $\Pi(A) = \Pi(R^+)$ и любые два линейно независимых над R элемента имеют неравные типы.

Доказательство. I) $\Rightarrow$ 2) доказывается так же, как I) $\Rightarrow$ 2) в теореме 2.I. 2) $\Rightarrow$ I) . Пусть $0 \neq a, b \in A$ и $\chi(a) = \chi(b)$. По условию $\tau_p(a) = \tau_p(b)$. Как и в теореме 2.I, доказывается, что существуют $f, \varphi \in E(A)$, $f(a) = b$, $\varphi(b) = a$. Тогда $f\varphi(b) = b$, $\varphi f(a) = a$. Откуда $f\varphi = \varphi f = 1$, т.е. f, φ - автоморфизмы. Значит, A транзитивна.

I) $\Rightarrow$ 3) . В качестве R возьмем $E(A)$. Имеем $\Pi(A) = \Pi(R^+)$. Пусть $0 \neq a \in A$, $G = \langle a \rangle_*$, $\chi = \chi(a)$. Тогда $A(\chi) \cong Hom(G, A)$- транзитивная группа [2, лемма I.3] . Подгруппа $A' = \{b \in A \mid b = ra, r \in R\}$ сервантна в $A(\chi)$. В самом деле, $\Pi(A') = \Pi(R^+) = \Pi(A(\chi))$. Если $px = b$, где $b \in A'$, $x \in A(\chi)$, $p \in \Pi(A')$, то существует $f \in R$, $fa = px$. Имеем $\chi(a) \leq \chi(x) < \chi(px)$. В Q_p^* существует ξ такой, что $\xi a = x$ (A рассматриваем как p-сервантную подгруппу в Q_p^*), и $p\xi = f \in R$. Откуда $\xi \in R$, т.е. $\xi a = x \in A'$. Далее, A' характеристична в $A(\chi)$. Действительно, если α - автоморфизм $A(\chi)$, $b \in A'$, то $\chi(b) = \chi(ab)$ в $A(\chi)$, из определения $A(\chi)$ следует, что это равенство справедливо и в A . Так как A транзитивна, то α индуцирован некоторым $\beta \in R$. Имеем $b = ra$, $r \in R$, $ab = (\beta r)a$, где $\beta r \in R$ и, значит, $ab \in A'$. Из сервантности и характеристичности A' в $A(\chi)$ следует, что A' также транзитивна. Имеем $A' \cong R^+$. Поэтому $R = R^*$. Если теперь $0 \neq x, y \in A$ и $t(x) = t(y)$, то $\chi(rx) = \chi(uy)$ для некоторых рациональных чисел r, u . Существует $f \in R$, $f(rx) = (r(fx)) = uy$. Если m - общее кратное чисел r и u , то $(mrf)x = (mu)y$, где $mrf, mu \in R$, т.е. x и y линейно зависимы над R .

3) $\Rightarrow$ I) доказывается аналогично 5) $\Rightarrow$ I) из теоремы 2.I.

ТЕОРЕМА 2.3. Существует счетная транзитивная, но не вполне транзитивная связанная группа без ненулевых элементов максимального типа.

Доказательство. Разобьем Π на бесконечные непересекающиеся подмножества Π_1, Π_2, Π_3 . В свою очередь Π_1 также разобьем на бесконечные непересекающиеся подмножества $\mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Каждому $\mathcal{F}_i$ поставим в соответствие $p_i \in \Pi \setminus \Pi_1$ ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$) . Для каждого $p \in \Pi$ выберем в Q_p^* обратимые элементы σ_p и v_p , алгебраически независимые над кольцом целых чисел, причем каждое v_p для $p \in \mathcal{F}_i$ имеет p_i в качестве своего представителя в смежных классах кольца Q_p^* по pQ_p^* . Для $n = 0, 1, \ldots$ положим $\sigma_n = \langle \ldots, p^{n_1} \sigma_p^n, \ldots \rangle$, $v_n = \langle \ldots, p^{n_2} v_p^n, \ldots \rangle \in \in \prod_{p \in \Pi} Q_p^* = S$, где $n_1 = n$ при $p \in \Pi_1 \cup \Pi_3$, $n_2 = n$ при $p \in \Pi_2 \cup \Pi_3$ и $n_1 = n_2 = 0$ в противном случае .

Пусть R - сервантное подкольцо в S , порожденное множеством $\{\sigma_n, v_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$. Поскольку $\tau_p(R^+) = 1$ для всех $p \in \Pi$, то связанность R^+ вытекает из ее квазиоднородности. Квазиоднородность R^+ может нарушиться, если только в R есть ненулевой элемент с чуж-

вой p-компонентой в S для некоторого p, это равносильно тому, что σ_p и v_p - корни некоторого многочлена двух переменных над кольцом целых чисел, что противоречит выбору σ_p и v_p.

Так же, как в [3, пример 2.3], можно показать, что $\bar{R}$ - сервантное подкольцо в S, а $\bar{R}^+$ связана. Связанность $G=(R^*)^+$ следует из того, что G сервантна в $\bar{R}^+$. По лемме 2.1 G транзитивна. Для всякого $0\neq z\in R^*$, $t(z)>t(v)$, следует $t(z)<t(z^2)$. Поэтому G не имеет ненулевых элементов максимального типа.

Покажем, что $R^*\neq\bar{R}$, из этого следует, что G не вполне транзитивна. Для этого заметим, что $u=\frac{\sigma_1}{\sigma_1+v_1}\in\bar{R}\setminus R^*$. Предположим противное: $u\in R^*$. Тогда существует $k\in N$ такое, что $ku=v_1\xi_1+\dots+v_s\xi_s$, где $\xi_i=a_i/b_i$ и $v_i, a_i, b_i\in R$, $\chi(a_i)=\chi(b_i)$ $(i=1,\dots,s)$. Согласно замечанию 2.1 $\chi(\xi)=\chi(a_i)-\chi(b_i)=\chi(1)$ и $h_p(u)=1$ при $p\in\Pi_1$, $h_p(u)=0$ при $p\in\Pi_2\cup\Pi_3$. Поскольку $\chi(ku)\geq\chi(v_1\xi_1)\cap\dots\cap\chi(v_s\xi_s)\geq\min\{\chi(v_1),\dots,\chi(v_s)\}$ и $h_p(\sigma_1)=h_p(v_1)=1$ при $p\in\Pi_3$, то среди v_i существуют v_j $(j=1,\dots,m\leq s)$ такие, что $h_p(v_j)=0$ для почти всех $p\in\Pi_3$. В силу свойств R $v_j=l_j+u_j$, где l_j - целые числа, а $h_p(v_j)\geq1$ при $p\in\Pi_3$.

Имеем $ku=l_1\xi_1+\dots+l_m\xi_m+v$, где $h_p(v)\geq1$ при $p\in\Pi_3$ и $h_p(l_1\xi_1+\dots+l_m\xi_m)=0$ для почти всех $p\in\Pi_3$. Поскольку $k(\sigma_1+v_1)u=k\sigma_1\in R$, то в силу свойств R имеем $k\sigma_1=(\sigma_1+v_1)$, $(l_1\xi_1+\dots+l_m\xi_m+v)=v_1(l_1\xi_1+\dots+l_m\xi_m+x)+y=z+y$, где $h_p(y)\geq1$ при $p\in\Pi_1$, $h_p(y)$, $h_p(x)\geq1$ при $p\in\Pi_3$, $h_p(x)=0$ для почти всех $p\in\Pi_1$. Так как $z=k\sigma_1-y$, то $h_p(z)\geq1$ при $p\in\Pi_1$. Далее, $b_1,\dots,b_s(z+y)=l_1v_1b_1\dots b_s\xi_1+\dots+l_mv_1b_1\dots b_s\xi_m+v_1b_1\dots b_sz+b_1\dots b_sy$, где каждое слагаемое в правой части этого равенства принадлежит R.

Пусть теперь $0\neq z\in R$ - такой, что $h_p(z)\geq1$ при $p\in\Pi_1$. Покажем, что $z\in\sigma_1R$. Имеем $z=m_1v_1^{n_1}+\dots+m_\ell v_1^{n_\ell}+v$, где $v\in\sigma_1R$, $m_1,\dots,m_\ell$, $0\leq n_1<\dots<n_\ell$ - целые числа. Достаточно показать, что $m_1=\dots=m_\ell=0$. Переходя к p-компонентам z, в силу выбора v_p имеем $m_1p_1^{n_1}+\dots+m_\ell p_1^{n_\ell}\equiv0\,(p)$ при $p\in\Pi_1$. Поскольку Π_1 бесконечно, то это число равно нулю. Откуда $m_1=-p_1^{n_2-n_1}(m_2+\dots+m_\ell p_1^{n_\ell-n_2})$. Значит, m_1 делится на p_1. Переходя к Π_2, получаем, что m_1 делится на p_2 и т.д. Поэтому $m_1=0$. Аналогично $m_2=\dots=m_\ell=0$.

Итак, $z \in \mathfrak{G}_1 R$.

Если $b_1 \in \mathfrak{G}_1 R$, то, так как $\chi(a_1) = \chi(b_1)$, в силу доказанного $a_1 \in \mathfrak{G}_1 R$. Поэтому можно предполагать, что $b_i \notin \mathfrak{G}_1 R$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда $b_1 \ldots b_s \notin \mathfrak{G}_1 R$. Если теперь $z \neq 0$, то $b_1 \ldots b_s z \notin \mathfrak{G}_1 R$. В самом деле, в противном случае подкольцо в R , порожденное элементом v_1, имело бы ненулевое пересечение с $\mathfrak{G}_1 R$. В этом случае нашелся бы ненулевой многочлен двух переменных над кольцом целых чисел, имеющий в качестве корней $\mathfrak{G}_1$ и v_1 , что противоречит выбору $\mathfrak{G}_p$ и v_p . С другой стороны, $h_p(z) \geqslant 1$ при $p \in \Pi_1$. Поэтому в силу доказанного выше $b_1 \ldots b_s z \in \mathfrak{G}_1 R$. Предположение же $z = 0$ и, значит, $l_1 x_1 + \ldots + l_m x_m = -x$ противоречит тому, что $h_p(l_1 x_1 + \ldots + l_m x_m) = 0$ для почти всех $p \in \Pi$. Таким образом, $v \notin R^+$. Теорема доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть A - вполне транзитивная группа, все ненулевые эндоморфизмы которой - мономорфизмы. Тогда A квазиоднородна и если ее эндоморфизм φ повышает p -высоту некоторого ее элемента, то $\varphi \in \mathfrak{G}_p E(A)$. Если, кроме того, все частичные ненулевые эндоморфизмы $G \to A$, где G - сервантная подгруппа в A , являются мономорфизмами (очевидно, это выполняется, если A есть $\mathfrak{QDI}$ -группа) , то $E(A)$ есть E -кольцо со свойством $(*)$.

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in A$ и $h_p(a) < h_p(\varphi(a))$ или $h_p(a) = \infty$. Если $c \in A$ и $pc = \varphi(a)$, то $\chi(a) \leqslant \chi(c)$. Поэтому существует $f \in E(A)$, $f(a) = c$. Имеем $(pf - \varphi)a = 0$. Значит, $\varphi = pf$. В случае $h_p(a) = \infty$ тождественный эндоморфизм $1 \in pE(A)$. Откуда следует, что $pA = A$. Итак, A квазиоднородна.

Зафиксируем $0 \neq a \in A$, пусть $\chi = \chi(a)$, $t = t(a)$, $B = A(\chi)$, $f \in E(B)$. Для любых $x, y \in B$ $\chi_B(x) \leqslant \chi_B(y) \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_A(y)$. Из этого вытекает, что f можно продолжить до эндоморфизма сервантной подгруппы $A(t) = \langle B \rangle_*$ в A . В самом деле, для $q \in A(t)$ существует натуральное n такое, что $nq \in B$. Имеем $\chi(nq) \leqslant \chi(f(nq))$. Откуда $f(nq) = nx$, $x \in A$. Полагаем $f(q) = x$. Пусть $b \in A(t)$ и $f(b) \neq 0$. Имеем $\chi(b) \leqslant \chi(f(b))$. Поэтому существует $\varphi \in E(A)$, $\varphi(b) = f(b)$. В силу условий на группу A $\varphi|_{A(t)} = f$. В частности, все ненулевые эндоморфизмы $A(\chi)$ - мономорфизмы.

Так же, как в теореме 1.1, $E(A)^+ \cong B$. Эндоморфизмы $E(A)^+$, совпадающие с умножением $E(A)$ справа и слева на некоторый его элемент $z \neq 0$, совпадают своим действием на $1 \in E(A)$. Поскольку все ненулевые эндоморфизмы $E(A)^+$ - мономорфизмы, то $zs = sz$ для каждого $s \in E(A)$, т.е. $E(A)$ коммутативно. Пусть f - эндоморфизм $E(A)^+$ и $f(1) = \varphi$. Эндоморфизм, совпадающий с умножением $E(A)^+$ на φ , действует на 1 так же, как и f . Поэтому f совпадает с ним. Итак, $E(A)$ есть E -кольцо.

Пусть $f\varphi \in pE(A)$, где $f, \varphi \in E(A)$. Тогда, например, f повышает p-высоту хотя бы одного элемента A. По доказанному выше $f \in pE(A)$, это и означает, что $E(A)/pE(A)$ - область целостности.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть A - группа, все ненулевые эндоморфизмы которой - мономорфизмы. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) A есть QPI-группа;

2) A - вполне транзитивная группа, у которой все частичные ненулевые эндоморфизмы $G \to A$, где G - сервантная подгруппа в A, являются мономорфизмами;

3) все частичные ненулевые эндоморфизмы $G \to A$, где G - сервантная подгруппа в A, являются мономорфизмами для любых $\varphi \in E(A)$, $p \in \Pi(A)$, если φ повышает p-высоту некоторого элемента A, то $\varphi \in pE(A)$, для характеристики χ любого ненулевого элемента A имеет место изоморфизм $E(A)^+ \cong A(\chi)$, $E(A)$ - кольцо со свойством (*) и $E(A) = \overline{E(A)}$.

4) все частичные ненулевые эндоморфизмы $G \to A$, где G - сервантная подгруппа в A, являются мономорфизмами, на A можно задать модуль без кручения над таким E-кольцом R со свойством (*), что $R = \bar{R}$, $\Pi(A) = \Pi(R^+)$, для характеристики χ любого ненулевого элемента A имеет место изоморфизм $R^+ \cong A(\chi)$ и любые два линейно независимых над R элемента A имеют несравнимые типы.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2), 1) $\Rightarrow$ 3), 4) доказываются так же, как в теореме 2.1.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть $0 \neq a, b \in A$ и $\chi = \chi(a) \leq \chi(b)$, $t = t(a)$. Так же, как в 4) $\Rightarrow$ 1) теоремы 2.1, $E(A(t))^+ \cong A(\chi)$, $A(t)$ вполне транзитивна, и отображение $f \to f|_{A(t)}$ осуществляет вложение $E(A)$ в $E(A(t))$. Это сервантное вложение. Действительно, поскольку $A(\chi) \cong E(A)^+$ для характеристики χ любого ненулевого элемента A, а $E(A)^+$ квазиоднородна, то A также квазиоднородна. Далее, если $f = p\varphi$, где $f \in E(A)$, $p \in \Pi(A) = \Pi(E(A)^+)$, $\varphi \in E(A(t))$ (отождествляем $E(A)$ с его образом в $E(A(t))$), то f повышает p-высоты элементов из $A(t)$. По условию $f \in pE(A)$. Поэтому $E(A)$ сервантно в $E(A(t))$. Далее, $A(t)$ сервантна в A. Поэтому все частичные ненулевые эндоморфизмы $G \to A(t)$, где G - сервантная подгруппа в $A(t)$, являются мономорфизмами. Откуда в силу вполне транзитивности вытекает, что $A(t)$ есть QPI-группа. Поскольку $A(\chi) \cong Hom(G, A)$, где $G = \langle a \rangle_*$, то $A(\chi)$ есть QPI-группа [2, лемма 1.3]. Итак, $E(A(t))^+ \cong A(\chi)$ - неразложимая QPI-группа (неразложимость $A(\chi)$ следует из того, что все ее ненулевые эндоморфизмы - мономорфизмы, см. лемму 2.2). Поэтому, как в теореме 2.1, A вполне транзитивна.

4) $\Rightarrow$ 2). Пусть $0 \neq a, b \in A$, $\chi = \chi(a) \leq \chi(b)$ и $ra = sb$, $r, s \in R$. Поскольку $A(\chi) \cong R^+$, а R есть E-кольцо, то эндоморфизмы r и s

группы $A(X)$ можно рассматривать как умножения $A(X)$ на некоторые ее элементы τ и σ. Имеем $\chi_{A(X)}(a) \leq \chi_{A(X)}(b)$ и $\chi_{A(X)}(\tau a) = \chi_{A(X)}(\sigma b)$. Откуда $\chi(\sigma) \leq \chi(\tau)$. По условию $\frac{\tau}{\sigma} \in R$. Отсюда $\frac{\tau}{\sigma} a = b$. Следовательно, A вполне транзитивна.

Из доказательства 4) $\Rightarrow$ 2) теоремы 2.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть A удовлетворяет требованиям 4) в теореме 2.4. Тогда R совпадает с $E(A)$ при естественном вложении R в $E(A)$.

Отметим, что так же, как и выше, используя теорему 2.4, можно сформулировать соответствующие результаты для вполне транзитивных (транзитивных) групп, все ненулевые эндоморфизмы которых - мономорфизмы.

ТЕОРЕМА 2.5. Если G - квазиоднородная QPI-группа, имеющая ненулевые элементы максимальных типов, то $G \in \mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in G$ и $t(a)$ - максимальный тип. Воспользуемся доказательством теоремы 2.2 из [2]. Рассмотрим множество $\mathcal{K}$ всех пар (A, η), где A - сервантная подгруппа в G, $a \in A$, $\eta \in Hom(A, G)$, $\eta(a) = a$, и каждый ненулевой гомоморфизм $\langle \eta(A) \rangle_* \to G$ есть мономорфизм. Частично упорядочим $\mathcal{K}$: $(A_1, \eta_1) \geq (A_2, \eta_2)$, если $A_1 \supseteq A_2$, $\eta_1|_{A_2} = \eta_2$. Множество $\mathcal{K}$ индуктивно и не пусто, поэтому оно содержит максимальный элемент (H, φ). Существует $\psi \in E(G)$, $\psi|_H = \varphi$. Так же, как в [2, теорема 2.2], доказывается, что в $V = \langle \psi(G) \rangle_*$ любая сервантная подгруппа сильно неразложима.

Докажем теперь, что любой ненулевой эндоморфизм V есть мономорфизм. Предположим противное, пусть $f \in E(V)$, $\ker f \neq 0$. Согласно [2, лемма I.5] f аннулирует все элементы максимального типа. Предположим, что $b \in V \setminus pV$ и $f(b) \neq 0$. Найдется $g \in V \setminus pV$, $t(g) \geq t(f(b))$ и $f(g) \neq 0$. В самом деле, допустим, что для всякого $d \in V \setminus pV$, $t(d) \geq t(f(b))$, следует $f(d) = 0$. Для $k > 0$ $> h_p(f(b))$ имеем $t(b) \leq t(p^k b + d) \leq t(f(b))$, $t(b) = t((p^k b + d) - d) \geq t(p^k b + d)$. Откуда $t(b) = t(p^k b + d)$. Пусть $n \in N$ такое, что $\chi(p^k b + d) \leq \chi(nb)$, $(n, p) = 1$, и $\varphi \in E(A)$, $\varphi(p^k b + d) = nb$. Тогда $nf(b) = p^k f\varphi(b) + f\varphi(d) = p^k f\varphi(b)$ (предполагаем, что $E(V) \leq E(A)$), противоречие с выбором k. Далее, для каждого $k \in N$ $t(p^k b + a) \leq t(f(b)) \leq t(g)$. Так же, как и выше, получаем противоречие.

Так как $\psi(a) = a$, то ψ действует на V как тождественный гомоморфизм. Поэтому $G = \psi(G) \oplus \ker \psi$, $a \in \psi(G) = V$, V является QPI-группой, все ненулевые эндоморфизмы которой - мономорфизмы и a имеет максимальный тип. Нетрудно тогда показать, что типы де

нулевых элементов V являются максимальными, откуда $V \in \mathcal{X}$ [6, теорема 5.2]. Если $R = Ker\Psi \neq 0$, то так как для любого элемента прямого слагаемого QPI-группы существует гомоморфизм этого слагаемого в дополнительное прямое слагаемое, не аннулирующий данный элемент [5, лемма 1.2], то R также обладает ненулевыми элементами максимального типа. Выделим в R прямое слагаемое F, $R = F \oplus E$, подобное V. Тогда $V \oplus F$ - QPI-группа и, значит, однородна [5, теорема 2.1]. Из существования подходящих гомоморфизмов следует, что тип любого ненулевого элемента E меньше или равен типу группы V. Откуда следует, что $G \in \mathcal{X}$.

Из неразложимости QPI-группы $G \in \mathcal{X}$ следует, что все ее сервантные подгруппы сильно неразложимы [2, теорема 2.2]. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если G - неразложимая квазиоднородная QPI-группа, имеющая ненулевые элементы максимальных типов, то сервантные подгруппы G сильно неразложимы, ненулевые эндоморфизмы G являются мономорфизмами и ненулевые элементы G имеют максимальные типы в множестве типов всех ненулевых элементов группы G.

Отметим, что описание QPI-групп, имеющих ненулевые элементы максимальных типов и все ненулевые эндоморфизмы которых - мономорфизмы, получено в [6]. Из [5, теорема 2.1] следует, что QPI-группа $A \in R_p$ квазиоднородна. Обозначим через $p^{\omega}A$ максимальную p-делимую подгруппу в A.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть A - такая QPI-группа, что для каждого $p \in \Pi(A)$ $A/p^{\omega}A$ имеет ненулевые элементы максимальных типов. Тогда $A \in \mathcal{X}$.

Доказательство. Согласно [5, теорема 2.1] $A = A_p \oplus p^{\omega}A$, где $\Pi(A_p) \cap \Pi(p^{\omega}A) = \phi$. Поскольку прямые слагаемые QPI-групп являются QPI-группами, то ссылка на теорему 2.5 и [2, теорема 5.1] заканчивает доказательство.

ТЕОРЕМА 2.6. Если A - неразложимая квазиоднородная QPI-группа, то $|A| \leq 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Если все сервантные подгруппы A неразложимы, то по [6, теорема 66.5] $|A| \leq 2^{\aleph_0}$. Предположим, что A имеет разложимые сервантные подгруппы. В частности, A содержит сервантную подгруппу $\langle a,g \rangle_*$ такую, что $\langle a,g \rangle_* = \langle a \rangle_* \oplus \langle g \rangle_*$, $0 \neq a, g \in A$. В этом случае если A однородна, то по [2, следствие 3.2] она разложима. Итак, A не однородна. Предположим, что $t(a) \geq t(g)$. Для простоты считаем, что $\chi(a) \geq \chi(g)$, $h_p(a) = h_p(g) = 0$. Рассмотрим множество $\mathcal{K}$ всех сервантных подгрупп B группы A таких, что $\langle g,B \rangle_* = \langle g \rangle_* \oplus B$, $a \in B$. $\mathcal{K}$ частично упорядочено относительно включения и индук-

тивно. Поэтому оно содержит максимальный элемент M. Если $r_p(M) > \aleph_0$, то M имеет p-базисную подгруппу F, являющуюся свободной группой ранга $r_p(M)$, причем F можно выбрать так, чтобы $\langle a \rangle$ была прямым слагаемым в F [13, § 32, упр. 7]. В F найдется подгруппа E со свойством $F/E \cong Q_p$ и $h_p(a+E) = 0$, где Q_p - группа всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p. Пусть $H = \langle E \rangle_*$. Тогда $H \subseteq M$, $a + H \notin p(M/H)$. Подгруппа $C = \langle a + pg \rangle_* \oplus H$ сервантна в A. Действительно, если $d \in C$ и $d = qx$, то $d = rpg + h + ra$ и $rpg - qx_1$, $h + ra = qx_2$, где $x \in A$, $h \in H$, q - простое число, а r - рациональное, $x_1 \in \langle g \rangle_*$, $x_2 \in M$. Если $q \neq p$, то $h_q(rpg) - h_q(rg) \leq h_q(ra)$. Поэтому $ra = qx_3, x_3 \in M$. Откуда $x = (x_3 + x_1) + (x_2 - x_3)$, где $x_3 + x_1 \in \langle a + pg \rangle_*$, $x_2 - x_3 \in H$, значит, $d \in C$. Если же $q = p$, то, так как $ra + H \in p(M/H)$, $ra = px_3$, где $x_3 \in M$. Опять, как и выше, $d \in C$. Итак, C сервантна в A. Поэтому существует $f \in E(A)$, $f(H) = 0$, $f(a + pg) = g$ ($\chi(a + pg) = \chi(g)$). Если $f(a) = 0$, то $g = pf(g)$, что противоречит выбору g. Так как $H \subseteq \ker f$ и $f(a) \neq 0$, то $f(A)$ содержит подгруппу, изоморфную Q_p, что в силу квазиоднородности A противоречит ее неоднородности. Итак, $r_p(M) < \aleph_0$. Пусть $\bar{A}$ - $\mathcal{Z}$-адическое пополнение A. Имеем $\bar{A} = \mathcal{D} \oplus V$, где $\mathcal{D} = \langle a \rangle_* \oplus M$. Если $A \cap V \neq 0$, то $M \oplus A \cap V \in \mathcal{X}$. Следовательно, $A \cap V = 0$. Поэтому если $\mathcal{T}$ - проекция $\bar{A}$ на $\mathcal{D}$, то $A \cong \mathcal{T}A$. Так как $r_p(\mathcal{D}) = r_p(M) < \aleph_0$, то $|A| \leq |\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0}$ [13, теорема 34.3].

Предположим теперь, что для всякого $0 \neq g \in A$ подгруппа $\mathcal{D} = \langle g \rangle_*$ не является прямым слагаемым в никакой сервантной подгруппе группы $A(t)$, где $t = t(g)$. Тогда если $\bar{A}(t) = \mathcal{D} \oplus V$, то $A(t) \cap V = 0$ и $\mathcal{T}(A(t))^{\cdot} \cong A(t)$, где $\mathcal{T}$ - проекция $\bar{A}(t)$ на $\mathcal{D}$. Откуда $|A(t)| \leq |\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0}$. Поскольку это имеет место для всех типов ненулевых элементов A и мощность множества всех типов имеет мощность континуума [8, следствие 85.2], то теорема доказана.

Некоторые результаты этого параграфа опубликованы в [14].

Литература

1. Чехлов А.Р. Абелевы CS-группы без кручения// Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. С. 131-147.
2. Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения// Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. С. 45-69.
3. Крылов П.А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения// Абелевы группы и

модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. Вып. 7. С. 81-99.
4. Крылов П.А. Об одном классе квазисервантно инъективных абелевых групп// Матем. заметки. 1989. Т. 45, № 4. С. 53-58.
5. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения// Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 3. С. 93-99.
6. Добрусин Б.В. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II// Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1985. Вып. 5. С. 31-41.
7. Иванов А.М. Об одном свойстве p-сервантных подгрупп группы целых p-адических чисел// Матем. заметки. 1980. Т. 27, № 6. С. 859-867.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. 1977. Т. 2. 416 с.
9. Чехлов А.Р. Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным// Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985. Вып. 5. С. 117-127.
10. Dubois D.W. Cohesive groups and p-adic integers // Publ Math Debrecen. 1965. V. 12. P. 51-58.
11. Warfield R.B. Homomorphisms and duality for torsion free abelian groups // Math. Z. 1968. V. 107. P. 189-200.
12. Reid J.D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion free groups// Topics in abelian groups. Chicago. 1963. P. 51-68.
13. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. 1974. Т. I. 335 с.
14. Чехлов А.Р. Связные квазисервантно инъективные абелевы группы// Изв. вузов. Матем. 1989. № 10.

Содержание

В.А.Артемонов. Проективные модули и матрицы над модулярными алгебрами Ли 5

И.Х.Беккер, Е.В.Лепошникова. Скрещенные гомоморфизмы в S -сепарабельные абелевы группы без кручения... 9

Е.М.Вечтомов. О кольцах непрерывных функций, являющихся кольцами Безу 17

С.Н.Гриншпон, В.М.Мисяков. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп 23

А.А.Золотых. Тождества минимальных представлений ортогональных алгебр Ли 31

С.И. Комаров. О проективности $O-\Sigma$ - чистоты в категории абелевых групп 46

А.Б.Левин, А.В.Михалев. Размерностные многочлены дифференциально-разностных модулей и расширений дифференциально-разностных полей 56

В.М.Мисяков. О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп 83

А.И.Москаленко. Об определяемости счетной периодической группы группами расширений 86

В.А.Никифоров. Абелевы группы без кручения ранга 2 с нескалярным автоморфизмом 91

С.В.Рычков, А.А.Фомин. Абелевы группы со счетным числом подгрупп 99

И.И.Сахаев. Совершенные кольца Бэра и их обобщение 106

А.М.Себельдин. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов 125

К.Н.Семенов. Об условиях совпадения многообразия и квазимногообразия, порожденного конечной алгеброй Ли . 134

Е.В.Тараканов. Эндоцепные модули над дедекиндовыми кольцами 139

А.А.Туганбаев. Кольца частных дистрибутивных колец 148

М.А.Турмонов. Чистота над кольцом эндоморфизмов ... 153

А.Р.Чехлов. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами 157

CONTENTS

V.A.Artamonov. Projective modules and matrices over modular Lie algebras.

I.Kh.Bekker, Ye.V.Shaposhnikova. Crossed homomorphisms into S-separable torsion free abelian groups.

Ye.M.Vechtomov. On the rings of continuous functions which are Bezout rings.

S.Ya.Grinshpon, V.M.Misyakov. Fully transitivity of direct products of abelian groups.

A.A.Zolotikh. The identities of minimal representations of orthogonal Lie algebras

S.I.Komarov. On the projectivity of O-Z-purity in the category of abelian groups.

A.B.Levin, A.V.Mikhalyov. Dimensional polynomials of difference-differential modules and of difference-differential field extensions.

V.M.Misjykov. On separability of direct product of any abelian groups.

A.I.Moskalenko. On determining countable torsion group by its group of extensions

V.A.Nikiforov. Abelian torsion free groups of rank 2 with non-scalar automorphism.

S.V.Richkov, A.A.Fomin. Abelian groups with countably many subgroups.

I.I.Sakhayev. Perfect Bass' rings and their generalization.

A.M.Sebeldin. On determining abelian groups by their semigroups of endomorphisms.

K.N.Semyonov. On conditions of coincidence of the variety and quasivariety generated by a finite Lie algebra.

Ye.V.Tarakanov. Endochain modules over Dedekind rings.

A.A.Tuganbayev. Quotient rings of distributive rings.

M.A.Turmanov. Purity over endomorphism rings.

A.R.Chekhlov. Finite p-rank torsion free abelian groups with a complement for every closed pure subgroups.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Выпуск 10

ИБ 2402

Редактор Е.С.Вэефович

Подписано к печати 08.01.91г. Формат 60×84 1/16. Бумага типографская № 2. Печать офсетная. Печ. л. 12,25. Усл. печ.л. 11,39. Уч.-изд.л. 9,6. Тираж 500 экз. Заказ № 79. Цена 1р.40к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.

Межвузовская типография ОмПИ.

РЕФЕРАТЫ

УДК 512.553

Артемонов В.А. Проективные модули и матрицы над модулярными алгебрами Ли // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 5-8.

Рассматривается конечномерная модулярная алгебра Ли, обладающая градуированным идеалом со специальными свойствами. Доказывается, что проективный модуль над этой алгеброй Ли свободен, если ранг больше размерности идеала. При аналогичных предположениях доказывается теорема о стабилизации функтора K_1 и о транзитивности действия группы элементарных матриц на унимодулярных строках.

Библ. 9.

УДК 512.541

Беккер И.Х., Шапошникова Е.В. Скрещенные гомоморфизмы в S-сепарабельные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 9-16.

Вычислены первые группы когомологии $H^1(\Phi, G)$, где $\Phi \wedge Aut\, G$, G - S-сепарабельная абелева группа без кручения, построенная на системе S групп конечного ранга, для которой справедлив аналог теоремы Бэра-Куликова-Капланского.

Библ. 8.

УДК 512.55

Вечтомов Е.М. О кольцах непрерывных функций, являющихся кольцами Безу // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 17-22.

Рассматриваются условия, при которых кольцо непрерывных функций является кольцом Безу, т.е. каждый его конечно-порожденный идеал главный. Топологическое пространство называется F-пространством, если кольцо всех непрерывных действительно-значных функций на нем является кольцом Безу. Приведены "кольцевые" характеризации F-пространств. На основе чисто топологического описания нуль-множеств произвольного топологического пространства дана внутренняя топологическая характеристика произвольных F-пространств.

Библ. 9.

УДК 512.541

Гриншпон С.Н., Мисяков В.М. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 23-30.

Редуцированная абелева группа A называется вполне транзитивной, если для любых двух ее элементов a, b таких, что $H(a) \leq H(b)$ ($H(a)$, $H(b)$ – высотные матрицы элементов a и b соответственно), существует эндоморфизм φ группы A, переводящий a в b. Получены необходимые и достаточные условия вполне транзитивности сепарабельных групп и прямых произведений сепарабельных групп. Рассматриваются связи между вполне транзитивностью группы $\bigoplus_{i \in J} G_i$ и группы $\prod_{i \in J} G_i$.

Библ. 5.

УДК 512.554

Золотых А.А. Тождества минимальных представлений ортогональных алгебр Ли // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 31-45.

Работа посвящена изучению идеала тождеств со следом минимального представления алгебры Ли $SO(n)$. При помощи α-функции, введенной Ю.П.Размысловым, описывается этот идеал тождеств. Прослеживается некоторая связь между идеалами тождеств со следом ассоциативно-лиевых пар и идеалами тождеств со следом и инволюцией ассоциативных алгебр.

Библ. 4.

УДК 512.541

Комаров С.И. О проективности $O - \mathcal{L}$-чистоты в категории абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 46-55.

Рассматривается $O - \mathcal{L}$-чистота и решается вопрос о ее проективности. Доказано, что рассматриваемая чистота проективна тогда и только тогда, когда класс плоских групп для этой чистоты замкнут относительно прямых произведений. Дано описание чистот в категории абелевых групп, для которых класс проективных групп устроен специальным образом.

Библ. 6.

УДК 512.552.16, 553

Левин А.Б., Михалев А.В. Размерностные многочлены дифференциально-разностных модулей и расширений дифференциально-разностных полей //Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 56-82.

Доказывается существование и устанавливаются некоторые свойства размерностных многочленов, ассоциированных с фильтрованными дифференциально-разностными модулями. Полученные результаты применяются для исследования конечно-порожденных расширений дифференциально-разностных полей.

Библ. 10.

УДК 512.541

Мисяков В.М. О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп //Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 83-85.

Дается критерий сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп.

Библ. 5.

УДК 512.541

Москаленко А.И. Об определяемости счетной периодической группы группами расширений //Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 86-90.

В предположении, что справедлива гипотеза континуума, доказано, что если X - счетная периодическая группа конечной ульмовской длины и $Ext(X,A) \cong Ext(Y,A)$ для любой группы A, то $Y = X \oplus F$ где F - свободная группа.

Библ. 1.

УДК 512.541

Никифоров В.А. Абелевы группы без кручения ранга 2 с нескалярным автоморфизмом //Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 91-98.

Получено описание однородных абелевых групп без кручения ранга 2 с нескалярным автоморфизмом фундаментального дискриминанта с точностью до изоморфизма.

Библ. 3.

УДК 512.541

Рычков С.В., Фомин А.А. Абелевы группы со счетным числом подгрупп // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 99-105.

Приводится полное описание абелевых групп, число подгрупп которых не более чем счетно.

Библ. 6.

УДК 512.553

Сахаев И.И. Совершенные кольца Басса и их обобщение // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 106-124.

Дается обобщение одной теоремы Басса. А именно, для кольца R эквивалентны условия: а) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль имеет проективное покрытие; б) всякий конечно-порожденный плоский левый R-модуль проективен; в) для любого правого R-модуля всякая убывающая цепь его конечно-порожденных подмодулей определенного вида стабилизируется. Получены и другие результаты. Приводится контрпример к одной гипотезе Лазара.

Библ. 24.

УДК 512.541

Сесельдин А.М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов//Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 125-133.

Находятся условия, необходимые и достаточные для определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. Условия получены на языке полной системы инвариантов.

Библ. 4.

УДК 512.554.31

Семенов К.Н. Об условиях совпадения многообразия и квазимногообразия, порожденного конечной алгеброй Ли // Абелевы группы и

модули. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1991. Вып.10. С. 134 - 138

В работе доказано, что многообразие и квазимногообразие, порожденные одной конечной алгеброй Ли, совпадают тогда и только тогда, когда, во-первых, все нильпотентные подалгебры этой алгебры абелевы, и, во-вторых, все монолитические алгебры многообразия изоморфно вкладываются в порождающую алгебру (характеристика основного поля больше 3). Приводится пример, когда критическая алгебра многообразия, порожденного конечной алгеброй Ли, все нильпотентные подалгебры которой абелевы, не является фактором порождающей алгебры.

Библ. 5.

УДК 512.553.5

Тараканов Е.В. Эндоцепные модули над дедекиндовыми кольцами// Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10. С. 139-147

Описание эндоцепных модулей над коммутативным дедекиндовым кольцом сведено к описанию эндоцепных модулей без кручения.

Библ. 6.

УДК 512.55

Туганбаев А.А. Кольца частных дистрибутивных колец // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10.С.148-152

Доказана дистибутивность кольца частных коммутативного дистрибутивного кольца относительно радикального фильтра с базисом из конечнопорожденных идеалов и отмечено, что в общем случае кольцо частных коммутативного дистрибутивного кольца относительно радикального фильтра идеалов не обязано быть дистрибутивным. Получен критерий дистрибутивности классического кольца частных частных коммутативного кольца.

Библ. 4.

УДК 512.541

Турманов М.А. Чистота над кольцом эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. 10.С.153-156

Изучаются свойства кольца , над которым каждый правый R-модуль как модуль над кольцом своих эндоморфизмов чисто вполне приводим. Чистота понимается в смысле П.Кона. Получено полное описание класса $\mathcal{L}$ колец R , обладающих свойством: для каждого правого R-модуля M_R модуль ${}_{\mathcal{E}}M$ над кольцом биэндоморфизмов $\mathcal{E} = Biend_R M$ чисто вполне приводим.

Библ. 5.

УДК 512.541

Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып.10. С. 157-178.

Абелева группа называется CS-группой, если каждая ее замкнутая сервантная подгруппа выделяется прямым слагаемым. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых квазиоднородная группа конечного p-ранга является CS-группой. Всякая квазиоднородная CS-группа мощности, меньшей мощности континуума, имеет конечный p-ранг. Получены характеризации квазисервантно инъективных абелевых групп без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых - мономорфизмы. Построен пример счетной транзитивной, но не вполне транзитивной группы без кручения, множество всех ненулевых элементов которой не содержит максимальных элементов. Показано, что квазиоднородная квазисервантно инъективная группа без кручения, содержащая ненулевые элементы максимальных типов, принадлежит классу квазисервантно инъективных групп, описанных в РЖМат, 1980, 11А169. Доказано, что неразложимая квазиоднородная квазисервантно инъективная группа имеет мощность, не превосходящую мощность континуума.

Библ. 14.

UDC 512.553

Artamonov V.A. Projective modules and matrices over modular Lie algebras // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 5-8.

Finite-dimensional modular Lie algebra admitting a graded ideal with special properties is considered. A projective module over this Lie algebra is proved to be free provided its rank exceeds the dimension of the ideal. Under analogous assumptions a theorem on stabilization of the functor K_1 and on the transitivity of the action of the elementary matrices group on the unimodular strings is proved.

Bibliography: 9 titles.

UDC 512.541

Bekker I.Kh., Shaposhnikova Ye.V. Crossed homomorphisms into S-separable torsion free abelian groups // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 9-16.

The first cohomology groups $H^1(\Phi, G)$ are calculated for $\Phi \leq \mathrm{Aut}\, G$, G being an S-separable torsion free abelian group, constructed over a system S of finite rank groups, which satisfies an analogue of Baer - Kulikov - Kaplansky theorem.

Bibliography: 8 titles

UDC 512.55

Vechtomov Ye.M. On the rings of continuous functions which are Bezout rings. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P.17-22

The conditions are considered, under which a ring of continuous functions is a Bezout ring, i.e. each of its finitely generated ideals is principal. A topological space is scalled F-space, if the ring of continuous real-valued functions on it is a Bezout ring. Ring-theoretical charscterizations of F-spaces are listed. The intrinsic characterization of arbitrary F-spaces is set forth on the basis of a purely topological description of zero sets of arbitrary topological spaces.

Bibliography: 9 titles.

UDC 512.541

Grinshpon S.Ya., Misyakov V.M. Fully transitivity of direct products of abelian groups // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 23-30.

A reduced abelian group A is called fully transitive, if for any two elements a,b of A such that $H(a) \leq H(b)$ ($H(a)$, $H(b)$ are the height matrices of respectively a and b) there exists an endomorphism φ of A which transfer a into b. Necessary and sufficient conditions for fully transitivity of separable groups and direct products of separable groups are obtained. The connection between the fully transitivity of the groups $\bigoplus_{i \in J} G_i$ and $\prod_{i \in J} G_i$ is investigated.

Bibliography: 5 titles.

UDC 512.554

Zolotikh A.A. The identities of minimal representations of orthogonal Lie algebras // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 31-45.

The ideal of identities with the trace of minimal representation SO(n) for Lie algebra is studied. This ideal is described by the α- function, introduced by Rasmislov.

Bibliography: 4 titles.

UDC 512.541

Komarov S.I. On the projectivity of O-Z-purity in the category of abelian groups // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 46-55.

The O-Z-purity is considered, and question about its projectivity is solved. It is proved that considering purity is projective if and only if the class of flat groups for this purity regarding direct products is closed.

Bibliography: 6 titles.

UDC 512.552.16, 553

Levin A.B., Miknalyov A.V. Dimensional polynomials of difference-differential modules and of difference-differential field extensions // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 56-82.

The existence of dimensional polynomials, that associate with filtered difference-differential modules, has been proved. Some properties of dimensional polynomial has been obtained. These properties are useul for investigation of finitely generated different-differential field extensions.

Bibliography: 10 titles.

UDC 512.541

Misjakov V.M. On separability of direct product of any abelian groups // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 83-85.

The criteria of separability of direct product of any abelian groups is given.

Bibliography: 5 titles.

UDC 512.541

Moskalenko A.I. On determinity countable torsion group by its group of extensions // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 86-90.

In assumption that the continuum hypothesis is right the following result has been proved: if is a countable torsion group X of finite Ulm's length and $Ext(X,A) \cong Ext(Y,A)$ for any group A, then $Y \cong X \oplus F$, where F is a free group.

Bibliography: 1 title.

UDC 512.541

Nikiforov V.A. Abelian torsion free groups of rank 2 with non-scalar automorphism // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 91-98.

The description of homogeneous torsion free abelian groups of rank 2 with non-scalar automorphism of fundamental discriminant has been obtained.
Bibliography: 3 titles.

UDC 512.541

Richkov S.V., Fomin A.A. Abelian groups with countably many subgroups // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 99-105.

The abelian groups such that number of subgroups less than countable is completely described.
Bibliography: 6 titles.

UDC 512.553

Sakhayev I.I. Perfect Bass' rings and their generalization // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 106-124.

One Bass' theorem is generalized. For any ring R the next conditions are equivalent: a) any finitely generated flat left R-module has projective cover; b) any finitely generated flat left R-module is projective; c) for any right R-module any descending chain of finitely generated submodules some type is stabilized. Other results are given. There is the counterexample for one Lazard's hypothesis.
Bibliography: 24 titles.

UDC 512.541

Sebeldin A.M. On determining abelian groups by their semigroups

of endomorphisms // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 125-133.

Necessary and sufficient conditions for determinity of fully decomposable torsion free abelian group by their endomorphism semigroup in the class of all fully decomposable torsion free abelian groups are found.

Bibliography: 4 titles.

UDC 512.554.31

Semyona K.N. On conditions of coincidence of the variety and quasivariety generated by a finite Lie algebra // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 134-138.

It is proved that the variety and quasivariety generated by a finite Lie algebra coincide if and only if that firstly all nilpotent subalgebras this algebra are Abelian and secondly all monolytic algebras of the variety are isomorphically imbedded to the envelopping algebra (the field characteristic is more then 3). The example, when critical algebra of the variety generated by a finite Lie algebra, all nilpotent subalgebras which are Abelia, is not a factor of generating algebra, is constructed.

Bibliography: 5 titles.

UDC 512.553.5 .

Tarakanov Ye.V. Endochain modules over Dedekind rings // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 139-147.

The description of endochain modules over commutative Dedekind ring is reduced to the description of endochain torsion free modules.

Bibliography: 5 titles.

UDC 512.55

Tuganbayev A.A. Quotient rings of distributive rings // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 148-152.

It is proved the distributivity of quotient ring of commutative distributive ring about radical filter with the finite-generated ideals basis. In general case quotient ring of commutative distributive ring about radical filter of ideals has not to be distributive. The criterion of the distributivity of classical quotient ring of commutative ring is found.

Bibliography: 4 titles.

UDC 512.541

Turmanov M.A. Purity over endomorphism rings // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 153-156.

The properties of the ring over which every right module endopure fully reducible are studied. The purity is considered in the sense of P.Cohn. It is found the full description of the class of rings with following property: for every right module the same module regarded over the biendomorphism ring is pure fully reduced.

Bibliography: 5 titles.

UDC 512.541

Chekhlov A.R. Finite p-rank torsion free abelian groups with a complement for every closed pure subgroups // Abelian groups and modules. Tomsk: Tomsk university, 1991. Issue 10. P. 157-178.

An abelian group A is called CS-group if every closed pure subgroup of A is a direct summand. A necessary and sufficient conditions that a quasi-homogeneous group of the finite p-rank is CS-group has been proved. The description of quasi-injective torsion free abelian groups, in which non-zero endomorphisms are monomorphisms has been obtained. It is constructed an example of a countable transitive torsion free abelian group, which is not a fully transitive group.

Bibliography: 14 titles.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

I. Рукопись в двух экземплярах должна быть напечатана на машинке через I,5 интервала. Поля: слева - 3 см, справа - I см, сверху - 2 см, снизу - I см. Заполняется только 2- й экземпляр.

2. Первая страница текста печатается со спуском в I0 строк. На I0- й строке заглавными буквами печатается заголовок статьи, отступив от него одну строку, печатают и.о.ф. автора, а через две строки от фамилии с абзацным отступом в три удара печатают текст статьи.

3. Ссылки на литературу даются в квадратных скобках. Образец оформления литературы:
Петров А.А. Модули как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Матем. сб. 1978. Т. I07, № 3. С. I80-200.

4. Вместе со статьей представляется реферат на русском и английском языках. Образец оформления реферата:

УДК 512.553

Петров А.А. Модули как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. Вып. II. С. 8-I00.

5. Второй экземпляр рукописи должен быть подписан автором с указанием его ф.и.о., места работы, должности, адреса.

6. Вместе со статьей представляется документация: а) экспертное заключение о возможности опубликования; б) выписка из решения научного семинара о возможности опубликования данной статьи.

7. В очередной выпуск сборника принимаются рукописи до I-го октября текущего года. Рукописи, поступившие после указанного срока, могут быть по решению редколлегии направлены в следующий выпуск сборника.

8. Объем рукописи не должен превышать 25 страниц.

9. Адрес для отправления корреспонденции:
634010, Томск, университет, механико-математический факультет, кафедра алгебры, редколлегия межвузовского сборника "Абелевы группы и модули".