В.И. БИМАТОВ,
В.Д. МЕРЗЛЯКОВ,
В.П. СТЕПАНОВ

ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

Томский государственный университет им. В.В.Куйбышева

В.И.Биматов, В.Д.Мерзляков, В.П.Степанов

ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

Учебное пособие

Часть I

Издательство Томского университета
Томск - 1993

УДК 623. 54

Биматов В.И., Мерзляков В.Д., Степанов В.П. Внешняя баллистика: Учебное пособие. Ч.I. - Томск: Изд-во Том.ун-та, 1993.- 168с. 250 экз.- 2004030000.

Изложены основы динамики летательных аппаратов произвольного класса и назначения, движущихся в поле притяжения Земли. Рассматриваются системы отсчета координат и системы измерения времени, задачи исследования движения тел переменной массы, силы, действующие на летательные аппараты во время движения.

Для студентов университета, изучающих прикладную механику и физику.

Рецензент - доктор технических наук В.И.Алексеев

ISBN 5 - 7511 - 0166 - 9

Б $\dfrac{2004030000}{177(012)-93}$ 32 - 92

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебнике изложены основы внешней баллистики летательных аппаратов произвольного класса и назначения, движущихся в поле тяжести Земли.

Внешняя баллистика как наука сформировалась достаточно давно и имеет довольно длинную историю. Многие ее принципы были сформулированы выдающимися механиками и математиками всех времён. Достаточно упомянуть (здесь) Г.Галилея, И.Ньютона, И.Бернулли, Л.Эйлера, М.В.Остроградского, Лагранжа, Пуассона, Аппеля и др.

На протяжении многих лет внешняя баллистика главным образом занималась изучением движения артиллерийских снарядов и мин. С развитием ракетной техники круг вопросов внешней баллистики значительно расширился. Появились исследования по внешней баллистике реактивных снарядов, управляемых ракет, включая вопросы оптимизации и выбора программы движения. Дальнейшее развитие ракетной и космической техники ввело в круг решаемых внешней баллистикой задач такие, как исследование динамики и устойчивости движения баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов. Исследование движения, ориентации и стабилизации искуственных спутников Земли также можно отнести к продолжению задач внешней баллистики - к задачам космической баллистики.

Рассматривая задачи исследования движения, внешняя баллистика основывается на законах механики тела постоянной и переменной массы, на изучении аэродинамики тел сложных форм в широком диапазоне скоростей, на гравиметрии, теории фигуры Земли, строения атмосферы, на теории автоматического управления и других науках.

В учебнике изложено далеко не исчерпывающее многообразие проблем, стоящих перед внешней баллистикой. Современное состояние науки о движении летательных аппаратов различных типов таково, что многие из рассматриваемых в учебнике задач могут служить предметом самостоятельных теоретических и экспериментальных исследований.

Изложение материала основано на последовательности рассмотрения принципиальных вопросов моделирования и исследования движения летательных аппаратов.

[illegible] I написана В.А.Бимайтовым, В.Д.[illegible]яковым, В.[illegible].Стен[illegible] [illegible] [illegible]тоным; [illegible]

2.2, 3.1, 3.2 – В.Д.Мерзляковым.

В гл. 1 представлены предмет и задачи внешней баллистики и дан краткий исторический обзор её развития.

В гл. 2 рассмотрены системы отсчёта, используемые при решении задач динамики полёта, системы измерения времени, выводятся уравнения движения летательного аппарата; гл. 3 посвящена силам, действующим на летательный аппарат во время движения; в гл. 4 выписывается один из вариантов системы скалярных уравнений движения летательного аппарата.

Чтобы не утяжелять структуру учебного пособия, все задачи, вопросы и упражнения, а также сопровождающие их решения и ответы сведены в отдельную часть.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ ВО ВНЕШНЮЮ БАЛЛИСТИКУ

§ 1.1. Предмет и задачи внешней баллистики

Эта книга - об основных задачах исследования движения различных летательных аппаратов, будь то артиллерийский или реактивный снаряд, баллистическая ракета или ракета-носитель, искусственный спутник Земли или космический аппарат. Сюда входят такие задачи, как расчет траектории движения центра масс летательного аппарата, исследование устойчивости его движения, определение необходимых начальных условий движения для достижения цели, проблемы стабилизации движения около центра масс, управление движением и маневрированием летательных аппаратов...

Таким образом, круг проблем и задач, очерченный этим учебником, достаточно широк. Здесь непосредственно соседствуют вопросы аналитической механики, динамики твердого тела, аэродинамики, динамики жидкости, астродинамики, теории автоматического управления.

Взаимосвязь этих вопросов требует от авторов чувства меры с тем, чтобы при детальном рассмотрении некоторых специфических проблем не потерять главное, характерное для задач курса. Так же достаточно деликатный и трудно решаемый вопрос - о соизмерении доли традиционности и современного подхода к решаемым проблемам. Традиции, установленные в учебных курсах, изучаемых студентами, могут быть полезны при чтении данного учебника, вместе с тем традиционные утверждения могут войти в противоречие с более тонкими и точными представлениями, полученными при развитии различных областей ракетной техники.

Название "Внешняя баллистика" в известной степени традиционно, но и в какой-то мере позволяет включать весь перечисленный спектр проблем в одно название, тогда как названия "Динамика полета", "Устойчивость движения ракет", "Теория полета неуправляемых ракет" и т.д. охватывают более узкий круг проблем.

Греческим термином βαλλω - "бросаю" - традиционно обозначено название баллистики как науки об изучении закономерностей и особенностей полета артиллерийских снарядов. В дальнейшем этот термин был распространен на проблему изучения движения ракет и космических аппаратов.

Мы будем называть все объекты исследования летательными аппаратами (ЛА), при необходимости конкретизируя в каждом случае их вид: снаряд, ракета, искусственный спутник Земли (ИСЗ) и т.д.

Словосочетание внешняя баллистика уточняет, что изучается движение тел после прекращения их силового взаимодействия с пусковой установкой.

Конечно же, "внешняя баллистика снарядов" и "внешняя баллистика ракет" как научные направления имеют существенные особенности, поскольку предметы исследования у них очень сильно разнятся. Однако основные идеи и концепции моделирования и изучения движения снарядов и ракет в обоих случаях общи. Конкретные особенности моделей, задач и их решения будут изложены в отдельных частях учебника.

Развитие ракетно-космической техники потребовало изучения явлений и процессов, характеризующихся скоростями движения тел порядка нескольких километров и даже десятков километров в секунду. Естественно, что для детального исследования этих процессов необходимо разрабатывать физически обоснованные модели и эффективные методы решения задач в рамках построенных моделей.

Движение летательного аппарата является чрезвычайно сложным, поскольку происходит под действием многих факторов, таких, как влияние гравитационного поля Земли и ближайших планет, аэродинамических сил, влияние состояния атмосферы, влияние упругости корпуса и колебаний жидкости в баках. Учет этих факторов приводит к весьма сложным математическим моделям в виде нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Математическая модель должна быть достаточно полной, чтобы адекватно описывать изучаемое движение, но также и достаточно простой для возможности разработки и реализации вполне корректных алгоритмов существующими методами на современных вычислительных устройствах. Упрощенные подходы эффективны лишь для достаточно узкого класса движений и тел.

Модели летательного аппарата как объекта внешней баллистики представляются моделями материальной точки, твердого тела, деформируемого тела.

Уровень идеализации, принятый при построении моделей, определяет не только соответствие модели реальному движению летательного аппарата, но и используемый для формализации математический аппарат. Это позволяет некоторым образом классифицировать математические модели на детерминированные и стохастические, непрерывные и конечно-разностные, линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные.

Детерминированные модели во многих случаях довольно далеки от реальных процессов, сопровождающих ратов. Тем не менее, если они отражают основные их характеристики, то исследование детерминированных моделей может привести к достаточно качественному описанию поставленной задачи.

Основным моментом в проблеме моделирования динамики летательного аппарата является представление силового взаимодействия его с окружающей средой как функции параметров самого летательного аппарата, параметров его движения и параметров состояния окружающей среды.

Внешняя баллистика как раздел механики и физики при исследовании механизма силового взаимодействия рассматривает физические процессы термодинамики, статистической физики, электродинамики, ионизации и рекомбинации. Однако представляется, что силовой подход при решении задач внешней баллистики должен быть основным. Здесь необходимо помнить, что законы изменения количества движения механической системы и ее кинетического момента справедливы в классической механике без всяких исключений и оба эти закона связаны с силами. Вместе с тем закон сохранения механической энергии справедлив не всегда: необходимо соблюдение дополнительных обстоятельств - отсутствие трения, неконсервативных сил.

Таким образом, детальное моделирование силового взаимодействия летательного аппарата с внешней средой является основной и достаточно сложной задачей, рассматриваемой внешней баллистикой. Для ее решения необходимо построить модель Земли как притягивающего тела и модель атмосферы. Для представления аэродинамических сил необходима детальная схематизация силового взаимодействия летательного аппарата с атмосферой.

В процессе исследований разработанные модели требуют уточнений. Такие задачи решаются только экспериментально и входят в круг задач экспериментальной баллистики.

Полет ракеты, как и любого летательного аппарата, может быть выполнен при условии обеспечения устойчивости движения. В классической механике задача об устойчивости движения считается одной из наиболее трудных, хотя ее общая формулировка вполне доступна для понимания: устойчивость - это способность сохранять заданное состояние движения. Основная трудность состоит в конкретном, математически формализованном истолковании этой способности. Задача усложняется тем, что уравнения движения летательного аппарата, как правило, нелинейные и с переменными коэффициентами. Требуются фундаментальные теоретические исследования и разработка уникальных экспериментальных методов для обеспечения устойчивости движения летательных аппаратов. Следовательно, исследования по устойчивости движения отнесем к одной из основных задач внешней баллистики.

В связи с решением задачи устойчивости движения необходимо осуществлять точное согласование многих характеристик ракетной конструкции с характеристиками систем автоматического управления. Здесь можно указать задачу ориентации и стабилизации вращательных движений искусственных спутников Земли.

С развитием управляемых летательных аппаратов во внешней баллистике возникли задачи, связанные с определением и исследованием оптимальных траекторий и маневров.

Перечисленные здесь (список можно продолжать) основные задачи и методы их решения тесно связаны друг с другом и образуют методологическую основу внешней баллистики как проблемы моделирования сложных процессов и явлений, связанных с движением летательных аппаратов в поле тяготения Земли.

§.I.2. Обзор истории развития внешней баллистики

Внешняя баллистика как одна из основных артиллерийских дисциплин развивалась вместе с артиллерией, решая её задачи в ходе исторического развития артиллерийской и ракетной техники.

Организация в ХУ и ХУI веках артиллерийских учреждений, таких, как "Пушечный двор" в Москве, "Пушечный приказ", способствовала обобщению сведений о стрельбе артиллерии. Создавались благоприятные условия широкого распространения опыта лучших артиллеристов и в области производства орудий, и в области их боевого использования, появлялись возможности для создания самобытной практической артиллерийской науки. Уже в это время артиллеристам были известны некоторые конкретные зависимости между элементами траектории, баллистическими и конструктивными характеристиками снаряда и орудия и некоторые сведения о характере полёта снаряда.

Опыт как русских, так и иностранных артиллеристов ХУI века обобщил "пушкарских дел мастер" Онисим Михайлов в своей книге "Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до военной науки", последняя, вторая часть которой была им написана в 1620 г. В этом труде Онисим Михайлов подробно изложил вопросы организации и боевого использования артиллерии, а также изложил ряд практических расчетов и приёмов по стрельбе и баллистике.

При последующем развитии артиллерии и артиллерийской науки особое внимание уделялось вопросам баллистики. Этому способствовало развитие математических и физических наук, механики. В 30–40-х годах ХУП в. в трудах Г.Галилея было показано, что траектория снаряда , движущегося под действием постоянной по величине и направлению силы тяжести, есть парабола. Параболическая теория движения давала возможность приближённого решения задачи о расчёте элементов траектории, вследствие чего она нашла применение во второй половине ХУП в. и в первой половине ХУШ в.

Конец ХУП и начало ХУШ вв. были важным периодом в развитии баллистики в связи с большими успехами в это время математики и механики. К теоретическим разработкам вопросов артиллерийской науки, в частности вопросов внешней баллистики, были привлечены видные учёные того времени. Появились работы, доказывающие необходимость учёта силы сопротивления при изучении движения снаряда. Здесь прежде всего следует указать на теоретические и экспериментальные исследования, проведённые И.Ньютоном, правда, на малых скоростях движения.

Для решения задачи о движении снаряда в воздухе необходимо было опытным путём выяснить характер и степень влияния сопротивления воздуха на движущийся снаряд. Для этого необходимо было прежде всего разработать методы опытного определения скорости движения снаряда. Первые опыты по определению начальных скоростей движения снаряда были осуществлены в России в 1727 г. специальной комиссией, в состав которой входили молодые учёные Д.Бернулли и Л.Эйлер. В 1753 г Л.Эйлер дал первое решение задачи о движении снаряда с учётом сопротивления воздуха. В этом решении сила сопротивления воздуха принималась пропорциональной квадрату скорости, что являлось близким к действительности для скоростей движения до 240 м/с. Развитие артиллерийской науки в ХУШ в. нашло практическое приложение в работах русских артиллеристов середины ХУШ в. Были созданы новые артиллерийские системы - единороги, секретные гаубицы, просуществовавшие почти сто лет, вплоть до появления нарезных орудий.

Основные практические вопросы баллистики были отражены в книгах русских артиллеристов М.В.Данилова "Начальное знание теории и практики в артиллерии с приобщением гидрографических правил" (1762 г.) и И.А.Вельяшева-Волынцева "Артиллерийские предложения для обучения юношества артиллерийского и инженерного шляхетского корпуса" (1767 и 1777 гг.).

В 1820 г. в России было основано Артиллерийское училище, преобразованное в 1855 г. в Артиллерийскую академию. Развитие внешней баллистики во многом связано с этими учебными заведениями. Так, в 1836 г. был издан первый учебник по внешней баллистике, написанный профессором Артиллерийского училища В.А.Анкудовичем. В этой книге с достаточной для того времени полнотой были изложены основные вопросы внешней баллистики.

Большое значение для развития внешней баллистики в этот период имели работы одного из крупнейших русских учёных М.В.Остроградского. В 1841 г. им была опубликована работа "О движении сферических тел в воздухе", где было дано общее решение сложной задачи о движении сферического вращающегося снаряда в воздухе.

К этому же периоду относится разработка первого в мире электромагнитного хронографа известным русским учёным К.И.Константиновым, крупнейшим специалистом в области баллистики ракет и ракетного дела. С появлением этого прибора появились новые возможности баллистического эксперимента.

Начало второй половины XIX века было ознаменовано новым значительным прогрессом в области артиллерийской науки. В этот период началось и было осуществлено перевооружение артиллерии новыми нарезными орудиями, стреляющими продолговатыми снарядами, стабилизируемыми в полёте вращением.

Переход к нарезной артиллерии поставил перед учёными и артиллеристами всех стран ряд серьёзных проблем, без разрешения которых невозможно было дальнейшее развитие артиллерии.

Перед артиллерийской наукой во всей своей широте, величии и трудности встали задачи изучения закономерностей движения вращающегося артиллерийского снаряда, получения больших начальных скоростей, прочности, живучести и скорострельности орудий из стали и т.д.

В решении всех этих вопросов ведущая роль принадлежит русским и советским учёным. Им по праву принадлежит приоритет в разрешении важнейших вопросов внутренней и внешней баллистики, в разработке методов рационального проектирования артиллерийских систем.

В результате работ, посвящённых изучению закономерностей движения вращающегося снаряда, в частности, задачи о движении продолговатого снаряда относительно центра масс, во внешней баллистике появился новый раздел "Теория вращательного движения снаряда". Впервые теория вращательного движения снаряда была разработана в трудах русского учёного-артиллериста Н.В.Маиевского. Его первая работа "О влиянии вращательного движения на полёт продолговатых снарядов в воздухе" относится к 1865 году. В 1866 г. вышла в свет новая работа Н.В.

Майевского как новый этап в развитии теории вращательного движения снаряда.

Результатом дальнейших работ явился систематический курс внешней баллистики, изданный в 1870 г. Последняя работа Н.В.Майевского "О решении задач прицельной и навесной стрельбы", в которой дано строго математическое объяснение деривации вращающихся снарядов, относится к 1882 г. Теория вращательного движения снаряда стала центральной не только в нашей стране, но и за рубежом.

В 1895 г. ученик и последователь Н.В.Майевского Н.А.Забудский издал курс "Внешней баллистики", который был основным руководством по баллистике в течение последующих 30 лет.

Дальнейшее развитие теория вращательного движения снаряда получила в трудах акад. А.Н.Крылова, который провёл решение задачи более строго, освободившись от ряда допущений, сделанных Н.В.Майевским. Многое в разработке вопросов по теории вращательного движения снаряда, по систематизации методов решения основной задачи внешней баллистики, по разработке теории поправок сделано Д.А.Вентцелем, Я.М.Шапиро, Б.Н.Окуневым. Новым этапом в развитии теории вращательного движения снаряда являются работы В.С.Пугачёва. Им дано решение задачи о движении вращающегося снаряда при совместном рассмотрении систем уравнений, описывающих поступательное движение его центра массы и вращательное движение снаряда около центра массы.

Особенно трудоёмким был процесс создания нового вида [redacted] снарядов - реактивных снарядов. Их развитие связано с решением ряда сложнейших научных и технических проблем, постановка которых вызвала к жизни новые разделы науки и техники. К таким новым разделам относится теория движения неуправляемых и управляемых реактивных снарядов, являющаяся научной основой для рационального баллистического проектирования их, исследования вопросов рассеивания и кучности последних.

Первые научные исследования в области ракетного дела принадлежат русскому артиллерийскому генералу К.И.Константинову, возглавлявшему с 1849 года Петербургское ракетное заведение и много сделавшему для улучшения организации производства и технологии изготовления ракет. Однако научные основы теории движения и ракетодинамики были разработаны много позднее в трудах выдающихся русских учёных И.В. Мещерского и К.Э.Циолковского.

В своём труде "Динамика точки переменной массы", изданном в 1897 г., и в ряде последующих работ И.В.Мещерский заложил основы механики тел переменной массы. В данной магистерской диссертации И.В.

Мещерский впервые вывел основное уравнение движения точки переменной массы. Установление этого исходного уравнения имеет весьма большое принципиальное значение в истории развития теоретической механики. Между тем в зарубежной литературе этот выдающийся результат исследований русского учёного замалчивается, а приоритет установления исходного уравнения механики тел переменной массы незаслуженно присваивается итальянскому математику Леви-Чевитте, который, лишь спустя 31 год, получил результат, являющийся частным случаем результатов И.В.Мещерского.

В 1904 г. И.В.Мещерский опубликовал вторую фундаментальную работу "Уравнения движения точки переменной массы в общем случае", в которой были заложены теоретические основы изучения движения аппаратов с воздушно-реактивными двигателями.

В начале и особенно во второй половине века наибольший успех механики в общем развитии науки и техники, несомненно, относится к ракетной технике и космонавтике. Это прежде всего создание крупнейших ракет-носителей и космических аппаратов. Это выбор и расчёт(для них) оптимальных траекторий. Это исследование вращательных движений спутников на орбитах и стабилизация их угловых движений. Это уточнение поля тяготения Земли.

Неоценимый вклад в развитие ракетной техники и космонавтики сделал выдающийся русский исследователь К.Э.Циолковский (1857-1935).

Константин Эдуардович Циолковский - исключительное явление в русской и мировой науке и технике. Почти ровесник Н.Е.Жуковского (1847-1921), А.Н.Крылова (1863-1945), И.В.Мещерского (1859-1935) он как бы не замечает творений современников и идёт собственным путём гениального самородка-учёного. Сочинения Циолковского открывают новую блестящую страницу техники без какого-либо существенного использования современных ему достижений в области механики и математики.

В самом деле, Циолковский использует в своих трудах лишь арифметику, алгебру и самые начала анализа бесконечно малых. Тем не менее этого скромного арсенала математических средств Циолковскому было достаточно, чтобы заложить основы всей ракетной техники (включая и реактивную авиацию) и предвосхитить современные достижения в освоении космического пространства.

В смелых и оригинальных идеях и работах в области ракетной техники Циолковский не имеет предшественников и намного опережает учёных всех стран и современную ему эпоху. Использование ракеты как летательного аппарата, жидкого кислорода - как одного из компонентов топлива, газовых рулей - для управления полётом - всё это было предложено Циолковским более чем 90 лет тому назад, когда ещё не существовало летательного аппарата тяжелее воздуха и ракета была пиро - технической экзотикой.

О ракетах знали,и запуски ракет наблюдали очень многие и задолго до Циолковского. Однако только Циолковский предложил реактивный прибор, подобный ракете, как новое и единственное техническое средство для достижения невиданных скоростей и высот полёта и вылета в безграничный мир космоса. Начало теоретической разработки этой проблемы относится к 1903 году, когда была опубликована первая работа К.Э.Циолковского "Исследование мировых пространств реактивными приборами" /I/. Эта и последующие его работы содержат аналитические расчёты, описание конструкции и теорию полёта ракеты с учётом изменения её массы во время полёта. Им был получен ряд фундаментальных формул, исходя из которых легко математически определить лётные характеристики ракет. Мировую известность получила формула Циолковского, определяющая максимальные возможности реактивного способа сообщения движения в свободном пространстве.

Из формулы Циолковского следует весьма важный практический вывод: осуществление возможно более высоких скоростей движения ракеты достигается эффективнее путём увеличения относительных скоростей отбрасываемых частиц, то есть повышением совершенства двигательной установки, чем путём увеличения относительного запаса топлива на борту ракеты, то есть путём совершенствования её конструкции.

Хотелось бы обратить здесь внимание на раздел работы, озаглавленный "Среда тяжести. Отвесное возвращение на Землю" /I/ , где он впервые в мире получил расчётные формулы для определения запасов топлива, обеспечивающих "мягкую" посадку на планету без атмосферы.

Значительное место в исследованиях занял вопрос о влиянии сил сопротивления воздуха на движение ракеты. Им были выполнены первые расчёты по выбору наивыгоднейшего угла подъёма ракеты с учётом потерь на преодоление сил тяготения, сил сопротивления воздуха при полёте в среде переменной плотности и изменения высотных характеристик двигателя. Грандиозными являются проекты Циолковского составных, многоступенчатых ракет и ракетных поездов, задуманные им в 1929 г. Трудно переоценить всё значение предложения Константина Эдуардовича о составных многоступенчатых ракетах. По существу, это предложение открыло дорогу человеку в космическое пространство.

Вскоре после 1903 года,в ряде стран независимо друг от друга стали возникать классические работы, повторяющие основы, заложенные Циолковским. Так, в 1913 году и в последующие годы публиковались работы Эно-Пельтри, с 1919 года - труды Годдарда, а с 1923 г. - Оберта и с 1925 г. - [illegible]зана /2/.

На фоне этих независимо возникавших исследований, не зная об этих работах, Юрий Васильевич Кондратюк (1897-1942) создал теорию ракеты много позже Циолковского. Не зная о работах Циолковского, Кондратюк повторил их и, что самое ценное, развил их, и развил весьма ярко. В 1919 году Ю.В.Кондратюк предложил использовать сопротивление атмосферы для торможения ракеты при спуске на небесные тела с целью экономии топлива. Для экономии энергии при полётах к небесным телам он предложил выводить космический корабль на орбиты искусственных спутников с последующим отделением от этого корабля посадочно-взлётного аппарата, осуществляющего посадку, что, естественно, приводит к большой экономии энергии. В печати США отмечалось, что полёт космического корабля "Аполлон" был выполнен по схеме, предложенной Кондратюком (статья "Как идея, которую никто не признавал, воплотилась в ЛЕМ (лунный корабль)" - Лайф, 31 марта 1969 года). Обилие идей Кондратюка, впервые им высказанных, сейчас частично используется, частично и ныне являются новинками, а некоторые из них ещё только предстоит использовать ввиду их эффективности. Приходится сожалеть, что эти рукописные работы были опубликованы лишь в 1964 году /3/.

Видное место в истории отечественной и мировой ракетно-космической науки и техники занимает имя Фридриха Артуровича Цандера (1887-1933). Он был выдающимся и оригинальным исследователем в области теории межпланетных путешествий и ракетодинамики.

Учёный-одиночка, работавший за семьдесят лет до настоящего времени, Цандер имеет авторство на идеи, расчёты, инженерные приложения в тех областях ракетной техники и астродинамики, где сейчас уровень разработок даже отдельной проблемы определяется целенаправленными усилиями многочисленных коллективов специалистов.

Не рассматривая полный набор всех аспектов и характеристик научного наследия Цандера, ограничимся лишь кратким перечислением основных направлений его исследований.

Ряд основных положений современной астродинамики был выдвинут и научно обоснован Цандером. По своей тематике они относятся к космической баллистике и выполнены Цандером в первой половине 20-х годов, то есть еще до опубликования исследований других авторов на ту же тему.

В работе "Определение путей перелётов, добавочных скоростей, которые должны быть сообщены ракетному межпланетному кораблю, и продолжительности перелётов" Цандер дал аналитическое доказательство энергетической оптимальности космических траекторий, имеющих вид касательных эллипсов и полуэллипсов, то есть эллиптических траекторий, касающихся орбит двух планет. В настоящее время, как известно, межпланетные траектории в виде касательных эллипсов носят название „гомановых" по имени немецкого исследователя В.Гомана, опубликовавшего в конце 1925 года результаты расчётов этих траекторий. Однако результаты расчётов полётов по касательным эллипсам для случаев полёта на Марс и Венеру были получены Цандером ещё в апреле 1923 года. В работе "Определение путей для полётов в мировое пространство с возвращением на Землю через целое число лет" Цандер предложил и исследовал специального вида траектории встречи, называемые в настоящее время модифицированными траекториями Крокко. Некоторые из этих траекторий, а также траекторию, называемую ныне траекторией Крокко, Цандер демонстрировал в 1925 году в Туле вместе с результатами расчётов. Крокко,спустя много лет после смерти Цандера,независимо повторил часть его предложений. Доклад Крокко, где он предложил одногодичные траектории, состоялся в 1956 году.

В работе "Изменение пути полёта вокруг Солнца действием планет" Цандер не только предложил использовать гравитационное поле планет и их спутников с целью разгона или торможения космического аппарата (по современной терминологии гравитационный манёвр), но и обосновал это предложение теоретически. Метод исследования данного вопроса, разработанный и впервые опубликованный Цандером в 1929 г., даёт ряд формул, которые в наши дни являются классическими. В то время подобных работ ещё не было в печати.

В работе "Корректирование полёта" Цандер задолго до того, когда в печати было обращено внимание на вопросы коррекции первоначально запланированной траектории, поставил и математически исследовал задачу об оптимальной импульсной коррекции в простейшем случае компланарности исходной и скорректированной траекторий .

В работе "О выгодности ускорения полёта ракетой в моменты, когда скорость полёта ещё большая", представленной в 1926 году Цандером, опять же впервые были выдвинуты идея, математическая постановка задачи и метод расчёта оптимальных одноимпульсных траекторий, имеющие в настоящее время широкое применение.

Из сказанного выше следует, что Цандером были исследованы импульсные траектории, принадлежащие ко всем трём по современной классификации возможным типам: перехвата, перехода, встречи.

Таким образом, мы видим, что это был глубокий по содержанию цикл работ, охватывающий наиболее широкий для своего времени круг вопросов, относящихся к новому разделу космонавтики - космической баллистике.

С 1928-29 гг. центр тяжести работ Цандера переместился в сторону ракетно-технической тематики.

Цандеру принадлежит авторство на идею применения крылатых ракетно-космических аппаратов для выведения на околоземную орбиту космических объектов и для планирующего спуска космического аппарата с использованием в обоих случаях аэродинамической подъёмной силы. Кроме того, Цандер первым в истории техники разработал проект крылатого двухступенчатого космического корабля. Здесь интересно отметить, что идеи и разработки крылатых ракетных аппаратов, выдвинутые Цандером ещё в 1924 году, сейчас стали общепризнанными и рассматриваются современными конструкторами как перспективные модели глобальных транспортных систем.

В исследованиях Цандера по динамике полёта ракет им были рассмотрены следующие вопросы:

- разработка расчётной схемы определения параметров движения и элементов траектории полёта ракет, основные технические характеристики которых соответствуют современным представлениям о классе баллистических ракет дальнего действия (БРДД);
- оптимизация полёта БРДД из условия наименьшей скорости, сообщаемой в конце активного участка полета;
- исследование возможности реализации "сверхдальних" полётов с точки зрения обеспечения необходимых запасов топлива на борту ракеты.

Цандером была дана инженерная трактовка приложения эллиптической теории движения. Особо им был исследован вопрос области существования оптимизационной задачи проектирования траекторий минимальной энергии (ТМЭ). Наиболее последовательно проводилась инженерная интерпретация результатов баллистического расчёта, что привело его к постановке и решению вопросов, связанных с выбором проектных параметров ракеты.

Методика проектировочных баллистических расчётов должна позволять, не прибегая к громоздким вычислениям, быстро определять лётные характеристики ракеты по её конструктивным параметрам и обратно: по заданным лётным характеристикам - конструктивные параметры. По схеме, разработанной Цандером, решается большинство практических задач, составляющих основу современных проектировочных баллистических расчётов.

С именем Сергея Павловича Королёва (1906-1966) связаны эпохальные события человеческой цивилизации: запуск первого искусственного спутника Земли, достижение Луны и Венеры, полёт в космос первого человека, нашего соотечественника Юрия Гагарина. Много замечательного было сделано Королёвым и до этих свершений и после них. Это и освоение безмоторного полёта на планерах своей конструкции, и конструирование оригинального лёгкого самолёта; это разработки первых крылатых ракет с жидкостным двигателем, конструирование ракетоплана и установка реактивных ускорителей на боевых самолётах; это, наконец, создание мощных баллистических ракет для обороны страны, космических автоматических станций и космических кораблей различных назначений.

С 1929 года после знакомства с Циолковским и его работами начал заниматься вопросами ракетной техники. При всём романтическом складе своего характера Королёв трезво смотрел на вещи, понимая, что нельзя работать одному, что важно привлечь к вопросам реактивного движения общественность, исследователей и конструкторов.

В 1931 году вместе с Ф.А.Цандером, М.К.Тихонравовым, Ю.А.Победоносцевым Сергей Павлович организовал группу изучения реактивного движения (ГИРД), став в 1932 г. её начальником. Этой группой была создана и 17 августа 1933 года запущена первая советская жидкостная ракета на гибридном топливе, а 25 ноября того же года — другая ракета с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) на двухкомпонентном топливе.

В Ленинграде в 1921 году была организована Газодинамическая лаборатория (ГДЛ). С 1929 года в ней разрабатывались под руководством В.П.Глушко электрические и жидкостные двигатели. В результате объединения ГИРД и ГДЛ в конце 1933 года в Москве возник первый в мире Реактивный научно-исследовательский институт (РНИИ). В 1934 г. Королёв, будучи руководителем отдела летательных аппаратов, в содружестве с Е.С.Щетинковым создал и испытал в полёте первую советскую крылатую ракету.

28 февраля 1940 года состоялся первый полёт лётчика-испытателя В.П.Фёдорова на ракетоплане конструкции Королёва. Интерес к ракетопланам особенно повысился в настоящее время в связи с конструированием летательных аппаратов многократного действия для полётов с Земли на орбитальные станции, а также для сверхдальних транспортных полётов.

Новый этап деятельности Королёва начался в 1946 году, когда он стал главным конструктором по созданию комплексов автоматически управляемых баллистических ракет дальнего действия.

Характерной чертой Королёва как главного конструктора был принцип преемственности технических решений, сочетание новых идеоментов с отработанными и многократно проверенными, тщательная экспериментальная проверка новых элементов. Каждую новую разработку он рассматривал не локально, а с позиций далёкой перспективы. Именно преемственность обеспечивала интенсивный и непрерывный процесс совершенствования ракетных конструкций. Этим свойством обладала баллистическая схема ракеты с отделяющейся головкой. Королёв, будучи по образованию аэромехаником, особый интерес проявлял к конструктивным схемам, которые позволяли использовать атмосферу Земли в качестве источника энергии. Применение воздушно-реактивного двигателя должно было дать экономию в весе, так как в этом случае из компонентов требовалось только горючее. Аэродинамическая сила крыльев у таких конструктивных схем должна была дать резерв дальности полёта. Вот почему на этапе выбора перспективных направлений развития отечественного ракетостроения большое внимание уделялось схемам крылатых ракет. Однако общий уровень развития техники не позволял использовать очевидные преимущества этих схем. Баллистическая схема ракеты, выбранная в качестве основной, базировалась на существенном опыте разработки ЖРД, в то время как проектирование воздушно-реактивных двигателей с большими входными диаметрами было сложной инженерной проблемой, требующей весьма длительных исследований. Баллистическая схема позволяла также опираться на опыт разработки систем управления с использованием трехстепенных гироскопов, тогда как для крылатой схемы требовалось создание навигационных систем на новых принципах, которые только начинали развиваться. В целом баллистическая схема была выбрана потому, что позволяла воспользоваться реальными инженерными решениями, доступными для практической реализации без всяких задержек. Как показал опыт мирового ракетостроения, баллистическая схема ракеты с отделяющейся головной сделала путь в космос наиболее простым и коротким, потому что в исходных предпосылках этой схемы были основные компоненты для разработки космической ракеты (ракеты-носителя). Это обстоятельство позволяло осуществлять её поэтапную разработку.

Простой перечень теоретических задач, которые приходилось решать при создании ракеты и космического аппарата, заполнил бы не одну страницу; он продолжает расширяться по мере перехода к более совершенным конструкциям. Теоретической базой проектных работ в КБ Королёва служили пять основных научных направлений, которые позволяли сформулировать требование к различным системам и агрегатам: это баллистика, аэродинамика, устойчивость движения, внешние нагрузки и прочность.

Разработчику ракеты прежде всего приходится сталкиваться с решением баллистической задачи. Здесь, как ни в одной другой задаче, необходимо учитывать множество особенностей конструкции ракеты и её агрегатов, которые могут оказать влияние на основные характеристики ракеты: величину полезного груза, дальность полёта и точность. Можно сказать, что ракета начинается с баллистики и кончается ею.

Обращает на себя внимание тщательность, с которой были выполнены в КБ Королёва исследования по баллистике. Это были не теоретические поделки, вызванные к жизни текущими задачами проектирования, а фундаментальная работа, в которой учтены общие особенности баллистических ракет дальнего действия. Этим объясняется её непреходящее значение. Многочисленные проблемы, связанные с разработкой ракет, наполнили (эти) теоретические направления новым содержанием и способствовали такому развитию, которое выходит за рамки практических потребностей ракетной техники. Так задачи традиционной баллистики тесно переплелись с проблемами аэродинамики и устойчивости движения и рассматриваются сейчас комплексно, как одно направление.

Глава 2. СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА И МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

Исследование процессов движения тел, наблюдение за ними и регистрация параметров движения, а также использование получаемых результатов происходят в выбранных специальным образом наиболее удобных системах отсчёта. В общем случае под системой отсчёта понимается совокупность системы координат, служащей для определения положения объектов в пространстве, и системы измерения времени. Для условий движения, соответствующих современным задачам внешней баллистики,ракет и снарядов, то есть движений со скоростями значительно меньшими скорости света в пустоте, время считается абсолютным, не зависящим от системы отсчёта, и может рассматриваться в уравнениях движения как независимая переменная.

При решении задач динамики полета наиболее удобными являются инерциальные системы отсчёта, в которых свободное движение объектов, то есть движение, при котором на объекты не действуют внешние силы, происходит с постоянной скоростью. Для таких систем справедлив принцип относительности Галилея, то есть уравнения,описывающие процесс движения, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени, и выполняется второй закон Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F},$$

где $\bar{F}$ - сила, действующая на объект; m - масса объекта; $\bar{V}$ - его скорость, устанавливающий, что ускорение материальных точек и тел происходит под действием физических сил, таких,как сила тяготения, сопротивление среды, сила упругости и т.п.

Практически абсолютно инерциальных систем не существует. Однако система координат, движение которой в течение заданного промежутка времени с допустимой точностью является прямолинейным и равномерным, и, следовательно, её оси сохраняют постоянное направление в пространстве, в течение этого времени может считаться инерциальной.

За инерциальную может быть принята барицентрическая система координат известной "задачи двух тел", так как центр масс консервативной системы, состоящей из двух материальных точек, силовое взаимодействие которых определяется законом всемирного тяготения, движется прямолинейно и равномерно. Однако реально таких консервативных систем не существует. Возмущения, действующие извне на эту систему, изменяют характер движения барицентра и ограничивает время, в течение которого эта система может считаться инерциальной.

При решении некоторых задач динамики полёта инерциальными считаются экваториальная геоцентрическая, экваториальная гелиоцентрическая и звёздная системы координат. Система координат, жёстко связанная с поверхностью Земли, вращается относительно полярной оси с угловой скоростью $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ рад/с, и её линейное ускорение, направленное к оси вращения Земли, приблизительно равно $3{,}4 \cos\varphi \cdot 10^{-2}$ м/с^2, где φ - широта места расположения начала системы координат. Ускорение системы координат, начало которой располагается в центре Земли, а оси не участвуют в её суточном вращательном движении, направлено к Солнцу и приблизительно равно $0{,}57 \cdot 10^{-2}$ м/с^2. Очевидно, что эти системы могут рассматриваться как инерциальные при решении задач, в которых влиянием инерциальных сил, вызываемых их ускорением, можно пренебречь.

При описании движения объектов в подвижных, то есть неинерциальных системах координат, в уравнения движения вводятся члены, учитывающие эйлеровы силы инерции, вызываемые переносными и кориолисовыми ускорениями, которые, как и даламберовы силы инерции, являются фиктивными. Введение этих сил является условным, хотя в ряде задач при этом упрощается решение и анализ результатов. Для одних и тех же объектов выражения, определяющие эйлеровы силы инерции, зависят от выбора характера движения неинерциальной системы координат. Поэтому при решении задач динамики полёта целесообразный выбор системы координат имеет важное значение.

Как инерциальные, так и неинерциальные системы координат могут быть прямоугольными или криволинейными. К последним относятся сферические, цилиндрические и т.п.

Основными характеристиками систем координат являются расположение начала координат, основная плоскость и основная ось. Если начало системы координат совмещено с центром масс Земли (геоцентром), то она называется геоцентрической, если оно располагается на поверхности Земли, то система называется топоцентрической.

Основная плоскость - это главная плоскость системы координат. На ней задается направление основной оси, выбираемое из условия наиболее простого построения модели движения и определённости задания; она, как правило, совмещается с плоскостью, имеющей гео -

метрическое или физическое определение. В зависимости от выбора основной плоскости различают экваториальные, горизонтальные и орбитальные системы координат, в которых основная плоскость соответственно совмещена с экватором, плоскостью горизонта, с плоскостью орбиты.

Во внешней баллистике, как правило, используются правые системы прямоугольных координат, в которых за положительное направление принимается вращение, происходящее против часовой стрелки. В системе координат $OXYZ$ с основной плоскостью OXY и основной осью OX ось OY размещается в основной плоскости, под углом 90° к оси OX, отсчитываемым против часовой стрелки, если наблюдать с положительного направления оси OZ. Последняя, в свою очередь, направляется перпендикулярно основной плоскости OXY так, чтобы угол между OZ и OY был положительным, если отсчёт вести с положительного направления оси OX.

При исследовании движения материальной точки (например, центра масс тела) её положение в выбранной системе координат вполне определяется тремя координатами. Если же изучается движение тела, то для определения его положения необходимо знать положение какой-либо заданной точки этого тела и его ориентацию в выбранной системе отсчёта. Как правило, это осуществляется введением жёстко связанной с телом системы координат. В этом случае координаты начала связанной системы координат и углы Эйлера или направляющие косинусы её осей вполне определяют положение тела.

Во внешней баллистике наиболее употребительны системы координат, описанные в ГОСТ 20058-80, где все правые прямоугольные системы координат разделены на два класса:

- системы, связанные с Землёй или другими телами пространства;

- системы, связанные с исследуемым летательным аппаратом (снарядом, ракетой, космическим аппаратом).

Выбор систем координат для решения тех или иных задач внешней баллистики связан с формой, а также характером и временем движения исследуемого объекта. Для описания движения тел, стабилизируемых при помощи гироскопического эффекта и не имеющих ярко выраженной плоскости, которая могла бы быть принята за основную, используются системы координат, основная плоскость которых связывается с расположением векторов сил, действующих на тело. Изучение динамики тел, имеющих плоскости симметрии, как правило, происходит в системах координат, у которых основная плоскость сов -

падает с одной из плоскостей симметрии, а движение ракет дальнего действия и космических аппаратов рассматривается в инерциальной системе координат, связанной с Землёй.

§ 2.1. Системы координат

2.1.1. Экваториальные геоцентрические системы координат

Начало прямоугольной экваториальной геоцентрической системы координат $OX_oY_oZ_o$ (рис. 2.1) совмещается с центром Земли и сов-

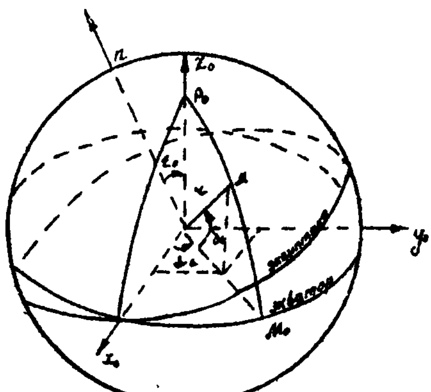

Рис. 2.1. Прямоугольная и сферическая экваториальные геоцентрические системы координат: α_o – прямое восхождение; δ_c – склонение; ε_o– угол наклона эклиптики к плоскости экватора

падает с центром небесной сферы. За основную плоскость X_oOY_o принимается плоскость земного экватора. При пересечении плоскости эклиптики, то есть плоскости, в которой происходит видимое годичное движение Солнца, с экваториальной плоскостью образуется прямая, совпадающая с основной осью OX_o, направленной в точку весеннего равноденствия. Ось OY_o располагается в плоскости экватора на восток от оси OX_o, ось OZ_o – перпендикулярно экваториальной плоскости по оси вращения Земли на север. Построенная таким образом система не участвует во вращательном движении Земли.

Положение любого малого объекта или его центра масс (т. M) относительно плоскостей этой прямоугольной геоцентрической системы определяется сферическими координатами:

- радиусом-вектором r - отрезком луча от начала координат до объекта;

- углом α , называемым прямым восхождением, измеряемым в плоскости экватора от неподвижной в пространстве оси OX_0 до линии пересечения плоскости экватора с перпендикулярной ему плоскостью небесного меридиана P_0MM , в которой находится объект;

- углом δ , называемым склонением, отсчитываемым в плоскости меридиана от экватора в сторону полюсов.

Прямое восхождение изменяется от 0 до 360^0 (или от 0 до 24^h) и считается положительным, если отсчёт ведётся против часовой стрелки при наблюдении с северного полюса; склонение от 0 до 90^0 считается положительным, если угол отсчитывается к северу от экватора или отрицательным для углов, расположенных в южном полушарии.

Эта система сферических координат, не участвующих в суточном вращении Земли, называется второй экваториальной системой. Положение её основных плоскости и оси в мировом пространстве определяется координатами звёзд, которые приводятся в каталоге звёздных положений некоторой эпохи T_0 , называемой средней эпохой равноденствия.

Под действием сил притяжения со стороны Луны и Солнца на сплюснутую с полюсов Землю её ось вращения, двигаясь равномерно, описывает в пространстве конус с вершиной в центре масс Земли. Это движение, называемое прецессией, вызывает равномерное перемещение по эклиптике точки весеннего равноденствия и, следовательно, изменение положения прямоугольной экваториальной геоцентрической системы координат. Прецессионное движение точки весеннего равноденствия является периодическим, с периодом около 26000 лет.

На прецессионное движение накладываются долгопериодические и короткопериодические колебания оси вращения Земли, вызываемые периодическими движениями Луны и Солнца по их геоцентрическим орбитам. Эти, называемые нутационными, колебания вызывают дополнительные смещения точки весеннего равноденствия и осей прямоугольной геоцентрической системы координат в пространстве. Поэтому эта система координат связывается со средней точкой весеннего равноденствия и средним экватором в эпоху T_0. Если необходимо определить истинные координаты наблюдаемой материальной точки в момент T, удалённый от T_0, то необходимо внести поправки раздельно на влияние нутации и прецессии.

В случае, когда величина $T-T_0$ достаточно велика, преобразование координат выполняется при помощи прецессионных параметров Ньюкома и поправок на нутацию.

Связь между геоцентрическими прямоугольными и сферическими координатами выражается соотношениями

$$x_0 = r \cos\delta_0 \cos\alpha_0 ,$$
$$y_0 = r \cos\delta_0 \sin\alpha_0 ,$$
$$z_0 = r \sin\delta_0 ,$$

в которых δ_0 и α_0 – соответственно склонение и прямое восхождение наблюдаемого объекта. Для исследования движения космических объектов применяются также вращающиеся вместе с Землёй системы прямоугольных и сферических координат. В них основной плоскостью является плоскость небесного экватора, а основная ось располагается в плоскости астрономического меридиана некоторой точки земной поверхности. Как правило, за такую точку принимается Гринвич, меридиан которого считается начальным, или нулевым.

Как известно, плоскостью астрономического меридиана точки земной поверхности называется плоскость, проходящая через отвесную линию в этой точке и параллельную оси вращения Земли. Поскольку в силу отличия поверхностей постоянного потенциала силы тяжести от поверхностей вращения, линии отвеса в общем случае не проходят через центр масс Земли и даже не пересекаются с её осью вращения, и, кроме того, вследствие прецессии и нутации ось вращения Земли совершает сложное движение относительно поверхности, то при построении системы координат принимается предположение о среднем положении полюса относительно поверхности Земли. В настоящее время принят средний полюс, закреплённый средними астрономическими широтами станций Международной службы движения полюса эпохи 1900–1905 гг.

Начало вращающейся вместе с Землей мгновенной системы прямоугольных координат $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ совмещается с центром масс Земли; за основную плоскость $\tilde{X}O\tilde{Y}$ принимается плоскость истинного небесного экватора; основная координатная ось $O\tilde{X}$ направляется в точку $\tilde{G}_0$ пересечения истинного небесного экватора с плоскостью мгновенного начального меридиана. Ось $O\tilde{Y}$ располагается в основной плоскости под углом 90^0 к востоку от плоскости начального меридиана, а ось $O\tilde{Z}$ совмещается с северным направлением средней оси $O\tilde{P}$ вращения Земли (рис. 2.2).

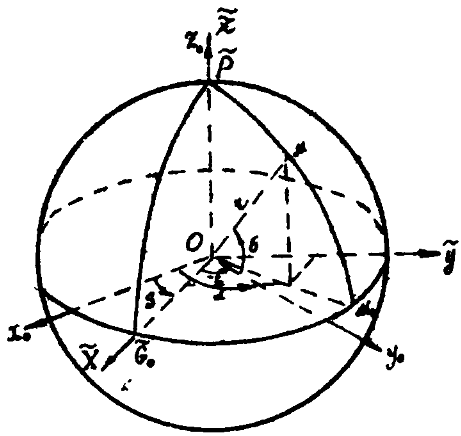

Рис. 2.2. Прямоугольная и сферическая вращающиеся системы координат: α – прямое восхождение; S – гринвичское звёздное время; $-t = S-\alpha$

Сферическими координатами точки M являются его геометрический радиус-вектор r, дуга G_0M_0 небесного экватора, называемая гринвичским часовым углом t, и дуга MM_0 меридиана небесной сферы, называемая склонением δ.

Склонение в этой системе отсчитывается так же, как и в предыдущей, часовой угол измеряется как двугранный угол между плоскостью начального меридиана $\tilde{P}\tilde{G}_0$ и меридиана наблюдаемой точки $\tilde{P}M_0$ и отсчитывается по дуге экватора по направлению движения часовой стрелки от начального меридиана, и изменяется от 0 до 360^0, или от 0 до 24^h. Эта система координат называется первой экваториальной системой.

Соотношения между прямоугольными и сферическими координатами вращающейся системы аналогичны приведённым для невращающейся геоцентрической системы.

2.1.2. Нормальная земная система координат

Эта система координат $O_o X_g Y_g Z_g$, изображённая на рис. 2.3, является топоцентрической. Её начало, точка O_o, обычно связывается с точкой вылета, то есть точкой пространства, в которой находится центр масс снаряда или ракеты в момент, когда ими теряется механическая связь со стволом или направляющими.

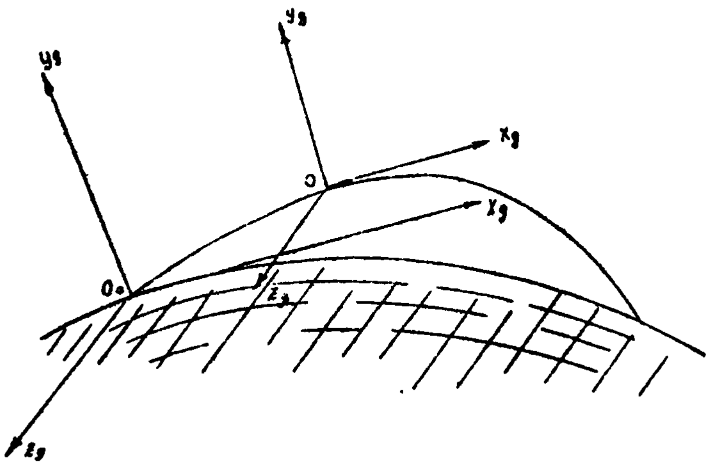

Рис. 2.3. Нормальная земная и нормальная системы координат

Основной плоскостью системы $O_o X_g Y_g Z_g$ является плоскость $O_o X_g Z_g$, совпадающая с плоскостью местного горизонта в точке O_o. Основная ось $O_o X_g$ указывает направление стрельбы. Ось $O Y_g$ направлена вверх по местной вертикали, а $O_o Z_g$ лежит в плоскости местного горизонта.

Нормальная земная система координат в основном используется для расчёта траектории центра масс метаемого тела.

В некоторых задачах внешней баллистики для определения положения центра масс тела удобнее пользоваться топоцентрической сферической системой координат, изображённой на рис. 2.4. В ней за координаты приняты: r - радиус-вектор, иногда называемый наклонной дальностью, являющийся отрезком луча от начала координат до центра масс тела; A - азимут - угол, отсчитываемый по часовой стрелке в местной горизонтальной плоскости от направления на север; ε - угол места, отсчитываемый в вертикальной плоскости между r и плоскостью горизонта.

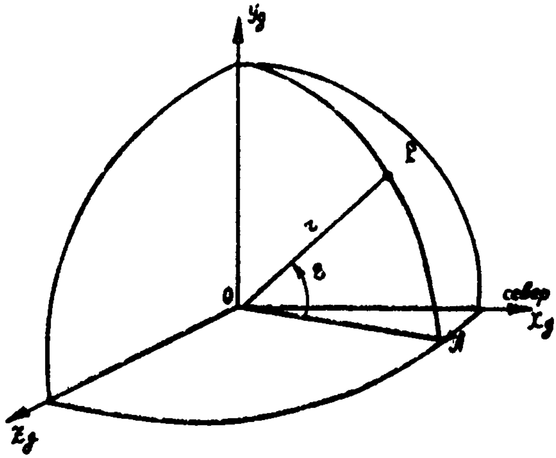

Рис. 2.4. Топоцентрическая сферическая система координат

Иногда для сохранения единства направления в отсчёте углов вместо азимута A используется угол $A^* = -A$.

Связь между прямоугольными и сферическими топоцентрическими координатами выражается соотношениями

$$x_g = r\cos\varepsilon\cos A,$$

$$y_g = r\sin\varepsilon,$$

$$z_g = r\cos\varepsilon\sin A$$

Вместе с нормальной земной системой координат при решении задач внешней баллистики используется нормальная система координат $OX_gY_gZ_g$, начало которой совмещается с центром масс снаряда, а оси во всё время движения остаются параллельными осям нормальной земной системы координат. При использовании этой системы можно определять положения в пространстве других систем координат, связанных со снарядом или его параметрами движения и имеющих начало в центре масс снаряда.

При решении плоских задач, связанных с расчётом характеристик баллистических ракет дальнего действия и космических аппаратов, иногда используется земная полярная система координат, в которой положение центра масс тела определяется радиусом-вектором r и полярным углом φ, а за основную плоскость принимается плоскость стрельбы.

2.1.3. Траекторная система координат

За начало этой системы координат $OX_\text{к}Y_\text{к}Z_\text{к}$ принимается центр масс снаряда. Основной плоскостью является вертикальная плоскость $OX_\text{к}Y_\text{к}$, в которой располагается вектор земной скорости центра масс (то есть скорости относительно Земли) $\bar{v}$, с которым по направлению совпадает основная ось $OX_\text{к}$. Ось $OY_\text{к}$ размещается в основной плоскости перпендикулярно $OX_\text{к}$. Ось $OZ_\text{к}$ лежит в плоскости горизонта, перпендикулярно основной плоскости так, что образуется правая система координат.

Положение траекторной системы координат относительно нормальной определяется, как изображено на рис. 2.5, двумя углами:

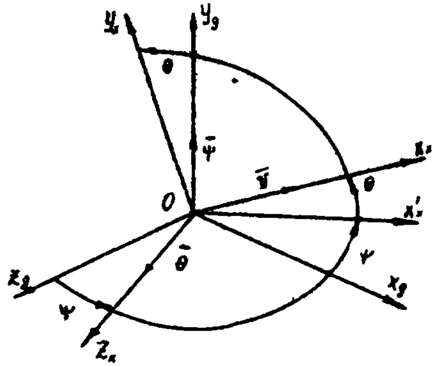

Рис. 2.5. Траекторная и нормальная системы координат

– углом пути Ψ, называемым также углом поворота траектории и измеряемым в плоскости горизонта, то есть в плоскости OX_gZ_g между осью OX_g и проекцией вектора скорости центра масс на эту плоскость;

– углом наклона траектории θ, называемым иначе углом наклона вектора скорости к плоскости горизонта, измеряемым между направлением вектора скорости центра масс и плоскостью горизонта.

Направляющие косинусы осей траекторной системы координат относительно нормальной земной приведены в табл. 2.I.

Таблица 2.I

Нормальная земная система	Траекторная система		
	$OX_к$	$OY_к$	$OZ_к$
O_oX_g	$\cos\Psi\cos\theta$	$-\cos\Psi\sin\theta$	$\sin\Psi$
O_oY_g	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
O_oZ_g	$-\sin\Psi\cos\theta$	$\sin\Psi\sin\theta$	$\cos\Psi$

Угловая скорость траекторной системы координат относительно нормальной земной

$$\bar{\omega}_к = \bar{\dot{\Psi}} + \bar{\dot{\theta}},$$

а её проекции на оси траекторной системы соответственно равны

$$(\omega_к)_{x_к} = \dot{\Psi}\sin\theta, \quad (\omega_к)_{y_к} = \dot{\Psi}\cos\theta; \qquad (\omega_к)_{z_к} = \dot{\theta}. \qquad (2.I.I)$$

С траекторной системой координат связаны некоторые важные характеристики, используемые при решении задач внешней баллистики, такие, как начальная скорость V_o и угол бросания θ_o.

Начальной скоростью V_o принято считать искусственно вводимое значение скорости центра масс снаряда в точке вылета, соответствующее моменту времени, в который донный срез снаряда разрывает механическую связь с дульным срезом ствола. Это понятие, определяющее одно из начальных условий в основной задаче внешней баллистики, введено для упрощения математической модели начального участка траектории снаряда.

При движении снаряда в канале ствола пороховые газы, под действием силы давления которых совершается движение, прорываются в зазоры, существующие между боковой поверхностью снаряда и стенкой канала ствола и создают в окружности дульного среза газовое облако, по форме близкое к шару и непрерывно расширяющееся. Плотность смеси порохового газа и воздуха в этом облаке невелика, но она значительно увеличивается, когда в эту область пространства устремляются пороховые газы из ствола после выхода из него снаряда. Скорость их вблизи дульного среза значительно превосходит скорость снаряда. Поэтому в этой области пространства снаряд, двигаясь не в воздухе, а в неоднородной и сильно возмущённой газовой среде, испытывает ускорение. Поскольку вытекающие из ствола газы испытывают сопротивление со стороны воздуха, то скорость газовой струи быстро убывает по мере удаления её от дульного среза. Очевидно, ускорение снаряда при его движении в газовой среде прекращается, когда скорость его центра масс становится равной скорости газовой струи. После этого движение снаряда происходит в газовой струе с замедлением, вызываемым силой сопротивления газового потока, отличающимся от действия воздушной среды.

Время движения снаряда в пороховых газах принято называть периодом последействия. Длительность этого периода зависит от баллистических характеристик артиллерийской системы и для различных систем изменяется от $5\cdot10^{-3}$ с до $5\cdot10^{-4}$ с.

За время движения в периоде последействия скорость центра масс снаряда, как правило, увеличивается от значения дульной скорости v_g, то есть скорости в момент вылета, до значения, соответствующего началу движения в воздушной среде. Это увеличение, как правило, составляет менее 2 % от величины v_g.

В задачах внешней баллистики предполагается, что движение снаряда происходит в воздушной среде. Для того чтобы не решать задачу о движении снаряда в периоде последействия и не совершать переход от движения в пороховых газах к движению в воздушной среде, вводится понятие начальной скорости v_o, которая определяется экспериментально, экстраполяцией зависимости скорости центра масс от пути к точке вылета. Следует помнить, что дульная скорость v_g и начальная скорость v_o соответствуют одной и той же точке траектории, но отличаются по абсолютной величине.

У реактивных снарядов, сходящих с направляющих, значение начальной скорости v_o совпадает с истинной скоростью центра масс в момент вылета.

Чтобы определить угол бросания θ_o, введём понятия, характеризующие условия перед выстрелом.

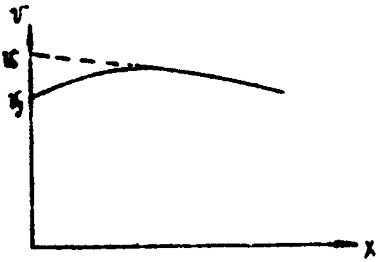

Рис. 2.6. Дульная и начальная скорости

Линией возвышения принято называть прямую, совпадающую с осью канала ствола перед выстрелом. Угол φ между линией возвышения и местной плоскостью горизонта называется углом возвышения.

Поскольку в процессе выстрела, то есть во время движения снаряда по каналу ствола, изменяется положение в пространстве оси канала ствола и вектор скорости центра масс снаряда в момент вылета не совпадает с линией возвышения, то вводятся понятия,' характеризующие условия вылета снаряда.

Линией бросания называется прямая, совпадающая с вектором начальной скорости V_0, а вертикальная плоскость, проходящая через линию бросания, называется плоскостью бросания. Угол между линией бросания и плоскостью горизонта принято называть углом бросания, а угол между линией возвышения и линией бросания - углом вылета γ (рис. 2.7).

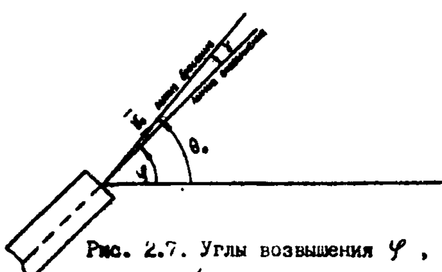

Рис. 2.7. Углы возвышения φ, бросания θ_0 и вылета γ

Угол вылета γ, как и угол бросания θ_0, определяется экспериментально, и они оба служат для задания начальных условий при решении задач о движении снаряда, как и v_0.

2.1.4. Связанная система координат $Oxyz$

Как указывалось выше, положение артиллерийского или реактивного снаряда в экваториальной геоцентрической или нормальной земной системах координат определяется направляющими косинусами осей жестко связанной с ними системы координат.
Вместо направляющих косинусов, как правило, используется комбинация из трех углов, которыми могут быть углы Эйлера.

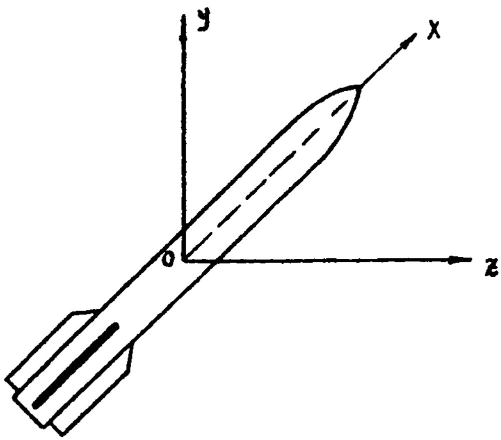

Рис. 2.8. Связанная система координат

Связанная система координат в основном используется для определения ориентации тел, имеющих одну или несколько плоскостей симметрии. В частности, у самолётов и крылатых ракет эта единственная плоскость проходит через продольную ось, в управляемых баллистических ракетах и у мин таких плоскостей может быть несколько.

Для таких тел связанная система координат (рис.2.8) строится следующим образом.

Начало координат-точка O- помещается в центре масс тела, основная плоскость Oxy совмещается с его плоскостью симметрии, основная ось Ox направляется вдоль продольной оси в сторону носовой части. Ось Oy, называемая нормальной, располагается в основной плоскости перпендикулярно продольной оси Ox, а поперечная ось Oz направляется вправо от направления оси Ox перпендикулярно основной плоскости.

Если центр масс располагается вне плоскости симметрии, то оси Ox и Oy располагаются в плоскости, параллельной плоскости симметрии и проходящей через центр масс.

Положение связанной системы координат $Oxyz$ относительно нормальной $O_0x_gy_gz_g$ определяется углами рыскания ψ, тангажа ϑ и крена γ (рис. 2.9).

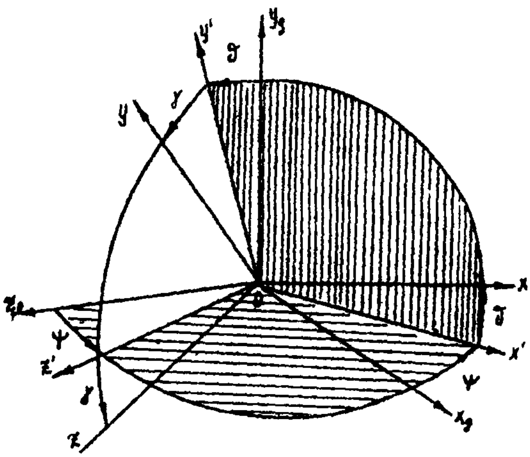

Рис. 2.9. Связанная и нормальная системы координат

Угол рыскания ψ – это угол в плоскости горизонта между осью O_0x_g и проекцией продольной оси Ox на плоскость горизонта $O_0x_gy_g$. Угол тангажа ϑ – это угол между продольной осью Ox и плоскостью горизонта. При исследовании движения тел на большие дальности угол ϑ рассматривается как функция пути, то есть определяется как угол между продольной осью и плоскостью местного горизонта.

Угол крена γ – это угол между нормальной осью Oy и вертикальной плоскостью, проходящей через ось Ox.

Направляющие косинусы, определяющие положение осей связанной системы координат в нормальной земной системе, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Земная система	Связанная система Ox	Oy	Oz
O_0x_g	$\cos\psi\cos\vartheta$	$-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma+$ $+\sin\psi\sin\gamma$	$\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma+$ $+\sin\psi\cos\gamma$
O_0y_g	$\sin\vartheta$	$\cos\vartheta\cos\gamma$	$-\cos\vartheta\sin\gamma$
O_0z_g	$-\cos\vartheta\sin\psi$	$\cos\psi\sin\gamma+$ $+\sin\vartheta\sin\psi\cos\gamma$	$\cos\psi\cos\gamma-$ $-\sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma$

Угловая скорость связанной системы координат относительно земной

$$\bar\omega = \bar{\dot\psi} + \bar{\dot\vartheta} + \bar{\dot\gamma}.$$

Её проекции на оси связанной системы координат, как легко определить на рис. 2.9, равны

$$\omega_x = \dot\gamma + \dot\psi\sin\vartheta,$$
$$\omega_y = \dot\psi\cos\vartheta\cos\gamma + \dot\vartheta\sin\gamma,$$
$$\omega_z = \dot\vartheta\cos\gamma - \dot\psi\cos\vartheta\sin\gamma.$$

Если эти уравнения разрешить относительно $\dot\psi$, $\dot\vartheta$ и $\dot\gamma$, то легко получить, что

$$\dot\psi = \frac{1}{\cos\vartheta}\left(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma\right),$$

$$\dot\vartheta = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma,$$

$$\dot\gamma = \omega_x - \mathrm{tg}\,\vartheta\left(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma\right)$$

2.1.5. Скоростная система координат $Ox_a y_a z_a$

Основная плоскость этой системы $Ox_a z_a$ содержит вектор воздушной скорости центра масс снаряда и строится перпендикулярно оси симметрии, то есть плоскости Oxy. (При решении некоторых задач внешней баллистики,при построении скоростной системы координат используется вектор скорости центра масс относительно земной системы координат.) Основная ось Ox_a направляется по вектору воздушной скорости центра масс, ось Oy_a располагается в основной плоскости симметрии перпендикулярно Ox_a и ось Oz_a – в основной плоскости перпендикулярно плоскости $Ox_a y_a$ так, чтобы система была правой. Начало скоростной системы координат связывается с центром масс снаряда.

При решении задач внешней баллистики и аэродинамики обычно пользуются проекциями аэродинамической силы по осям этой системы координат. В соответствии с принятой терминологией оси скоростной системы координат носят названия: Ox_a – скоростная ось; вдоль неё, противоположно её направлению, действует составляющая аэродинамической силы, называемая силой лобового сопротивления;

Oy_a – ось подъёмной силы, называемая в соответствии с составляющей аэродинамической силы по этой оси;

Oz_a – боковая ось, по которой направляется составляющая аэродинамической силы, называемая боковой силой.

Положение снаряда, то есть связанной системы координат, относительно скоростной определяется, как это видно на рис. 2.10, углами:

- скольжения β, измеряемым между вектором воздушной скорости(осью Ox_a) и основной плоскостью Oxy связанной системы координат;

- атаки α, измеряемым между продольной осью Ox и проекцией вектора воздушной скорости $\vec{v}$ на плоскость Oxy.

Положение скоростной системы координат $Ox_a y_a z_a$ относительно нормальной земной $O_0 x_g y_g z_g$ определяется, как это видно на рис. 2.11, тремя углами:

- углом пути Ψ между осью Ox_g и проекцией вектора воздушной скорости (оси Ox_a) на плоскость горизонта;

- углом наклона траектории θ, образуемым вектором воздушной скорости с плоскостью горизонта;

- скоростным углом крена γ_a между осью Oz_a и плоскостью горизонта.

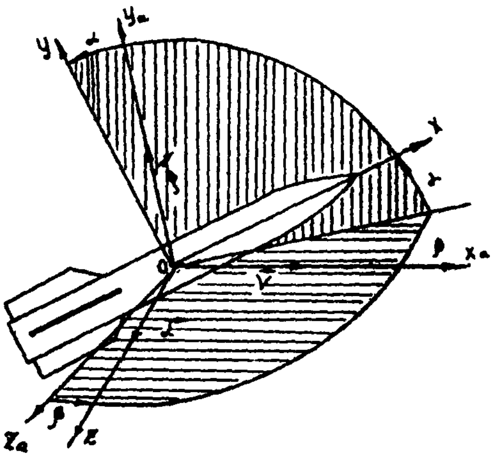

Рис.2.10. Положение снаряда в скоростной системе координат

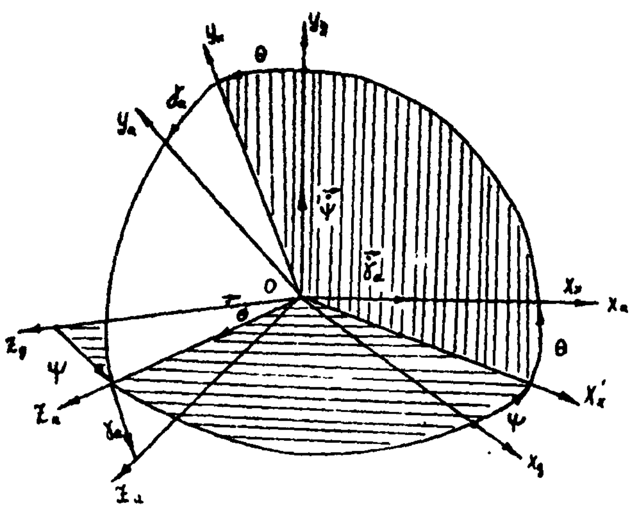

Рис.2.11. Земная, траекторная и скоростная системы координат

На этом же рисунке изображена траекторная система координат в которой ориентация скоростной системы координат определяется одним углом – скоростным углом крена γ_a, что объясняется тем, что оси $Ox_к$ и Ox_a совпадают.

Направляющие косинусы скоростной системы координат относительно траекторной и связанной систем приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Скоростная система	Траекторная система			Связанная система		
	$Ox_к$	$Oy_к$	$Oz_к$	Ox	Oy	Oz
Ox_a	1	0	0	$\cos\alpha\cos\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
Oy_a	0	$\cos\gamma_a$	$\sin\gamma_a$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
Oz_a	0	$-\sin\gamma_a$	$\cos\gamma_a$	$-\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\beta$

2.1.6. Полускоростная система координат $Ox'_a y'_a z'_a$

Эта система, как и нижеописываемые системы координат, используется для описания движения осесимметричных неуправляемых снарядов, не имеющих четко выраженных плоскостей симметрии, относительно которых можно осуществлять управление. Поскольку, как правило, такие снаряды стабилизируются при помощи гироскопического эффекта, то использовать для определения их положения в земной системе координат угол поворота относительно оси симметрии неудобно. Чтобы устранить эту особенность и использовать условие осевой механической и геометрической симметрии снаряда, вводятся системы полускоростная и полусвязанная, а также система координат, связанная с пространственным углом атаки.

Полускоростная система координат обычно используется при решении задач внешней баллистики для тел, у которых продольная ось совпадает с осью геометрической и механической симметрии. За основную плоскость системы принимается плоскость $Ox'_a y'_a$, называемая плоскостью сопротивления, в которой расположены продольная ось и вектор скорости центра масс. Начало координат располагается в центре масс. Основная ось Ox'_a направляется по вектору скорости V. Ось Oy'_a располагается в основной плоскости перпендикулярно Ox'_a; ось Oz'_a ориентируется перпендикулярно плоскости сопротивления так, чтобы система была правой. Система не имеет жесткой связи со снарядом. Положение последнего в ней характеризуется углами Эйлера: нутации δ , прецессии ν и собственного вращения φ , образуемыми, как это видно на рис. 2.12, связанной системой координат.

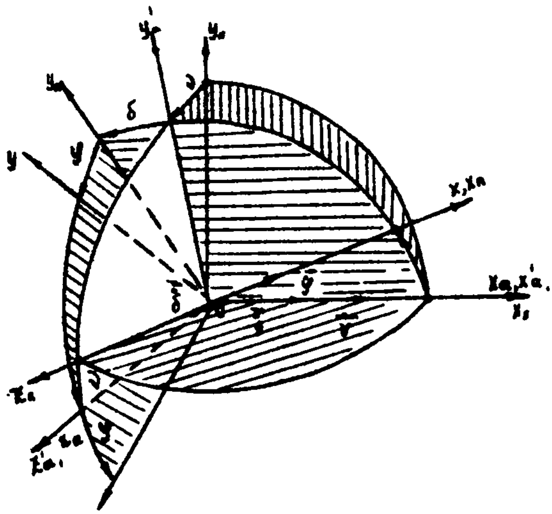

Рис. 2.12. Траекторная, подускоростная, связанная системы координат и система $Ox_n y_n z_n$

Угол нутации δ , называемый также пространственным углом атаки, отсчитывается между вектором скорости центра масс и продольной осью Ox .

Угол прецессии ν характеризует поворот плоскости сопро - тивления относительно вектора скорости, то есть прецессионное движение.

Угол собственного вращения φ определяет поворот снаряда относительно его продольной оси.

Поскольку основная ось Ox_a' подускоростной системы коор - динат совпадает с осями Ox_a и Ox_k соответственно скоростной и траекторной систем, то взаимное расположение этих систем оп -

ределяется достаточно просто. В частности, положение полускоростной системы относительно траекторной определяется углом прецессии ν, образуемым пересечением плоскостей $Ox_k y_k$ и $Ox_a' y_a'$. В процессе движения снаряда полускоростная система вращается с угловой скоростью $\dot{\nu}$ относительно вектора скорости и совершает колебательное движение относительно оси Oz_a с угловой скоростью $\dot{\delta}$.

Направляющие косинусы осей полускоростной системы относительно осей траекторной системы приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Полускоростная система	Траекторная система		
	Ox_k	Oy_k	Oz_k
Ox_a'	1	0	0
Oy_a'	0	$\cos\nu$	$\sin\nu$
Oz_a'	0	$-\sin\nu$	$\cos\nu$

2.1.7. Система координат $Ox_n y_n z_n$, связанная с углом нутации

Основной плоскостью этой системы координат, начало которой совпадает с центром масс, является плоскость $Ox_n y_n$, совпадающая с плоскостью сопротивления. Основная ось Ox_n направляется по продольной оси снаряда, то есть совпадает с осью Ox связанной системы координат. Ось Oy_n располагается в плоскости сопротивления перпендикулярно Ox_n, а ось Oz_n перпендикулярно плоскости сопротивления так, чтобы система была правой.

В отличие от связанной системы координат, жестко связанной со снарядом и совершающей вместе с ним вращение относительно продольной оси, оси системы $Ox_n y_n z_n$ не имеют жесткой связи со снарядом и не участвуют в его вращательном движении. Поэтому связанная система координат вращается относительно системы $Ox_n y_n z_n$ с угловой скоростью собственного вращения снаряда $\dot{\varphi}$ и их взаимное расположение определяется только углом φ, то есть углом собственного вращения.

Относительно полускоростной системы координат система

$Ox_n y_n z_n$ совершает колебательное движение с угловой скоростью $\dot{\delta}$ в плоскости сопротивления и их взаимное расположение определяется одним углом δ.

Взаимное расположение траекторной, полускоростной, связанной систем координат и системы $Ox_n y_n z_n$ приведено на рис. 2.12.

Направляющие косинусы системы координат $Ox_n y_n z_n$ относительно связанной и полускоростной систем координат приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Система	Полускоростная система			Связанная система		
$Ox_n y_n z_n$	Ox'_a	Oy'_a	Oz'_a	Ox	Oy	Oz
Ox_n	$\cos\delta$	$\sin\delta$	0	I	0	0
Oy_n	$-\sin\delta$	$\cos\delta$	0	0	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
Oz_n	0	0	I	0	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$

2.I.8. Полусвязанная система координат $Ox'y'z'$

Эта система координат, в основном используемая для решения задач о движении осесимметричных снарядов, стабилизируемых при помощи гироскопического эффекта, позволяет устранить процесс расчёта углов прецессии и собственного вращения, изменяющихся от какого-то начального значения практически до бесконечности.

В этой системе плоскость $Ox'z'$, проходящая через продольную ось снаряда и ось Oz_k траекторной системы координат, принимается за основную. В ней располагается основная ось Ox', совпадающая с продольной осью Ox. Ось Oz' в основной плоскости направляется перпендикулярно Ox', ось Oy' ориентируется перпендикулярно основной плоскости и располагается в вертикальной плоскости траекторной системы координат (рис.2.13).

Положение полусвязанной системы координат относительно траекторной определяется углами: δ_1 – между осью Ox_k и проекцией продольной оси снаряда Ox на плоскость $Ox_k y_k$;
δ_2 – между продольной осью снаряда и её проекцией на плоскость $Ox_k y_k$.

Оси Oy' и Oz' полусвязанной системы, как и оси Oy_n и Oz_n рассмотренной ранее системы, не участвуют во вращательным движении снаряда относительно продольной оси.

Связь между углами, характеризующими положение продольной оси снаряда в полусвязанной и в полускоростной системах координат, легко установить из соотношений для сферического треугольника ABC

$$\sin\delta_2 = \sin\delta \sin\nu ,$$

$$\sin\delta_1 = tg\,\delta_2\, ctg\,\nu = \frac{\sin\delta \cos\nu}{\sqrt{1-(\sin\delta \sin\nu)^2}} .$$

Если угол нутации δ мал, так что справедливо $\sin\delta \approx \delta$, то принимается

$$\delta_2 = \delta \sin\nu ,$$

$$\delta_1 = \delta \cos\nu .$$

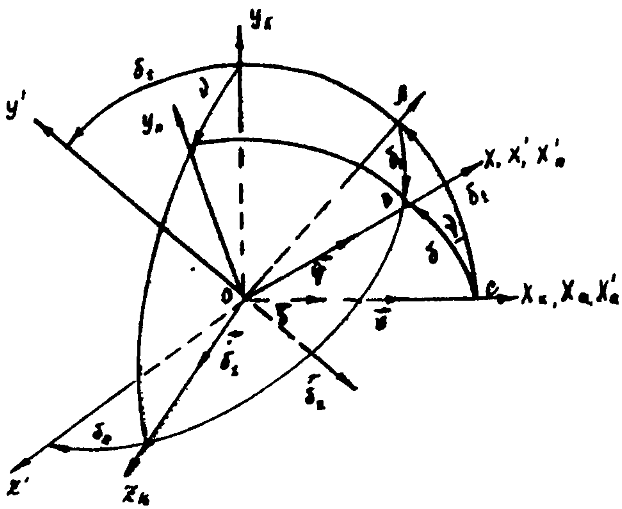

Рис.2.13. Полусвязанная и траекторная системы координат

2.1.9. Уравнения преобразования координат, составляющих скорости и ускорения

При решении задач внешней баллистики и проведении анализа движения снаряда (ракеты) возникает необходимость записи уравнений движения в различных системах координат, а затем перехода к одной наиболее удобной системе. В этом случае необходимо провести преобразование координат, составляющих скорости и ускорений.

Рассмотрим две системы прямоугольных координат: инерциальную систему S_1 с координатами x_1, y_1, z_1 и систему S_2 с координатами x_2, y_2, z_2, совершающую вращательное движение относительно S_1. Переход от системы координат S_1 к системе S_2 осуществляется при помощи ортогонального преобразования

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \qquad (2.1.1)$$

где $[M]$ – квадратная 3 х 3 матрица преобразования, элементы a_{ij} которой являются направляющими косинусами осей системы S_2 относительно осей системы S_1.

Если для осей x_1, y_1, z_1 системы координат S_1 ввести совокупность единичных векторов $\bar{I}_1, \bar{J}_1, \bar{K}_1$, а для осей x_2, y_2, z_2 системы координат S_2 – другую совокупность $\bar{I}_2, \bar{J}_2, \bar{K}_2$, то формулу преобразования от системы S_1 к системе S_2 можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{I}_2\bar{I}_1) & (\bar{I}_2\bar{J}_1) & (\bar{I}_2\bar{K}_1) \\ (\bar{J}_2\bar{I}_1) & (\bar{J}_2\bar{J}_1) & (\bar{J}_2\bar{K}_1) \\ (\bar{K}_2\bar{I}_1) & (\bar{K}_2\bar{J}_1) & (\bar{K}_2\bar{K}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \qquad (2.1.2)$$

где элементы матрицы – это скалярные произведения единичных векторов, равные косинусам углов между ними. Если система S_2 движется относительно S_1, то элементы матрицы будут функциями времени (или пути). Элементы матрицы преобразования являются постоянными величинами, если обе системы S_1 и S_2 инерциальны.

Преобразование составляющих скорости и ускорения осуществляется дифференцированием по времени соотношения (I). Для составляющих скорости преобразование имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} + \frac{d[M]}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} . \qquad (2.I.3)$$

Аналогично преобразование ускорений осуществляется по формуле

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} + 2\frac{d[M]}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} + [\ddot{\mu}] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} . \qquad (2.I.4)$$

При обратном преобразовании координат

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [M]^{-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} . \qquad (2.I.5)$$

Но при ортогональном преобразовании, осуществляемом посредством вращения одной системы координат вокруг начала другой, обратная матрица $[\mu]^{-1}$ эквивалентна транспонированной $[\mu]^T$. Тогда

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [\mu]^T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} . \qquad (2.I.6)$$

2.1.10. Географическая система координат

При исследовании движения тел на большие дальности необходимо учитывать кривизну земной поверхности. Это наиболее просто осуществить введением систем криволинейных координат, из которых наиболее распространёнными являются географические.

В настоящее время в геодезии используются две системы координат, связанные с вращающейся Землей, но в отличие от первой экваториальной геоцентрической системы не содержащие зависимости от времени как системы отсчёта. Это астрономическая система координат, построенная на основе астрономических наблюдений, и геодезическая, для создания которой использованы геодезические измерения. Обе эти системы являются криволинейными системами координат особого рода. Эта особенность связана с формой модели Земли, используемой для их построения. В частности, для модели Земли в виде шара с постоянной или радиально распределённой плотностью они обе вырождаются в обычные сферические координаты.

Для построения географической системы астрономических координат используем систему прямоугольных координат $Oxyz$, соответствующую первой экваториальной системе. За основную плоскость xOy этой системы, в рассматриваемом случае, принимается плоскость среднего земного экватора известной эпохи. Основная ось Ox направляется в точку C_0 и образуется пересечением среднего земного экватора с плоскостью среднего астрономического меридиана Гринвича, проходящего через среднюю ось Op вращения Земли принятой эпохи (рис. 2.11).

Положение любой точки M земной поверхности в этой системе можно определить пространственными координатами линии отвеса в этой точке. Угол, образуемый линией отвеса с плоскостью xOy, является астрономической широтой φ этой точки, а её астрономическая долгота λ - это двугранный угол между плоскостью среднего гринвичского меридиана и плоскостью меридиана этой точки ($p'OM$). Астрономическая широта изменяется от -90° до $+90^\circ$, отсчитывается от плоскости экватора и считается положительной в северном полушарии. Астрономическая долгота отсчитывается от гринвичского меридиана, считается положительной к западу от него, отрицательной - к востоку, и изменяется соответственно от 0 до 180°.

Для полной характеристики астрономической системы в заданной точке необходимо определить в ней направление астрономического меридиана. Для этого определяется астрономический азимут на специально выбранную точку земной поверхности (точка K на рис. 2.14), то есть двугранный угол между плоскостью местного астрономического меридиана и плоскостью отвеса, проходящей через точку M и направление на точку K . Этот угол отсчитывается в геодезии по часовой стрелке от направления на север и изменяется от 0 до 360°.

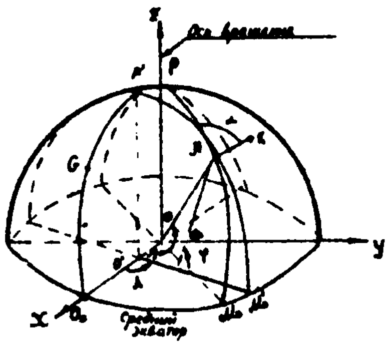

Рис.2.14. Астрономическая система координат

Как уже указывалось, за астрономическую широту φ любой точки земной поверхности принимается угол, образуемый линией отвеса в этой точке с плоскостью экватора. Принято считать, что дополнение φ до прямого угла соответствует углу между линией отвеса и осью вращения Земли. Однако в силу отличия поверхности Земли от поверхности вращения линия отвеса не пересекает ось вращения Земли и тем более не проходит через центр масс Земли. Поэтому астрономические координаты нельзя выразить через угловые величины, измеренные на поверхности Земли и отнесённые к экватору и земному полюсу. Плоскости астрономических меридианов по той же причине также не проходят через ось вращения Земли, а лишь парал-

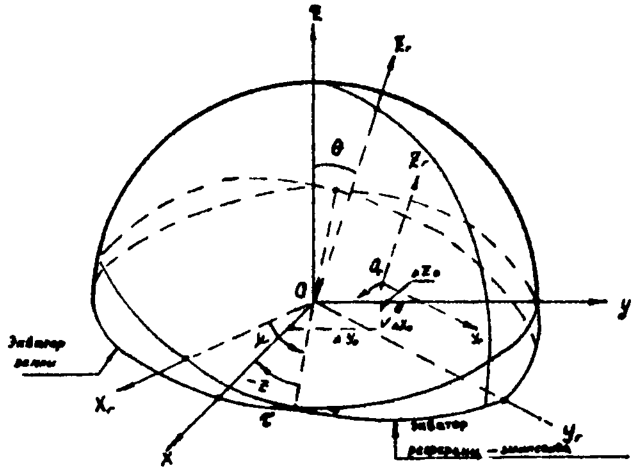

Рис.2.15. Астрономическая $Oxyz$ и геодезическая $O_r x_r y_r z_r$ системы координат

дельны ей. Поэтому астрономическая система координат не является геоцентрической.

Очевидно, астрономические координаты можно преобразовать в геоцентрические, если имеются данные о форме поверхности Земли. Для этого используются различные модели фигуры Земли. Однако применение любой модели связано с появлением ошибок моделирования и преобразования астрономических координат в геоцентрические и, как следствие, ошибок в определении пространственных прямоугольных координат в системе $Oxyz$.

Из-за движения астрономических полюсов, то есть точек пересечения земной поверхности с осью вращения, Земля и связанная с ней астрономическая система координат непрерывно колеблются относительно некоторого положения. Поэтому астрономические широта, долгота и азимут в данной точке земной поверхности, определяемые путём непосредственных наблюдений, относятся к моменту проведения эксперимента и должны приводиться к той эпохе (тому моменту времени), для которой создана связанная с Землей неподвижная система астрономических координат. Если наблюдаемые астрономические координаты заданной точки и азимут обозначить соответственно $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\alpha}$, а координаты мгновенного полюса в момент наблюдений - x_p, y_p - в прямоугольной системе координат с началом в точке среднего полюса и осями, направленными на юг и на запад, то астрономические координаты в географической астрономической системе координат могут быть вычислены по формулам

$$\varphi = \tilde{\varphi} - (x_p \cos\lambda + y_p \sin\lambda),$$

$$\lambda = \tilde{\lambda} - (x_p \sin\lambda - y_p \cos\lambda)\, \operatorname{tg}\varphi \cdot$$

$$\alpha = \tilde{\alpha} - (x_p \sin\lambda - y_p \cos\lambda) \sec\varphi.$$

При построении географической системы геодезических координат фигура Земли моделируется эллипсоидом вращения, называемым референц-эллипсоидом, размеры и положение которого относительно Земли определяются так, чтобы отклонение от фигуры геоида были минимальными, а центр и малая ось референц-эллипсоида совпадали с центром масс и осью вращения Земли.

В соответствии с постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. в нашей стране используется референц-эллипсоид, называемый эллипсоидом Красовского с параметрами:

- большой полуосью (средним радиусом экватора) $a = 6378245$ м;
- малой полуосью $b = 6356863$ м;
- сжатием $f = \frac{a-b}{a} = 1/298{,}3 = 0{,}003352$.

Система геодезических координат задаётся также в виде пространственных прямоугольных координат x_r, y_r, z_r, начало которой O_r совпадает с центром референц-эллипсоида, а основной плоскостью $x_r O_r y_r$ служит плоскость его экватора. Основная ось $O_r x_r$ - это линия пересечения плоскости экватора референц-эллипсоида и выбранного начального геодезического меридиана, ось $O_r y_r$ располагается в плоскости экватора перпендикулярно основной оси, а ось $O_r z_r$ направляется по малой оси референц-эллипсоида на север (рис. 2.15).

Положение начального геодезического меридиана относительно начального астрономического меридиана определяется условиями ориентирования референц-эллипсоида.

Если обозначить Δx_o, Δy_o, Δz_o - координаты центра O_r

референц-эллипсоида в астрономической системе, а $\Delta x_г$, $\Delta y_г$, $\Delta z_г$ – координаты центра масс Земли O – в геодезической системе, то для перехода от геодезической системы прямоугольных координат к астрономической, то есть к геоцентрической, можно использовать соотношения

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_г \\ \Delta y_г \\ \Delta z_г \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

где

$$a_{11} = \cos\psi \cos\tau - \sin\psi \sin\tau \cos\theta;$$

$$a_{12} = \sin\psi \sin\tau - \cos\psi \sin\tau \cos\theta;$$

$$a_{13} = \sin\tau \sin\theta; \quad a_{21} = -\cos\psi \sin\tau - \sin\psi \cos\tau \cos\theta;$$

$$a_{22} = -\sin\psi \sin\tau + \cos\psi \cos\tau \cos\theta,$$

$$a_{23} = \cos\tau \sin\theta, \qquad a_{31} = \sin\psi \sin\theta,$$

$$a_{32} = -\cos\psi \sin\theta; \qquad a_{33} = \cos\theta;$$

ψ, τ и θ – соответственно углы прецессии, собственного вращения и нутации, характеризующие взаимное расположение осей геодезической и астрономической систем координат.

Очевидно, что Эйлеровы углы ψ, τ и θ и координаты центров Δx_0, Δy_0, Δz_0 или $\Delta x_г$, $\Delta y_г$, $\Delta z_г$ определяют положение референц-эллипсоида относительно Земли. Из формул видно, что оси рассматриваемых систем координат будут параллельны, если все эйлеровы углы будут равны нулю.

Положение любой материальной точки, в том числе и находящейся на поверхности Земли, в географической системе геодезических координат определяется геодезическими широтой, долготой и высотой. Геодезическая широта $\varphi_г$ точки M – это острый угол, образованный нормалью к поверхности референц-эллипсоида в этой точке с его экваториальной плоскостью $x_г O_г y_г$.

Геодезическая долгота $\lambda_г$ этой же точки измеряется как двугранный угол между плоскостями местного геодезического меридиана $PO_гM$ и начального геодезического меридиана $PO_гx_г$.

Геодезическая высота H точки M равна расстоянию этой точки от поверхности референц-эллипсоида.

Кроме этих параметров для определения положения точки M в ней необходимо указать направление местного геодезического меридиана, то есть геодезический азимут α_r направления на какую-либо фиксированную точку.

Следует отметить, что φ_r, λ_r, H и α_r из непосредственных наблюдений определены быть не могут и вычисляются посредством приведения данных геодезических измерений на поверхности Земли к поверхности принятого референц-эллипсоида.

При ориентировании референц-эллипсоида относительно Земли устанавливают соотношения между геодезическими параметрами φ_r, λ_r, H, α_r и астрономическими координатами φ, λ, h, и азимутом α в какой-либо точке земной поверхности. Эту точку принимают за исходный пункт астрономо-геодезической сети, а геодезические координаты и азимут в ней считают исходными геодезическими датами.

В простейшем случае их полагают равными. В общем случае, в исходном пункте определяют не только астрономические координаты и азимут, но и составляющие уклонения отвеса и аномалию нивелирной высоты.

Помимо астрономической и геодезической широт при определении географических координат используется понятие геоцентрической широты $\varphi_ц$, которая определяется как острый угол в плоскости местного меридиана между прямой, соединяющей геометрический центр Земли с точкой M на поверхности референц-эллипсоида, и плоскостью экватора. Для установления зависимости между геодезической и геоцентрической широтами необходимо задание фигуры референц-эллипсоида. Если в качестве последнего используется эллипсоид вращения, то

$$\varphi_ц = arctg\left[(1-f)^2 \, tg\,\varphi_r\right].$$

§ 2.2. Измерение времени

Все процессы в природе, в том числе связанные с практической деятельностью людей, протекают во времени. Процессы перемещения тел в пространстве со скоростями, значительно меньшими скорости света, описываются дифференциальными уравнениями, в которых время входит независимой переменной и может рассматриваться как четвёртая координата. При наблюдении за движением и измерением параметров движения ракет, искусственных и естественных небесных тел используются наземные станции, положение которых определяется в той или иной системе координат жестко связанной с поверхностью Земли. Направления осей такой системы координат относительно неподвижных звезд, как и взаимные положения станций наблюдения и наблюдаемых тел, непрерывно изменяются из-за вращения Земли относительно её оси. Чтобы учитывать эти явления, необходимо связать углы поворота Земли с течением времени, выбрав для этого систему измерения времени, связанную с вращением Земли достаточно простой зависимостью. В этом случае углы поворота Земли относительно её оси можно определить через видимые перемещения точки весеннего равноденствия (средней или истинной) по дуге экватора или точки пересечения экватора с начальным меридианом, используя наблюдения видимых движений звезд на небесной сфере.

Современные системы измерения и счисления времени построены на использовании периодических явлений, в которых длительность периода сохраняется с высокой точностью в течение необходимого заданного промежутка времени. В астрономии и небесной механике в качестве такого явления используются вращение Земли относительно её оси, орбитальные движения Земли и других планет относительно Солнца и Луны относительно Земли.

На этой основе построены три естественных системы измерения времени: всемирного или универсального, звездного и эфемеридного.

Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями центра видимого диска Солнца на данном меридиане называется <u>истинными</u> сутками. Так как солнце движется в плоскости эклиптики и скорость его в течение годового обращения изменяется, то промежутки истинного солнечного времени не пропорциональны углам поворота Земли, то есть продолжительность истинных суток в течение года изменяется.

Поэтому в повседневной жизни в качестве единицы времени используются средние солнечные сутки, которые являются также основной единицей всемирного (универсального) времени. За средние солнечные сутки принимается промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями среднего экваториального солнца на данном меридиане. Среднее экваториальное солнце - это фиктивная материальная точка, совершающая движение с постоянной угловой скоростью в плоскости екватора и проходящая точку весеннего равноденствия одновременно с истинным Солнцем. Прямое восхождение среднего екваториального солнца в каждый данный момент равно средней долготе Солнца и вычисляется по формуле

$$\alpha_{\odot} = 10^h 38^m 45{,}836^s + 8640184{,}542^s T + 0{,}0929^s T, \quad (2.2.1)$$

в которой первый член правой части равен прямому восхождению среднего экваториального солнца, соответствующему фундаментальной эпохе 1900, январь 0, 12^h, а T – промежуток среднего солнечного времени от фундаментальной эпохи до вычисляемого момента, выраженный в тропических столетиях.

Тропический год – это промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через среднюю точку весеннего равноденствия. Его продолжительность определяется формулой

$$\text{Тропический год} = 365{,}24219879^d - 0{,}00000614^d\, T$$

и медленно изменяется со временем.

Календарный год достаточно близок к тропическому, а чтобы отклонения между ними не накапливались достаточно быстро, ещё в юлианском календаре были введены так называемые високосные года: три календарных года содержали по 365 суток, а четвёртый – високосный – 366, причём последнему соответствовал номер нашего летосчисления, делящийся на четыре. Вследствие этого средняя продолжительность юлианского календарного года была 365,25 суток, что больше тропического года на 0,0078 суток (11 минут 14 секунд). Поскольку это отличие приводит к накоплению ошибки (последняя к 5 октября 1582 года составила десять суток) и, следовательно, к смещению дней равноденствий и религиозных праздников, то в 1582 году был введён папой Римским Григорием XIII так называемый григорианский календарь или "Новый стиль". Новым календарем "упраздняялись" 10 дней, то есть за 4 октября 1582 г. сразу последовало 15 октября и было условлено каждые 400 лет выбрасывать из счёта 3 суток, считая не високосными годы столетий (1700, 1800, 1900) за исключением тех, в номере которых число сотен делится на четыре (1600, 2000, 2400). В этом календаре средняя продолжительность года равна 365,2425 суткам и превышает тропический год на 0,0003 суток.

С понятием тропического года связано определение единицы времени – секунды, введённое в 1954 году Генеральной конферен -

цией мер и весов: "Секунда есть 1:31556925,9747 доля тропического года для момента 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени".

Как истинное, так и среднее солнечное время на данном меридиане равно сумме 12^h и часового угла (угла с астрономической долготой, отсчитываемой от гринвичского меридиана соответственно истинного Солнца или среднего экваториального солнца). Разность между истинным и средним солнечным временем называется уравнением времени и изменяется в течение года так, как показано на рис.2.Iб.

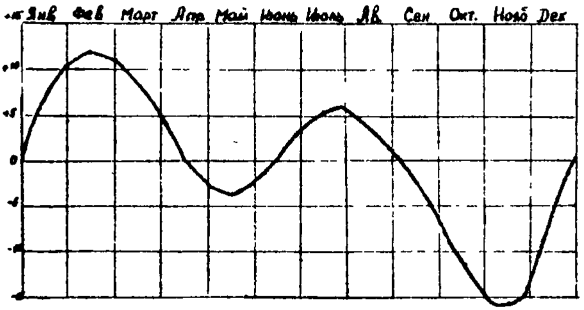

Рис. 2.Iб. График уравнения времени

Среднее солнечное время на данном меридиане называется местным средним солнечным временем, а это время на гринвичском меридиане, долгота которого равна нулю, принято называть всемирным временем и обозначать ТИ или М. За начало средних солнечных суток принимается полночь.

Для удобства осуществления хозяйственной практической деятельности в повседневной жизни введено поясное время, для чего поверхность Земли разбита на 24 часовых пояса, границы между которыми проходят по меридианам, удалённым от нулевого к западу и востоку на 7°30', 22°30' и т.д. Внутри каждого часового пояса время считается одинаковым и равным среднему солнечному времени на среднем меридиане пояса. Следует отметить, что границы часовых поясов, как правило, смещаются так, что совпадают с государственными или административными границами.

Человек, находящийся в часовом поясе с номером X к западу от гринвичского меридиана, определит всемирное время ТИ в данный момент времени, если сложит время y, обозначенное на его часах, с номером часового пояса X, выраженным в часах, поскольку $1^h = 15^\circ$.

Например, если в г.Томске, находящемся на 85° восточной долготы, то есть в 18-ом часовом поясе к западу от гринвичского меридиана поясное время $20^h\,30^m$, то всемирное время будет

$$M = 18^h + 20^h\,30^m = 14^h\,30^m.$$

Основными единицами звездного времени являются звездные сутки и тропический год. Промежуток времени между двумя последовательными кульминациями точки весеннего равноденствия на данном меридиане называется звездными сутками. Местное звездное время, то есть звездное время на меридиане наблюдателя, считается истинным звездным временем, если оно измеряется часовым углом истинной точки весеннего равноденствия, или средним звездным временем, если измеряется часовым углом средней точки весеннего равноденствия. Соответствующее местное звездное время на гринвичском меридиане принято называть гринвичским звездным временем. Истинное звездное время неравномерно и вследствие этого не используется для измерения промежутков времени.

Если наблюдения проводятся в геоцентрической экваториальной системе координат, то, как показано на рис. 2.17, звездное время гринвичского меридиана определяется углом θ_g, а меридиана наблюдателя – углом θ. Очевидно, если известны θ_g и восточная долгота меридиана наблюдателя $\lambda_в$, то местное звездное время

$$\theta = \theta_g + \lambda_в \;; \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 24^h.$$

Это значение местного звездного времени может быть вычислено, если известна величина $\lambda_в$. Гринвичское звездное время θ_{g_0} для 0^h всемирного времени вычисляется по формуле

$$\theta_{g_0} = 99^\circ\!,6909833 + 36000^\circ\!,7689\,T_u + 0^\circ\!,00038708$$

и выражается в градусах.

Для любого другого момента времени t это время может быть вычислено по формуле

$$\theta_g = \theta_{g_0} + \frac{d\theta}{dt}(t - t_0),$$

где $t_0 = 0^h$ ТИ, а

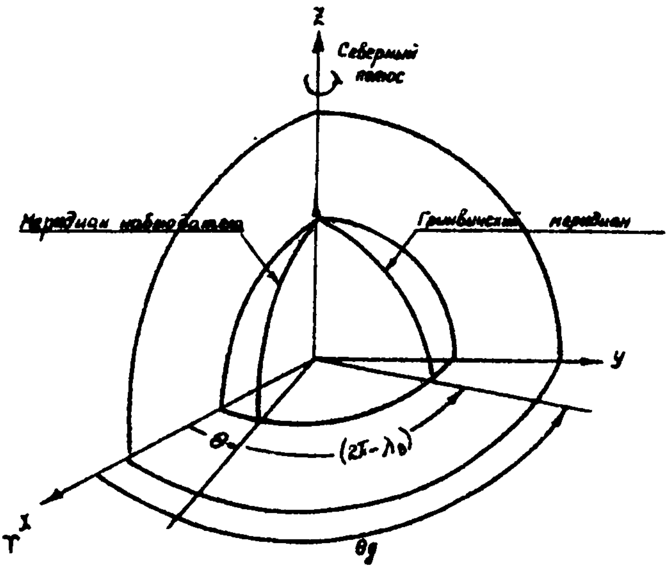

Рис. 2.17. Вращающаяся Земля в экваториальной геоцентрической системе координат

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(1 + \frac{1}{365{,}24219879}\right) \text{об/год} = 2{,}5068447 \cdot 10^{-1}\ \text{град/мин} -$$

угловая скорость вращения Земли относительно её оси.

Всемирное время M и гринвичское звездное S время связаны соотношением

$$S = 12^h + M + \alpha_0 + N_\alpha ,$$

в котором α_0 - прямое восхождение среднего экваториального солнца, вычисляемое по (2.2.1), а N_α - нутация по прямому восхождению.

Промежутки времени, определяющие длительность какого-либо процесса, могут быть выражены через местное среднее солнечное время m или через местное звездное время S. При этом между m и S существуют соотношения

$$m = (1-\nu)s\ , \qquad s = (1+\mu)m\ ,$$

где

$$\mu = \frac{1}{365{,}24219789}\ ; \qquad \nu = \frac{1}{366{,}24219879}\ .$$

Значения μm и νs приводятся в "Астрономическом ежегоднике СССР".

Система всемирного времени, используемая для наблюдения за космическими объектами, построена на основании астрономических наблюдений за вращением Земли относительно её оси с учетом поправок $\Delta\lambda$ на движение мгновенного полюса относительно условного международного начала и ΔT_s на сезонные изменения скорости вращения Земли. Но эта система является лишь приближением к равномерной шкале времени. Чтобы улучшить равномерность шкалы времени, введена эфемеридная система времени ТЕ, основанная на гравитационной теории движения небесных тел солнечной системы. Она связана с ТИ соотношением

$$TE = TИ + \Delta T,$$

где ΔT – поправка на эфемеридное время, определяемая из наблюдений за движением Луны.

Наиболее равномерной является шкала атомного времени. В ней за 1 атомную секунду принят интервал времени, равный 9192631770 периодам излучения, соответствующего резонансной частоте перехода между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия–133. Эта единица времени совпадает с эфемеридной секундой с погрешностью до $2 \cdot 10^{-9}$.

Для удобства исчисления времени при наблюдениях за космическими объектами используется юлианская система времени, представляющая собой систему сплошного счёта суток, начиная со среднего гринвичского полдня 1 января 4713 года до нашей эры. Юлианские сутки исчисляются от полудня до полудня, что исключает наличие двух дат для наблюдений, проведённых в течение одной ночи. Таблицы юлианских суток печатаются в "Астрономическом ежегоднике СССР" и имеют вид таблицы, приведённой ниже.

Для вычисления значения юлианской даты, соответствующей заданному значению всемирного времени, необходимо к юлианской дате, взятой из таблиц, прибавить 12 часов и часть суток всемирного времени к вычисляемому моменту.

Таблица 2.6

Юлианские дни

Год	Январь 0	Февраль 0	Март 0	Апрель 0	Май 0	Июнь 0	Июль 0	Август 0	Сентябрь 0	Октябрь 0	Ноябрь 0	Декабрь 0
1980	244 4239	4270	4299	4330	4360	4391	4421	4452	4483	4513	4544	4574
1981	4605	4636	4664	4695	4725	4756	4786	4817	4848	4878	4909	4939
1982	4970	5001	5029	5060	5090	5121	5151	5182	5213	5243	5274	5304
1983	5335	5366	5394	5425	5455	5486	5516	5547	5578	5608	5639	5669
1984	5700	5731	5760	5791	5821	5852	5882	5913	5944	5974	6005	6035
1985	244 6066	6097	6125	6156	6186	6217	6247	6278	6309	6339	6370	6400
1986	6431	6462	6490	6521	6551	6582	6612	6643	6674	6704	6735	6765
1987	6796	6827	6855	6886	6916	6947	6977	7008	7039	7069	7100	7130
1988	7161	7992	7221	7252	7282	7313	7343	7374	7405	7435	7466	7496
1989	7527	7558	7586	7617	7647	7678	7708	7739	7770	7800	7831	7861
1990	244 7892	7923	7951	7982	8012	8043	8073	8104	8135	8165	8196	8226
1991	8257	8288	8316	8347	8377	8408	8438	8469	8500	8530	8561	8591
1992	8622	8653	8682	8713	8743	8774	8804	8835	8866	8896	8927	8957
1993	8988	9019	9047	9078	9108	9139	9169	9200	9231	9261	9292	9322
1994	9353	9384	9412	9443	9473	9504	9534	9565	9596	9626	9657	9687
1995	244 9718	9749	9777	9808	9838	9869	9899	9930	9961	9991	245 0022	245 0052
1996	245 0083	0114	0143	0174	0204	0235	0265	0296	0327	0357	0388	0418
1997	0449	0480	0508	0539	0569	0600	0630	0661	0692	0722	0753	0783
1998	0814	0845	0873	0904	0934	0965	0995	1026	1057	1087	1118	1148
1999	1179	1210	1238	1269	1299	1330	1360	1391	1422	1452	1483	1513
2000	245 1544	1575	1604	1635	1665	1696	1726	1757	1788	1818	1849	1879

Пример. Сколько юлианских дней пройдёт к моменту всемирного времени 1990, январь, I, $6^h\ 48^m$ утра ?

Решение. Так как юлианские дни измеряются от полудня до полудня, то полночь, то есть начало I января, наступает через 12 часов после 3I декабря. Из таблицы имеем для 3I декабря (январь, 0)

$$JD\ (\text{полдень}) = 2447892.$$

К этому числу добавляется 12 часов или 0,5 суток, то есть

$$JD\ (\text{полночь}) = 2447892{,}5.$$

И необходимо прибавить $6^h\ 48^m$ в долях суток

$$\Delta = \frac{6}{24} + \frac{48}{60 \cdot 24} = 0{,}283333.$$

Тогда ответ к задаче будет

$$JD = 2447892{,}783333 = 1990,\ \text{январь},\ 1^d 6^h 48^m\ \text{TИ}.$$

§ 2.3. Уравнения динамики точки переменной массы

Летательный аппарат с работающим реактивным двигателем представляет собой систему переменного состава. Вывод уравнений движения такой системы будем основывать на общих теоремах динамики системы материальных точек /4/.

К числу общих теорем динамики относятся: теорема об изменении количества движения с ее модификацией - теоремой импульсов и теоремой о движении центра масс; теорема об изменении момента количества движения, сводящаяся в частном случае центральных сил к теореме площадей, а также теорема об изменении кинетической энергии (теорема живых сил) при консервативности сил, выражающая закон сохранения механической энергии.

В основе вывода этих общих теорем - количества движения и момента количества движения - лежит идея выделения из всех сил, приложенных к системе, внутренних сил взаимодействия между материальными точками системы. Внутренние силы в своей совокупности не могут влиять на такие суммарные меры движения, как главный вектор и главный момент количеств движения точек системы. Только внешние силы, действующие на точки системы со стороны внешних тел или точек, не принадлежащих данной системе, могут изменять главный вектор и главный момент количеств движения системы. В использовании этого свойства внутренних сил, представляющих собой одно из важнейших следствий третьего закона Ньютона, заключается главное значение двух первых общих теорем динамики.

2.3.1. Теорема об изменении количества движения системы материальных точек

Положение материальных точек m_i $(i=\overline{1,n})$ относительно начала координат инерциальной системы будем определять радиусами-векторами $\overline{r}_i$. Скорости и ускорения точек системы обозначим соответственно через $\overline{v}_i=\dot{\overline{r}}_i$ и $\overline{w}_i=\dot{\overline{v}}_i=\ddot{\overline{r}}_i$.

Тела (или точки), не включённые в данную систему, назовём внешними по отношению к рассматриваемой системе. Такое разделение точек на входящие в данную систему и не входящие в неё зависит от способа рассмотрения. Мы можем (и в дальнейшем будем так неоднократно поступать) то включать некоторые точки и тела в данную систему, то исключать их из этой системы.

Таким образом, и силы, приложенные к данной системе, мы разбиваем на две категории: I) внутренние силы - силы взаимодействия материальных точек, входящих в данную систему, и 2) внешние силы - силы взаимодействия точек системы с точками или телами внешними по отношению к системе.

Обозначим равнодействующую всех внешних сил, приложенных к точке m_i, через $\bar{f}_i$, а всех внутренних - через $\bar{f}_i'$. Тогда дифференциальные уравнения движения системы материальных точек могут быть представлены совокупностью дифференциальных уравнений динамики отдельных точек системы

$$m_i \bar{w}_i = \bar{f}_i + \bar{f}_i', \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2.3.1}$$

Вывод теоремы об изменении количества движения системы (или кратко- теоремы количества движения) основан на идее исключения внутренних сил из дифференциальных уравнений движения системы материальных точек (I). На основании третьего закона Ньютона о равенстве сил действия и противодействия можно утверждать, что главный вектор внутренних сил $\bar{F}_{внутр.}$ равен нулю

$$\bar{F}_{внутр} = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i' = 0. \tag{2.3.2}$$

Действительно, мы должны сложить все силы взаимодействия между точками рассматриваемой системы. Но каждому действию, приложенному к одной точке от другой, соответствует равное по величине и противоположное по направлению противодействие, приложенное ко второй точке от первой. При сложении этих действий и противодействий в один главный вектор они все попарно уничтожаются, что приводит к равенству (2).

Теперь просуммируем уравнения (I) по всем точкам системы

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i' . \tag{2.3.3}$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства в силу соотношения (2) обращается в нуль. Векторная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i = \bar{F} \tag{2.3.4}$$

представляет собой главный вектор внешних сил. Следует отметить, что эту сумму внешних сил, приложенных к различным точкам системы, выражаемую одним вектором - главным вектором внешних сил - нельзя рассматривать как равнодействующую внешних сил. В случае системы отдельных материальных точек, движущихся одна относительно другой, само понятие равнодействующей лишено смысла.

Уравнение (3) на основании (2) и (4) примет вид

$$\sum_i m_i \bar{w}_i = \bar{F}. \tag{2.3.5}$$

Или, вспоминая обозначения $\bar{w}_i = d\bar{v}_i/dt$, запишем

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i \bar{v}_i = \bar{F}. \tag{2.3.6}$$

Вектор $\bar{q}$, равный по величине произведению массы m материальной точки на вектор скорости $\bar{v}$ и имеющий направление скорости, называют количеством движения точки

$$\bar{q} = m\bar{v}. \tag{2.3.7}$$

Главный вектор $\bar{Q}$ количеств движения точек системы, равный

$$\bar{Q} = \sum_i \bar{q}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i, \tag{2.3.8}$$

называют количеством движения системы.

Из равенств (4), (6) и (8) следует, что

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F} = \sum_i \bar{f}_i \tag{2.3.9}$$

Это соотношение выражает теорему об изменении количества движения:

Векторная производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

Равенство нулю главного вектора внутренних сил приводит к заключению, что внутренние силы не могут влиять на изменение количества движения системы.

2.3.2. Теорема о движении центра масс системы материальных точек

Рассмотрим ту же самую систему из n материальных точек с радиусами-векторами $\bar{r}_i$ и массами m_i. Сумму $M=\sum_i m_i$ назовём массой системы точек.

Введём понятие центра масс системы материальных точек. Это точка C с радиусом-вектором $\bar{r}_c$ таким, что

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \bar{r}_i. \tag{2.3.10}$$

Взяв производную по времени от обеих частей (10), получим

$$\frac{1}{M}\sum_i m_i\dot{\bar{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_i m_i\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_c = \bar{v}_c ,$$

$$\frac{1}{M}\bar{Q} = \bar{v}_c , \qquad \bar{Q} = M\bar{v}_c . \qquad (2.3.11)$$

Отсюда следует, что количество движения системы материальных точек равно произведению массы системы на скорость движения её центра масс или количеству движения центра масс, в котором сосредоточена вся масса системы.

Дифференцируя (11) ещё раз по времени и вспоминая теорему количества движения, получим

$$M\bar{w}_c = M\ddot{\bar{r}}_c = \bar{F} = \sum_i \bar{f}_i \qquad (2.3.12)$$

Это уравнение можно рассматривать как основное уравнение динамики точки - центра масс C системы - если в этой точке считать сосредоточенной массу M системы и к ней приложенной силу $\bar{F}$ - главный вектор внешних сил.

Отсюда вытекает <u>теорема о движении центра масс</u>:

Центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложен главный вектор внешних сил, действующих на систему.

2.3.3. Теорема об изменении момента количества движения системы материальных точек

Вспомним, что момент силы $\bar{f}$ относительно центра O определён как вектор (точнее, псевдовектор), по величине и направлению равный векторному произведению радиус-вектора $\bar{r}_o$ точки m приложения силы и вектора силы $\bar{f}$

$$\bar{M}_o(\bar{f}) = \bar{r}_o \times \bar{f} . \qquad (2.3.13)$$

Так же, как момент силы, может быть определён момент вектора количества движения $q = m\bar{v}$ материальной точки. Моментом количества движения будет вектор k, величина и направление которого определяются векторным произведением $\bar{r}$ и $\bar{q}$

$$\bar{k} = \bar{r}\times\bar{q} = \bar{r}\times m\bar{v} . \qquad (2.3.14)$$

Дифференцируя выражение (14) момента количества движения по времени, получаем

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{q} + \bar{r}\,\frac{d\bar{q}}{dt}\,.$$

но первое слагаемое в правой части равно нулю, так как сомножители параллельны

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{q} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0\,.$$

Далее на основании теоремы об изменении количества движения материальной точки $\dot{\bar{q}} = \bar{f}$, где $\bar{f}$ – равнодействующая сил, приложенных к точке. Итак,

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{r} \times \bar{f} = M_0(\bar{f})\,. \qquad (2.3.15)$$

Соотношение (15) представляет собой теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра O :

Векторная производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно центра равна моменту равнодействующей приложенных к точке сил относительно того же центра.

Обобщим эту теорему на случай системы материальных точек. Применяя аналогичное предыдущему разбиение приложенных к системе точек сил на внутренние и внешние, соотношения (15) запишем для одной точки системы в виде

$$\dot{\bar{k}}_i = \bar{M}_0(\bar{f}_i) + \bar{M}_0(\bar{f}_i')\,.$$

Просуммировав эти уравнения по всем точкам системы и учитывая, что векторная сумма моментов всех внутренних сил равна нулю, получим

$$\sum_i \frac{dk_i}{dt} = \sum_i \bar{M}_0(\bar{f}_i) \qquad (2.3.16)$$

Главным моментом количества движения системы относительно центра (или кинетическим моментом) называют векторную сумму моментов количества движения всех входящих в систему материальных точек относительно того же центра. То есть, полагая

$$\bar{K} = \sum_i \bar{k}_i = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i\,, \qquad (2.3.17)$$

получаем

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}^{(e)}, \qquad (2.3.18)$$

где
$$\bar{M}^{(o)} = \sum_i \bar{M}_o(\bar{f}_i) = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{f}_i \qquad (2.3.19)$$

обозначает главный момент внешних сил, приложенных к системе.

Формула (18) выражает теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек (или теорему моментов):

Векторная производная по времени от главного момента количества движения системы равна взятому относительно того же центра главному моменту внешних сил, приложенных к системе.

2. 3.4. Динамика точки переменной массы

Под словом "точка" в дальнейшем, как и выше, понимается тело, кинематическими элементами вращательного движения которого при рассмотрении данного вопроса можно пренебречь по сравнению с кинематическими элементами его поступательного движения. Точка переменной массы - это тело, некоторая часть массы которого в процессе движения отделяется от него или, наоборот, к массе которого присоединяются новые массы.

Следуя одному из основоположников динамики переменной массы И.В.Мещерскому, будем в дальнейшем предполагать, что "...к системе непрерывно присоединяются частицы бесконечно малых масс таким образом, что скорости точек системы изменяются непрерывно, тогда как скорости частиц в момент их присоединения к системе изменяются на конечные величины".

Рассмотрим в момент времени t две точки: одну массой $m(t)$, имеющую абсолютную скорость $\bar{v}$, другую массой $dm(t)$ с абсолютной скоростью $\bar{u}$; в дальнейшем принимается, что масса $m(t)$ представляет непрерывно дифференцируемую функцию времени. В момент времени $t+dt$ эти две точки образуют одну точку массой $m+dm$ (в случае присоединения массы $dm>0$, в случае отделения массы $dm<0$), скорость которой равна $\bar{v}+d\bar{v}$. Применим теорему количества движения к системе, состоящей из этих двух точек. В момент t количество движения равно $m\bar{v}+\bar{u}dm$, а в момент $t+dt$ $(m+dm)(\bar{v}+d\bar{v})$. Приращение количества движения за время dt будет (исключая величины второго порядка малости)

$$m d\bar{v} + dm(\bar{v}-\bar{u}),$$

и, следовательно, переходя к производной количества движения системы по времени и обозначая $\bar{F}$ равнодействующую внешних сил, приложенных к точке с конечной массой, получаем

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + (\bar{v} - \bar{u})\frac{dm}{dt} = \bar{F}. \tag{2.3.20}$$

Вектор $\bar{u} - \bar{v} = \bar{c}$ (2.3.21) представляет собой относительную скорость присоединяющейся массы.

Вектор

$$\bar{F}_p = \frac{dm}{dt}\bar{c} \tag{2.3.22}$$

назовём реактивной силой. Уравнение (20) может быть записано в виде

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{F}_p. \tag{2.3.23}$$

Это – основное уравнение динамики точки переменной массы. Оно выражает, что уравнение движения точки переменной массы приводится к виду уравнения движения точки постоянной массы, если к приложенным к точке силам присоединить реактивную силу.

Надо, конечно, иметь в виду, что масса m в (23) не является постоянной величиной, а зависит от времени как явно, так и неявно.

В качестве иллюстрации применения уравнения (23) рассмотрим поступательное движение ракеты, причём отвлечёмся от влияния сил тяжести и сопротивления воздуха. Обозначим через $m_к$ постоянную массу корпуса ракеты, через $m_т$ переменную массу её топлива и через $-\dot{m}_т$ массовый расход газов, проходящих через выходное сечение сопла. Будем предполагать, что скорость истечения газов постоянна и равна $\bar{c}$. Согласно (23) уравнение движения ракеты при таких предположениях будет

$$(m_к + m_т)\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{c}\frac{dm_т}{dt}. \tag{2.3.24}$$

Проектируя на ось Ox, совпадающую с направлением движения ракеты, и замечая, что $v_x = v$, $c_x = -c$, находим

$$(m_к + m_т)\frac{dv}{dt} = -c\frac{dm_т}{dt},$$

откуда, умножая на dt и интегрируя, получаем

$$v = c \ln \frac{m_K + m_T^0}{m_K + m_T}, \tag{2.3.25}$$

где положено, что при $t = 0$, $m_T = m_T^0$ и $v = 0$.

В конце горения $m_T = 0$. Обозначая скорость ракеты в этот момент через v_1, получим первую формулу из Циолковского

$$v_1 = c \ln \left(1 + \frac{m_T^0}{m_K}\right). \tag{2.3.26}$$

§ 2.4. Уравнения движения летательного аппарата как тела переменного состава.

В полёте масса летательного аппарата - ракеты - непрерывно уменьшается главным образом вследствие выработки топлива. Классические теоремы динамики систем материальных точек постоянного состава, рассмотренные выше, к системам переменного состава непосредственно неприменимы. Однако, основываясь на этих теоремах, можно вывести аналогичные теоремы и сформулировать принцип составления уравнений движения для систем переменного состава, в частности для реактивных летательных аппаратов.

2.4.1. Кинематические и динамические соотношения для системы переменного состава

Будем рассматривать замкнутую поверхность S_o (рис. 2.18), которая ограничивает объем V, заполненный разнообразными (твёрдыми, жидкими, газообразными) частицами. С течением времени одни частицы входят в объём V, а другие, наоборот, выходят. Совокупность материальных частиц, заключённых в объёме V, является системой переменного состава. Обозначим эту систему через Σ.

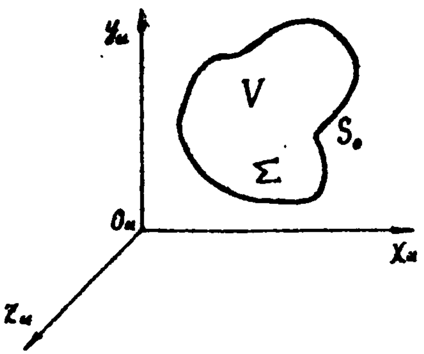

Рис. 2.18

Пусть поверхность S_o и материальные частицы перемещаются относительно некоторой инерциальной системы отсчёта $O_u x_u y_u z_u$. Поверхность S_o при этом может деформироваться. Количество движения и кинетический момент относительно точки O_u системы Σ обозначим $\bar{Q}$ и $\bar{K}$.

Наряду с системой Σ введём в рассмотрение систему постоянного состава Σ^*, состоящую только из тех материальных частиц, которые в некоторый фиксированный момент времени t заполняют объём V. Через $\bar{Q}^*$ и $\bar{K}^*$ обозначим количество движения и кинетический момент системы Σ^*.

Системы переменного Σ и постоянного Σ^* состава в момент времени t совпадают. Поэтому

$$\bar{Q}^*(t) = \bar{Q}(t), \qquad \bar{K}^*(t) = \bar{K}(t). \qquad (2.4.1)$$

При $t = t_1$ системы Σ и Σ^* будут состоять из разных частиц. Вследствие этого

$$\bar{Q}^*(t_1) = \bar{Q}(t_1) + \bar{q}(t_1); \qquad \bar{K}^*(t_1) = \bar{K}(t_1) + \bar{k}(t_1), \qquad (2.4.2)$$

где $\bar{q}(t_1)$ и $\bar{k}(t_1)$ – изменения количества движения и кинетического момента системы Σ, связанные с переменной её состава за время $\Delta t = t_1 - t$.

Вычтем (1) из (2) и разделим полученную разность на Δt. Переходя далее к пределу при $t_1 \to t$ и учитывая при этом, что $\bar{q}(t) = 0$; $\bar{k}(t) = 0$, получим

$$\frac{d\bar{Q}^*}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} + \frac{d\bar{q}}{dt}; \qquad \frac{d\bar{K}^*}{dt} = \frac{d\bar{K}}{dt} + \frac{d\bar{k}}{dt}. \qquad (2.4.3)$$

Производные $\dot{\bar{q}}$, $\dot{\bar{k}}$ представляют собой секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность S в момент времени t.

Соотношения (3) имеют кинематический характер и поэтому справедливы для любой системы координат (инерциальной или неинерциальной).

В рассматриваемой инерциальной системе координат $O_u x_u y_u z_u$ к системе Σ^*, как к системе постоянного состава, применимы теоремы динамики об изменении количества движения и кинетического момента. На основании этих теорем в фиксированный момент времени t

$$\frac{d\bar{Q}^*}{dt} = \bar{F}; \qquad \frac{d\bar{K}^*}{dt} = \bar{M}. \qquad (2.4.4)$$

Из равенств (3) и (4) следуют равенства

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F} - \frac{d\bar{q}}{dt}; \qquad \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M} - \frac{d\bar{k}}{dt}. \qquad (2.4.5)$$

Соотношения (5), полученные для момента времени t, остаются справедливы и для другого момента времени t', если считать, что $\bar{F}$ и $\bar{M}$ – главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих на систему Σ, а $d\bar{q}/dt$ и $d\bar{k}/dt$ – се -

кущие расходы количества движения и кинетического момента через поверхность S_o в рассматриваемый момент времени t'.

Формулы (5) представляют собой математическую запись теорем об изменении количества движения и кинетического момента системы переменного состава относительно инерциальной системы координат.

2.4.2. Системы переменного состава с твёрдой оболочкой. Принцип затвердевания

Пусть замкнутая поверхность S, ограничивающая систему переменного состава Σ, является недеформируемой. Такую поверхность будем называть твёрдой оболочкой системы Σ. В случае ракеты, например, твёрдой оболочкой является поверхность, проходящая через поверхность корпуса ракеты и выходное сечение сопла.

Введём систему координат $O_1x_1y_1z_1$, неизменно связанную с твёрдой оболочкой S (рис.2.19).

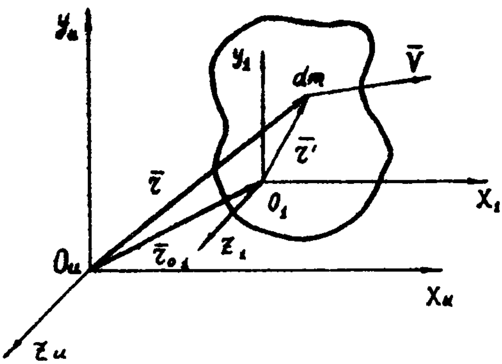

Рис. 2.19

Эта система в общем случае не является инерциальной, так как движется вместе с оболочкой произвольным образом относительно инерциальной системы отсчёта $O_u x_u y_u z_u$.

Определим изменение количества движения и кинетического момента относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Индексом "r" отметим все величины относительного движения, относительную производную обозначим через δ/dt. Тогда соотношения (3) примут вид:

$$\frac{\delta \bar{Q}_{r}^{*}}{dt} = \frac{\delta \bar{Q}_{r}}{dt} + \frac{\delta \bar{q}_{r}}{dt}; \qquad \frac{\delta \bar{K}_{r}^{*}}{dt} = \frac{\delta \bar{K}_{r}}{dt} + \frac{\delta \bar{k}_{r}}{dt}, \qquad (2.4.6)$$

где $\delta\dot{\bar{q}}_{r}/dt$ и $\delta\bar{k}_{r}/dt$ - относительные секундные расходы количества движения и кинетического момента через поверхность S в момент времени t;

Теорему об изменении количества движения системы можно применять только к системе Σ^{*}, имеющей постоянную массу.

Пусть $\bar{F}$ - главный вектор внешних сил, действующих в момент времени t на систему переменного состава Σ, а следовательно, и на систему Σ^{*}.

Тогда в рассматриваемый фиксированный момент времени t

$$\frac{d\bar{Q}^{*}}{dt} = \bar{F}. \qquad (2.4.7)$$

Теперь, для того чтобы связать равенства (6) и (7), необходимо представить абсолютное движение каждой частицы dm системы Σ^{*} как сложное: относительное движение относительно оболочки S и осей $O_1x_1y_1z_1$ и переносное движение частицы вместе с оболочкой S и осями $O_1x_1y_1z_1$ относительно инерциальной системы отсчёта $O_u x_u y_u z_u$.

Абсолютную, переносную и относительную скорости частицы обозначим через $\bar{v}_i$, $\bar{v}_{ie}$, $\bar{v}_{ir}$, а ускорения соответственно через $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{ie}$, $\bar{a}_{ir}$. Кориолисово ускорение частицы обозначим через $\bar{a}_{ik}$.

Очевидно, что

$$\frac{d\bar{Q}^{*}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \bar{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \bar{a}_i. \qquad (2.4.8)$$

По теореме сложения ускорений

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{ie} + \bar{a}_{ir} + \bar{a}_{ik}.$$

Поэтому

$$\frac{d\bar{Q}^{*}}{dt} = \sum_i m_i \bar{a}_{ir} + \sum_i m_i \bar{a}_{ie} + \sum_i m_i \bar{a}_{ik}. \qquad (2.4.9)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\bar{a}_{ir} = \frac{\delta \bar{v}_{ir}}{dt},$$

будем иметь, что вектор $\sum m_i \bar{a}_{ir}$ представляет собой производную количества движения системы Σ^* в относительном движении

$$\sum m_i \bar{a}_{ir} = \sum m_i \frac{\delta \bar{v}_{ir}}{dt} = \frac{\delta}{dt} \sum m_i \bar{v}_{ir} = \frac{\delta \bar{Q}_r^*}{dt} . \qquad (2.4.10)$$

Наконец, вспомним, что

$$\bar{F}_\kappa = -\sum_i m_i \bar{a}_{i\kappa} \qquad (2.4.11)$$

представляет собой главный вектор кориолисовых сил инерции, действующих в момент времени t на систему Σ .

Поскольку среда Σ непрерывно меняет свой состав, можно говорить лишь о движении твёрдой оболочки S относительно осей $O_u x_u y_u z_u$, то есть о переносном движении среды Σ . В момент времени t системы Σ^* и Σ совпадают и имеют одинаковые значения вектора $\sum\limits_i m_i \bar{a}_{ie}$.

Таким образом, переносное движение среды Σ в момент времени t описывается следующим уравнением, которое получим из уравнения (7), используя (9), (10), (11) и кинематическое соотношение (6),

$$\sum_i m_i \bar{a}_{ie} = \bar{F} + \left(-\frac{\delta \bar{q}_r}{dt}\right) + \bar{F}_\kappa + \left(-\frac{\delta \bar{Q}_r}{dt}\right) . \qquad (2.4.12)$$

Все члены правой части этого уравнения имеют размерность силы. Вектор $(-\delta \bar{q}_r/dt)$ можно рассматривать как главный вектор реактивных сил, обусловленных переносом количества движения среды через поверхность S . Силы, главный вектор которых равен $(-\delta \bar{Q}_r/dt)$ назовём вариационными. Эти силы возникают вследствие нестационарности относительного движения среды и обусловлены изменениями (вариациями) количества движения относительно системы координат $O_1 x_1 y_1 z_1$. Если относительное движение среды стационарное, то есть в каждой точке, неподвижной относительно осей $O_1 x_1 y_1 z_1$, плотность среды и скорость частиц $\bar{v}_r$ не меняются с течением времени, то вариационные силы равны нулю.

Аналогичный результат можно получить из теоремы об изменении кинетического момента системы переменного состава.

Кинетический момент системы Σ^* относительно точки O_v (см. рис. 4.2)

$$\bar{K}^* = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i . \qquad (2.4.13)$$

Отсюда

$$\frac{d\bar{K}^*}{dt}=\frac{d}{dt}\sum \bar{r}_i\times m_i\bar{v}_i=\sum\frac{d\bar{r}_i}{dt}\times m_i\bar{v}_i+\sum\bar{r}_i\times m_i\bar{a}_i$$

Сумма

$$\sum\frac{d\bar{r}_i}{dt}\times m_i\bar{v}_i=0,$$

так как

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{v}=\bar{v}\times\bar{v}=0,$$

и значит

$$\frac{d\bar{K}^*}{dt}=\sum\bar{r}_i\times m_i\bar{a}_i=\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_i+\sum\bar{r}_{O_1}\times m_i\bar{a}_i. \qquad (2.4.14)$$

Но, учитывая формулу (8), можно записать

$$\sum\bar{r}_{O_1}\times m_i\bar{a}_i=\bar{r}_{O_1}\times\sum m_i\bar{a}_i=\bar{r}_{O_1}\times\frac{d\bar{Q}^*}{dt}.$$

Поэтому

$$\frac{d\bar{K}^*}{dt}=\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ir}+\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ie}+\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ik}+\bar{r}_{O_1}\times\frac{d\bar{Q}^*}{dt} \qquad (2.4.15)$$

Отсюда для момента времени t, учитывая (4), получим

$$\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ie}=\bar{M}-\bar{r}_{O_1}\times\bar{F}-\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ir}+\bar{M}'_{kO_1}, \qquad (2.4.16)$$

где $\bar{M}'_{kO_1}=-\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ik}$ – главный момент кориолисовых сил, действующих в момент времени t на систему Σ.

Главный момент внешних сил, действующих на Σ в момент времени t (и на систему Σ^*) относительно точки O_1, будет

$$\bar{M}_{O_1}=\bar{M}-\bar{r}_{O_1}\times\bar{F}.$$

Поэтому уравнение (16) можно представить в виде

$$\sum_i\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ie}=\bar{M}_{O_1}-\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ir}+\bar{M}'_{kO_1}. \qquad (2.4.17)$$

Кинетический момент системы Σ^* относительно точки O_1 в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ равен

$$\bar{K}_{rO_1}=\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{v}_{ir},$$

а его относительная производная

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_{rO_1}}{dt}=\frac{\tilde{d}}{dt}\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{v}_{ir}=\sum\bar{v}_{ir}\times\bar{v}_{ir}m_i+\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ir}=\sum\bar{r}'_i\times m_i\bar{a}_{ir},$$

В фиксированный момент времени t

$$\frac{d\overline{K}^{*}_{ro1}}{dt}=\sum \overline{r}'_i \times m_i \overline{a}_{ir} . \qquad (2.4.18)$$

С другой стороны,

$$\frac{d\overline{K}^{*}_{ro1}}{dt}=\frac{\delta \overline{K}_{ro1}}{dt}+\frac{\delta \overline{k}_{ro1}}{dt}, \qquad (2.4.19)$$

где $\overline{K}_{ro1}$ – кинетический момент системы переменного состава относительно точки O_1 в системе координат $O_1x_1y_1z_1$; $\delta \overline{k}_{ro1}/dt$ – относительный секундный расход кинетического момента через поверхность S .

Из выражений (17)-(19) получаем

$$\sum \overline{r}'_i \times m_i \overline{a}_{ie}=\overline{M}_{v1}+\left(-\frac{\delta \overline{k}_{ro1}}{dt}\right)+\overline{M}_{ко1}+\left(-\frac{\delta \overline{K}_{ro1}}{dt}\right) . \qquad (2.4.20)$$

Равенства (12) и (20) описывают переносное движение системы Σ и представляют собой другую запись теорем об изменении количества движения и кинетического момента системы переменного состава.

Левую часть уравнения (12) необходимо привести к обычному виду. Однако теперь не можем записать равенства, аналогичные (8), так как между переносными скоростями и ускорениями имеет место следующая связь:

$$\frac{d\overline{v}_{ie}}{dt}=\overline{a}_{ie}+\overline{\omega}\times\overline{v}_{ir} ,$$

где $\overline{\omega}$ – угловая скорость вращения системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

Теперь представим, что в момент времени t система переменного состава Σ затвердела, то есть прекратилось движение частиц относительно твёрдой оболочки ($\overline{v}_{ir}=0$). Тогда переносные ускорения частиц системы Σ будут равны абсолютным ускорениям частиц полученного таким путем фиктивного твёрдого тела. Обозначим это фиктивное твёрдое тело через S , для которого справедливо соотношение

$$\frac{d\overline{v}_{is}}{dt}=\overline{a}_{ie} ,$$

тогда

$$\sum m_i \overline{a}_{ie}=\frac{d}{dt}\sum m_i \overline{v}_{is}-\frac{d\overline{Q}_s}{dt} \qquad (2.4.21)$$

Меняя момент затвердевания t , получим различные твердые тела S, которые ограничены одной и той же твёрдой оболочкой S и отличаются друг от друга только величиной своей массы и распределением её внутри оболочки. Различные тела S можно рассматривать и как одно фиктивное "твёрдое тело переменной массы", внутри которого с течением времени возникают или исчезают материальные частицы, неподвижные относительно твёрдой оболочки тела. Как видно, движение фиктивного твёрдого тела S совпадает с движением реальной твердой оболочки S.

Для производной по времени от количества движения тела S получим на основании (12) и (21) следующее соотношение:

$$\frac{d\bar{Q}_s}{dt} = \bar{F} + \left(-\frac{d\bar{q}_z}{dt}\right) + \bar{F}_\kappa + \left(-\frac{d\bar{Q}_z}{dt}\right) \qquad (2.4.22)$$

Это уравнение представляет собой запись теоремы о изменении количества движения системы переменного состава.

Результат, аналогичный данному, можно получить и для теоремы об изменении главного момента количества движения системы переменного состава.

Рассмотрим твёрдое тело S, которое получилось бы при затвердевании системы переменного состава Σ в некоторый момент времени t. Твёрдое тело S неизменно связано с оболочкой S и, начиная с момента времени t, движется вместе с нею. При этих предположениях аналогично (21) получим

$$\sum_{\Sigma} \bar{r}_i' \times m_i \bar{a}_{ie} = \sum_{S} \bar{r}_i' \times m_i \bar{a}_{ie} = \sum_{S} \bar{r}_i' \times \frac{d\bar{v}_{is}}{dt} m_i =$$

$$= \frac{d\bar{K}^S_{O_1}}{dt} - \sum_{S} \frac{d\bar{r}_i'}{dt} \times \bar{v}_{is} m_i ,$$

где $\bar{K}^S_{O_1} = \sum_{S} \bar{r}_i' \times \bar{v}_{is} m_i$ – кинетический момент фиктивного твёрдого тела относительно полюса O_1.

С учётом полученного соотношения равенство (20) можно заменить равенством

$$\frac{d\bar{K}^S_{O_1}}{dt} = \bar{M}_{O_1} + \left(-\frac{\delta\bar{k}_{zO_1}}{dt}\right) + \bar{M}_{\kappa O_1} + \left(-\frac{\delta\bar{K}_{zO_1}}{dt}\right) \qquad (2.4.23)$$

Центр массы твёрдого тела S обозначим через C и поместим в него начало системы координат $O_1x_1y_1z_1$. В этом случае вместо (23) будем иметь

$$\frac{d\bar{K}_c^s}{dt} = \bar{M}_c + \left(-\frac{\delta \bar{k}_{cc}}{dt}\right) + \bar{M}_{Kc} + \left(-\frac{\delta \bar{K}_{zc}}{dt}\right) \qquad (2.4.24)$$

Действительно, так как $\bar{r}' = \bar{r} - \bar{r}_{o_1}$ (см.рис. 2.19) и для частиц фиктивного твердого тела $\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i^s$, то

$$\sum_s \dot{\bar{r}}'_i \times \bar{v}_i^s m_i = \sum_s \bar{v}_i^s \times \bar{v}_i^s m_i - \sum_s \dot{\bar{r}}_{o_1} \cdot \bar{v}_i^s m_i =$$

$$= -\dot{\bar{r}}_{o_1} \times \sum \bar{v}_i^s m_i = -\dot{\bar{r}}_{o_1} \times \dot{\bar{r}}_c \sum m_i \to 0 \qquad \text{при } O_1 \to C.$$

Таким образом уравнение (24) описывает движение твёрдой оболочки S относительно центра инерции C системы переменного состава Σ.

Обобщая теоремы об изменении количества движения и кинетического момента системы переменного состава, можно сформулировать следующий принцип затвердевания для системы переменного состава:

Уравнения движения твёрдой оболочки системы переменного состава Σ в произвольный момент времени t могут быть записаны в виде уравнений движения твёрдого тела постоянного состава, если представить, что в этот момент времени система переменного состава Σ затвердела и что к полученному таким образом фиктивному твёрдому телу приложены: 1) внешние силы, действующие на систему Σ; 2) реактивные силы; 3) кориолисовы силы и 4) вариационные силы.

2.4.3. Принцип затвердевания для реактивного летательного аппарата

Будем считать, что корпус летательного аппарата в полёте не деформируется. Тогда принцип затвердевания, сформулированный в предыдущем параграфе, может быть применён к такому летательному аппарату, который представляет собой частный случай системы переменного состава с твёрдой оболочкой. Однако для летательного аппарата (ракеты) формулировку этого принципа целесообразно несколько изменить.

Дело в том, что реактивную силу $(-\delta\bar{q}_r/dt)$ непосредственно измерить не удаётся, поэтому её обычно объединяют с силами, возникающими вследствие атмосферного давления на корпус ракеты и давления в струе газов в выходном сечении сопла двигателя, а также с вариационными силами.

Рассмотрим ракету с твердой оболочкой и работающим двигателем, установленную горизонтально и неподвижно на испытательном стенде.

Так как система координат $Cx_1y_1z_1$, связанная с твёрдой оболочкой, неподвижна, то $\bar{Q}_S = 0$ и $\bar{F}_K = 0$, и уравнение (22) в данном случае принимает вид

$$\bar{P} + \left(- \frac{\delta \bar{q}_z}{dt}\right) + \left(- \frac{\delta \bar{Q}_z}{dt}\right) = 0. \qquad (2.4.25)$$

На ракету действуют следующие внешние силы: вес; реакция опор, на которых закреплена ракета; силы, возникающие вследствие разности атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, приложенные к оболочке ракеты.

Силы веса можно исключить из рассмотрения, так как в дальнейшем равенство (25) будем проектировать на горизонтальную ось координат.

Теперь остается условиться о том, что же следует понимать под тягой двигателя. Для летательного аппарата (ракеты) это та движущая сила, первопричину возникновения которой мы усматриваем в работе двигателя. Она обладает тем удобным свойством, что может быть непосредственно измерена на стенде. Для закреплённой ракеты сила тяги уравновешивается реакцией опор $\bar{R}$, равной тяге $\bar{P}$.

Равнодействующую сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла обозначим через $\bar{F}_*$ (рис.2.20).

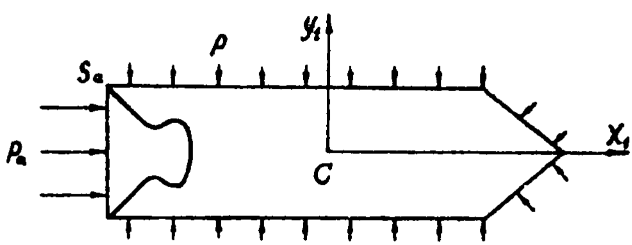

Рис. 2.20

Модуль этого вектора равен $\bar{F}_* (p_a - p) S_a$, где p_a - давление на срезе сопла; p - атмосферное давление; S - площадь выходного сечения сопла.

Таким образом, в рассматриваемом случае главный вектор внешних сил равен $\bar{F} = \bar{R} + \bar{F}_* = -\bar{P} + \bar{F}_*$. Подставляя это выражение в уравнение (25), получим

$$\bar{P} = \left(-\frac{\delta \bar{q}_r}{dt}\right) + \bar{F}_* + \left(-\frac{\delta \bar{Q}_r}{dt}\right). \qquad (2.4.26)$$

Сила тяги $\bar{P}$, измеренная в результате стендовых испытаний, является, как видно из выражения (26), равнодействующей реактивных, вариационных и внешних сил, вызванных несовпадением атмосферного давления с давлением газа в выходном сечении сопла.

Следует особо подчеркнуть, что под давлением p понимается исключительно барометрическое давление окружающей среды, но не истинное давление на поверхности ракеты, значение и распределение которого зависят от условий обтекания движущегося летательного аппарата. Все добавочные силы, связанные с движением в атмосфере, относятся к категории аэродинамических сил и в выражение тяги не включаются.

Подразумевая теперь под $\bar{F}$ и $\bar{M}_c$ соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил, кроме силы атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, уравнения (22) и (24) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\bar{Q}_s}{dt} = \bar{F} + \bar{P} + \bar{F}_K ; \qquad (2.4.27)$$

$$\frac{d\bar{K}_c^s}{dt} = \bar{M}_c + \bar{M}_{p_c} + \bar{M}_{Kc}, \qquad (2.4.28)$$

где

$$\bar{M}_{p_c} = \left(-\frac{\delta \bar{k}_{rc}}{dt}\right) + \bar{M}_{*c} + \left(-\frac{\delta \bar{K}_{rc}}{dt}\right)$$

главный момент силы тяги относительно центра масс ракеты; $\bar{M}_{*c}$ – главный момент сил, обусловленных атмосферным давлением на корпус ракеты и давлением газа в выходном сечении сопла двигателя, относительно центра масс C.

На основании уравнений (27) и (28) можно сформулировать принцип затвердевания для реактивного летательного аппарата:

Уравнения движения твёрдой оболочки реактивного летательного аппарата в произвольный момент времени t могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела (постоянного состава), если представить, что в момент времени t летательный аппарат затвердел и к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: внешние силы, действующие на летательный аппарат (кроме силы $\bar{F}_*$), сила тяги реактивного двигателя, силы Кориолиса.

2.4.4. Уравнения движения центра масс и вращательного движения летательного аппарата

Количество движения фиктивного твёрдого тела S , которое получается в результате затвердевания ракеты в момент времени t , определим по формуле

$$\bar{Q}_s = m\bar{v}_c^s , \tag{2.4.29}$$

где m – масса фиктивного твёрдого тела, равная массе ракеты в момент затвердевания; $\bar{v}_c^s$ – скорость центра инерции фиктивного твёрдого тела.

Согласно принципу затвердевания производную $d\bar{Q}_s/dt$ в уравнении (27) следует вычислять аналогично случаю твёрдого тела с постоянной массой

$$\frac{d\bar{Q}_s}{dt} = m\,\frac{d\bar{v}_c^s}{dt} = m\bar{a}_c^s , \tag{2.4.30}$$

где $\bar{a}_c^s$ – ускорение центра масс твёрдого тела S .

Подставляя (30) в (27), получим

$$m\bar{a}_c^s = \bar{F} + \bar{P} + \bar{F}_к . \tag{2.4.31}$$

Во время движения летательного аппарата его центр масс перемещается относительно корпуса с некоторой скоростью $\bar{v}_{cr}$ и ускорением $\bar{a}_{cr}$ вследствие расхода топлива. Рассматривая движение центра масс вместе с корпусом летательного аппарата как переносное движение, а движение относительно корпуса как относительное, для абсолютных скорости $\bar{v}_c$ и ускорения $\bar{a}_c$ центра масс можно записать следующие выражения:

$$\bar{v}_c = \bar{v}_{ce} + \bar{v}_{cr} ; \qquad \bar{a}_c = \bar{a}_{ce} + \bar{a}_{cr} + 2\bar{\omega}\times\bar{v}_{cr} , \tag{2.4.32}$$

где $\bar{v}_{ce}$, $\bar{a}_{ce}$ – соответственно переносные скорость и ускорение центра масс ракеты (как частного случая реактивного летательного аппарата); $\bar{\omega}$ – угловая скорость корпуса ракеты.

В момент времени t (в момент затвердевания ракеты) центры масс ракеты и тела S совпадают. Поэтому в этот момент

$$\bar{v}_{ce} = \bar{v}_c^s, \qquad \bar{a}_{ce} = \bar{a}_c^s. \qquad (2.4.33)$$

Исключая в уравнении (31) $\bar{a}_c^s$ с помощью равенств (32) и (33), будем иметь

$$m\bar{a}_c = \bar{F} + \bar{P} + \bar{F}_\kappa + m\bar{a}_{cr} + 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_{cr}. \qquad (2.4.34)$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение движения центра масс реактивного летательного аппарата в векторной форме в инерциальной системе отсчёта. Слагаемые $m\bar{a}_{cr}$ и $2m\bar{\omega} \times \bar{v}_{cr}$ представляют собой силы, обусловленные перемещением центра масс летательного аппарата относительно корпуса.

В дальнейшем для удобства уравнение (34) будем записывать в виде

$$m\bar{a}_c = \sum \bar{F}, \qquad (2.4.35)$$

или

$$m\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum \bar{F}, \qquad (2.4.36)$$

обозначая через $\sum \bar{F}$ правую часть (34) - сумму всех сил, приложенных к ракете.

При практических исследованиях векторные уравнения движения ракеты заменяют эквивалентной системой скалярных уравнений, которую получают, проектируя каждое векторное уравнение на какие-либо три взаимно перпендикулярные оси.

Спроектируем уравнение (36) на оси подвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$, начало которой (точка O) совпадает с центром инерции ракеты C.

Если $d\bar{v}/dt$ - производная какого-либо вектора $\bar{v}$ относительно системы $Oxyz$, $\delta\bar{v}/dt$ - производная этого вектора относительно системы $Oxyz$ и $\bar{\omega}$ - угловая скорость системы $Oxyz$ в системе $O_u x_u y_u z_u$, то, как известно из механики (см., например, /5/),

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\delta\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \qquad (2.4.37)$$

Проекции вектора $d\bar{v}/dt$ на оси Ox, Oy, Oz определяются по формулам

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_x = \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y,$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z ;$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_z = \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x , \qquad (2.4.38)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора $\bar{v}$ на оси Ox, Oy, Oz; ω_x, ω_y, ω_z – проекции вектора $\bar{\omega}$ на те же оси.

Вычислим векторное произведение

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(\omega_y v_z - \omega_z v_y)\bar{i} + \\ &+ (\omega_z v_x - \omega_x v_z)\bar{j} + \\ &+ (\omega_x v_y - \omega_y v_x)\bar{k} , \end{aligned}$$

входящее в уравнение (37), и, объединяя члены, содержащие один и тот же единичный вектор, учитывая, что относительная производная вектора $\bar{v}$ равна

$$\frac{\delta \bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k} ,$$

получим

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y\right)\bar{i} + \left(\frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z\right)\bar{j} +$$

$$+ \left(\frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x\right)\bar{k} .$$

Отсюда вытекают равенства (38).

Используя соотношения (38), векторное уравнение (36) можно представить следующими тремя скалярными уравнениями:

$$m\left(\frac{dv_{cx}}{dt} + \omega_y v_{cz} - \omega_z v_{cy}\right) = \sum F_x ;$$

$$m\left(\frac{dv_{cy}}{dt} + \omega_z v_{cx} - \omega_x v_{cz}\right) = \sum F_y ;$$

$$m\left(\frac{dv_{cz}}{dt} + \omega_x v_{cy} - \omega_y v_{cx}\right) = \sum F_z . \qquad (2.4.39)$$

где V_{cx} ; V_{cy} , V_{cz} – проекции вектора скорости центра масс ракеты на оси Ox , Oy , Oz ; $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$ – суммы проекций всех сил, приложенных к ракете, на оси Ox , Oy , Oz .

Опустим индекс "С" в уравнении (28), считая в дальнейшем, что моменты сил и кинетические моменты в уравнениях динамики летательного аппарата вычисляются относительно центра масс. Тогда (28) запишем в виде

$$\frac{d\bar{K}^s}{dt} = \sum \bar{M}\,, \qquad (2.4.40)$$

где $\sum \bar{M} = \bar{M}_c + \bar{M}_{Pc} + \bar{M}_{Kc}$.

Спроектируем уравнение (40) на оси подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, начало которой O_1 совпадает с центром инерции ракеты C .

Пусть $K^s_{x_1}$, $K^s_{y_1}$, $K^s_{z_1}$ – проекции кинетического момента фиктивного твёрдого тела на оси подвижной системы координат, а $\sum M_{x_1}$, $\sum M_{y_1}$, $\sum M_{z_1}$ – сумма проекций моментов сил, действующих на ракету, на оси подвижной системы координат. Тогда, используя формулы (38), получим следующую эквивалентную систему трёх скалярных уравнений:

$$\frac{dK^s_{x_1}}{dt} + \omega_{y_1}K^s_{z_1} - \omega_{z_1}K^s_{y_1} = \sum M_{x_1}\,;$$

$$\frac{dK^s_{y_1}}{dt} + \omega_{z_1}K^s_{x_1} - \omega_{x_1}K^s_{z_1} = \sum M_{y_1}\,;$$

$$\frac{dK^s_{z_1}}{dt} + \omega_{x_1}K^s_{y_1} - \omega_{y_1}K^s_{x_1} = \sum M_{z_1}\,. \qquad (2.4.41)$$

Если в качестве осей подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ выбраны главные оси инерции, то, как известно,

$$K^s_{x_1} = J_{x_1}\omega_{x_1}\,; \qquad K^s_{y_1} = J_{y_1}\omega_{y_1}\,, \qquad K^s_{z_1} = J_{z_1}\omega_{z_1}\,,$$

где J_{x_1} , J_{y_1} , J_{z_1} – моменты инерции фиктивного твёрдого тела относительно главных осей инерции. В этом случае уравнения (41) принимают вид

$$J_{x_1}\frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1})\omega_{y_1}\omega_{z_1} = \sum M_{x_1}\,;$$

$$J_{y_1}\frac{d\omega_{y_1}}{dt}+(J_{x_1}-J_{z_1})\omega_{z_1}\omega_{x_1}=\sum M_{y_1};$$

$$J_{z_1}\frac{d\omega_{z_1}}{dt}+(J_{y_1}-J_{x_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1}=\sum M_{z_1} \qquad (2.4.42)$$

(Согласно принципу затвердевания производные от кинетического момента и его проекций вычисляются как для твердого тела с постоянными моментами инерции.)

Заметим, что твердое тело S и корпус ракеты имеют относительно инерциальной системы координат одну и ту же угловую скорость $\vec{\omega}$, поскольку движение твёрдого тела S совпадает с движением корпуса ракеты.

Уравнения (42) записаны для произвольного, но фиксированного момента времени t. Меняя момент затвердевания t, будем получать твёрдые тела S с различными моментами инерции и направлениями главных центральных осей инерции. Следовательно, уравнения (42) в различные моменты времени t представляют собой проекции уравнения (40) на различные оси координат. Чтобы уравнения вращательного движения (42) записать в одной системе координат, необходимо учесть вращение главных центральных осей инерции относительно корпуса летательного аппарата. Однако в полёте направления главных осей инерции ракеты изменяются незначительно, поэтому в дальнейшем, пользуясь уравнениями (42), мы будем предполагать, что направления главных осей инерции относительно корпуса ракеты остаются неизменными. Такое предположение является вполне допустимым, так как дополнительные члены в уравнениях (42), появляющиеся в результате учёта вращения главных центральных осей инерции относительно корпуса ракеты, в большинстве практических задач являются пренебрежимо малыми.

Глава 3. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ ВО ВРЕМЯ ДВИЖЕНИЯ

В правые части уравнений движения центра масс летательного аппарата (2.4.39) входят: внешние силы; сила тяги двигателя; силы Кориолиса, обусловленные относительным движением частиц внутри вращающегося корпуса летательного аппарата, и силы, вызванные перемещениями центра масс летательного аппарата относительно корпуса. В правые части уравнений вращательного движения летательного аппарата (2.4.41) входят моменты соответствующих сил. Под внешними силами будем подразумевать силы тяжести и аэродинамические силы.

Расчёты показывают /t/ , что у подавляющего большинства неуправляемых ракет кориолисовы силы, а также силы, вызванные перемещением центра масс относительно корпуса ракеты, весьма малы и ими во многих случаях можно пренебречь. Так можно поступить тем более при исследовании движения управляемых летательных аппаратов в атмосфере.

Поэтому в правых частях вышеуказанных уравнений, если не будет оговорено особо, примем к рассмотрению лишь те силы и моменты, которые имеют наибольшее практическое значение: силы тяжести, силы тяги двигателей и аэродинамические силы.

Детальное изложение зависимости силы тяги от вида топлива, от типа и конструкции двигателя и режимов его работы, от параметров движения летательного аппарата и состояния окружающей среды является предметом специального курса – теории внутрикамерных процессов. В этом разделе остановимся на представлении силы тяги, рассмотренном в п. 2.4.3.

В любых задачах внешней баллистики сила тяжести входит в число учитываемых сил, так как во все время движения летательный аппарат находится под действием гравитационного поля Земли. Рассмотрение потенциала силы притяжения, модели Земли и свойств её атмосферы дано наиболее детально, поскольку нам не будет представлено возможности вернуться к этим вопросам.

Анализ аэродинамических сил и моментов проведён на основе методов размерностей в механике. Проблемам анализа и определения аэродинамических сил будет посвящена отдельная часть учебника.

§ 3.1. Потенциал силы притяжения

На всякое тело, находящееся в сфере действия Земли, действует сила притяжения, величина которой может быть вычислена исходя из основных положений теории притяжения. Основой этой теории является закон всемирного тяготения Ньютона, в соответствии с которым всякие две материальные частицы взаимно притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Под материальной частицей в этом определении понимается малое количество вещества твердого, жидкого, газообразного, занимающего малый объём. В современных представлениях введено понятие материальной точки – объекта, не имеющего геометрического измерения, но обладающего конечной массой. Поэтому закон всемирного тяготения в дальнейшем рассматривается для определения силы взаимодействия материальных точек.

Если в абсолютном пространстве, с которым связана система координат $O\xi\eta\zeta$, расположены материальные точки M и P с массами m_1 и m_2 соответственно, положение которых определено радиусами-векторами $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ (рис.3.1.), то в соответствии с законом всемирного тяготения они притягиваются друг к другу с силой, величина которой

$$F = f\frac{m_1 m_2}{\Delta^2}, \qquad (3.1.1)$$

где $f = 6{,}670\cdot 10^{-11}$ $Нм^2/кг^2$ – гравитационная постоянная, $\Delta = |\bar{r}|$.

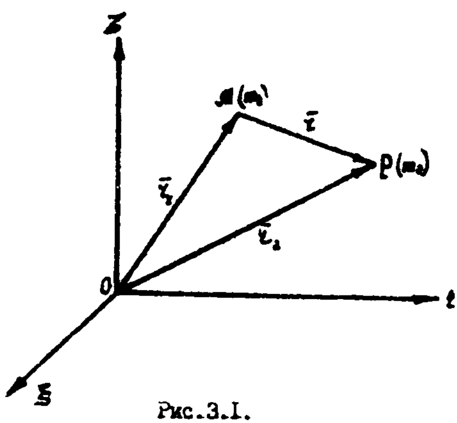

Рис.3.1.

В формуле (3.1.1) сила симметрична относительно взаимодействующих материальных точек и зависит только от расстояния между ними. Это означает, что величина силы остаётся неизменной в любой системе координат.

Чтобы упростить изложение, будем считать точку M притягивающей, а P – притягиваемой, обладающей единичной массой ($m_2 = 1$). Очевидно, что точка M притягивает точку P с силой

$$\bar{\mathcal{F}} = -f\frac{m_1}{\Delta^2}\cdot\frac{\bar{r}}{\Delta}, \qquad (3.I.2)$$

направленной по радиусу-вектору ($-\bar{r}$).

Поскольку (3.I.2) определяет силу, с которой точка M притягивает единичную массу, расположенную в любой точке пространства, то этой формулой описывается силовое поле, которое принято называть центральным, или полем ньютоновского тяготения.

Если обозначить координаты притягиваемой точки x, y, z, а притягивающей – x', y', z', то направляющие косинусы вектора будут

$$\alpha = \frac{x'-x}{\Delta}; \quad \beta = \frac{y'-y}{\Delta}; \quad \gamma = \frac{z'-z}{\Delta}, \qquad (3.I.3)$$

а проекции силы по осям координат

$$X = f m_1\frac{x'-x}{\Delta^3}; \quad Y = f m_1\frac{y'-y}{\Delta^3}; \quad Z = f m_1\frac{z'-z}{\Delta^3}. \qquad (3.I.4)$$

Очевидно, что

$$\alpha = \cos(r,\xi); \quad \beta = \cos(r,\eta); \quad \gamma = \cos(r,\zeta).$$

Для силового поля (3.I.2), образуемого помещённой в точку M точечной массой m_1, существует функция $U(x,y,z)$, называемая силовой функцией массы m_1 (или потенциалом этой массы), для которой элементарная работа сил поля равна полному дифференциалу этой функции. Следовательно, проекции силы $\bar{\mathcal{F}}$ на оси координат могут быть определены через эту функцию в виде соотношений

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (3.I.5)$$

и

$$\bar{\mathcal{F}} = \overline{grad}\, U$$

Условие существования функции $U(x,y,z)$ записывается в виде

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \qquad (3.I.6)$$

или $\quad rot\,\bar{\mathcal{F}} = 0.$

Легко проверить, что для силового поля, описываемого (3.I.2), такой функцией является

$$U(x,y,z) = f\,\frac{m_1}{\Delta}\,, \qquad (3.1.7)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\,.$$

Если имеется множество силовых полей, определяемых формулой (3.1.2), то потенциал их общего, суммарного поля образуется как алгебраическая сумма потенциалов отдельных полей. Поэтому, если объём пространства T, занимаемого телом конечных размеров (рис. 3.2), разбить произвольным образом на бесконечное множество элементарных объёмов $d\tau$, содержащих массу

$$dm = \rho(x',y',z')\,d\tau, \qquad (3.1.8)$$

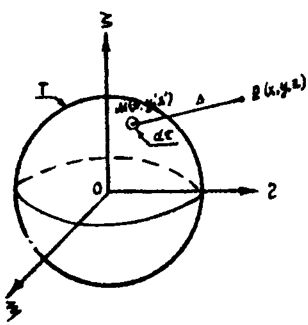

Рис. 3.2.

то гравитационный потенциал или силовую функцию этого тела можно рассматривать как результат сложения полей, образованных элементарными частицами dm

$$U(x,y,z) = f\iiint\limits_{(T)} \frac{\rho(x',y',z')}{\Delta}\,d\tau = f\iiint\limits_{M} \frac{dm}{\Delta}\,, \qquad (3.1.9)$$

где $\Delta = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$ – расстояние между произвольной точкой тела с координатами x', y', z' и точкой P с координатами x, y, z, расположенной вне тела, в которой вычисляется значение силовой функции; $\rho(x',y',z')$ – плотность тела в точке с координатами x', y', z'.

Интегрирование в (3.1.9) производится по объёму, занимаемому телом в пространстве, и поэтому значение силовой функции, как и составляющих силы тяготения, зависит от формы тела и его положения в системе координат.

Функция $\rho(x',y',z')$, характеризующая распределение плотности, в реальных телах является неотрицательной, однозначной и интегрируемой в области пространства, занимаемого телом. Поэтому в любой точке пространства, расположенной вне тела, составляющие силы тяготения по осям координат определяются соотношениями

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = f\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{x'-x}{\Delta^3}\, dm\,;$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = f\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{y'-y}{\Delta^3}\, dm\,;$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = f\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{z'-z}{\Delta^3}\, dm\,. \qquad (3.I.I0)$$

Силовая функция (3.I.9) и её частные производные (3.I.I0), рассматриваемые как функции координат x, y, z притягиваемой точки единичной массы P, конечны, однозначны и непрерывны во всем внешнем относительно тела T пространстве. В этой области силовая функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (3.I.II)$$

Если взаимно притягиваются два тела $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, занимающие соответственно объёмы T_1 и T_2 и имеющие распределения плотностей $\rho_1 = \rho_1(x_1', y_1', z_1')$ и $\rho_2 = \rho_2(x_2', y_2', z_2')$, то, разбивая каждое из них на бесконечное множество элементарных объёмов, содержащих элементарные массы $dm_1 = \rho_1 d\tau$ и $dm_2 = \rho_2 d\tau$ соответственно, и суммируя силовые функции взаимодействия этих элементарных масс, силовую функцию взаимного притяжения тел $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ можно записать

$$U_{1,2} = f\int\limits_{(\mathcal{D}_1)} \rho_1 d\tau_1 \int\limits_{(\mathcal{D}_2)} \frac{\rho_2\, d\tau_2}{\Delta_{1,2}}\,, \qquad (3.I.I2)$$

где

$$\Delta_{1,2} = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2} \; -$$

расстояние между произвольными точками тел $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$.

Для вычисления сил и моментов, действующих на каждое из этих тел со стороны другого, с каждым из них связывается собственная система координат O_i, x_i', y_i', z_i', положение которой относительно абсолютной системы координат определяется углами Эйлера: прецессии ψ_i, нутации ϑ_i, собственного вращения φ_i и координатами начала – ξ_i, η_i, ζ_i (i = I,2) (рис. 3.3.).

Если функции распределения плотности в телах конечны, одноз-

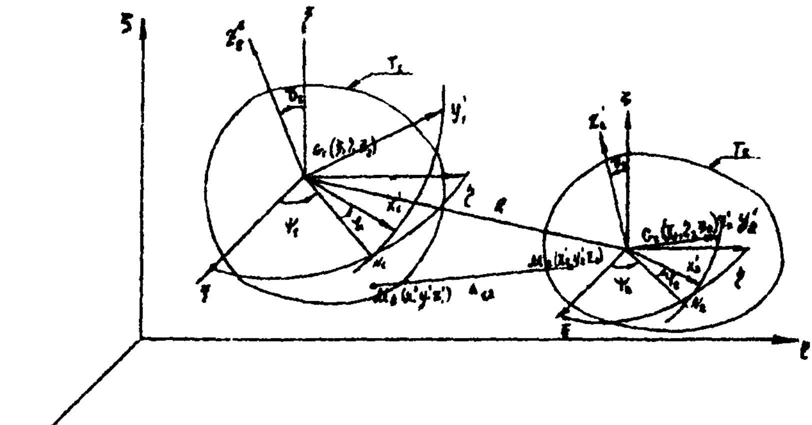

Рис. 3.3. Взаимодействие двух тел

начны и непрерывны (или интегрируемы), то проекции сил тяготения, действующих со стороны одного тела на другое, выражаются соотношениями

$$X_{1,2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = f \int\limits_{(D_1)} dm_1 \int\limits_{(D_2)} \frac{x_1' - x_2'}{\Delta^3_{1,2}}\, dm_2 \ ;$$

$$Y_{1,2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = f \int\limits_{(D_1)} dm_1 \int\limits_{(D_2)} \frac{y_1' - y_2'}{\Delta^3_{1,2}}\, dm_2 \ ;$$

$$Z_{1,2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = f \int\limits_{(D_1)} dm_1 \int\limits_{(D_2)} \frac{z_1' - z_2'}{\Delta^3_{1,2}}\, dm_2 \qquad (3.1.13)$$

В формулах (3.1.12) и (3.1.13) интегрирование производится по объёмам, занимаемым телами, и переменными интегрирования являются x_i', y_i', z_i' ($i = 1,2$). Поэтому силовая функция (3.1.12) и составляющие сил взаимного притяжения (3.1.13) являются функциями двенадцати независимых переменных ψ_i, ϑ_i, φ_i, ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1,2$).

Очевидно, что в общем случае при взаимодействии двух тел каждое из них подвергается действию момента гравитационных сил другого. Составляющие этого момента по осям, соответствующим φ_i, ψ_i, ϑ_i, относительно начала связанной с телом системы координат выражаются формулами

$$L_{\varphi_i} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}; \qquad L_{\psi_i} = \frac{\partial U}{\partial \psi_i}, \qquad L_{\vartheta_i} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}. \qquad (3.1.14)$$

Силовая функция (3.1.12), рассматриваемая как функция координат начал связанных с телами систем координат, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \qquad (i = 1,2).(3.1.15)$$

Поскольку силовые функции тела (3.1.9) и взаимно притягивающихся тел (3.1.12) удовлетворяют уравнению Лапласа, то будучи правильными во всем внешнем относительно тел пространстве и регулярными на бесконечности, они являются гармоническими функциями и могут быть представлены в виде абсолютно сходящихся разложений по сферическим функциям или гармоническим многочленам, область сходимости которых может быть достаточно просто определена. Для того чтобы найти эти разложения, определим сферические функции и их основные, необходимые нам в дальнейшем, свойства.

Вид и структуру элементарных сферических функций можно представить, рассматривая решение уравнения Лапласа, записанного в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0. \qquad (3.1.16)$$

Частное решение этого уравнения, отыскиваемое в виде

$$U(r, \theta, \lambda) = f(r)\, Y(\theta, \lambda),$$

содержит произведение функции переменной, которая определяется из уравнения

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 f'(r)\right] - x = const \qquad (3.1.17)$$

и функции двух переменных, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + x Y = 0. \qquad (3.1.18)$$

Легко проверить, что

$$f(r) = r^n$$

и, следовательно,

$$x = n(n+1)$$

Замена в (3.I.18) x его значением приводит к уравнению, которому удовлетворяет любая функция $Y_n(\theta,\lambda)$, называемая поверхностной сферической функцией n-го порядка

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + ctg\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + n(n+1)\right]Y_n(\theta,\lambda) = 0. \qquad (3.I.19)$$

Функция $Y_n(\theta,\lambda)$ есть линейная комбинация одночленов, каждый из которых есть произведение функций только от θ и только от λ. Поэтому решение (3.I.19) отыскивается в виде

$$Y_n(\theta,\lambda) = P_n(\theta)\,L_n(\lambda) \,. \qquad (3.I.20)$$

После подстановки (3.I.20) в (3.I.19) и разделения переменных для определения каждого из множителей получаются уравнения

$$\frac{d^2L_n}{d\lambda^2} = -K^2L_n\,;$$

$$\frac{\partial}{d\lambda}\left[(1-\nu^2)\frac{dP}{d\nu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{K^2}{1-\nu^2}\right]P = 0. \qquad (3.I.21)$$

Частное решение первого содержит

$$\cos K\lambda \qquad \text{и} \qquad \sin K\lambda$$

Второе, называемое уравнением Лежандра, в котором $\nu = \cos\theta$, $P(\nu) = P(\cos\theta)$, частными решениями имеет сферические функции.

При $K = 0$ частные решения уравнения Лежандра определяются соотношением

$$P_n(\nu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}\,, \qquad (3.I.22)$$

которое является многочленом степени n и содержит только четные степени при четном n и только нечетные при n нечетном.

Соотношение (3.I.22) называется формулой Родрига, а многочлены $P_n(\nu)$, вычисляемые по ней, многочленами (полиномами) Лежандра. Полагая $n = 0,1,2,3$, легко вычислить

$$P_0(\vartheta) = 1;$$

$$P_1(\vartheta) = \vartheta,$$

$$P_2(\vartheta) = \frac{3}{2}\vartheta^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(\vartheta) = \frac{5}{2}\vartheta^3 - \frac{3}{2}\vartheta.$$

При $K \neq 0$ частное решение уравнения Лежандра вычисляется по формуле

$$P_n^{(K)}(\vartheta) = (1-\vartheta^2)^{K/2}\frac{d^K P_n(\vartheta)}{d\vartheta^K} \qquad (3.1.23)$$

и определяется многочленом степени n, если K – чётное число, и многочленом степени $(n - 1)$, умноженным на $\sqrt{1-\vartheta^2}$, если K – нечетное число.

Многочлены $P_n^{(K)}(\vartheta)$ называются присоединёнными функциями Лежандра и вычисляются по формуле (3.1.23). В частности, для $n = 1$ $(K = 1)$; $n = 2$ $(K = 1,2)$ и $n = 3$ $(K = 1,2,3)$

$$P_1^{(1)}(\vartheta) = -(1-\vartheta^2)^{1/2};$$

$$P_2^{(1)}(\vartheta) = 3\vartheta(1-\vartheta^2)^{1/2},$$

$$P_2^{(2)}(\vartheta) = 3(1-\vartheta^2);$$

$$P_3^{(1)}(\vartheta) = \left(\frac{15}{2}\vartheta^2 - \frac{3}{2}\right)(1-\vartheta^2)^{1/2};$$

$$P_3^{(2)}(\vartheta) = 15\vartheta(1-\vartheta^2);$$

$$P_3^{(3)}(\vartheta) = 15(1-\vartheta^2)(1-\vartheta^2)^{1/2}.$$

Многочлены и присоединённые функции Лежандра, как и поверхностные сферические функции n-го порядка, обладают следующими свойствами:

1. Многочлены Лежандра являются коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции

$$\Phi(\alpha, x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-1/2}, \qquad (3.1.24)$$

которая называется производящей функцией многочленов Лежандра. Здесь разложение, как легко проверить, имеет вид

$$\Phi(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \qquad (3.1.25)$$

2. Многочлены Лежандра $P_n(x)$ и присоединённые функции Лежандра $P_n^{(k)}(\vartheta)$ ($n = 0,1,2,3,\ldots$; $k = 1,2,\ldots,n$) образуют ортогональную в промежутке (-1, +1) последовательность функций, то есть

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\vartheta) P_m(\vartheta)\, d\vartheta = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(k)}(\vartheta) P_m^{(k)}(\vartheta)\, d\vartheta = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}, & m = n \end{cases}$$

3. Для многочленов Лежандра справедлива формула сложения, определяющая значение многочлена от сложного аргумента. Если

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda - \lambda'),$$

то

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos\theta) P_n^{(k)}(\cos\theta') \cos k(\lambda - \lambda'),$$

где $\delta = 2$, $\delta_k = 1$ для всех $k = 1,2,\ldots,n$.

4. Всякая поверхностная сферическая функция n-го порядка может быть представлена формулой

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\vartheta)(A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda),$$

содержащей $(2n+1)$ произвольных постоянных A_{nk} и B_{nk}. Эту формулу легко преобразовать к виду

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{s=1}^{2n} a_{ns} Y_{ns}(\theta, \lambda),$$

где a_{ns} - постоянные коэффициенты, а $Y_{ns}(\theta, \lambda)$ - элементарные сферические функции

$$Y_{ns}(\theta, \lambda) = P_n^{(k)}(\cos\theta) \cos k\lambda, \qquad s \leq n, \quad (k = s)$$

$$Y_{ns}(\theta, \lambda) = P_n^{(k)}(\cos\theta) \sin k\lambda, \qquad s \geq n+1, \quad (k = s-n)$$

Очевидно, что на сфере единичного радиуса бесконечная последовательность функций

$$Y_0(\theta,\lambda)\ ,\quad Y_1(\theta,\lambda),\ \ldots,\ Y_n(\theta,\lambda),\ \ldots$$

образует ортогональную систему функций, то есть

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta,\lambda)\, Y_m(\theta,\lambda)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda = \begin{cases} 0\,, & n \neq m;\\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\sum\limits_{s=0}^{2n}\varepsilon_k a_{ns}^2 \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}\,, & n=m, \end{cases}$$

где $k=s$, если $s \leqslant n$ и $k = s-n$, если $s \geqslant n+1$.

5. Элементарные сферические функции $Y_{ns}(\theta,\lambda)$ можно классифицировать, проводя геометрическую интерпретацию на сфере единичного радиуса.

Элементарная сферическая функция $Y_{n0} = P_n(\vartheta)$ обращается в нуль при n неравных вещественных значениях $\vartheta = \cos\theta$, симметричных по отношению $\vartheta = 0$, то есть $\theta = \pi/2$. Поскольку, как указывалось выше, многочлен Лежандра $P_n(\vartheta)$ содержит только четные степени ϑ , если n четное, и нечетные, если n нечетное, то при нечётных n один из корней этого многочлена обязательно будет равен нулю, а остальные будут располагаться симметрично относительно его, как параллели сферы единичного радиуса (рис. 3.4. , а). При n четном все

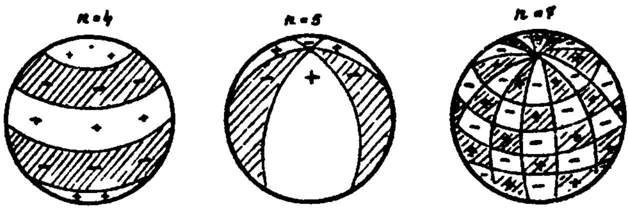

Рис. 3.4. Гармоники сферических функций: а) – зональные; б) – секториальные; в) – тессеральные .

n параллелей располагаются симметрично относительно $\vartheta = 0$. Параллелями, соответствующими корням многочлена, единичная сфера разбивается на $(n+1)$ сферических поясов или зон, причем при переходе из одной зоны в другую функции $Y_{n0}(\cos\theta)$ меняют знак. Вследствие этого функции, то есть многочлены Лежандра, называются зональными сферическими функциями.

Элементарные сферические функции

$$Y_{nn} = P_n^{(n)}(\gamma)\cos k\lambda,$$
$$Y_{n,2n} = P_n^{(n)}(\gamma)\sin k\lambda$$

обращаются в нуль на меридианах единичной сферы, долготы которых находятся из уравнений

$$\cos n\lambda = 0, \qquad \sin n\lambda = 0.$$

Меридианы разбивают поверхность сферы на $2n$ сферических секторов, внутри которых функции Y_{nn} и $Y_{n,2n}$ принимают попеременно положительные и отрицательные значения. Эти функции называются секториальными сферическими функциями.

Остальные элементарные сферические функции называются тессеральными сферическими функциями. Они попеременно принимают положительные и отрицательные значения в сферических четырёхугольниках, образуемых корнями их уравнений: им соответствуют $n-k$ параллелей и $2k$ меридианов на сфере единичного радиуса.

Для того чтобы получить выражение силовой функции произвольного тела в виде ряда по сферическим функциям, перейдём в (3.1.9) к сферическим координатам. Обозначим координаты притягиваемой точки единичной массы P через r, θ, λ, а произвольной точки M притягивающего тела r', θ', λ' (рис. 3.5).

Поскольку

$$x = r\sin\theta\cos\lambda; \quad y = r\sin\theta\sin\lambda; \quad z = r\cos\theta,$$
$$x' = r'\sin\theta'\cos\lambda'; \quad y' = r'\sin\theta'\sin\lambda'; \quad z' = r'\cos\theta',$$

то расстояние между точками P и M

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma},$$

где γ – угол, образованный радиусами-векторами точек P и M, и

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda') \tag{3.1.26}$$

Полагая $r > r'$ и используя свойство производящей функции многочленов Лежандра, можно записать

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma). \tag{3.1.27}$$

Ряд (3.1.27) сходится абсолютно для всех $0 \le \gamma \le \pi$. Если

$$\frac{r'}{r} < q < 1,$$

то остаточный член этого ряда

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(r')^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

с учётом того, что $|P_n(\cos\gamma)| < 1$ удовлетворяет неравенству

$$|R_m| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q^n}{r} = \frac{q^m}{r(1-q)}$$

и может быть сделан каким угодно малым соответствующим выбором m.

Учитывая (3.I.27), силовую функцию можно записать

$$U(r,\theta,\lambda) = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{(\tau)} (r')^n P_n(\cos\gamma)\rho\, d\tau . \qquad (3.I.28)$$

Так как по формуле сложения

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{K=0}^{n} \frac{2}{\delta_K} \frac{(n-K)!}{(n+K)!} P_n^{(K)}(\cos\theta) P_n^{(K)}(\cos\theta') \cos K(\lambda-\lambda') \qquad (3.I.29)$$

и является сферической функцией n-го порядка относительно координат θ и λ', то подставляя (3.I.29) в (3.I.28) и интегрируя по переменным r', θ', λ', мы снова получим сферическую функцию порядка n

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{K=0}^{n} P_n^{(K)}(\cos\theta)\left[A_{nK}\cos K\lambda + B_{nK}\sin K\lambda\right], \qquad (3.I.30)$$

в которой

$$A_{nK} = \frac{2}{\delta_K} \frac{(n-K)!}{(n+K)!} \int\limits_{(\tau)} (r')^n P_n^{(K)}(\cos\theta') \cos K\lambda' \rho\, d\tau ;$$

$$B_{nK} = \frac{2}{\delta_K} \frac{(n-K)!}{(n+K)!} \int\limits_{(\tau)} (r')^n P_n^{(K)}(\cos\theta') \sin K\lambda \rho\, d\tau$$

постоянные, величина которых зависит от структуры (распределения плотности) и ориентации тела в пространственной системе координат.

С учётом (3.I.30) силовую функцию тела можно записать

$$U(r,\theta,\lambda) = f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(K)}(\cos\theta)\left[A_{nK}\cos K\lambda + B_{nK}\sin K\lambda\right] \qquad (3.I.31)$$

или

$$U(r,\theta,\lambda) = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}} .$$

Если начало системы координат, в которой вычисляется потенциал тела, располагается в какой-либо точке этого тела, то ряд (3.I.3I) абсолютно и равномерно сходится во всех точках пространства вне сферы радиуса $\bar{r} > r'_{max}$, где r'_{max} – расстояние от начала координат до наиболее удалённой от него точки тела (рис. 3.5).

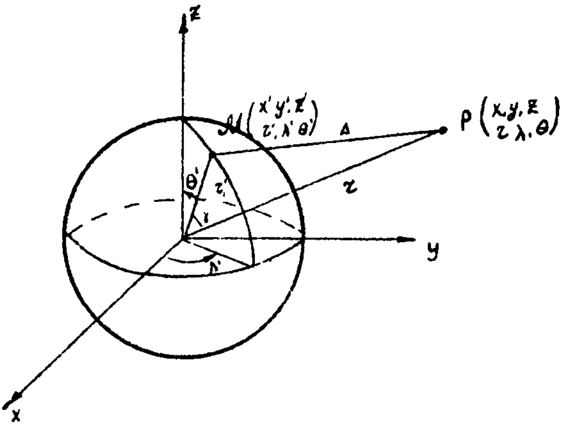

Рис. 3.5.

Действительно, если существует $\bar{r} > r'_{max}$, то представляя (3.I.3I) в виде

$$U(r,\theta,\lambda) = f\sum_{n=0}^{N} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}} + U_N(r,\theta,\lambda),$$

где

$$U_N(r,\theta,\lambda) = f\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{(\tau)} (r')^n P_n(\cos\gamma)\, \rho\, d\tau,$$

получим с учётом того, что

$$|P_n(\cos\gamma)| < 1 \qquad r' \leq \bar{r} \qquad \text{и} \quad \int_{(\tau)} \rho\, d\tau = m,$$

оценку остаточного члена

$$|U_N| \leq \frac{fm}{r - \bar{r}} \left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^N$$

При вычислении потенциала Земли формула (3.I.31) преобразуется к более удобному виду.

Учитывая, что

$$A_{00} = \frac{2}{2} \frac{0!}{0!} \int\limits_{(T)} (r')^0 P_0^{(0)} (\cos\theta') \cos 0\lambda \, \rho \, d\tau = m ,$$

и вводя обозначение

$$A_{n0} = m a^n J_n ,$$

где $a = 6378160$ м – экваториальный радиус Земли, (3.I.31) можно записать

$$U(r,\theta,\lambda) = \frac{f m}{r} \Big\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n (\cos\theta) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P_n^{(k)} (\cos\theta) \left[A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda \right] , \qquad (3.I.32)$$

где J_n – зональные; A_{nk} и B_{nk} – тессеральные моменты, большинство из которых в настоящее время вычислено по наблюдениям за движением космических аппаратов. Их значения приведены в табл.3.I и 3.2.

Таблица 3.I

Зональные моменты в разложении гравитационного поля Земли

Четные	Нечётные
$J_2 = 1082{,}645 \cdot 10^{-6} \pm 6$	$J_3 = -2{,}53 \cdot 10^{-6} \pm 2$
$J_4 = -1{,}649 \cdot 10^{-6} \pm 16$	$J_5 = -0{,}22 \cdot 10^{-6} \pm 4$
$J_6 = 0{,}646 \cdot 10^{-6} \pm 30$	$J_7 = -0{,}41 \cdot 10^{-6} \pm 6$
$J_8 = -0{,}270 \cdot 10^{-6} \pm 50$	$J_9 = 0{,}09 \cdot 10^{-6} \pm 6$
$J_{10} = -0{,}054 \cdot 10^{-6} \pm 50$	$J_{11} = -0{,}14 \cdot 10^{-6} \pm 5$
$J_{12} = -0{,}357 \cdot 10^{-6} \pm 47$	$J_{13} = 0{,}29 \cdot 10^{-6} \pm 6$
$J_{14} = 0{,}179 \cdot 10^{-6} \pm 63$	$J_{15} = -0{,}40 \cdot 10^{-6} \pm 6$

При решении задач динамики полёта в прямоугольной системе координат, в частности в экваториальной геоцентрической системе

Таблица 3.2

Тессеральные моменты в разложении гравитационного поля Земли

n	K	Гапошкин (1967)		Кёнлейн (1967)	
		$A_{nk}\cdot 10^6$	$B_{nk}\cdot 10^6$	$A_{nk}\cdot 10^6$	$B_{nk}\cdot 10^6$
2	2	3,38	-1,35	2,47	-1,34
3	1	1,94	0,27	1,95	0,28
3	2	0,73	-0,54	0,76	-0,56
3	3	0,56	1,62	0,51	1,59
4	1	-0,57	-0,47	-0,56	-0,46
4	2	0,33	0,66	0,40	0,66
4	3	0,85	-0,19	0,87	-0,21
4	4	-0,05	0,23	-0,01	0,34
5	1	-0,08	-0,10	-0,08	-0,09
5	2	0,63	-0,23	0,62	-0,22
5	3	-0,52	0,01	-0,57	-0,01
5	4	-0,26	0,06	-0,30	0,07
5	5	0,16	-0,59	0,07	-0,62
6	1	-0,05	-0,03	-0,03	-0,02
6	2	0,07	-0,37	0,09	-0,34
6	3	-0,05	0,03	0,00	0,03
6	4	-0,01	-0,52	-0,03	-0,45
6	5	-0,31	-0,46	-0,29	-0,44
6	6	-0,04	-0,16	0,03	-0,43

$OXYZ$, разложение силовой функции необходимо представлять в виде полиномов от x , y , z . Поскольку каждой сферической функции n-го порядка $Y_n(\theta,\lambda)$ соответствует однородный гармонический многочлен, содержащий, как и $Y_n(\theta,\lambda)$; $(2n+1)$ элементарных одночленов, то есть

$$Y_n(\theta,\lambda) = \frac{1}{r^n} U_n(x,y,z) , \tag{3.1.33}$$

то подставляя (3.1.33) в (3.1.31), можно записать для силовой функции разложение

$$U(x,y,z) = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x,y,z)}{r^{2n+1}} , \tag{3.1.34}$$

которое, как и (3.I.3I), сходится абсолютно и равномерно при всех $r > \bar{r}$. Для вычисления гармонических однородных многочленов $U_n(x,y,z)$ можно использовать следующий приём. Поскольку многочлен Лежандра $P(\cos\gamma)$ может быть представлен в виде

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{s}^{E(\frac{n}{2})} P_{ns} \cos^{n-2s}\gamma ,$$

где

$P_{ns} = (-1)^s \dfrac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!}$ – постоянные коэффициенты, $E(\frac{n}{2})$ – наибольшее целое число, содержащееся в $n/2$, то, обозначая

$$Q_n = r^n (r')^n P_n(\cos\gamma) ,$$

можно записать

$$Q_n = \sum_{s=0}^{E(\frac{n}{2})} P_{ns} (xx' + yy' + zz')^{n-2s} (r\,r')^{2s} \qquad (3.I.35)$$

Легко проверить, что каждый член суммы в правой части (3.I.35) есть однородный многочлен n – й степени относительно координат x, y, z и x', y', z'.

С учётом (3.I.35)

$$Y_n(\theta,\lambda) = \int_{(T)} (r')^n P_n(\cos\gamma)\,\rho\, d\tau = \frac{1}{r^n}\int_{(T)} Q_n(x,y,z,x',y',z')\,\rho\, d\tau = \frac{1}{r^n} U_n(x,y,z)$$

и, следовательно,

$$U_n(x,y,z) = \int_{(T)} Q_n\,\rho\, d\tau \qquad (3.I.36)$$

Практически построение силовой функции в виде разложения (3.I.34) происходит следующим образом. Для заданных значений $n =$ $= 0, 1, 2, \ldots$ определяются величины

$n = 0$: $\qquad Q_0 = P_0(\cos\gamma) = 1$;

$n = 1$: $\qquad Q_1 = rr' P_1(\cos\gamma) = xx' + yy' + zz'$;

$n = 2$: $\qquad Q_2 = (rr')^2 P_2(\cos\gamma) = (rr')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right)$,

. . . .

Используя формулу (3.I.36), вычисляются гармонические многочлены

$$U_0(x,y,z) = \int_{(T)} Q_0\,\rho\, d\tau = m ,$$

$$U_1(x,y,z) = \int_{(T)} Q_1 \rho\, d\tau = x\int_{(T)} x'\rho\, d\tau + y\int_{(T)} y'\rho\, d\tau + z\int_{(T)} z'\rho\, d\tau =$$

$$= (x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})\cdot m,$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ – координаты центра масс притягивающего тела. Очевидно, если начало координат совмещено с центром масс тела, то $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ и $U_1 = 0$

$$U_2(x,y,z) = \int_{(T)} Q_2 \rho\, d\tau = \frac{x^2}{2}\int_{(T)} (3x'^2 - r'^2)\rho\, d\tau + \frac{y^2}{2}\int_{(T)} (3y'^2 - r'^2)\rho\, d\tau +$$

$$+ \frac{z^2}{2}\int_{(T)} (3z'^2 - r'^2)\rho\, d\tau + 3xy\int_{(T)} x'y'\rho\, d\tau + 3xz\int_{(T)} x'z'\rho\, d\tau + 3yz\int_{(T)} y'z'\rho\, d\tau$$

Задача I. Выписать потенциал силы тяжести Земли в прямоугольной геоцентрической системе координат и составляющие силы по осям этой системы. Для однородного шара, для эллипсоида и др.

Если ввести моменты инерции второго порядка – осевые и центробежные, обозначив

$$A = \int_{(T)} (y'^2 + z'^2)\rho\, d\tau; \quad B = \int_{(T)} (z'^2 + x'^2)\rho\, d\tau; \quad C = \int_{(T)} (x'^2 + y'^2)\rho\, d\tau;$$

$$D = \int_{(T)} x'y'\rho\, d\tau, \quad E = \int_{(T)} x'z'\rho\, d\tau; \quad F = \int_{(T)} y'z'\rho\, d\tau,$$

то

$$U_2(x,y,z) = \frac{x^2}{2}(B + C - 2A) + \frac{y^2}{2}(C + A - 2B) + \frac{z^2}{2}(A + B - 2C) +$$

$$+ 3Dxy + 3Exz + 3Fyz$$

Если ввести момент инерции притягивающего тела относительно прямой, соединяющей начало связанной с телом системы координат с притягиваемой точкой

$$J = A\left(\frac{x}{r}\right)^2 + B\left(\frac{y}{r}\right)^2 + C\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 2D\frac{xy}{r^2} - 2E\frac{xz}{r^2} - \frac{yz}{r^2}2F,$$

то

$$U_2(x,y,z) = \frac{r^2}{2}(A + B - C - 3J) \cdot \qquad (3.1.37)$$

С учётом проведённых вычислений силовая функция тела, занимающего объём T, в прямоугольной системе координат запишется

$$U(x\,y\,z) = f\left\{\frac{m}{z} + \frac{m}{z^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \frac{1}{2z^3}(A + B + C - 3J) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{U_n(x\,y.z)}{z^{2n+1}}\right. \qquad (3.1.38)$$

Очевидно, что если начало системы координат совмещено с центром масс тела, то второй член разложения обращается в нуль.

Разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел можно получить, используя тот же прием, что и в случае разложения силовой функции произвольного тела конечных размеров. Свяжем с взаимодействующими телами, занимающими объёмы T_i (i = 1,2), системы координат $G\,x_i\,y_i\,z_i$, обозначив ξ_i, η_i, ς_i координаты точек G_i, а через ψ_i, θ_i, φ – углы Эйлера, определяющие ориентацию связанных систем координат относительно осей абсолютной системы $O\xi\eta\varsigma$.

На рис. 3.3 для наглядности в т. G_i перенесены оси абсолютной системы и обозначены линии узлов $G_i N$.

Обозначим x, y, z координаты т. M_2 тела T_2 в системе $G_1\xi\eta\varsigma$, положив

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Представим выражение силовой функции взаимного притяжения двух тел (3.1.12) в виде

$$U = f\int_{(T_2)} dm_2 \int_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta} = \int_{T_2} U_1(M_2)\, dm_2\,, \qquad (3.1.39)$$

где

$$U_1(M_2) = f\int_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta} \qquad (3.1.40)$$

есть силовая функция тела T_1 на материальную частицу единичной массы, расположенную в текущей точке M_2 тела T_2.

Если тела T_1 и T_2 не имеют общих точек, то учитывая (3.1.34), можно представить

$$U_1(M_2) = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n^{(1)}(x,y,z)}{z^{2n+1}}\,,$$

где $U_n^{(1)}(x\,y\,z)$ – элементарные гармонические многочлены относительно координат т. M_2, коэффициенты которых зависят от Ψ_1, ϑ_1, φ_1. Пусть абсолютные координаты т. M_2 : x_2', y_2', z_2'. Поскольку

$$x = x_2' - \xi_1\,, \quad y = y_2' - \eta_1\,, \quad z = z_2' - \zeta_1\,,$$

то $U_n^{(1)}$ можно рассматривать как многочлены относительно абсолютных координат т. C_1 с коэффициентами, зависящими от углов Эйлера Ψ_1, ϑ_1, φ_1.

В треугольнике $C_1 M_2 C_2$ обозначим

$$M_2 C_1 = r\,; \quad C_1 C_2 = R\,; \quad M_2 C_2 = r'\,, \quad \gamma = \angle R\, r'$$

Тогда

$$r = R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma$$

и

$$U_1(M_2) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(1)}(x,y,z)}{R^{2n+1}}\left[1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right]^{-(n+1/2)}. \tag{3.I.41}$$

Подставляя (3.I.41) в (3.I.39), выражение для разложения силовой функции U можно представить в виде

$$U = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(1,2)}}{R^{2n+1}}\,, \tag{3.I.42}$$

где коэффициенты ряда определяются соотношением

$$U_n^{(1,2)} = \int\limits_{(T_2)}\frac{U_n^{(1)}(x,y,z)\,dm_2}{\left(1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right)^{n+1/2}}\,, \tag{3.I.43}$$

и ряд сходится при всех

$$R > \bar{r}_1 + \bar{r}_2\,,$$

где $\bar{r}_1 = \max(\overline{C_1 M_1})$; $\bar{r}_2 = \max(\overline{C_2 M_2})$.

При вычислении коэффициентов (3.I.43), как правило, знаменатель представляется в виде ряда.

Пример. Найдём первые члены разложения (3.I.42) при условии, что R так велико по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, что членами порядка $1/R^3$ в нем можно пренебречь.

Используя выражения для потенциала тела, взаимодействующего с материальной точкой единичной массы, получим

$$U_c^{(1)}(x,y,z) = m_1;$$

$$U_1^{(1)}(x,y,z) = m_1(\bar\xi_1 x + \bar\eta_1 y + \bar\zeta_1 z);$$

$$U_2^{(1)}(x,y,z) = \frac{r^2}{2}(A_1 + B_1 + C_1 - 3\mathcal{Y}_1'),$$

где m_1 – масса тела T_1; $\bar\xi_1, \bar\eta_1, \bar\zeta_1$ – координаты его центра масс в системе координат $G_1\xi\eta\zeta$; A_1, B_1, C_1 – его моменты инерции относительно осей этой системы; $\mathcal{Y}_1'$ – его момент инерции относительно прямой G_1M_2'.

Используя формулу (3.I.43), получим

$$\frac{U_c^{(1,2)}}{R} = \frac{m_1}{R}\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_2}{\left(1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right)^{1/2}} = m_1\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_2}{r}$$

Если рассматривать полученное выражение в системе координат с началом в т. G_2, то оно представляет силовую функцию тела T_2 относительно материальной точки с массой m_1/ρ, расположенной в т. G_1, координаты которой относительно G_2 будут: $-\xi, -\eta, -\zeta$. Представляя это выражение в виде разложения силовой функции тела T_2, получим

$$\frac{U_0^{(1,2)}}{R} = \frac{m_2 m_1}{R} + \frac{m_2 m_1}{R^3}\left(-\xi\bar\xi_2' - \eta\bar\eta_2' - \zeta\bar\zeta_2'\right) + \frac{m_1}{2R^3}\left(A_2 + B_2 + C_2 - 3\mathcal{Y}_2\right) + \cdots,$$

где m_2 – масса тела T_2; $\bar\xi_2', \bar\eta_2', \bar\zeta_2'$ – координаты его центра масс в системе $C_2\xi\eta\zeta$; A_2, B_2, C_2 – его моменты инерции относительно осей этой системы; $\mathcal{Y}_2$ – его момент инерции относительно прямой G_1G_2.

Для вычисления второго члена разложения (3.I.42) представим

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = \int\limits_{(T_2)} \frac{U_1^{(1)}(x,y,z)\,dm_2}{r^3} = m_1\bar\xi_2\int\limits_{(T_2)}\frac{x\,dm_2}{r^3} + m_1\bar\eta_2\int\limits_{(T_2)}\frac{y\,dm_2}{r^3} + m_1\bar\zeta_2\int\limits_{(T_2)}\frac{z\,dm_2}{r^3}$$

Если перейти снова к системе координат $G_2\xi\eta\zeta$, в которой координаты т. M_2 обозначить $\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$, а т. G_1 соответственно $-\xi, -\eta, -\zeta$, то

$$\int\limits_{(T_2)}\frac{x\,dm_2}{r^3} = \int\limits_{(T_2)}\frac{(\xi_2'-\xi)}{r^3}dm_2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_2}{r};$$

$$\int\limits_{(T_2)} \frac{y\,dm_2}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{r}, \qquad \int\limits_{(T_2)} \frac{z\,dm_2}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial \zeta}\int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{r}$$

и поэтому

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = -\bar{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \bar{\eta}_2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \bar{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right),$$

где

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

При вычислении третьего члена разложения

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^3} = \int\limits_{(T_2)} \frac{U_2^{(1)}(x,y,z)\,dm_2}{r^5} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T_2)} \frac{(A_1 + B_1 + C_1 - 3J_1')}{r^3}\,dm_2,$$

ограничиваясь членами порядка $1/R^3$, получим

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^3} = \frac{1}{2R^3}\left[m_2(A_1 + B_1 + C_1) - 3\int\limits_{(T_2)} J_1'\,dm_2\right].$$

Так как

$$J_1' = J_1 \cos^2\alpha,$$

где α – угол между C_1C_2 и C_1M_2, а по условию R велико и, следовательно, угол α мал, то с принятой точностью можно положить

$$\int\limits_{(T_2)} J_1'\,dm_2 \cong m_2 J_1$$

Тогда

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^3} \approx m_2 \frac{A_1 + B_1 + C_1 - 3J_1}{2R^3},$$

и потенциал взаимного притяжения двух тел с принятой точностью может быть представлен в виде

$$U = f\frac{m_1 m_2}{R} + f m_1 \frac{A_2 + B_2 + C_2 - 3J_2}{2R^3} + f m_2 \frac{A_1 + B_1 + C_1 - 3J_1}{2R^3} + \ldots,$$

где для сокращения записи принято, что точки C_1 и C_2 совпадают с центрами масс тел.

Замечание. Вычисление разложения потенциала взаимодействия двух тел значительно упростится, если использовать для представления

$$r = \left(1 - 2\frac{r'}{R} + \frac{r'^2}{R^2}\right)^{-n+1/2}$$

ультрасферические многочлены, называемые также многочленами Гегенбауэра.

Эти многочлены, обозначаемые $G_p^{(n)}$, являются коэффициентами при α^p в разложении в степенной ряд функции

$$G^{(n)}(x,\alpha) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-(n+1/2)} = \sum_0^\infty \alpha^p G_p^{(n)}(x)$$

и фактически есть обобщение многочленов Лежандра. Они ортогональны в промежутке $[-1, +1]$ и для их вычисления можно использовать формулу

$$G_p^{(n)}(x) = \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p G^{(n)}(x,\alpha)}{d\alpha^p}\right]_{\alpha=0}.$$

При $p = 0$ и $p = 1$ получим соответственно

$$G_0^{(n)}(x) = 1; \qquad G_1^{(n)}(x) = (2n+1)x.$$

Для вычисления многочленов Гегенбауэра с более высокими номерами можно использовать рекуррентную формулу

$$(p+1)G_{p+1}^{(n)} = (2n+2p+1)x\,G_p^{(n)}(x) - (2n+p)G_{p-1}^{(n)}(x)$$

или выражения через гипергеометрическую функцию. Можно использовать также формулу

$$G_p^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{E(\frac{p}{2})} G_{ps}^{(n)} x^{p-2s},$$

где

$$G_{ps}^{(n)} = (-1)^s \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2p-2s-1)}{2^s s!(p-s)!}.$$

Используя ультрасферические многочлены, можно представить в (3.1.43)

$$\frac{1}{r^{2n+1}} = \frac{1}{R^{2n+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\psi),$$

и

$$U_n^{(1,2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{(T_2)} U_n^{(1)}(x,y,z) \left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma)\, dm_2$$

Поскольку

$$r' R \cos\gamma = -\xi(x-\xi) - \eta(y-\eta) - \zeta(z-\zeta) = R^2 - \xi x - \eta y - \zeta z ,$$

то

$$(r'R)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E(\frac{p}{2})} G_{ps}^{(n)} (r'R\cos\gamma)^{p-2s} r'^{2s} R^{2s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{E(\frac{p}{2})} G_{ps}^{(n)} (R^2 - \xi x - \eta y - \zeta z)^{p-2s} r'^{2s} R^{2s} = U_{np}^{(2)}(x,y,z)$$

Тогда

$$U_n^{(1,2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{U_{np}^{(1,2)}}{R^{2p}} ,$$

где

$$U_{np}^{(1,2)} = \int_{(T_2)} U_n^{(1)}(x,y,z)\, U_{np}^{(2)}(x,y,z)\, dm_2$$

Подынтегральная функция в последнем выражении есть многочлен относительно координат текущей точки M_2 тела T_2 и поэтому вычисление коэффициентов $U_{np}^{(1,2)}$ сводится к интегрированию многочленов.

Обычно задачи о потенциале притяжения Земли, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ относительно её оси, рассматриваются в жёстко связанной и вследствие этого неинерциальной системе координат. Поэтому на материальную точку P единичной массы со стороны вращающейся Земли помимо описанной выше силы притяжения действуют инерционные силы.

Если т. P неподвижна в инерциальной системе координат, то на неё действует центробежная сила инерции, направленная по перпендикуляру, опущенному из т. P на ось вращения (рис.3.6), и равная

$$\bar{F}_\omega = \omega^2 \boldsymbol{\rho} , \qquad (3.1.44)$$

где $|\rho|$ – расстояние от оси вращения до т. P .

В прямоугольной системе координат

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad F_\omega = \omega^2 \sqrt{x^2+y^2} ;$$

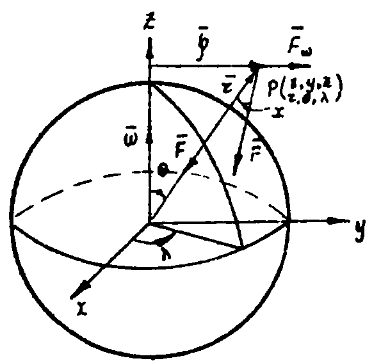

Рис. 3.6. Зависимость силы тяжести от центробежной силы инерции для сферической модели Земли

в сферической геоцентрической

$$\rho = r\sin\vartheta \qquad \text{и} \qquad F_\omega = \omega^2 r \sin\vartheta .$$

Соответственно потенциалы этих функций

$$Q_{(x,y)} = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \qquad \text{и} \qquad Q_{(r)} = \frac{\omega^2 r^2}{2}\sin^2\vartheta .$$

Последнюю формулу легко преобразовать к виду, в котором по - тенциал выражается через многочлены Лагранжа.

Действительно, заменяя

$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta ,$$

легко получить

$$Q_{(r)} = \frac{\omega^2 r^2}{3}\left[1 - P_2(\cos\vartheta)\right] . \qquad (3.1.46)$$

Равнодействующая силы земного притяжения $\bar{F}_n$ и центробежной силы инерции F_ω является силой тяжести

$$\bar{G} = \bar{F}_n + \bar{F}_\omega .$$

Потенциал силы тяжести с учётом закона независимости сил, очевидно, запишется

$$V = U + Q \,, \qquad (3.1.46)$$

а напряжённость поля силы тяжести, или, что то же самое, ускорение свободного падения, определится выражением

$$\bar{g} = \operatorname{grad} V = \operatorname{grad}(U + Q).$$

На поверхности Земли величина центробежной силы F_ω зависит от широты места, изменяясь от величины $F_\omega = 0$ на полюсах, где $\vartheta = 0, \pi$, а широта $\pm \pi/2$ до максимального значения $F_\omega = \omega^2 r$ на экваторе, где $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, а широта – 0. Вследствие этого величина и направление силы тяжести, так же как и ускорение свободного падения, зависят от широты на поверхности Земли.

Чтобы проиллюстрировать это, представим модель Земли в виде шара с постоянной или радиально распределённой плотностью. В этом случае геометрический центр модели совпадает с её центром масс, потенциал силы притяжения

$$U = f \frac{m}{r}$$

соответствует потенциалу материальной точки, обладающей массой Земли и размещённой в центре масс, а сила притяжения

$$\bar{F}_n = -f \frac{m}{r^3} \bar{r}$$

и направлена по радиусу-вектору т. P.

Сила тяжести $\bar{G}$ определяется как равнодействующая векторов $\bar{F}_n$ и $\bar{F}_\omega$ и отклоняется на угол η от радиуса-вектора $\bar{r}$, а её величина изменяется от $F_{max} = F_n$ на полюсе до $F_{min} = |\bar{F}_n| - |\bar{F}_\omega|$ на экваторе. Точно так же изменяется напряжённость её силового поля, то есть ускорение свободного падения.

Величину влияния центробежной силы инерции на силу тяжести для рассматриваемой модели легко оценить, сравнивая F_ω и F_n.

На поверхности Земли

$$|F_\omega|_{max} = \omega^2 R_3 = (7{,}292 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}371 \cdot 10^6 = 0{,}034 \; \frac{кгм}{с^2} \,,$$

$$|F_n| = f \frac{m}{R_3^2} = 9{,}822 \; \frac{кгм}{с^2}$$

Следовательно,

$$\frac{|F_\omega|_{max}}{|F_n|} = 0,0035 .$$

Таким образом, величина максимального значения центробежной силы инерции составляет не более 0,35% от силы притяжения шара с массой Земли. Эта величина характеризует величину угла η и изменение силы тяжести.

В общем случае, используя (3.I.32) и (3.I.45), потенциал силы тяжести можно записать

$$\vartheta = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos\theta) + \frac{a^3}{r^3}\frac{q}{3}\left[1 - P_2(\cos\theta)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda\right]\right\}, \qquad (3.I.47)$$

где

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fm} -$$

малый параметр.

Если в неинерциальной топоцентрической или экваториальной геоцентрической системе координат рассматривается движущаяся со скоростью $\vec{v}$ материальная точка единичной массы P, то на неё помимо силы тяжести действует сила Кориолиса

$$\vec{F}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v},$$

величина которой

$$|F_k| = 2\omega v \sin(\widehat{\vec{\omega}\vec{v}})$$

Потенциал силы тяжести, описываемый формулой (3.I.47), позволяет вычислить эту силу, её ускорение и их проекции на оси выбранной системы координат. Если обозначить составляющую силы тяжести по направлению радиуса-вектора, проведенного из центра Земли F_r, составляющую по направлению перпендикулярному r и расположенному в плоскости, перпендикулярной оси вращения Земли (ось Oz геоцентрической системы координат) F_r, и составляющую по направлению, перпендикулярному r и находящемуся в плоскости, проходящей через r и Oz – F_u, то

$$F_r = \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad F_\tau = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \lambda}, \qquad F_w = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}. \qquad (3.1.48)$$

Для вычисления проекций силы тяжести на оси экваториальной геоцентрической системы координат можно воспользоваться представлением потенциала Земли в виде разложения по гармоническим многочленам (3.1.38). Добавив к нему потенциал центробежной силы инерции, получим

$$V(x,y,z) = U(x,y,z) + Q(x,y) = f\left\{\frac{m}{r} + \frac{m}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{2f}(x^2+y^2) + \frac{1}{2r^3}(A+B+C-3J) + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{U_n(x,y,z)}{r^{2n+1}}\right\} \qquad (3.1.49)$$

Тогда

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; \qquad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (3.1.50)$$

Так как в формулы (3.1.47) и (3.1.49) не входит масса притягиваемого тела, то фактически формулами (3.1.48) и (3.1.50) определяются составляющие ускорения силы тяжести. Точность их вычисления, то есть количество используемых членов правых частей формул, зависит от характера решаемой задачи. Если дальность полёта составляет десятки километров, а высота траектории - сотни метров, то в решаемой задаче допустимо использование однородного поля силы тяжести, то есть поля, в котором сила тяжести и ускорение, создаваемое ей, остаются постоянными по величине и направлению по всей траектории. При расчёте траекторий с дальностью сотни и тысячи километров и высотой над поверхностью Земли десятки и сотни километров необходимо использовать потенциал с таким числом членов в правой части, чтобы влияние отброшенных членов не превосходило допустимой погрешности.

3.I.I. Модель Земли

При построении модели Земли определяется такая геометрическая фигура, поверхность которой наиболее близка к истинной, а распределение масс в этой фигуре с достаточной точностью соответствует определённому из опыта и обеспечивает вычисление достоверных массы и моментов инерции Земли.

Если бы Земля была жидкой планетой, то её поверхность при отсутствии атмосферных, гравитационных и т.п. возмущений определялась значением её внешнего потенциала силы тяжести. При этом на вид геометрической фигуры Земли влияли бы такие параметры, как распределение масс и угловая скорость вращения. Если обозначить V_0 - значение внешнего потенциала силы тяжести на поверхности жидкой Земли, то уравнение этой поверхности, называемой уровенной поверхностью, имело бы вид

$$V = V_0 = const \qquad (3.I.5I)$$

и описывало бы фигуру, называемую геоидом. Несмотря на то, что реальная Земля более чем на 2/3 состоит из твердого тела, в геофизике фигура Земли моделируется уравнением (3.I.5I) описывающим геоид. Поскольку почти три четверти поверхности Земли покрыто жидкостью, то поверхность этой жидкости при отсутствии атмосферных и гравитационных возмущений, вызывающих волны, приливы и отливы, совпадает с поверхностью геоида, а верхний слой материков располагается над поверхностью геоида.

При определении фигуры Земли, как и любой другой планеты, необходимо знать или иметь модель распределения плотности. Простейшая модель предполагает плотность постоянной, то есть планету однородной. В этом случае, если считать материал планеты, вращающейся с постоянной угловой скоростью идеальной несжимаемой жидкостью, то равновесной фигурой будет эллипсоид Маклорена, сжатие которого определяется из уравнения

$$e = \bar{e}\left(1 + \frac{3}{14}\bar{e} + \frac{21}{98}\bar{e}^2\right). \qquad (3.I.52)$$

где

$$\bar{e} = \frac{5}{4}m \quad ; \quad m = \frac{3\omega^2}{4\pi f \rho} \quad \text{- малый параметр;}$$

ρ - плотность жидкости; f - универсальная гравитационная постоянная.

За нулевое приближение фигуры неоднородной планеты, то есть планеты с произвольным распределением плотности, принимается сфера, соответствующая невращающейся гравитующей планете. Следует заметить, что силовая функция невращающейся сферической однородной планеты, как и планеты с радиальным распределением плотности ($\rho = \rho(r)$), вычисляется как силовая функция материальной точки, обладающей массой этой планеты

$$U = f\frac{m}{r} .$$

Первым приближением фигуры неоднородной Земли является эллипсоид вращения, называемый сфероидом Клеро, который ограничен эквипотенциальной поверхностью, определяемой разложением потенциала по сферическим функциям, если в нём учитываются члены, содержащие степень сжатия $e = \frac{a-b}{b}$ в первой степени. Во втором и третьем приближениях содержатся члены разложения соответственно порядка e^2 и e^3.

Чтобы получить эти приближения, запишем общее выражение для гравитационного потенциала в виде

$$U = f\frac{m}{r}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda\right]\right\}, \qquad (3.1.53)$$

где мультипольные моменты J_n, A_{nk}, B_{nk} вычисляются по формулам

$$m a^n J_n = -\int_{(T)} (r')^n P_n(t')\rho(r')\,d\tau';$$

$$m a^n A_{nk} = \frac{2(n-k)!}{(n+k)!}\int_{(T)} (r')^n P_n^{(k)}(t')\cos k\lambda'\,\rho(r')\,d\tau';$$

$$m a^n B_{nk} = \frac{2(n-k)!}{(n+k)!}\int_{(T)} (r')^n P_n^{(k)}(t')\sin k\lambda'\,\rho(r')\,d\tau';$$

$$d\tau' = (r')^2 d\lambda' \sin\theta' d\theta', \qquad m = \int_{(T)} \rho' d\tau', \qquad t' = \cos\theta'$$

У жидких вращающихся планет ось вращения всегда совпадает с одной из главных осей эллипсоида инерции. Если с этой осью сов -

местить ось Oz полярной системы координат, то в силу симметрии плотность не будет зависеть от азимутальной координаты λ, то есть $\rho = \rho(r', \theta')$, и, кроме того, есть четная функция угла θ'. Вследствие этого в разложение потенциала по сферическим функциям будут входить лишь обычные полиномы Лежандра с чётными индексами, так как при интегрировании по θ' обратятся в нуль J_n с нечётными индексами, а при интегрировании по λ' обратятся в нуль A_{nk} и B_{nk}. И, следовательно, для такой модели жидкой вращающейся планеты гравитационный потенциал не зависит от долготы и записывается в виде

$$U = \frac{2\pi f}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_{r'=0}^{\infty} \int_{t'=-1}^{1} \rho(r', t') P_n(t') \left(\frac{r'}{r}\right)^n (r')^2 \, dr' dt' ,$$

причём суммирование производится только по чётным n.

Если поместить начало координат в центр масс, а координатные оси совместить с главными осями инерции, то выражение для гравитационного потенциала U упростится. Обозначая координаты центра масс x_0, y_0, z_0 и учитывая, что

$$ma J_1 = -\int_{(T)} z \, dm = -m z_0 ;$$

$$ma A_{11} = \int_{(T)} x \, dm = m x_0 ;$$

$$ma B_{11} = \int_{(T)} y \, dm = m y_0 ,$$

получим $J_1 = A_{11} = B_{11} = 0$.

Вводя осевые и центробежные моменты инерции

$$A = \int_{(T)} (y^2 + z^2) \rho \, d\tau ; \quad B = \int_{(T)} (x^2 + z^2) \rho \, d\tau ; \quad C = \int_{(T)} (x^2 + y^2) \rho \, d\tau ,$$

$$D = \int_{(T)} yz \rho \, d\tau ; \quad E = \int_{(T)} xz \rho \, d\tau ; \quad F = \int_{(T)} xy \rho \, d\tau$$

и выражая присоединённые функции Лежандра при $n = 2$ через декартовы координаты, получим

$$-a^2 m J_2 = \frac{A + B}{2} - C , \quad a^2 m A_{22} = \frac{B - A}{4} , \quad D = a^2 m B_{21} ,$$

$$E = a^2 m B_{21} , \quad F = 2a^2 m B_{22} ,$$

что при нашем выборе системы координат даёт

$$B_{21}' = A_{21} = B_{22} = B_{21} = A_{21} = B_{22} = J_{21} = 0.$$

Для жидкой вращающейся планеты, у которой гравитационный потенциал не зависит от долготы, центробежный потенциал равен

$$Q(r, \cos\theta) = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{\omega^2 r^2}{2}\sin^2\theta = \frac{\omega^2 r^2}{3}\left[1 - P_2(\cos\theta)\right], \quad (3.I.54)$$

внешний потенциал силы тяжести будет

$$V = \frac{fm}{r}\left\{1 - \frac{a^2}{r^2}J_2 P_2 - \frac{a^4}{r^4}J_4 P_4 - \frac{a^6}{r^6}J_6 P_6 + \dots + \frac{r^3}{a^3}\frac{q}{3}(1 - P_2)\right\}, \quad (3.I.55)$$

где $q = \omega^2 a^3 / fm$ – параметр, имеющий для Земли один порядок с величиной сжатия.

Если жидкая вращающаяся планета находится в гидростатическом равновесии, то внутренние напряжения в ней равны гидростатическому давлению, а движение жидкости описывается уравнением Бернулли

$$\overline{grad}\, P = \rho\, \overline{grad}\, v.$$

Отсюда следует, что поверхности постоянного потенциала силы тяжести V являются поверхностями постоянного давления P и плотности ρ, если уравнение состояния вещества планеты имеет вид

$$P = P(\rho).$$

Чтобы найти для этого случая уравнение поверхности планеты, положим

$$V = V_0 = const$$

Тогда ($3.1.55$) можно записать

$$\frac{fm}{r}\left\{1 - \frac{a^2}{r^2}J_2 P_2 - \frac{a^4}{r^4}J_4 P_4 - \frac{a^6}{r^6}J_6 P_6 + \dots + \frac{r^3}{a^3}\frac{q}{3}(1 - P_2)\right\} = V_0 \quad (3.I.56)$$

На экваторе, где $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t = 0$,

$$V_0 = \frac{fm}{a}\left[1 + \frac{1}{2}J_2 - \frac{3}{8}J_4 + \frac{5}{16}J_6 + \dots + \frac{q}{2}\right] \quad (3.I.57)$$

Подставляя (3.1.56) в (3.1.57), получим неявное уравнение поверхности планеты, выраженное через параметр a. Решение такого уравнения отыскивается в виде разложения, в котором мы ограничимся величинами 3-го порядка малости, учитывая, что a имеет величину нулевого, q и J_2 – первого, J_4, J_2^2, q^2, qJ^2 – второго, J_6, J_2^3, qJ_2^2 – третьего порядка малости. Тогда

$$r = a(1 + a_0 + a_2 P_2 + a_4 P_4 + a_6 P_6 + \dots), \qquad (3.1.58)$$

где

$$a_0 = -\frac{\varepsilon}{2} - \left(\frac{\varepsilon^2}{15} - \frac{3}{8}J_4\right) + \left(-\frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{3}{7}\varepsilon^2 q - \frac{1}{7}\varepsilon q^2 - \frac{1}{4}\varepsilon J_4 + \frac{1}{4}qJ_4 - \frac{5}{16}J_6\right);$$

$$a_2 = -\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{7}\left(\frac{10}{3}\varepsilon^2 - 3\varepsilon q\right) + \frac{1}{7}\left(-8\varepsilon^3 + \frac{22}{3}\varepsilon^2 q - \frac{4}{3}\varepsilon q^2 - \frac{25}{4}\varepsilon J_4 - \frac{25}{24}J_4 q\right);$$

$$a_4 = -\left(\frac{16}{35}\varepsilon^2 - \frac{4}{7}\varepsilon q + J_4\right) - \frac{1}{77}\left(80\varepsilon^3 - 64\varepsilon^2 q + 18\varepsilon q^2 + 157\varepsilon J_4 + 18J_4 q\right);$$

$$a_6 = -\frac{1}{33}\left(16\varepsilon^3 - \frac{160}{7}\varepsilon^2 q + \frac{100}{7}\varepsilon q^2 + 80\varepsilon J_4 - 25J_4 q + 33J_6\right);$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}J_2 + \frac{q}{2} = J + \frac{q}{2} \qquad (3.1.59)$$

Существенной особенностью формул (3.1.58), (3.1.59) является наличие в них члена $-\frac{2}{3}\varepsilon P_2(t)$, определяющего в первом приближении отклонение планеты от сферы.

Введём величину сжатия планеты

$$e = \frac{a-b}{a},$$

где b – полярный радиус.

Этот параметр связан с величиной ε соотношением

$$e = \varepsilon\left(1 + \frac{3}{2}J_4 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{5}{8}J_4 + \dots \qquad (3.1.60)$$

Исследуем решение (3.1.58), которое определяет уравнение поверхности планеты, находящейся в гидростатическом равновесии, в виде разложения по полиномам Лежандра с точностью до членов 3-го порядка малости.

В нулевом приближении, очевидно, $r = a$ и фигура планеты является сферой.

В первом приближении, учитывая, что с точностью до величин первого порядка малости $e = \varepsilon$, и пренебрегая в (8) членами порядка e^2,

$$r = a\left[1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon P_2(t)\right] = a\left[1 - \frac{e}{\varepsilon} - \frac{2}{3} e P_2(t)\right] = a(1 - e\cos^2\theta) \qquad (3.I.61)$$

Уравнение (3.I.61) описывает фигуру, называемую сфероидом Клеро, которая широко применяется в геодезии.

В сферических координатах уравнение эллипсоида вращения с малой полярной осью b и экваториальными осями a имеет вид

$$r = a(1-e)\left[1 + (e^2 - 2e)\sin^2\theta\right]^{-1/2}. \qquad (3.I.62)$$

Разлагая (3.I.62) в ряд по величине сжатия e, уравнение эллипсоида можно записать

$$r = a\left[1 - e\cos^2\theta - \frac{3}{2}e^2\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{2}e^3\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta - 5\sin^2\theta\cos^2\theta) + \dots\right].$$

Заменяя в последнем выражении

$$\cos^2\theta = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P_2,$$

получим уравнение эллипсоида вращения в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r = a\left[1 - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{5} - \frac{2}{3}\left(e + \frac{3}{14}e^2\right)P_2 + \frac{12}{35}e^2 P_4 + \dots\right]. \qquad (3.I.63)$$

Сравнивая (3.I.61) и (3.I.63), легко заметить, что сфероид Клеро отличается от эллипсоида вращения членами порядка e^2 и выше. Значение потенциала силы тяжести на поверхности сфероида Клеро можно вычислить, если в (3.I.36) подставить r из (3.I.61) и в полученном выражении пренебречь членами второго порядка малости. Тогда

$$V_0 = \frac{fm}{a}\left(1 + \frac{3}{2}J_2 + \frac{q}{2}\right) = \frac{fm}{a}\left(1 + \frac{e}{3} + \frac{q}{3}\right) \qquad (3.I.64)$$

Внешний потенциал силы тяжести сфероида Клеро, очевидно, будет

$$V = \frac{fm}{r}\left[1 - 3\frac{a^2}{r^2}\left(e - \frac{q}{2}\right)(3\cos^2\theta - 1) + \frac{r^3}{a^3}\frac{q}{2}\sin^2\theta\right] \cdot \qquad (3.1.65)$$

Составляющие вектора напряжённости поля в сферических координатах равны

$$g_r = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{fm}{r^2}\left[1 - \left(e - \frac{q}{2}\right)(3\cos^2\theta - 1) + \frac{r^3 q}{a^3}\sin^2\theta\right],$$

$$g_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{fm}{r^4}a^2\left(e - \frac{q}{2} + \frac{r^5}{a^5}q\right)\sin\theta\cos\theta$$

и на поверхности сфероида Клеро, то есть при

$$r = a(1 - e\cos^2\theta),$$

принимают значения

$$g_{r_0} = -\frac{fm}{a^2}\left[1 + e - \frac{3}{2}q + \left(\frac{5}{2}q - e\right)\cos^2\theta\right],$$

$$g_{\theta_0} = \frac{fm}{a^2}(2e + q)\sin\theta\cos\theta$$

Значение силы тяжести, отнесённое к единице массы, или, что то же самое, величина ускорения силы тяжести на сфероиде Клеро, вычисленное с точностью до величин первого порядка малости, имеет вид

$$g_0 = g_e(1 - \beta\cos^2\theta), \qquad (3.1.66)$$

где

$$\beta = \frac{5}{2}q - e\,, \qquad g_e = \frac{fm}{a^2}\left(1 + e - \frac{3}{2}q\right)$$

и означает значение силы тяжести на экваторе, то есть при $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Величина β называется коэффициентом Клеро. При вычислениях принимается

$$\beta = 0{,}0052800I, \qquad g_e = 9{,}78034\ \text{м/с}^2.$$

Вектор $\bar{g}$ направлен внутрь планеты и отклоняется от направления радиуса-вектора на угол α

$$tg\,\alpha = \frac{g_\theta}{|g_r|} = (2e + q)\sin\theta\cos\theta$$

и для Земли $\alpha_{max} \cong 10'$.

Если в (3.I.68) сохранить члены второго порядка малости, то уравнение будет описывать фигуру планеты, находящейся в гидростатическом равновесии, называемую стандартным сфероидом второго приближения

$$r = a\left[1 - e\cos^2\theta - \left(\frac{3}{8}e^2 + \kappa\right)\sin^2 2\theta\right], \qquad (3.I.67)$$

где $\kappa > 0$ - величина второго порядка малости и может быть, как и сжатие e, выражена через мультипольные моменты

$$e = \frac{3}{2}J_2 + \frac{q}{2} + \frac{9}{4}J_2^2 + \frac{3}{4}qJ_2 - \frac{1}{4}q^2 + \frac{5}{8}J_4,$$

$$\kappa = \frac{3}{32}q^2 - \frac{63}{42}J_2^2 - \frac{3}{8}qJ_2 - \frac{35}{32}J_4 \qquad (3.I.68)$$

С точностью до малых второго порядка малости ускорение силы тяжести на поверхности Земли может быть вычислено по формуле

$$g_0 = g_\theta\left(1 + \beta\sin^2\varphi_r - \beta_1\sin^2 2\varphi_r\right),$$

где

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}q - \frac{17}{14}\alpha q, \qquad \beta_1 = \frac{5}{8}\alpha q - \frac{1}{8}\alpha^2,$$

в частности,

$$g_0 = 9{,}78049\left(1 + 0{,}0052884\sin^2\varphi_r - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi_r\right)\ \frac{м}{с^2}$$

Геоид, моделирующий фигуру Земли, можно построить в два приближения следующим образом. За первое приближение принимается в соответствии с принятым критерием основная фигура отсчёта - нормальная фигура, относительно которой вычисляются отклонения геоида. Наилучшей нормальной фигурой является, очевидно, та, для которой отклонения от геоида являются наименьшими. Лучше других простых геометрических фигур этому условию удовлетворяет эллипсоид вращения, называемый референц-эллипсоидом. Для его построения потенциал силы тяжести на поверхности Земли V, равный сумме внешнего гравитационного потенциала U_0 и центробежного $Q = \frac{\omega^2 r^2}{3}\left[1 - P_2(t)\right]$, записывается в виде суммы его главной части V называемой нормальным потенциалом, и возмущения T, то есть

$$V = V' + \ldots \qquad (3.I.69)$$

При этом в главную часть включается центробежный потенциал Q и основная часть внешнего гравитационного потенциала

$$U_{oe} = \frac{fm}{a}\left\{\frac{a}{r} - \frac{a^2}{r^2} J_2 P_2(t) - \frac{a^4}{r^4} J_4^* P_4(t)\right\}, \quad . \tag{3.1.70}$$

то есть

$$V_o = U_{oe} + Q .$$

Величина возмущения определяется

$$T = U - U_{oe} = -\frac{fm}{r}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 J_3 P_3 + (J_4 - J_4^*)\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4 + \sum_{n=5}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n -\right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{nm}(A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda)\right. . \tag{3.1.71}$$

Величина J_4^* в (3.1.71) выбирается так, чтобы при $r = a$ эллипсоид вращения с точностью порядка e^3 был эквипотенциальной поверхностью для нормального потенциала. Этот эллипсоид принято называть референц-эллипсоидом и использовать как первое приближение при построении геоида. Очевидно, что значение J_4^* отличается от истинного зонального момента J_4, определяемого (по наблюдениям) при помощи космических аппаратов.

Величины, входящие в выражение для нормального потенциала, могут быть вычислены, если известен зональный момент J_2. Тогда

$$e = \frac{a-b}{a} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2} + \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{15}{28} J_2 m - \frac{39}{56} m^2 ; \tag{3.1.72}$$

$$m = \frac{a\omega^2}{\gamma_e} ,$$

$$\gamma_e = \left(\frac{fm}{a^2}\right)\left(1 - \mu_a + \frac{3}{2} J_2 - m + \frac{27}{8} J_2^2 - \frac{6}{7} J_2 m + \frac{47}{56} m^2\right),$$

где ω - угловая скорость вращения Земли; $\mu_a = 10^{-6}$ - относительная масса атмосферы; γ_e - ускорение силы тяжести для нормального потенциала на экваторе.

Если положить

$$J_2 = 1{,}08264 \cdot 10^{-3},$$

$$a = 6378160 \text{ м},$$

$$GM = 398601 \cdot 10^{9} \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$\omega = 0{,}0000729211 \text{ с}^{-1},$$

$$\mu_a = 10^{-6},$$

то, полагая в первом приближении

$$\gamma_e = \frac{fm}{a^2},$$

применяя последовательные приближения к формулам (3.1.72), можно найти

$$\gamma_e = 9{,}78028 \text{ м/с}^2;$$

$$m = 0{,}00346778;$$

$$e = 0{,}00335280 = \frac{1}{298{,}258};$$

$$\gamma_4^* = -\frac{4}{5}e^2 + \frac{4}{7}me = -2{,}35 \cdot 10^{-6}.$$

§ 3.2. Атмосфера Земли

Атмосфера - это газообразная оболочка Земли. Ее масса оценивается в $5{,}157\cdot10^{18}$ кг и составляет около одной миллионной от массы Земли ($5{,}98\cdot10^{24}$ кг). Толщина слоя атмосферы принимается равной 60-70 тысяч км. Предполагаемой верхней границей считается поверхность, на которой плотность атмосферы совпадает с плотностью межпланетной среды. Основная часть массы атмосферы сосредоточена в тонком слое у поверхности Земли: приблизительно 50 % массы располагается в слое до высоты 5 км, 75 % - до высоты 10 км, 90% - до высоты 16 км, 95 % - до 20 км и менее одной миллионной - выше 100 км.

В атмосфере имеются жидкие и твёрдые взвешенные частицы - аэрозоли. Первые - это облака и туманы, вторые - частицы пыли, дыма, продукты деятельности человека. Кроме этого в атмосфере существуют неоднородности в виде дождей, снегопадов, выпадения града, потоки микрометеоритов.

Атмосфера находится в непрерывном движении. Она участвует во вращательном движении Земли относительно Солнца и своей оси и совершает под влиянием лучевой энергии Солнца и взаимодействия с земной поверхностью сложное движение относительно последней.

Количественно состояние атмосферы характеризуется метеорологическими величинами: температурой, давлением, плотностью и влажностью воздуха; скоростью и направлением ветра; количеством, высотой и толщиной облаков; интенсивностью осадков; водностью туманов, облаков и осадков и др.

Основные параметры атмосферы - химический состав, плотность, температура и давление газовой составляющей, а также динамические процессы в ней с учетом наличия аэрозолей-оказывают существенное влияние на движение летательных аппаратов. Все эти параметры в той или иной степени изменяются во времени и пространстве. Поэтому при расчёте траектории движения летательных аппаратов используется метеорологическое обеспечение, осуществляемое с помощью постоянно действующей сети метеорологических станций.

Механическую смесь газов, входящих в состав атмосферы, принято называть воздухом. До высоты приблизительно 95 км воздух, благодаря перемешиванию, осуществляемому за счет изменения скорости ветра с высотой, горизонтальным и вертикальным течениям, а также турбулентности, имеет практически постоянный газовый состав. Выше 95 км в слоях, где в основном поглощается радиация Солнца и происляется процесс гравитационного разделения газов; состав воздуха существенно изменяется. В большом количестве появляются атомарные составляющие, происходят процессы диссоциации и ионизации. Под действием солнечной радиации с длиной волны менее 0,24 мкм на высотах более 100 км происходит диссоциация кислорода. В слое 100-150 км наблюдаются ионы окиси азота (NO^+), атомарного (O^+) и молекулярного (O_2^+) кислорода. Выше 150 км быстро растёт относительное число ионов (O^+), с высоты 250 км появляются ионы атомарного азота (N^+). Число ионов в слое 100-1000 км составляет 10^5 - 10^6 частиц в 1 см^3. Но доля ионов в этом слое воздуха невелика: на высоте 300 км она составляет 0,1 %, на высоте 800 км - менее 10 %. Только выше 2000-3000 км наступает высокая степень ионизации. Разреженная ионосфера (около 1000 частиц в 1 см^3) простирается до высоты 20-30 тыс.км и затем постепенно становится межпланетным газом с числом частиц менее 100 в 1 м^3.

Слой воздуха, в котором сохраняется постоянный газовый состав (до 95 км), называется гомосферой, слой с переменным составом - гетеросферой (выше 95 км). Газовую смесь, в состав которой не входит водяной пар, называют сухим воздухом. Его средний объёмный состав в гомосфере приведён в табл. 3.3.

Газовый состав атмосферы изменяется в результате производственной деятельности человека. Так содержание CO_2 возросло от 0,029 % в 1900 г. до 0,033 % в 1960 г. Увеличивается содержание метана, сернистого газа, окиси углерода и др.

3.2.1. Слои атмосферы

Основные параметры атмосферы, будучи функциями времени, значительно изменяются вдоль поверхности Земли и по высоте над ней. Изменения по вертикали, как правило, проявляются более резко. Поэтому при описании атмосферы её делят по высоте на слои, характеризующие характер изменения выбранного параметра. Наиболее отчётливо разделение по слоям проявляется, если в качестве критерия выбрана температура. При определении влияния атмосферы на движение летательных аппаратов температура, связанная простой зависимостью со скоростью звука, определяет дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой режимы обтекания, а также влияние сжимаемости воздуха на величину сопротивления.

По характеру распределения температуры с высотой атмосфера делится на пять основных слоев: тропосферу, стратосферу, мезосфе-

Таблица 3.3

Состав сухого воздуха

Газ	Молекула	Объёмное содержание, %	Относительная молекулярная масса	Ионизационный потенциал	Критические параметры	
					темпер., °К	давление, атм
Азот	N_2	78,084	22,0134	15,58	126,2	33,5
Кислород	O_2	20,946	31,9988	12,08	154,8	50,1
Аргон	A	0,934	39,948	15,76	150,6	48,0
Углекислый газ	CO_2	0,033	44,00995	13,79	304,2	72,9
Неон	Ne	$1,818 \cdot 10^{-3}$	20,183	21,56	45,0	26,8
Гелий	He	$5,239 \cdot 10^{-4}$	4,0026	24,58	5,1	2,26
Криптон	Kr	$1,14 \cdot 10^{-4}$	83,800	14,00	209,3	54,9
Водород	H_2	$5 \cdot 10^{-5}$	2,016	15,43	33,3	12,8
Ксенон	Xe	$8,7 \cdot 10^{-6}$	131,300	12,13	289,7	58,2
Озон	O_3	$10^{-5} - 10^{-6}$	47,998	12,80	261,1	54,6
Метан	CH_4	$(1,2-1,5) \cdot 10^{-4}$		12,99	191,1	45,8
Закись азота	N_2O	$5 \cdot 10^{-5}$		12,90	309,7	71,7

ру, термосферу и экзосферу (рис. 3.7). Тропосфера – нижний слой атмосферы, характерной особенностью которого является падение температуры с высотой. Среднее значение температурного градиента приблизительно – 6,5 град/км, хотя может изменяться в зависимости от времени года и географических координат в очень широких пределах, от отрицательных значений порядка десятка градусов на километр до таких же положительных значений. Верхняя граница тропосферы, определяемая поверхностью, с которой начинается резкое уменьшение градиента температуры, изменяется по земным поясам. В поясе, заключённом между 42° с.ш. и 42° ю.ш., её средняя высота 15–18 км, в умеренных широтах – приблизительно 11 км, в полярных – около 8 км. В тропосфере сосредоточена основная масса атмосферы – от 75 % в умеренных и высоких широтах до 90 % в низких – и почти весь водяной пар. Разность температур и давлений атмосферы по поверхности Земли способствует образованию в тропосфере горизонтальных течений холодного и тёплого воздуха, которые иногда отделяются друг от друга чёткими границами – фронтами. Восходящие течения, фронты и другие физические явления, происходящие в тропосфере, порождают туманы, облака, осадки, грозовую деятельность.

Слой тропосферы, толщиной 1,0–1,5 км, в котором происходит активный обмен энергией и массой между атмосферой и поверхностью

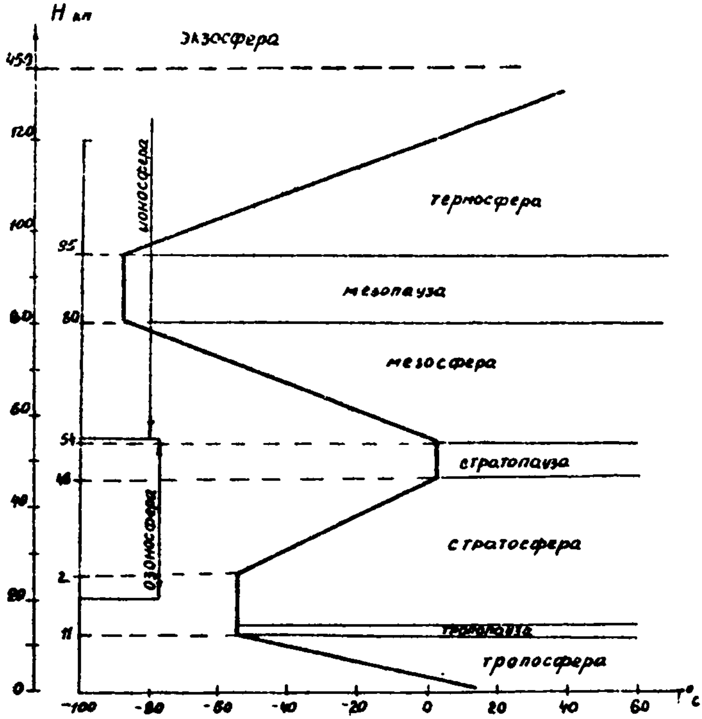

Рис.3... Стандартное распределение температуры по высоте

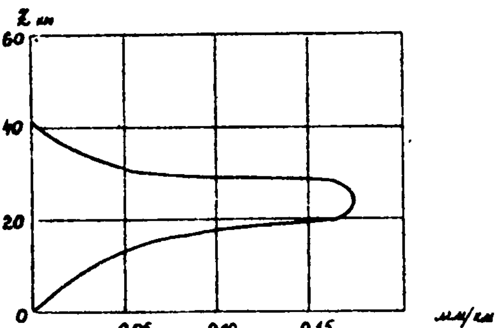

Рис.3 3. Вертикальное распределение приведенной толщины озона

Земли, называется планетарным пограничным слоем. Его нижнюю часть, толщиной около 50 м, в которой наибольшие вертикальные градиенты температуры, влажности и скорости ветра, принято называть приземным слоем атмосферы.

Сверху тропосфера ограничивается слоем, называемым тропопаузой. Её толщина в зависимости от условий места и времени изменяется от нескольких сот метров до 1–2 км. Вертикальный температурный градиент в тропопаузе близок к нулю. Температура тропопаузы T_H зависит от её высоты, то есть толщины тропосферы H , и описывается формулой

$$T_H = T_o - \gamma H ,$$

в которой T_o – температура вблизи земной поверхности; γ – средний по высоте температурный градиент.

Выше тропопаузы располагается слой, называемый стратосферой. В умеренных широтах в среднем этот слой занимает по высоте область от 11 до 50 км . В нижней его части, до высоты $\approx$ 25 км, усреднённая температура практически не изменяется с высотой. Выше, в слое 25–46 км,температура достаточно быстро растёт со средним градиентом,приблизительно равным 2,8 град/км. На верхней границе и в стратопаузе – переходном слое, отделяющем стратосферу от мезосферы,– средняя температура близка к 0° С с возможными отклонениями $\pm 20^{\circ}$. Высокая температура стратосферы и её рост в слое 25–46 км определяются поглощением ультрафиолетовой радиации озоном.

При существующем в стратосфере распределении температуры отсутствуют условия для вертикальных течений воздуха. Влажность воздуха в стратосфере мала; газовый состав отличается от тропосферного наличием озона.

Мезосфера – слой атмосферы, располагающийся над стратосферой (средняя высота в умеренных широтах 54–80 км), характеризуется падением температуры со средним градиентом $\gamma \approx 3,5$ град/км. На верхней границе этого слоя средняя температура ≈ 180 К.

В мезопаузе – переходном слое от мезосферы к термосфере,располагающемся на высоте 80–95 км,–температура воздуха изменяется очень медленно до величины $\approx$ 183 К, а затем – в термосфере – растёт с высотой в основном за счёт поглощения солнечной радиации кислородом, который при этом диссоциирует.

Выше термосферы, с высоты $\approx$450 км, располагается внешний слой атмосферы, называемый экзосферой. Верхняя граница этого слоя определяется условием равенства плотностей воздуха экзосферы и межпланетного газа. Из этого слоя происходит диссипация воздуха, в основном водорода и гелия, в межпланетное пространство.

С высоты 50-60 км в атмосфере быстро растёт количество ионизованных атомов и молекул. Поэтому слой, располагающийся выше этого уровня, называется ионосферой. Внешняя часть атмосферы, где взаимные столкновения атомов и молекул редки и степень ионизации воздуха велика, является радиационным поясом Земли.

Другой существенной характеристикой атмосферы является зональное распределение температуры, то есть построение такого поля, в котором температура является функцией географической широты и высоты над уровнем моря и не зависит от долготы.

В метеорологии принято горизонтальную и вертикальную проекции градиента любой метеорологической величины называть горизонтальным и вертикальным градиентом и считать соответствующий градиент положительным, если эта величина убывает с ростом высоты или расстояния соответствующего направления. Следовательно, горизонтальный градиент зональной температуры в тропосфере зимой и летом направлен от экватора к полюсам. Зимой среднее понижение температуры от экватора к полюсам примерно одинаково в обоих полушариях: 35-50^{0} С в нижней и 25-30^{0} С в верхней тропосфере. Летом, в южном полушарии, эта разность достигает 26^{0} С в нижней и 20^{0} С в верхней тропосфере и значительно ниже соответствующих величин в северном полушарии.

В стратосфере, зимой, горизонтальный градиент направлен от умеренных широт в сторону экватора и полюсов, летом – от полюсов к экватору.

Под влиянием разности температур атмосферы полярных и экваториальных широт возникает градиент давления вдоль меридиана от экватора к полюсам. На не вращающейся Земле в связи с этим возникло бы движение воздуха вдоль этого градиента. Возникающая за счёт вращения Земли сила Кориолиса изменяет направление движения воздуха и под действием двух сил устанавливается режим, соответствующий движению с запада на восток в северном полушарии и с востока на запад в южном.

В тропосфере скорость западного ветра с высотой увеличивается, достигая максимального значения $\approx$110 м/с около тропопаузы. В стратосфере, где горизонтальный градиент имеет противоположное направление, скорость западного ветра быстро убывает и на высоте 15-25 км достигает минимума. Выше этой области, называемой ветропаузой, над всем северным полушарием преобладает восточный ветер.

3.2.2. Изменение состава воздуха с высотой

Динамические и термодинамические процессы, происходящие под влиянием поступающей в атмосферу от Солнца и Земли энергии, сопровождаются химическими реакциями, диссоциацией и ионизацией газов, входящих в состав воздуха.

Азот N_2, будучи инертным, практически не участвует в химических превращениях и поглощении энергии в гомосфере. Обладая высоким (9,76 эВ) потенциалом диссоциации, молекулы азота начинают распад на атомы на высотах свыше 100 км. Но степень диссоциации очень мала и слабо увеличивается с высотой, так что на высотах более 1000 км ещё существует молекулярный азот.

Кислород O_2, поглощая радиацию Солнца, диссоциирует уже в гомосфере. На высоте 20 км над широтой 25° в летний день существует $\approx 8 \cdot 10^5$ атомов кислорода в 1 см^3. Степень диссоциации растёт с высотой. Атомы кислорода, возбуждённые вследствие поглощения солнечной энергии, соединяясь с молекулой кислорода с отдачей избыточной энергии молекуле инертного газа, чаще азота, образуют молекулы озона O_3, газа, играющего значительную роль в физических процессах, происходящих в атмосфере. Существует также гипотеза об образовании озона путём соединения возникающего при испарении аэрозольных частиц радикала OH с водяным паром и кислородом O_2 ($OH + H_2O + O_2 + M \longrightarrow O_3 + H_3O + M$, где M - нейтральная частица), объясняющая увеличение озона в атмосфере при фёне, рассеивании тумана, низкой облачности и т.п.

Озон наблюдается в слое атмосферы от 0 до 70 км, но основное его количество содержится на высотах 20–50 км. Количественно содержание озона характеризуется величиной x, измеряемой в мм и определяющей высоту столба, который образовался бы, если бы озон был выделен из атмосферы и приведён к нормальному давлению (1013,2 гПа) и температуре 0° С. Эту величину называют приведённой толщиной слоя озона, или общим количеством озона.

Общая масса озона в атмосфере составляет около $3{,}2 \cdot 10^{12}$ кг.

Образование озона в основном происходит выше 25 км. В нижние слои он поступает вследствие вертикальных течений и турбулентного перемешивания. Его плотность минимальна у земной поверхности и на высоте около 70 км и максимальна на высотах 18–26 км. Типичное вертикальное распределение приведённой толщины слоя озона изображено на рис. 3.8.

Приведённая толщина слоя озона значительно изменяется в те -

чение года и зависит от географической широты. Общая закономерность состоит в том, что с увеличением широты (в обоих полушариях) величина η увеличивается. Наименьшие значения η наблюдаются в поясе 7-23° с.ш. (2,60 мм), наибольшие – в поясах 70-75° с.ш. и 50-60° ю.ш. Годовой ход приведённой толщины слоя озона изменяется с широтой. Однако для всех широт максимальные значения наблюдаются весной, минимальные – осенью и зимой; с увеличением широты происходит сдвиг времени наступления максимума на поздние месяцы. В полярных широтах осенью и зимой, когда отсутствует солнечная радиация, содержание озона минимально.

Озон практически полностью поглощает солнечную радиацию с длинами волн 0,22-0,29 мкм (ультрафиолетовая область) на высотах 45-50 км и значительно ослабляет действие биологически активного спектра (0,29-0,32 мкм), сохраняя тем самым неизменными существующие биологические процессы на Земле.

Количество озона в атмосфере определяется в основном годовыми изменениями солнечной радиации и переноса его воздушными течениями. Кроме этого оно зависит от влажности воздуха, наличия в нём "свободных радикалов" (OH, HO_2 и др.), окиси NO и двуокиси NO_2 азота, "фреона" (смешанных фторхлоридов метана и этана) и других химических реагентов, оказывающих разрушительное действие на озон. Скорость разрушения озона существенно зависит от температуры, возрастая с увеличением последней. Равновесная концентрация озона определяется температурой: чем ниже температура, тем выше равновесная концентрация и наоборот.

В настоящее время в результате антропогенного воздействия возникла серьёзная угроза существованию озонового слоя. Основную опасность для него представляют фреоны, стойкие хлорфторуглеродные соединения, используемые в холодильниках, кондиционерах, в аэрозольных упаковках красок, лаков и др. Достигая за счёт турбулентных движений в атмосфере стратосферного слоя, фреоны под действием солнечной ультрафиолетовой радиации распадаются. Получающийся при этом чистый хлор существенно усиливает процесс естественного разрушения озона. Этот процесс считается причиной появления над Антарктидой озоновой "дыры", то есть области, в которой весной содержание озона уменьшается почти вдвое. Существенное уменьшение озона в атмосфере в течение последних лет побудило ряд стран ввести запрет на применение фреона в аэрозольных упаковках.

Углекислый газ CO_2, составляющий по объему 0,035 %, неравномерно распределён по поверхности Земли и по высоте. Он активно участвует в процессах поглощения и излучения тепла в атмосфере, поглощается растениями и поверхностными водами океана, выделяется при сжигании топлива и в различных производственных процессах. Так как растворимость CO_2 в поверхностном слое океана убывает с ростом температуры, то в тропиках его концентрация больше, чем в полярных широтах на 2-3 ppт. Кроме того, в летний период концентрация CO_2 в северном полушарии уменьшается на 5-6 ppт вследствие поглощения его растениями.

Из-за выбросов продуктов производства происходит ежегодное увеличение CO_2 в атмосфере на величину порядка 10^{10} т. Длительное накопление CO_2 в атмосфере может создать "парниковый эффект", то есть условия для задерживания отдачи с поверхности Земли в космос тепловой энергии, вследствие чего наступит повышение температуры на поверхности Земли и в приземном слое. Распределение CO_2 с высотой неравномерно, его содержание в стратосфере на 3-5 ppт меньше, чем в тропосфере. Причина этого - активное участие CO_2 в процессах теплообмена в атмосфере, его поглощение и образование в поверхностном слое Земли.

В незначительных количествах в атмосфере присутствуют соединения углерода: окись углерода CO и метан CH_4, являющиеся продуктами биохимических природных процессов и производственной деятельности человека.

Молекулярный водород H_2 в основном содержится в атмосфере до высоты 75 км. Выше существует атомарный водород, образующийся за счет диссоциации молекул H_2 и проникающих в атмосферу протонов, выброшенных вспышками и активными областями Солнца, и фокусируемыми магнитным полем Земли. В зависимости от температуры воздуха и активности Солнца в поясе 450-770 км над поверхностью океана происходит диссипация атомарного водорода, а также гелия и других газов из атмосферы.

Из инертных газов наиболее распространён в атмосфере аргон А, который непрерывно поступает из литосферы, где образуется за счёт радиоактивного превращения. Остальные инертные газы: неон (Ne), гелий (He), криптон (Kr), ксенон (Xe) - присутствуют в атмосфере в очень малом количестве. В I $м^3$ воздуха содержится 18 мл неона, 5 мл гелия, 1 мл криптона и 0,09 ксенона. Все эти газы одноатомны и обладают, как видно из табл.3.3, высоким ионизационным потенциалом. Поэтому при определении влияния на величину сопротивления движению летательного аппарата с высокой степенью точности их можно считать идеальным газом.

3.2.3. Влажность воздуха

Существенно влияет на свойства атмосферы водяной пар, который активно участвует в процессах теплообмена, создает условия для образования облаков и осадков. Ежегодно с поверхности Мирового океана ($361 \cdot 10^6$ км^2) и суши ($149 \cdot 10^6$ км^2) испаряется соответственно 505000 км^3 и 72000 км^3 воды. В среднем в атмосфере Земли в виде пара содержится 12900 км^3 воды. Поскольку осадков за год выпадает в 45 раз больше, то очевидно, что пар в атмосфере обновляется 45 раз в год, то есть каждые 8,1 суток.

Количество водяного пара в атмосфере принято характеризовать следующими физическими величинами.

1. Упругостью, или парциальным давлением пара e, измеряемым в кг/м.с^2 или миллибарах. Упругость пара, насыщающего пространство над плоской поверхностью воды, принято обозначать E. Эта величина является быстровозрастающей функцией температуры и в интервале температур -20 – +30^0 С может быть описана соотношением

$$E(t) \approx 6{,}107 \cdot 10^{\frac{7{,}6326 \cdot t}{241{,}9 + t}},$$

где t – температура в градусах Цельсия, а E – выражается в миллибарах.

2. Относительной влажностью

$$f = \frac{e}{E} \cdot 100\%,$$

показывающей насколько воздух близок к состоянию насыщения.

3. Абсолютной влажностью

$$a \approx \frac{0{,}2167}{T} e \ \frac{кг}{м^3},$$

определяющей массу водяного пара в 1 м^3 воздуха, где T – абсолютная температура в К; e – упругость пара в миллибарах.

4. Удельной влажностью, или массовой долей водяного пара

$$S = \frac{\rho_п}{\rho_в + \rho_п} \approx 0{,}622 \frac{e}{P - 0{,}378 e},$$

характеризующей величину массы водяного пара в единице массы влажного воздуха. Величина S – безразмерная; $\rho_п$ и $\rho_в$ – соответственно плотность пара и сухого воздуха; P – давление влажного воздуха в миллибарах.

5. Отношением смеси

$$r = \frac{\rho_n}{\rho_в} = 0{,}622\,\frac{e}{p-e},$$

характеризующим отношение массы водяного пара в выбранном объёме к массе сухого воздуха в этом объёме.

Очевидно, что

$$S = \frac{r}{1+r} \quad и \quad r = \frac{S}{1-S}.$$

6. Дефицитом влажности

$$d = E - e,$$

определяющим разность между давлением насыщения и фактическим давлением водяного пара при данной температуре.

7. Точкой росы τ – температурой, при которой содержащийся в воздухе водяной пар при постоянном давлении становится насыщенным по отношению к плоской поверхности воды. Для ненасыщенного пара $t > \tau$. Для небольших $(t - \tau)$

$$E(\tau) = E(t)\,e^{-\lambda(t-\tau)},$$

где λ – практически линейная функция температуры. При $0^\circ \leq t \leq 20^\circ C$

$$\lambda = 0{,}0725 - 0{,}0005\,t.$$

Разность между температурой воздуха и точкой росы $\Delta = t - \tau$ называется дефицитом точки росы.

8. Точкой льда (инея) – температурой, при которой находящийся в воздухе водяной пар при постоянном давлении достигает насыщения по отношению к плоской поверхности чистого льда. Поскольку водяной пар поступает в атмосферу в основном вследствие испарения с поверхности Земли, то распределение относительной влажности сильно изменяется во времени и пространстве и зависит от атмосферных явлений, растительного покрова, соотношения водной и твёрдой поверхностей. Наибольшая влажность наблюдается в тропических широтах, наименьшая – в зоне пустынь. Неравномерность распределения водяного пара по поверхности Земли и по высоте выравнивается за счёт движения атмосферы, которое складывается из упорядоченного переноса со скоростью ветра и турбулентных пульсаций. В приземном слое турбулентный поток водяного пара можно приближенно считать постоянным по высоте. Однако для тропосферы в целом такое заключение несправедливо. В тропосфере содержание водяного пара и его парциальное давление быстро убывают с высотой. Для описания

этого процесса используются эмпирические зависимости. Наиболее простой является формула Ганна

$$e = e_o \cdot 10^{-z/6.3},$$

в которой z - высота над поверхностью Земли в км; e_o - давление пара при $z = 0$.

Легко сосчитать, что парциальное давление e убывает в 10 раз на высоте 6,3 км и в 100 раз на высоте 12,6 км. Атмосферное давление для тех же уровней уменьшается соответственно в 2-2,5 и 4-5 раз.

Ещё более быстрое уменьшение парциального давления даёт формула Зюринга

$$e = e_o \cdot 10^{-\frac{z}{6} - \frac{z^2}{12}}.$$

Результаты вычислений по этой формуле лучше совпадают с наблюдениями.

В настоящее время для расчётов чаще используется формула

$$e = e_o \; 10^{-bz - cz^2},$$

в которой коэффициенты b и c зависят от географического положения и сезона. В частности для Москвы, их значения приведены в табл. 3.4.

В стратосфере доля пара в воздухе растет медленно с высотой, хотя парциальное давление падает (более медленно, чем давление воздуха).

Таблица 3.4.

Сезон	b	c
Зима	0,0483	0,0158
Весна	0,0941	0,0163
Лето	0,0947	0,0138
Осень	0,0905	0,0124

3.2.4. Туманы и облака

Наличие водяного пара в атмосфере влияет на её основные характеристики и, следовательно, на условия движения в ней летательных аппаратов. Степень этого влияния определяется как количеством водяного пара в атмосфере, так и характером движения летательного аппарата, и возрастает при наличии туманов, облаков и осадков. Если упругость пара e становится больше насыщающей упругости над данной поверхностью, в том числе над каплями воды или кристаллами льда, то начинается процесс его конденсации. Механизм зарождения капель воды в однородном водяном паре – гомогенная конденсация – возникает при больших пересыщениях (более 4-х раз) и сводится к тому, что при столкновениях многих молекул H_2O образуется устойчивая капля. При значительно меньших пересыщениях происходит гетерогенная конденсация, то есть образование капель на существующих в паре твёрдых частицах радиуса $r > 10^{-5}$ см. Практически конденсация начинается тогда, когда температура воздуха понижается до точки росы $\tilde{\tau}$. Если температура воздуха становится ниже точки инея, то есть температуры, при которой пар становится насыщенным над поверхностью льда, начинается процесс сублимации – образование кристаллов льда из пара. Вследствие этого в приземном слое атмосферы образуются туман или дымка, а в свободной атмосфере – облака.

Туманом принято называть совокупность взвешенных в воздухе капель воды или кристаллов льда, уменьшающих дальность видимости до значений менее 1 км. Если дальность видимости 1-10 км, то соответствующая совокупность называется дымкой. Туман и дымку не следует путать с мглой, которая ухудшает видимость за счёт взвешенных в воздухе твёрдых частиц и имеет относительную влажность значительно меньше 100 %.

Основной характеристикой туманов, а также облаков и осадков является их водность. Абсолютная водность определяется как масса капель воды и кристаллов льда в 1 м^3 воздуха. Удельная водность – это масса капель воды и кристаллов льда в 1 кг воздуха.

Водность тумана в заданной области пространства определяется температурой и влагосодержанием воздуха, характеризуемым суммарной массой водяного пара, капель воды и кристаллов льда в 1 м^3 воздуха. С ростом влагосодержания и понижением температуры водность увеличивается. Образование туманов может происходить следующим образом.

а) При испарении с поверхности воды, имеющей температуру выше температуры воздуха. В этом случае давление насыщения E_o, соответствующее температуре испаряющей поверхности, больше давления насыщения E при температуре воздуха, то есть $E_o > E$. Очевидно, что испарение с поверхности воды будет происходить и после того, когда давление водяного пара в воздухе достигнет давления насыщения. Следовательно, возникнут условия для конденсации водяного пара, которые реализуются при наличии ядер конденсации.

б) При перемешивании в горизонтальном или вертикальном направлении масс воздуха с различными термогигрометрическими свойствами. Если две массы воздуха до смешения имеют высокую относительную влажность f_i ($i = 1,2$), близкую к 100 %, и достаточно большую разность температур, то после смешения образуется такой воздух, в котором давление водяного пара e, соответствующее получившейся температуре, будет больше давления насыщения. Получившийся таким образом пересыщенный водяной пар, конденсируясь, образует туман.

в) Понижение температуры воздуха является одной из основных причин конденсации водяного пара. При этом у поверхности Земли образуются туманы, а в свободной атмосфере – облака. Туманы, образующиеся в результате охлаждения земной поверхности и прилегающего к ней слоя воздуха под действием излучения и турбулентного перемешивания, называются радиационными, а возникающие в тёплой воздушной массе, перемещающейся на холодную подстилающую поверхность, принято называть адвективными.

Водность туманов изменяется в широких пределах: от тысячных долей до 2 г/м^3. Для туманов охлаждения она увеличивается с ростом температуры, для туманов испарения – уменьшается. По вертикали водность туманов практически однородна, существенно изменяясь только у земной поверхности и у верхней границы.

По агрегатному состоянию туманы бывают капельно-жидкие, кристаллические (ледяные), состоящие из кристаллов льда, и смешанные, содержащие капли воды и кристаллы льда. Кристаллические и смешанные наблюдаются только при отрицательных температурах, капельно-жидкие – при положительных и отрицательных. Число капель в 1 см^3 у адвективных туманов – 1-100, у радиационных – 50-860, у туманов испарения – 70-500. Размеры радиуса капель 2-18 мкм, кристаллов льда – 3-190 мкм.

Верхняя граница туманов достигает высоты 600 м, наиболее часто толщина туманов составляет 200-300 м. Вблизи земной поверхности ($h < 200$ м) температура в тумане убывает ($\gamma > 0$), выше она определяется условиями турбулентных вертикальных течений.

Облаком принято называть совокупность взвешенных капель воды и кристаллов льда, находящихся в свободной атмосфере, то есть на некоторой высоте над земной поверхностью. По строению облака практически не отличаются от туманов, но имеют значительно большую вертикальную протяжённость и отличные условия образования. Как и туманы, они бывают капельными (водяными), кристаллическими (ледяными), смешанными. Первые существуют при положительных температурах, вторые – только при отрицательных. Однако при отрицательных температурах наблюдаются все три агрегатных состояния: для температур выше -10° С повторяемость капельных облаков более 50 %, а ледяных – менее 10 %; ниже -20° С соотношение изменяется на обратное. Водяные облака состоят из капель размерами 4–25 мкм с числом 100–800 в 1 см^3.

В зависимости от высоты основания существуют облака верхнего (выше 6 км), среднего (2-6 км) и нижнего (ниже 2 км) ярусов. В верхнем ярусе располагаются перистые (Ci), перисто-кучевые (Cc) и перисто-слоистые (Cs) облака; в среднем – высоко-кучевые (Ac) и высоко-слоистые (As); в нижнем – слоистые (St), слоисто-кучевые (Sc), слоисто-дождевые (Ns). Кроме этого существуют облака вертикального развития: кучевые (Cu) и кучево-дождевые (Cb). Высоко-слоистые, слоисто-дождевые и кучево-дождевые облака являются источниками осадков: дождя, снега, града.

Основные характеристики облаков приведены в табл. 3.5.

В зависимости от сезона года и формы облаков средние значения водности капельных изменяются от 0,14 до 0,42 г/м^3, а кристаллических – от 0,017 до 0,25 г/м^3. Увеличение толщины облака сопровождается ростом средней водности. Уровень максимальной водности располагается приблизительно на высоте 2/3 – 4/5 Н от основания, где Н – высота облака.

3.2.5. Осадки

Выпадающие из атмосферы на поверхность Земли капли воды и кристаллы льда называют осадками. В зависимости от фазового состояния и физико-химических характеристик различают следующие виды осадков.

1. Морось – однородные осадки, состоящие из мелких капель, диаметром менее 0,25 мкм, не имеющих направленного движения, образующихся при рассеивании тумана и выпадающих из слоистых и слоисто-кучевых облаков. Интенсивность выпадения мороси не превышает 0,25 мм/ч, скорость падения капель в неподвижном воздухе менее 0,3 м/с.

2. Дождь – осадки из капель диаметром более 0,25 мм, но не более 3 мм (более крупные капли дробятся при движении). Они выпадают из слоисто-дождевых и кучево-дождевых облаков. Скорость падения капель не превышает 10 м/с.

Таблица 3.5

Тип облаков	Размеры: Высота нижней границы, км	Размеры: Высота облака, км	Размеры: Горизонтальная протяжённость, км	Фазовые состояния	Размеры частиц, мкм
Слоистые St	0,I–0,7	0,I–I,0	$10-10^3$	Капельные	10 – 100
Слоисто-кучевые Sc	0,4–2,0	0,I–I,0	$10-10^3$	– " –	– " –
Высоко-кучевые Ac	2–6	0,I–0,8	$10-10^2$	Капельные и смешанные	– " –
Перисто-кучевые Cc	6–9	0,2–I,0	$10-10^4$	Кристаллические	$10-10^3$
Слоисто-дождевые Ns	0,I–I,0	I–10	10^2-10^3	Смешанные	I – 100
Высоко-слоистые As	3–6	0,5–3,0	10^2-10^3	Смешанные, кристаллические	$10 - 10^3$
Перисто-слоистые Cs	5–9	0,5–5,0	10^2-10^3	Кристаллические	– " –
Перистые Ci	6–10	0,2–3,0	10^2-10^3	– " –	– " –
Кучевые Cu	0,8–2,0	0,3–30	I–5	Капельные	I – 100
Кучево-дождевые Cb	0,4–I,5	5–12	5–50	Смешанные	$I - 10^3$

3. Снег - осадки в виде кристаллов разнообразной формы и размеров (радиус достигает 5 мм).

4. Крупа - осадки, состоящие из ледяных частиц, образующихся при замерзании переохлаждённых капель воды и обзернении снежинок, имеющих размеры от долей мм до 7,5 мм.

5. Град - осадки из ледяных частиц крупных размеров (до 25 мм). Образуются в кучево-дождевых облаках при слиянии переохлаждённых капель воды с частицами крупы с последующим замерзанием.

Образование осадков и их интенсивность определяются строением и вертикальной мощностью облаков. Основные процессы образования и роста осадков - конденсация и коагуляция. Первый характеризует начальную стадию и происходит благодаря пересыщению водяного пара над поверхностью облачных капель. Ускорению роста способствует наличие кристаллов льда.

После образования частиц с размерами более 20 мкм основная роль в образовании осадков принадлежит коагуляции, слиянию частиц различных размеров, падающих на Землю с разными скоростями.

3.2.6. Аэрозоли и загрязнение атмосферы

Атмосферные примеси, состоящие из твёрдых и жидких взвешенных частиц, принято называть аэрозолями. Они влияют на состав атмосферы, ослабляют радиацию Солнца, оказывают влияние на характер взаимодействия атмосферы с движущимися в ней с большими скоростями летательными аппаратами. По происхождению аэрозоли делятся на естественные и искусственные. К первым относится космическая пыль, то есть микрометеориты, попадающие из мирового пространства в сферу действия Земли и совершающие движение в атмосфере; частицы, образующиеся при извержении вулканов, частицы почвы и горных пород, размерами до 20 мкм, поднимаемые ветром с поверхности Земли; пепел, зола и дым, образуемые при лесных пожарах и т.п.

Источниками искусственных (антропогенных) примесей служат фабрики и заводы, энергетические и отопительные системы, транспорт, в основном автомобильный, сельскохозяйственное производство и другие объекты промышленной деятельности человека. В частности, при сгорании угля и нефти в атмосферу выбрасывается 10^8 т сернистого ангидрида SO_2, который на свету окисляется кислородом воздуха в серный ангидрид SO_3. Последний, соединяясь с водяным паром атмосферы, образует серную кислоту, существующую в виде аэрозоли или выпадающую в виде осадков.

Особенно много в атмосферу выбрасывается окиси углерода CO, образующейся при неполном сгорании топлива. Вместе с выделяющейся с поверхности океана массой CO её среднее количество составляет $\approx 0,12$ см при нормальном давлении. В верхней тропосфере концентрация CO уменьшается, а в стратосфере происходит её разрушение в основном за счёт реакции

$$CO + OH \rightarrow H + CO_2$$

В меньших, но влияющих на характер процессов в атмосфере количествах при сжигании топлива образуются хлористый водород HCl, фтористый водород HF, окислы азота NO и NO_2, также являющиеся источниками образования ядовитых жидких аэрозолей. Особенно ядовитым загрязнителем атмосферы является свинец, образующийся в выхлопных газах автомобилей из добавляемого в бензин тетраэтилсвинца $Pb(C_2H_5)_4$.

3.2.7. Уравнение состояния

Из приведённого выше очевидно, что атмосфера является неоднородной и неравновесной системой. Она непрерывно получает тепловую энергию от Солнца и Земли, причём в разных областях атмосферы количество этой энергии различно и значительно изменяется с течением времени. Вследствие этого и других причин атмосфера находится в непрерывном движении, в ней непрерывно протекают процессы конвективного и турбулентного теплообмена, поглощения и излучения радиации, фазовые превращения воды (испарение, конденсация, сублимация), химические реакции, диссоциация молекул, ионизация атомов, грозовые разряды, выпадение осадков и другие простые и сложные процессы. Поэтому уравнение состояния всей атмосферы как термодинамической системы записать достаточно трудно. Однако для локальных областей, моделируя в них атмосферу однородной равновесной средой, можно записать достаточно простые уравнения состояния.

Наиболее простой моделью является представление атмосферы в виде сухого воздуха. Такой воздух является механической смесью газов, указанных в табл. 3.3 . Состояние каждого газа определяется значениями трёх величин: температуры T , давления P и плотности ρ (или удельного объёма v), которые связаны между собой функциональной зависимостью, называемой уравнением состояния.

Реальный газ можно считать идеальным, то есть удовлетворяющим уравнению Клапейрона

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T,$$

если средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул значительно меньше их средней кинетической энергии. Это условие выполняется, если параметры, при которых существует реальный газ, существенно отличаются от критических, то есть $T \gg T_{кр}$, $P \ll P_{кр}$. Температуры и давления, при которых находятся в атмосфере газы, образующие воздух, удовлетворяют этому условию, поэтому уравнение состояния любого из них может быть записано в виде

$$w_i P_i = R_i T, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где P_i – парциальное давление i-го газа; w_i – его удельный объём; T – температура; $R_i = R/\mu_i$ – удельная газовая постоянная, равная отношению универсальной газовой постоянной R = 8314,41 Дж/(кмоль·К) к молярной массе μ_i, равной относительной массе молекулы.

В соответствии с законом Дальтона общее давление механической смеси газов равно сумме их парциальных давлений, то есть

$$P_b = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Если принять массу воздуха равной единице, а массу i-го газа – m_i, то

$$w_i = \frac{w_b}{m_i}$$

Подставляя w_i в (1) и суммируя все полученные уравнения по n, получим

$$w_b \sum_{i=1}^{n} P_i = T \sum_{i=1}^{n} m_i R_i$$

или

$$P_b w_b = R_b T,$$

где $R_b = \sum m_i R_i$ – удельная газовая постоянная воздуха, равная 287 Дж/(кг·К); P_b, w_b – соответственно давление и удельный объём воздуха. Учитывая, что плотность

$$\rho_b = \frac{1}{w_b},$$

уравнение состояния воздуха можно записать

$$P_в = R_в \rho_в T$$

или

$$P_в = \frac{R}{\mu_в} \rho_в T,$$

где $\mu_в$ = 28,9645 кг/кмоль – относительная молекулярная масса сухого воздуха.

Более совершенной является модель атмосферы в виде механической смеси сухого воздуха и водяного пара. Последний в атмосфере может конденсироватьс и сублимироваться, то есть переходить в жидкое и твёрдое состояния. Однако в достаточно широком диапазоне температур и давлений уравнение состояния водяного пара может быть представлено уравнением идеального газа

$$e W_п = R_п T$$

Чтобы вывести уравнение состояния влажного воздуха, выделим единицу его массы. Пусть в ней содержится масса S водяного пара и $(1-S)$ сухого воздуха. Тогда удельные объёмы соответственно водяного пара $W_п$ и сухого воздуха $W_в$ будут

$$W_п = \frac{W}{S}, \qquad W_в = \frac{W}{1-S},$$

где W – удельный объём влажного воздуха.

Обозначим: P – давление влажного воздуха; e – парциальное давление водяного пара; $(P-e)$ – парциальное давление сухого воздуха; T – температура, которая одинакова для водяного пара и сухого воздуха. Уравнение состояния сухого воздуха в этих обозначениях будет иметь вид

$$(P-e) W_в = R_в T.$$

Если в этом уравнении и в уравнении состояния водяного пара заменить $W_в$ и $W_п$ их значениями, то эти уравнения запишутся в виде

$$e W = 1{,}608 R_в S T;$$

$$(P-e) W = R_в (1-S) T,$$

где учтено, что

$$R_п = R_в \frac{\mu_в}{\mu_п} = 1{,}608 R_в.$$

Складывая соответственно правые и левые части получаемых уравнений, получим уравнение состояния влажного воздуха

$$\rho w = R_{\text{в}} T(1+0{,}608 S).$$

Величину $R_o = R_{\text{в}}(1 + 0{,}608S)$ можно определить как газовую постоянную влажного воздуха. В этом случае уравнение состояния влажного воздуха имеет тот же вид, что и для сухого воздуха

$$\rho W = R_o T \quad \text{или} \quad P/\rho = R_o T$$

В метеорологии и баллистике вводится понятие виртуальной температуры

$$\tilde{\tau} = T(1 + 0{,}608 \cdot S),$$

для которой уравнение состояния влажного воздуха записывается

$$\rho W = R_{\text{в}} \tilde{\tau}.$$

Если в это уравнение подставить $\tilde{\tau}$ и заменить в полученном соотношении $ST R_{\text{в}}$ его значением из уравнения состояния сухого воздуха, то уравнение состояния влажного воздуха примет вид

$$\rho W = \frac{R_{\text{в}} T}{1 - 0{,}378\, e/p};$$

$$\tilde{\tau} = \frac{T}{1 - 0{,}378\, e/p}.$$

Величину $\Delta\tilde{\tau} = 0{,}608\, ST \approx 0{,}378\, e/p$ принято называть виртуальной добавкой. Её величина максимальна при данных T и P, если водяной пар является насыщенным, то есть

$$(\Delta\tilde{\tau})_{max} \cong 0{,}378 \frac{E}{P}.$$

Очевидно, что $(\Delta\tilde{\tau})_{max}$ мал при низких температурах и достигает значительной величины при высоких. Так при $P = 1000$ гПа для $T = -40°$ C $(\Delta\tilde{\tau})_{max} = 0{,}01$, а для $T = +40°$ C $(\Delta\tilde{\tau})_{max} = 8{,}9$.

Сравнивая уравнения состояния сухого и влажного воздуха, следует отметить, что для одинаковых значений температуры и давления плотность влажного воздуха всегда меньше плотности сухого воздуха.

3.2.8. Стандартные атмосферы

Баллистические расчёты, как правило, проводятся для нормальных метеоусловий, соответствующих средним статистическим данным, полученным экспериментально, называемым стандартными атмосферами. Отклонение реальных метеоусловий от стандартных учитывается введением поправок. Основные закономерности, используемые при построены стандартных атмосфер, получены из простой модели атмосферы.

Для установления закономерностей распределения параметров воздуха атмосферы рассматривается статическая её модель, то есть предполагается, что атмосфера находится в состоянии покоя по отношению к земной поверхности. Очевидно, это имеет место тогда, когда результирующая всех сил, действующих на атмосферу, равна нулю.

На любой объём атмосферы действуют массовые и поверхностные силы. Первыми являются кориолисова сила и сила тяжести, вторыми - сила давления и сила трения, обусловленная вязкостью воздуха. Кориолисова сила и сила трения существуют только в атмосфере, движущейся относительно поверхности Земли и одних её слоёв относительно других. Поэтому на покоящуюся атмосферу действуют только сила тяжести и сила давления. Сила тяжести действует по направлению, которое называется истинной вертикалью. Последняя всегда перпендикулярна уровенной поверхности, которая в рассматриваемой задаче может быть с высокой точностью представлена поверхностью эллипсоида вращения. В этом случае ускорение силы тяжести выражается формулой

$$g(r,\varphi) = \frac{fM}{r^2} - \beta\frac{fMa^2}{r^4}(3\sin^2\varphi - 1) - \omega^2 r\cos^2\varphi, \qquad (3.2.1)$$

в которой $\beta = \varepsilon - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{fM}$ - параметр Земли; $\varepsilon = \frac{a-b}{a}$ - сжатие эллипсоида; f - универсальная гравитационная постоянная; M, a, ω - соответственно масса, экваториальный радиус и угловая скорость суточного вращения Земли.

Для того чтобы горизонтальная составляющая градиента давления была равна нулю (иначе возникнет движение воздуха), необходимо, чтобы изобарические поверхности совпадали с уровенными.

Выделим изобарические поверхности на высотах z и $z+dz$. Пусть давление на них соответственно p и $p+dp$. В этой области рассмотрим объём с основаниями 1 м^2. На нижнее основание этого объёма действует сила давления $\bar{p}$, направленная вверх, на верхнее основание - сила давления $\bar{p}+d\bar{p}$, направленная вниз. На этот же объём действует сила тяжести $\bar{G}$, модуль которой

$$G = g\rho dz, \qquad (3.2.2)$$

направленная вниз.

Для того чтобы выделенный объём воздуха находился в покое, сумма вертикальных проекций этих сил должна быть равна нулю

$$P-(P+dP)-G=0$$

или

$$-dP=g\rho dz \qquad (3.2.3)$$

Подставляя в это уравнение ρ из уравнения состояния, получим

$$-\frac{dP}{P}=\frac{g}{R_{\delta}\tilde{\tau}}dz \qquad (3.2.4)$$

Интегрируя по высоте от уровня моря, где давление P_o, до высоты z с соответствующим давлением P, можно зависимость давления от высоты представить в виде

$$P=P_o e^{-\frac{1}{R_{\delta}}\int_0^z \frac{g}{\tau(z)}dz} \qquad (3.2.5)$$

Эту зависимость принято называть интегральной формой основного уравнения статики. Чтобы получить зависимость изменения плотности воздуха с высотой, запишем отношения правых и левых частей уравнений состояния для уровня моря и высоты z

$$\frac{\rho_{(z)}}{\rho_o}=\frac{P_{(z)}}{P_o}\frac{\tilde{\tau}_o}{\tilde{\tau}(z)}=\frac{\tilde{\tau}_o}{\tilde{\tau}(z)}e^{-\frac{1}{R_{\delta}}\int_0^z \frac{g(z)}{\tau(z)}dz} \qquad (3.2.6)$$

Из формул (2.7), (2.8) видно, что давление и плотность воздуха, в силу того что

$$\frac{g(z)}{\tilde{\tau}(z)}>0 \qquad \text{и} \qquad z>0 ,$$

всегда убывают с высотой и убывание их происходит тем быстрее, чем холоднее рассматриваемый слой атмосферы. Их значения на любой высоте z определяются их величиной на уровне моря, а также зависимостью вариационной температуры от высоты.

Для анализа полей давления в свободной атмосфере в метеорологии используется понятие геопотенциала. Геопотенциалом Φ^* уровня называется работа, необходимая для подъёма единицы массы в поле силы тяжести от нулевого (уровня моря) до данного уровня. Поверхность, соответствующая уравнению

$$\Phi^*(x,y,z)=const , \qquad (3.2.7)$$

называется геопотенциальной. Для переноса единицы массы с уровня $\Phi_1^*=const$ на уровень $\Phi_2^*=\Phi_1^*+d\Phi^*$ необходимо затратить работу

$$d\Phi^*=g\,dz .$$

Тогда $\Phi^* = \int\limits_0^z g\,dz$.

Геопотенциальная высота H^* есть отношение геопотенциала Φ^* к нормальному (стандартному) ускорению свободного падения $g_0 = 9{,}80665$ м/с^2, то есть

$$H^* = \frac{\Phi^*}{g_0} = \frac{1}{g_0}\int\limits_0^z g\,dz , \qquad dH^* = \frac{g}{g_0}\,dz$$

Она имеет размерность длины. Её единицей служит геопотенциальный метр. Поскольку g слабо изменяется с высотой, то H^* и z незначительно отличаются друг от друга.

Мерой скорости изменения атмосферного давления и плотности с высотой принято считать вертикальный масштаб атмосферы, который можно определить как величину, обратную отрицательной скорости изменения натурального логарифма давления (или плотности) с геометрической высотой. Поскольку

$$-\frac{dP}{P} = \frac{g}{R_в T} = \frac{M_в g}{R\,T}\,dz , \qquad (3.2.8)$$

то обозначая величину, имеющую размерность длины

$$\frac{RT}{M_в g} = H ,$$

получим

$$H = -\left[\frac{d\ln P}{dz}\right]^{-1} . \qquad (3.2.9)$$

Введённый таким образом параметр H определяется тремя переменными величинами (T , $M_в$, g) и определяет толщину такой однородной (то есть $\rho = const$) атмосферы, у которой давление и плотность на её нижней границе равны давлению и плотности на том уровне в реальной атмосфере, для которого по формуле (3.2.9) рассчитана величина H .

Через этот параметр можно записать уравнение состояния воздуха

$$P = \frac{R}{M_в}\rho T = \frac{RT}{M_в g}\,g\rho = \rho g H .$$

С введением параметра H при получении барометрических формул отпадает необходимость раздельного учёта T , $M_в$, g с высотой. Этот параметр наиболее удобен для построения барометрических формул на больших высотах ($z > 90$ км), где заметно изменяется молекулярная масса воздуха. Если в некотором слое атмосферы можно считать $H = const$, то барометрическая формула для этого слоя принимает вид

$$P_{(z)} = P_1 e^{-\frac{z - z_1}{H}}, \tag{3.2.10}$$

где z_1 – высота нижней границы слоя; P_1 – давление воздуха на этой высоте. Барометрическая формула (3.2.10) используется при решении задач о влиянии атмосферы на изменение элементов орбиты и время существования космических аппаратов. При этом в качестве нижней границы берется высота перигея. Если записать уравнение состояния воздуха для уровня z_1

$$P_1 = g_1 \rho_1 H, \tag{3.2.11}$$

то, поделив (3.2.10) на (3.2.11), получим формулу для распределения плотности воздуха в слое с $H = const$ в виде

$$\rho_{(z)} = \rho_1 \frac{g_1}{g} e^{-\frac{z - z_1}{H}}. \tag{3.2.12}$$

Первая международная стандартная атмосфера (МСА) была принята в 1920 г. В 1927 г. в артиллерии была введена нормальная артиллерийская атмосфера (НАА). В 1949 г. были опубликованы таблицы стандартной атмосферы ГОСТ 4401-48, затем были предложены и использовались СА-64 и СА-73. В СА-73 установлены стандартные численные значения параметров атмосферы в функции геометрической и геопотенциальной высот в диапазоне 2000 ÷ 50000 м. Для высот 50000 – 80000 м приведены рекомендуемые значения и для высот от 80000 до 120000 м приведены справочные данные параметров, являющихся переходными к средней международной справочной атмосфере CIRA 1972 КОСПАР.

В СА-73 за стандартные условия на среднем уровне моря на геодезической широте 45°32'33'' были приняты следующие значения метеорологических элементов: $T_{0c} = 288{,}15$ К; $P_{0c} = 101325$ Па = 760 мм р.ст.; $\rho_{0c} = 1{,}225$ кг/м^3; $f = 0$; скорость ветра на всех высотах равна нулю.

В зависимости от характера изменения температуры СА-73 по высоте разделена на слои, в каждом из которых температура аппроксимируется линейной функцией от геопотенциальной высоты

$$T = T_c + \beta(H - H_c),$$

где $\beta = dT/dH$ – градиент температуры по геопотенциальной высоте; T_c и H_c – соответственно температура и геопотенциальная высота нижней границы слоя.

Для слоёв с линейно изменяющейся температурой, в частности для тропосферы,

$$P = P_c e^{-\frac{1}{R_в}\int_{z_c}^{z}\frac{g\,dz}{T}} = P_c e^{-\frac{1}{R_в}\int_{H_c}^{H}\frac{g\,dH}{T_c+\beta(H-H_c)}} =$$

$$= P_c\left[1+\frac{\beta}{T_c}(H-H_c)\right]^{-\frac{g_c}{R_в\beta}};$$

$$\rho = \frac{P}{R_в T} = \frac{P_c}{R_в T}\left[1+\frac{\beta}{T_c}(H-H_c)\right]^{-\frac{g_c}{\beta R_в}}.$$

Для изотермических слоёв, в частности тропопаузы и стратосферы,

$$P = P_c e^{-\frac{g_c}{R_в T}(H-H_c)};$$

$$\rho = \frac{P_c}{R_в T} e^{-\frac{g_c}{R_в T}(H-H_c)}.$$

При использовании данных СА следует иметь в виду, что все используемые зависимости получены для статической атмосферы. Наличие горизонтальных и вертикальных движений воздуха приводит к заметным отличиям реальных средних значений метеорологических элементов от стандартных. Ещё больше отклонения (достигают 60 %) особенно на больших высотах и в высоких широтах реальных значений в данный момент времени от средних значений СА.

В артиллерии в основном используется нормальная артиллерийская атмосфера (НАА), в которой в отличие от СА-73 используется виртуальная температура τ, весовая плотность Π и давление измеряется в мм рт.ст.

Очевидно,

$$P = \frac{1033}{760}h = 13{,}6\,h, \qquad \Pi = 13{,}6\,\frac{h}{R\tau}.$$

Для влажного воздуха

$$\tau = \frac{T}{1-\frac{3}{8}\frac{e}{h}}, \qquad \Pi = 13{,}6\,\frac{h}{RT}\left(1-\frac{3}{8}\frac{e}{h}\right)$$

За нормальные условия в НАА (то есть условия на уровне моря) приняты

$h_{0N} = 750$ мм рт.ст.; $e_{0N} = 6{,}8$ мм рт.ст.; ($f = 50$ %);

$\tau_{oN} = 288{,}9$ К ($t_{oN} = 15^0$ С); $\Pi_{oN} = 1{,}206$ кгс/м^3;

$\rho_{oN} = 0{,}1229$ кгс·с^2/м^4 = 1,2054 кг/м^3, движения воздуха нет.

Для вычисления изменения давления и плотности воздуха с высотой y принята зависимость $\tau(y)$, предложенная Бентцелем:

$$\tau_N(h) = \begin{cases} 288{,}9 - 0{,}006328\, y & \text{при} \quad 0 \leq h \leq 9324 \text{ м} \\ 230 - 0{,}006328\,(y - 9324) + 1{,}172 \cdot 10^{-6}(y - 9324)^2 & \\ & \text{при } 9324 \text{ м} < y \leq 12000 \text{ м} \\ 221{,}5 \text{ К} & \text{при } 12000 \text{ м} < y < 31000 \text{ м.} \end{cases}$$

Значения давления и плотности, приведённые в НАА, рассчитывались по формулам

$$h = h_{oN} e^{-\frac{1}{R_6}\int\limits_0^y \frac{dy}{\tau(y)}}, \qquad \Pi = 13{,}6\,\frac{h_{oN}}{R_6 \tau}\, e^{-\frac{1}{R_6}\int\limits_0^y \frac{dy}{\tau(y)}}.$$

В расчётах чаще используются безразмерные функции изменения давления и плотности с высотой

$$\pi(y) = \frac{h}{h_{oN}} = \left(\frac{\tau}{\tau_{oN}}\right)^{\frac{1}{R\sigma_1}}; \qquad H(y) = \frac{\Pi}{\Pi_{oN}} = \pi(y)\,\frac{\tau_{oN}}{\tau},$$

в которых $\sigma_1 = 0{,}006328$.

§ 3.3. Аэродинамические силы и моменты

3.3.1. Силовое воздействие среды на движущиеся в ней тела

Взаимодействие газообразной среды и двигающегося в ней тела проявляется в возникновении системы распределённых на поверхности тела сил от нормального давления и касательного трения, называемых аэродинамическими.

С точки зрения задач динамики полёта твёрдого тела необходимо иметь данные лишь об интегральных характеристиках его взаимодействия со средой. Поэтому поверхностные силы взаимодействия приводим к одному главному вектору $\bar{R}$ равнодействующей аэродинамических сил и главному моменту $\bar{M}_R$ момента этих сил относительно какой-либо точки приведения. Такой точкой может быть произвольная точка тела, в частности центр масс.

Действительно, линия действия главного вектора аэродинамических сил $\bar{R}$ пересекает летательный аппарат. За точку приложения силы $\bar{R}$, как правило, можно принять любую точку на линии действия этой силы, принадлежащую летательному аппарату. Эту точку приложения силы $\bar{R}$ называют центром давления. Как правило, за центр давления принимают точку пересечения линии действия силы $\bar{R}$ с осью или плоскостью симметрии летательного аппарата (рис. 3.9).

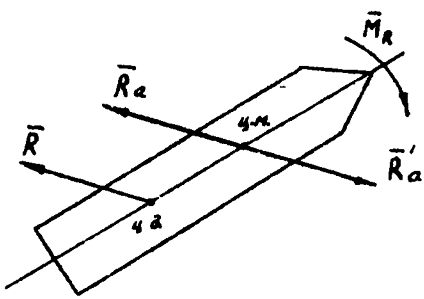

Рис.3.9

Обычно центр давления не совпадает с центром масс летательного аппарата. И сила $\bar{R}_a$, приложенная к центру масс, по правилу параллельного переноса сил создаёт относительно него момент $\bar{M}_R$.

Силу $\bar{R}_a$, приложенную в центре масс летательного аппарата, называют полной аэродинамической силой, а момент $\bar{M}_R$ - полным моментом аэродинамических сил.

В практике решения задач, связанных с расчетом движения тел, необходимо рассматривать компоненты векторов $\bar{R}_a$ и $\bar{M}_R$ в каких-либо системах координат. Наиболее удобно в качестве таких систем выбирать скоростную для проекции вектора $R_a\{X_a, Y_a, Z_a\}$ и связанную для проекции вектора $\bar{M}_R\{M_x, M_y, M_z\}$. Проекция X_a, направленная по линии действия вектора скорости $\bar{V}_c$, называется силой лобового сопротивления. Подъемной силой будем называть проекцию Y_a (рис.3.10) вектора $\bar{R}_a$ на ось Oy_a скоростной системы координат. Боковой силой будем называть проекцию Z_a вектора $\bar{R}_a$ на ось Oz_a скоростной системы координат.

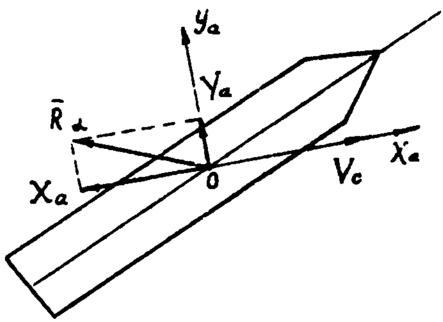

Рис.3.10

Исторически первой и наиболее естественной является попытка определить силу лобового сопротивления.

Если рассмотреть обращённое движение и считать воздух несжимаемым, то для простейшего тела, имеющего форму пластинки (рис. 3.11), величину лобового сопротивления X_a можно определить на основе следующих рассуждений.

Обозначим через V скорость невозмущённого воздушного потока и запишем уравнение энергии, считая температуру и соответственно внутреннюю энергию несжимаемого газа постоянной. На единицу массы сумма кинетической энергии и энергии давления газа для сечения I-I будет такой же, что и для сечения 2-2 (рис. 3.11)

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2}.$$

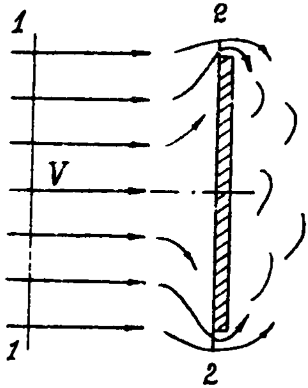

Рис.3.II

Так как плотность считается неизменной, то $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Скорость потока $V_1 = V$. А скорость V_2 полагаем равной нулю. Поэтому

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho V^2}{2}.$$

Если принять, что сзади пластинки давление равно давлению окружающей среды, то есть P_1, то лобовое сопротивление получим, умножая разность давлений на стенках пластинки $P_2 - P_1$ на площадь пластинки S

$$X_a = \frac{\rho V^2}{2} \cdot S. \qquad (3.3.1)$$

Опыт, однако, показывает, что полученное соотношение не является точным. Это понятно, поскольку при выводе были приняты предположения, значительно упрощающие явление.

В действительности аэродинамические силы и моменты зависят от множества факторов: от физических свойств и состояния окружающей среды, от размеров и формы тела, его ориентации и закона движения. При анализе аэродинамических сил мы не имеем математической постановки задачи, так как исследуемое механическое явление настолько сложно, что для него пока ещё нет удовлетворительной схемы. Поэтому экспериментальные исследования играют главную роль при анализе аэродинамических сил.

3.3.2. Основные моменты теории размерностей в механике

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или непосредственно из опыта, представляют собой функциональные зависимости между величинами, характеризующими исследуемое явление. Численное значение этих физических величин зависит от выбора системы единиц измерения, не связанной с существом явления.

Поэтому функциональные зависимости, выражающие собой физические факты, которые не зависят от системы единиц измерения, должны обладать некоторой специальной структурой.

Пусть имеем размерную величину a, которая является функцией независимых между собой физических величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n). \qquad (3.3.2)$$

Некоторые из параметров могут быть переменными, другие - постоянными.

Выясним структуру функции $f(a_1, \ldots, a_n)$ в предположении, что эта функция выражает собой некоторый физический закон, не зависящий от выбора системы единиц измерения.

Примем, что в (1) записаны все (размерные и безразмерные) переменные и постоянные величины, от которых зависят рассматриваемые значения величины a, называемые в дальнейшем <u>определяющие параметры</u>, или параметры, определяющие класс <u>явления</u>.

Пусть среди n величин $a_i, \ldots$ $i = \overline{1, n}$ первые K ($K \leqslant n$) имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть $\geqslant K$). Независимость размерности означает, что формула, выражающая размерность одной из величин, не может быть получена как комбинация в виде степенного одночлена формул размерности других величин. Например, размерности длины L, скорости LT^{-1}, энергии ML^2T^{-2} независимы, размерности длины, скорости и ускорения - зависимы. Среди механических величин обычно имеется не более трёх с независимыми размерностями.

Предположим, что K - наибольшее число параметров с независимыми размерностями. Тогда размерности величин $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ можно выразить через размерности параметров $a_1, \ldots, a_k$.

Примем K величин $a_1, \ldots, a_k$ за основные величины и введём для их размерностей обозначения

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \ \ldots, \ [a_k] = A_k .$$

Размерности остальных величин будут иметь вид

$$[a] = A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_k^{m_k},$$
$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \cdots A_k^{p_k},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$[a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} \cdots A_k^{q_k}.$$

Изменим теперь измерения величин $a_1, \ldots, a_k$ соответственно в $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ раз. Численные значения этих величин и величин $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ в новой системе единиц будут

$$a_1' = \alpha_1 a_1, \qquad a' = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k} a,$$
$$a_2' = \alpha_2 a_2, \qquad a_{k+1}' = \alpha_1^{p_1} \cdots \alpha_k^{p_k} a_{k+1},$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$a_k' = \alpha_k a_k, \qquad a_n' = \alpha_1^{q_1} \cdots \alpha_k^{q_k} a_n.$$

В новой системе единиц соотношение (2) примет вид

$$a' = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k} a = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k} f(a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= f(\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \alpha_1^{q_1} \cdots \alpha_k^{q_k} a_n). \qquad (3.3.3)$$

Соотношение (3) показывает, что функция f обладает свойством однородности относительно единиц измерений величин $a_1, \ldots, a_k$.

Выберем теперь α_i так, чтобы сократить число независимых переменных у функции f. Положим $\alpha_1 = 1/a_1, \ldots, \alpha_k = 1/a_k$. Тогда первые K аргументов в правой части (3) будут равны единице. Таким образом, используя то обстоятельство, что соотношение (2) согласно предположению не зависит от выбора системы единиц измерения, мы будем выбирать систему единиц измерения так, чтобы K аргументов функции f имели фиксированные постоянные значения, равные единице.

В этой относительной системе единиц измерения численные значения параметров $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ будут определяться формулами

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} \ldots a_k^{m_k}}, \qquad \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} \ldots a_k^{p_k}},$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} \ldots a_k^{q_k}}.$$

Нетрудно видеть, что значения Π, $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ не зависят от выбора первоначальной системы единиц измерения, так как они имеют нулевую размерность относительно единиц измерения $A_1, \dots, A_k$. Очевидно также, что значения Π, $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ вообще не зависят от выбора систем тех единиц измерения, через которые выражаются K единиц измерения для размерно независимых величин $a_1, \dots, a_k$. Следовательно, величины Π, $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ можно рассматривать как безразмерные. Поэтому в любой системе единиц измерения соотношение (2) можно представить в виде

$$\Pi = f(\underbrace{1, \dots, 1}_{K}, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \qquad (3.3.4)$$

где Π и все аргументы f – безразмерные.

Таким образом, связь независящих от выбора системы единиц измерения между $(n+1)$ размерными величинами a, $a_1, \dots, a_n$, у которых K имеют независимые размерности, может быть представлена в виде соотношения между $(n+1-K)$ величинами $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комбинации из $(n+1)$ размерных величин.

Этот общий вывод теории размерности известен под названием Π-теоремы /7/.

Отметим два важных следствия из Π-теоремы.

1. Если некоторая безразмерная величина является функцией ряда размерных величин, то эта функция может зависеть только от безразмерных комбинаций, составленных из всех определяющих её размерных величин.

2. Из n параметров $a_1, \dots, a_n$ нельзя составить более $(n-k)$ независимых безразмерных комбинаций.

<u>Параметры, определяющие класс явлений</u>. Приложения теории размерностей основаны на применениях в изучаемых проблемах Π-теоремы.

В связи с этим возникает вопрос о перечислении аргументов в функциях вида (2) – <u>определяющих параметров</u>.

Систему определяющих параметров вводим из постановки выделяемого класса задач и характеризующую полностью для данной среды каждую отдельно взятую глобальную задачу.

Основным и первоначальным этапом в постановке задачи является выбор модели или системы моделей сред и схематизация свойств искомых решений. Сюда входит учёт условий симметрии и выбор подходящих систем координат.

Таблицу определяющих параметров легко выписать, если задача сформулирована математически. Это будут все размерные и безразмерные величины, которые необходимо и достаточно задать для того, чтобы все искомые величины определялись уравнениями задачи.

Указанная методика, вообще говоря, необязательна. Можно выписать систему определяющих параметров и в тех случаях, когда детальные свойства модели и система уравнений неизвестны.

Достаточно опереться на предварительные данные или гипотезы о виде функций и о постоянных, которые входят или могут входить в определение модели, в начальные, граничные и другие условия, выделяющие конкретные задачи.

В определяющие параметры надо записывать <u>все</u> размерные параметры, связанные с существом явления, независимо от того, постоянны они или переменны.

В общем случае методы изучения функциональных зависимостей с помощью Π-теоремы по существу ограничены и недостаточны, так как с их помощью невозможно установить связь между безразмерными величинами.

Основная польза теории размерностей для теоретических и экспериментальных исследований связана с возможностью записи и изучения физических закономерностей в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора системы единиц измерения.

В качестве примера рассмотрим одну задачу.

<u>Задача о движении твёрдого тела в бесконечной массе жидкости.</u> Рассматриваем поступательное движение с постоянной скоростью V абсолютно твёрдого тела внутри жидкости. Форма тела произвольна, и все геометрические размеры определяются заданием только одного какого-либо характерного размера (d).

Механические свойства несжимаемой жидкости определяются двумя параметрами: плотностью ρ и коэффициентом вязкости μ . Тогда система определяющих параметров будет следующей:

$$\rho, \mu, d, V, \alpha; \qquad n = 5, \qquad k = 3,$$

α - угол, характеризующий ориентацию твёрдого тела относительно вектора скорости V . Независимые размерности имеют три параметра: d , V , ρ .

Сила F , действующая со стороны жидкости на тело, может быть представлена как некоторая функция $F = f(\rho, \mu, d, V, \alpha)$. Из общей теории размерностей вытекает, что из пяти размерных параметров можно составить два безразмерных: α , $Vd\rho/\mu = Re$. Комбинация из параметров d, V, ρ, имеющая размерность силы, имеет вид: $\rho V^2 d^2$.

Тогда можно записать

$$\frac{F}{\rho V^2 d^2} = f(\alpha, Re)$$

или

$$F = \rho V^2 d^2 f(\alpha, Re) . \qquad (3.3.5)$$

Если жидкость сжимаема, то надо учесть скорость распростра - нения упругих колебаний в жидкости (a). Тогда система определяющих параметров будет: ρ, μ, d, V, α; a, $n = 6$, $K = 3$. И выражение для силы будет иметь вид

$$F = \rho V^2 d^2 f(\alpha, Re, M) , \qquad M = V/a . \qquad (3.3.6)$$

Безразмерные параметры Re и M носят названия чисел Рейнольдса и Маха.

При рассмотрении неустановившегося движения в число определяющих параметров необходимо ввести угловую скорость ω колебаний или вращений твёрдого тела. Тогда выражение для силы будет иметь вид

$$F = \rho V^2 d^2 f(\alpha, Re, M, St) , \qquad St = \frac{\omega d}{V} . \qquad (3.3.7)$$

Безразмерный параметр St носит название числа Струхаля.

3.3.3. Выражения аэродинамических сил и моментов через безразмерные параметры

В аэродинамике и баллистике сомножитель, имеющий размерность силы в выражениях для аэродинамической силы, записывают в виде (1). Тогда общее выражение для аэродинамической силы в соответствии с соотношениями (5)-(7) будет иметь вид

$$R_a = \frac{\rho V^2}{2} S C_R (\alpha, Re, M, St, \ldots) , \qquad (3.3.8)$$

где $q = \rho V^2/2$ - называют скоростным напором набегающего невозмущённого потока, S - площадь миделевого сечения (некоторая характерная площадь тела, например, наибольшая площадь поперечного сечения). Безразмерная функция безразмерных параметров C_R носит название коэффициента аэродинамической силы.

Для силы лобового сопротивления X, подъёмной силы Y_a и боковой силы Z_a можно записать следующие выражения:

$$X_a = qSC_{xa}(\alpha, Re, M, \ldots);$$

$$Y_a = qSC_{ya}(\alpha, Re, M, \ldots),$$

$$Z_a = qSC_{za}(\alpha, Re, M, \ldots) \qquad (3.3.9)$$

Безразмерные функции C_{xa}, C_{ya}, C_{za} называются коэффициентами силы лобового сопротивления, подъемной силы и боковой силы.

Аналогично силам запишем выражение для момента аэродинамических сил M_R и его проекций на связанные оси M_x, M_y, M_z:

$$M_R = qSl\,m_R(\alpha, Re, M, \ldots),$$
$$M_x = qSl\,m_x(\alpha, Re, M, \ldots);$$
$$M_y = qSl\,m_y(\alpha, Re, M, \ldots);$$
$$M_z = qSl\,m_z(\alpha, Re, M, \ldots), \qquad (3.3.10)$$

где l – характерный размер тела (длина).

Функции m_x, m_y, m_z называют коэффициентами аэродинамических моментов крена, рыскания и тангажа.

Аэродинамические характеристики C_{xa}, C_{ya}, ..., m_z учитывают влияние на аэродинамические силы и моменты формы тела, параметров и характеристик обтекания, ориентации тела по отношению вектора скорости его центра масс и других факторов, которые могут быть учтены как определяющие параметры.

Являясь своеобразным "аэродинамическим портретом" для каждого конкретного летательного аппарата, аэродинамические характеристики полностью определяют силовое воздействие среды на него во время движения.

Для того чтобы получить замкнутую систему дифференциальных уравнений движения, которые позволили бы перейти от задач механики к задачам чисто математическим, необходимо определить вид функциональных зависимостей коэффициентов аэродинамических сил и моментов (3.3.9), (3.3.10) от безразмерных параметров. Конкретный вид функций (9), (10) с помощью теории размерностей определить нельзя. Эта проблема составляет основную задачу экспериментальной и теоретической аэродинамики и аэробаллистики

Глава 4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ

Исследование движения осесимметричного летательного аппарата (ЛА) будем проводить в нормальной земной топоцентрической системе координат $O_o x_g y_g z_g$. Тогда в качестве подвижных систем координат, начала которых находятся в центре масс ЛА, наиболее удобно выбрать связанную $Oxyz$ и полускоростную $Ox'_a y'_a z'_a$ системы.

Предположим также, что плоскость сопротивления $Ox'_a y'_a$ не вращается относительно вектора скорости $\vec{v}$. В этом случае полускоростная система совпадает с траекторной $Ox_k y_k z_k$ и её ориентация относительно земной будет определяться таблицей 2.1.

§ 4.1. Динамические уравнения

Запишем уравнения движения центра масс летательного аппарата (2.4.39) в проекциях на оси полускоростной системы координат.

В полускоростной системе координат

$$v_{x'_a} = v; \quad v_{y'_a} = 0; \quad v_{z'_a} = 0. \qquad (4.1.1)$$

Проекции $\omega_{x'_a}$, $\omega_{y'_a}$, $\omega_{z'_a}$ угловой скорости вращения полускоростных осей на эти же оси можно получить из равенств (2.1.1)

$$\omega_{x'_a} = \dot{\Psi}\sin\theta; \quad \omega_{y'_a} = \dot{\Psi}\cos\theta; \quad \omega_{z'_a} = \dot{\theta} \qquad (4.1.2)$$

Таким образом, на основании уравнений (2.4.39), используя (4.1.2) и (4.1.1), получим скалярные уравнения движения центра масс летательного аппарата в проекциях на полускоростные оси

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= \sum F_{x'_a}; \\ mv\dot{\theta} &= \sum F_{y'_a}, \\ -mv\cos\theta\,\dot{\Psi} &= \sum F_{z'_a}, \end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

где $\sum F_{x'_a}$, $\sum F_{y'_a}$, $\sum F_{z'_a}$ – суммы проекций всех внешних сил, действующих на летательный аппарат, на соответствующие полускоростные оси координат.

В этой части учебника будем рассматривать только те случаи полёта летательных аппаратов в атмосфере Земли, когда центробежными и кориолисовыми силами, вызванными вращением Земли, можно пренебречь по сравнению с другими силами.

Кроме того, основываясь на расчётах /6/, причем, что кориолисова сила, обусловленная движением частиц газа и топлива внутри вращающейся ракеты, а также силы, вызванные перемещением центра масс относительно корпуса ракеты, весьма малы и ими можно пренебречь.

Следовательно, в правых частях уравнений (3) сохраним лишь те силы, которые имеют доминирующее значение для рассматриваемых летательных аппаратов, а именно: силы тяжести, силы тяги двигателей и аэродинамические силы.

Наконец, в этой части будем пренебрегать кривизной земной поверхности и считать, что сила тяжести G направлена вдоль оси Oy_g, оставаясь в общем случае функцией координат ($x_g\, y_g\, z_g$) центра масс летательного аппарата относительно точки старта O_0
$G = G(x_g, y_g, z_g)$.

Проекции силы тяжести на полускоростные оси в соответствии с табл. 2.1 будут

$$G_{x_a'} = G\sin\theta\,; \quad G_{y_a'} = G\cos\theta\,; \quad G_{z_a'} = 0. \qquad (4.1.4)$$

Аэродинамические силы, действующие на летательный аппарат, обычно задают в скоростной системе проекциями X_a, Y_a, Z_a. Чтобы найти проекции аэродинамических сил на полускоростные оси, обратимся к табл. 2.3. Учитывая, что сила лобового сопротивления противоположна скорости движения, получим

$$R_{x_a'} = -X_a\,; \quad R_{y_a'} = Y_a\cos\gamma_a - Z_a\sin\gamma_a\,; \quad R_{z_a'} = Y_a\sin\gamma_a + Z_a\cos\gamma_a \qquad (4.1.5)$$

Направление силы тяги будем считать совпадающим с осью двигателя. Если же ось двигателя параллельна продольной оси летательного аппарата Ox, то проекции силы тяги на полускоростные оси будут

$$P_{x_a'} = P\cos\alpha\cos\beta\,;$$
$$P_{y_a'} = P(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a)\,;$$
$$P_{z_a'} = P(\sin\alpha\sin\gamma_a - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_a). \qquad (4.1.6)$$

Принимая теперь во внимание все вышеизложенные допущения и пользуясь соотношениями (4), (5), (6), запишем уравнения (3) движения центра масс летательного аппарата в проекциях на полускоростные оси в развёрнутом виде

$$m\dot{V} = P\cos\alpha\cos\beta - X - G\sin\theta;$$

$$mV\dot{\theta} = P(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a) + $$
$$+ Y_a\cos\gamma_a - Z_a\sin\gamma_a - G\cos\theta;$$

$$-mV\cos\theta\dot{\Psi} = P(\sin\alpha\sin\gamma_a - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_a) +$$
$$+ Y_a\sin\gamma_a + Z_a\cos\gamma_a. \qquad (4.1.7)$$

При составлении уравнений вращательного движения летательного аппарата будем полагать, что связанные оси координат совпадают с главными центральными осями инерции. Тогда систему уравнений (2.4.42) запишем в виде

$$J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x;$$

$$J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = M_y;$$

$$J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z, \qquad (4.1.8)$$

где ω_x, ω_y, ω_z – проекции угловой скорости вращения летательного аппарата на главные центральные оси инерции; M_x, M_y, M_z – сумма проекций моментов (относительно центра масс летательного аппарата) всех внешних сил на те же оси; J_x, J_y, J_z – главные центральные моменты инерции летательного аппарата.

§ 4.2. Кинематические соотношения

При исследовании движения летательного аппарата в земной топоцентрической системе координат $O_0x_gy_gz_g$ положение его центра масс O определяется радиусом-вектором $\bar{r}$. Производная по времени от радиус-вектора $\bar{r}$ представляет собой по определению вектор скорости центра масс летательного аппарата

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}. \qquad (4.2.1)$$

Проектируя уравнение (I) на земные топоцентрические оси с помощью табл. 2.1, получим скалярные уравнения, связывающие координаты центра масс летательного аппарата x_g, y_g, z_g с величиной и ориентацией его вектора скорости v, θ, ψ

$$\dot{x}_g = v\cos\theta\cos\Psi;$$
$$\dot{y}_g = v\sin\theta;$$
$$\dot{z}_g = -v\cos\theta\sin\Psi. \qquad (4.2.2)$$

Во время движения летательный аппарат и вместе с ним оси связанной системы поворачиваются относительно земной топоцентрической системы, что приводит к непрерывному изменению углов тангажа, рыскания, крена. Скорости изменения этих углов равны соответственно $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$. Для исследования движения летательного аппарата необходимо составить кинематические уравнения, описывающие изменения угловых координат летательного аппарата ϑ, ψ, γ во времени в зависимости от проекций вектора его угловой скорости на связанные оси ω_x, ω_y, ω_z.

Для вывода указанных уравнений обратимся к рис. 2.9 и табл. 4.1. Вектор угловой скорости летательного аппарата $\bar{\omega}$ можно представить как результат трёх последовательных вращений в виде суммы трёх векторов

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\vartheta}} + \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\gamma}} \qquad (4.2.3)$$

Воспользовавшись табл. 4.1 направляющих косинусов, получим проекции угловой скорости летательного аппарата на связанные оси

$$\omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta;$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma;$$
$$\omega_z = \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma. \qquad (4.2.4)$$

Отсюда нетрудно получить уравнения, связывающие производные углов ϑ, ψ, γ с проекциями угловой скорости летательного аппарата на связанные оси

$$\dot{\vartheta} = \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma ,$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\vartheta}\left(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma\right),$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg}\vartheta\left(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma\right). \qquad (4.2.5)$$

В рассмотренных выше динамических и кинематических уравнениях имеется пять уравнений, определяющих угловые параметры движения θ, Ψ, ϑ, ψ, γ. Однако в правые части динамических уравнений входят углы атаки α и скольжения β, а также скоростной угол крена γ_a. Для их определения необходимо найти три соотношения, связывающие эти угловые параметры между собой.

Положение скоростной системы координат относительно земной определяется углами θ, Ψ, γ_a. Кроме того, это же положение можно определить углами ϑ, ψ, γ, определяющими ориентацию связанных осей относительно земных, и углами α, β, определяющими положение скоростных осей относительно связанных. Следовательно, углы θ, Ψ, γ_a можно выразить через углы ϑ, ψ, γ, α, β. Зная из табл. 2.2 и 2.3 косинусы углов между связанными и земными осями, между связанными и скоростными осями, можно получить следующие три соотношения:

$$\sin\theta = \sin\vartheta\cos\alpha\cos\beta - \cos\vartheta\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta - \cos\vartheta\sin\gamma\sin\beta;$$

$$\begin{aligned}\sin\Psi\cos\theta = {} & \sin\psi\cos\vartheta\cos\alpha\cos\beta + \cos\psi\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + \\ & + \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta - \cos\psi\cos\gamma\sin\beta + \\ & + \sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma\sin\beta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\gamma_a\cos\theta = {} & \sin\vartheta\cos\alpha\sin\beta - \cos\vartheta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta + \\ & + \cos\vartheta\sin\gamma\cos\beta\end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

В некоторых частных случаях уравнения (6) допускают упрощения. Из последнего равенства системы (6) следует, что при малых углах θ, ϑ, α, β, γ и γ_a углы крена γ и γ_a приблизительно равны $\gamma \approx \gamma_a$. Если полет совершается в вертикальной плоскости без крена ($\gamma = 0$), то, учитывая, что при этом $\beta = 0$, из первого равенства (6) получим

$$\theta = \vartheta - \alpha \tag{4.2.7}$$

Пусть теперь полёт происходит в горизонтальной плоскости без крена. Положим $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx 0$, $\cos\vartheta \approx 1$. Тогда из второго равенства системы (6) следует

$$\Psi = \psi - \beta \tag{4.2.8}$$

Таблица 4.1

Косинусы углов между векторами $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\gamma}$ и связанными осями

	$\dot{\psi}$	$\dot{\vartheta}$	$\dot{\gamma}$
Ox	$\sin\vartheta$	0	1
Oy	$\cos\vartheta\cos\gamma$	$\sin\gamma$	0
Oz	$-\cos\vartheta\sin\gamma$	$\cos\gamma$	0

§ 4.3. Система уравнений движения летательного аппарата

В первую очередь запишем шесть динамических уравнений (4.1.7) и (4.1.8)

$$m\frac{dV}{dt} = P\cos\alpha\cos\beta - X_a - G\sin\theta;$$

$$mV\frac{d\theta}{dt} = P(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a) + Y_a\cos\gamma_a - Z_a\sin\gamma_a - G\cos\theta;$$

$$-mV\cos\theta\frac{d\Psi}{dt} = P(\sin\alpha\sin\gamma_a - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_a) + Y_a\sin\gamma_a + Z_a\cos\gamma_a;$$

$$J_x\frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x;$$

$$J_y\frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = M_y;$$

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z \qquad (4.3.1)$$

Далее запишем шесть кинематических уравнений (4.2.2) и (4.2.5)

$$\frac{dX_g}{dt} = V\cos\theta\cos\Psi;$$

$$\frac{dY_g}{dt} = V\sin\theta;$$

$$\frac{dZ_g}{dt} = -V\cos\theta\sin\Psi;$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma);$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - tg\vartheta(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma). \qquad (4.3.2)$$

К записанным уравнениям необходимо добавить три связи (4.2.6) между углами θ, Ψ, γ_a, ϑ, ψ, γ, α, β

$$\sin\theta = \sin\vartheta\cos\alpha\cos\beta - \cos\vartheta\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta - \dots$$

$$\sin\Psi\cos\theta = \sin\psi\cos\vartheta\cos\alpha\cos\beta + \cos\psi\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + \dots$$

$$\sin\gamma_a\cos\theta = \sin\vartheta\cos\alpha\sin\beta - \cos\vartheta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta + \dots \qquad (4.3.3)$$

Для определения массы летательного аппарата в любой момент времени необходимо добавить ещё одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -M_{сек}, \qquad (4.3.4)$$

где $M_{сек}$ – секундный массовый расход топлива, зависящ. й от типа двигателя, режима его работы, скорости и высоты полёта.

Система из 16 уравнений (4.3.I)-(4.3.4) описывает прост - ранственное движение неуправляемого летательного аппарата относительно земных топоцентрических осей координат при следующих на - чальных условиях:

$$V(0) = V_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \Psi(0) = \Psi_0,$$

$$\omega_x(0) = \omega_{x_0}, \quad \omega_y(0) = \omega_{y_0}, \quad \omega_z(0) = \omega_{z_0},$$

$$X_g(0) = X_{g_0}, \quad Y_g(0) = Y_{g_0}, \quad Z_g(0) = Z_{g_0},$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0,$$

$$m(0) = m_0. \qquad (4.3.5)$$

В случае неуправляемого летательного аппарата тяга двигателя не регулируется. Тогда силы G, P, X_a, Y_a, Z_a, действующие на аппарат, и их моменты M_x, M_y, M_z будут однозначно определяться параметрами движения летательного аппарата. Тогда нетрудно видеть, что рассматриваемая система является замкнутой, то есть число неизвестных функций

$$V(t),\ \theta(t),\ \Psi(t),\ \omega_x(t),\ \omega_y(t),\ \omega_z(t),\ X_g(t),\ Y_g(t),\ Z_g(t),$$

$$\vartheta(t),\ \psi(t),\ \gamma(t),\ m(t),\ \alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma_a(t)$$

равно числу уравнений. При этом траектория полёта однозначно оп - ределяется начальными условиями (5).

В случае неуправляемого полёта система (4.3.I)-(4.3.4) не является замкнутой, поскольку к перечисленным 16 неизвестным добавятся ещё параметры, характеризующие режим работы двигателя, и углы отклонения органов управления тангажом, рысканием, креном, поскольку от них зависят силы и моменты, входящие в правые части динамических уравнений. Для замыкания к системе уравнений движения летательного аппарата необходимо добавить уравнения, описывающие процессы в системе управления.

Несмотря на упрощения, допущенные при составлении уравнений движения летательного аппарата, эти уравнения с переменными коэффициентами, будучи нелинейными, остаются достаточно сложными. Поэтому в зависимости от характера решаемой задачи уравнения движения подвергаются дополнительным упрощениям. Эти вопросы будут рассматриваться в последующих частях учебника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Циолковский К.Э. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. Пионеры ракетной техники. Избранные труды (1891-1938). М.: Наука, 1977. 632 с.
3. Пионеры ракетной техники. Избранные труды (Кибальчич, Циолковский, Цандер, Кондратюк). М.: Наука, 1964. 671 с.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.2. М.: Наука, 1983. 640 с.
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.1. М.: Наука, 1982. 352 с.
6. Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М. Теория полета неуправляемых ракет. Физматгиз, 1959. 560 с.
7. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1987. 430 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Измаилович Биматов
Владимир Дмитриевич Мерзляков
Валентин Петрович Степанов

ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

Часть I

Редактор Г.В.Астапенко

Подписано к печати 23.05.93. Формат 60 x 84 I/I6. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Печ.л. I0,5. Усл.печ.л. 9,7. Уч.-изд.л. 8,5. Тираж 250 экз. Заказ 59

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Ротапринт