

Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет
Кафедра теоретической физики



ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
главный научный сотрудник,
факультет
доцент

О.Н. Чайковская
« 01 » июня 2018 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАССИВНОГО ПОЛЯ СО СПИНОМ 2 С ВНЕШНИМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки 03.03.02. – Физика

Зайчиков Иван Михайлович

Руководитель
канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, ТГПУ

Т. В. Снегирев
подпись

« 01 » июня 2018 г.

Студент группы № 0544

И. М. Зайчиков
подпись

Содержание

Введение	3
1 Динамика свободных полей высших спинов	7
1.1 Калибровочно-инвариантная формулировка безмассовых полей	7
1.1.1 Спин 0	7
1.1.2 Спин 1	8
1.1.3 Спин 2	8
1.1.4 Произвольный целый спин s	9
1.2 Калибровочно-инвариантная формулировка массивных полей	10
1.2.1 Спин 0	10
1.2.2 Спин 1	10
1.2.3 Спин 2	13
1.2.4 Произвольный целый спин s	17
2 Электромагнитное взаимодействие полей со спином 2	19
2.1 Проблема включения электромагнитного взаимодействия	20
2.2 Процедура построения взаимодействия с внешним электромагнитным по- лем	22
2.3 Кубичная вершина взаимодействия для безмассового поля	24
2.4 Кубичная вершина взаимодействия для массивного поля	26
Заключение	34
А Вариации безмассового поля спина 2	36
В Вариации массивного поля спина 2	37
Список использованной литературы	41

Введение

Проблема построения теории полей высших спинов и изучения ее физических приложений является одной из открытых проблем современной теоретической физики. Хорошо известно, что в пространстве Минковского понятие спина связано с неприводимым представлением группы Пуанкаре. Массивные неприводимые представления характеризуются массой и спином, безмассовые - спиральностью, которую обычно тоже называют спином. Лагранжевы формулировки полей с низшими спинами 0, $1/2$, 1 построены много лет назад и широко используются в физике элементарных частиц, в частности, в современной объединенной теории электрослабого и сильного взаимодействий (см. напр. [1]).

Взаимодействующая теория безмассового поля со спином 2 представляет собой эйнштейновскую общую теорию относительности. Взаимодействующие безмассовые поля со спином $3/2$ и 2 описываются супергравитацией. Лагранжева формулировка взаимодействующих полей других спинов, свободная от внутренних противоречий, в настоящее время неизвестна. Также следует отметить, что резонансные состояния с высшими спинами регистрируются в экспериментах по рассеянию элементарных частиц и что частицы с высшими спинами естественным образом возникают в теории суперструн, претендующей на объединенную теорию всех фундаментальных взаимодействий (см. напр. [2]). В связи с этим проблемы теорий полей высших спинов привлекают значительное внимание и широко обсуждаются в современной литературе по теоретической физике высоких энергий (см. обзоры [3–6]).

Важность лагранжевой формулировки для полей высших спинов обусловлена в первую очередь тем, что она является основной для построения квантовой теории. Действительно, каноническое квантование предполагает, что рассматриваемая теория приведена к гамильтоновой форме, которая в свою очередь, выводится из лагранжевой формулировки. Квантование с помощью функционального интеграла предполагает известным классическое действие, то есть опять же лагранжеву формулировку. Поэтому изучение квантовых аспектов теории полей высших спинов с неизбежностью связано с развитием ее лагранжевой формулировки.

В общем, в теории поля рассматриваются две основные проблемы, связанные с взаимодействующими полями. Первая - взаимодействие между несколькими полями, а вторая - взаимодействие рассматриваемого поля с некоторым внешним (электромагнитным, гравитационным и т.д.). В классической теории поля эти проблемы тесно связаны, но в теории полей высших спинов, где общий лагранжиан взаимодействия еще не найден, эти виды взаимодействий могут изучаться как самостоятельные задачи (при этом построение взаимодействия с внешним полем является более простой).

Проблемы согласованности теории взаимодействия полей высших спинов с внешним электромагнитным полем были изучены в статьях [7–9]. В работе [10] было изучено взаимодействие полей высших спинов с внешним гравитационным полем на примере спина 2. Первые попытки построения лагранжиана взаимодействия для полей высших спинов были предприняты в работах [11,12] и [13], в них были рассмотрены безмассовые поля, а также отмечены проблемы согласованности. Существенный прогресс в понимании взаимодействия безмассовых полей высших спинов с гравитационным полем был достигнут в статьях [14–16], где было показано, что такое взаимодействие требует включения полей всех спинов, а также была представлена симметрия полей высших спинов и построены кубичные вершины взаимодействия полей всех спинов с внешним гравитационным полем и было показано, что такие вершины существуют только в пространстве $(A)dS$. Позже в работах [17,18] были найдены согласованные уравнения движения для всех взаимодействующих безмассовых полей высшего спина. А не так давно в статьях [19, 20] были представлены аргументы, что эти уравнения могут оказать лагранжевыми.

В настоящее время разрабатываются различные подходы для построения взаимодействий полей высших спинов, и был достигнут определенный прогресс в поиске кубичных вершин для безмассовых и массивных полей (см. статьи [21–34]).

Цель данной работы состоит в построении общего вида вершины взаимодействия низшего порядка для безмассовых и массивных бозонных полей, взаимодействующих с постоянным внешним электромагнитным полем (на примере полей спина 2). Как мы отметили ранее, построение лагранжевой формулировки взаимодействия полей высших спинов с внешним полем является независимой задачей. В нашей работе мы ей и ограничимся.

Различные аспекты лагранжевой формулировки полей высших спинов находящихся во внешнем электромагнитном поле обсуждены в статьях [35–42]. Стоит упомянуть, что были предприняты попытки построения уравнений движения для полей высших спинов во внешнем электромагнитном и гравитационном полях для теории струн (см. [43–46]). Общая проблема построения кубичных вершин взаимодействия для полей произвольного высшего спина во внешнем электромагнитном поле является до сих пор открытой.

Большая часть работы основана на [47] и она организована следующим образом. В первой главе мы рассмотрим безмассовую и массивную теорию свободных полей высших целых спинов, на примере полей со спинами 0, 1 и 2. Рассмотрение таких полей позволит нам не только более легко и понятно выработать принцип описания теории полей высших спинов, но и выработать навык для описания общего случая - безмассовых и массивных полей с произвольным целым спином s . Во второй главе мы обозначим проблему построения электромагнитного взаимодействия для полей высших спинов, а также отметим общую процедуру построения такого взаимодействия. После

чего найдем кубичные вершины взаимодействия для безмассового и массивного поля спина 2 во внешнем постоянном электромагнитном поле. В заключении подведен итог всей проделанной работы. Большая часть промежуточных вычислений приведена в Приложении.

Соглашения и обозначения В данной работе используются следующие соглашения и обозначения

- Мы работаем в пространстве Минковского произвольной размерности d , описываемом метрикой:

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1),$$

которая используется для поднятия и опускания, а также свертки индексов. Здесь и в дальнейшем все индексы, использующие буквы греческого алфавита принимают значения $0, 1, 2, 3, \dots, d$. Индексы с буквами из латинского алфавита принимают значения $1, 2, 3, \dots, d$.

- Частные производные $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ в выбранном нами пространстве коммутируют:

$$\partial^\alpha \partial^\beta = \partial^\beta \partial^\alpha.$$

Здесь при $\alpha = 0$ имеем $x_0 = t$ - время, а в случае $\alpha = i = 1, \dots, d$ мы имеем x_i - пространственные координаты. Также определим $\partial_\alpha = g_{\alpha\beta} \partial^\beta$.

- Индексы заключенные в круглые скобки означают полную симметризацию, без какого-либо нормирующего множителя, например

$$\partial^{(\alpha} h^{\beta\gamma)} = \partial^\alpha h^{\beta\gamma} + \partial^\beta h^{\alpha\gamma} + \partial^\gamma h^{\alpha\beta}$$

в случае полностью симметричного тензора $h^{\alpha\beta}$.

- Для того чтобы описать динамику полей типа ϕ^A мы используем плотность функции Лагранжа $\mathcal{L}$ (для простоты именно она будет называться у нас лагранжианом). Мы получим уравнения движения из действия $\mathcal{S}$, которое связано с лагранжианом как

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dx.$$

Вариация действия записывается в виде

$$\delta \mathcal{S} = \int \delta \mathcal{L} dx = \int \delta \phi^A \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi_A} \right) dx.$$

Из условия $\delta \mathcal{S} = 0$, мы получаем уравнения движения в виде

$$\left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi_A} \right) = 0.$$

При этом вариация лагранжиана вычисляется по формуле

$$\delta_{\phi^A} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \delta \phi^A.$$

Отдельные обозначения и определения будут введены далее в различных частях работы, эти же соглашения и обозначения будут использоваться на всем ее протяжении.

1 Динамика свободных полей высших спинов

В этой главе дается лагранжева формулировка свободных полей высших спинов в пространстве Минковского фиксированной размерности $d = 4$. Как мы уже упоминали в введении, нас интересует калибровочно-инвариантное описание. Такое описание для безмассовых полей требуется самой теорией и является единственным способом для работы в явно лоренц-ковариантном виде. Для массивных полей высших спинов калибровочно-инвариантное описание скорее является искусственным, осуществляемым с помощью введения дополнительных вспомогательных полей.

1.1 Калибровочно-инвариантная формулировка безмассовых полей

Известно, что все безмассовые поля (за исключением спина¹ 0) являются калибровочными полями и калибровочно-инвариантное описание - единственная возможность работать в явно лоренц-ковариантном виде. Далее в этом разделе мы приведем лагранжианы и уравнения действия для безмассовых полей со спином 0, 1 и 2, а затем обобщим получившиеся результаты на случай произвольного целого спина s .

1.1.1 Спин 0

Безмассовое поле со спином $s = 0$ описывается скалярным полем φ , которое должно удовлетворять уравнению

$$\square\varphi = 0,$$

здесь $\square = \partial^2 = \partial^\alpha\partial_\alpha$. Лагранжиан, воспроизводящий данное условие будет иметь вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi.$$

Действительно, вычисляя вариацию лагранжиана и интегрируя по частям имеем уравнение движения

$$\delta\mathcal{L} = -\partial^2\varphi\delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}\right) = -\square\varphi = 0.$$

Здесь и далее мы используем обозначения и соглашения, указанные в введении.

¹Здесь и далее мы будем использовать термин спин для безмассовых полей, хотя речь будет идти о спиральности

1.1.2 Спин 1

Безмассовое поле со спином $s = 1$ (фотон) описывается векторным полем b_μ , лагранжиан для него имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu\partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu\partial_\nu b_\mu,$$

здесь $B_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$. В отличие от спина 0 имеет место инвариантность лагранжиана относительно калибровочных (зависящих от точки пространства) преобразований

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \xi.$$

со скалярным калибровочным параметром $\xi(x)$. Инвариантность означает, что лагранжиан зависит не от всех компонент поля b_μ , а только от тех, что не меняются при калибровочных преобразованиях, следовательно, уравнения движения будут соответствовать физическим компонентам.

Уравнения движения для нашего поля будут иметь форму

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta b_\mu} = \partial^2 b^\mu - \partial^\mu(\partial b) = 0.$$

Откуда при наложении условий $\partial b = 0$ следует, что $\square b_\mu = 0$, как и в случае поля со спином 0. Здесь мы использовали обозначение $\partial b = \partial_\nu b^\nu$.

1.1.3 Спин 2

Безмассовое поле со спином 2 (гравитон) описывается симметричным тензорным полем 2-го ранга $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. Лагранжиан которого имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\alpha h^{\mu\nu}\partial_\alpha h_{\mu\nu} - (\partial h)^\mu(\partial h)_\mu - (\partial\partial h)h - \frac{1}{2}\partial^\mu h\partial_\mu h,$$

где мы используем обозначения $(\partial h)^\mu = \partial_\alpha h^{\alpha\mu}$, $(\partial\partial h) = \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}$ и $h = g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$. Вид лагранжиана с точностью до общего множителя определяется инвариантностью относительно калибровочных преобразований

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

с векторным калибровочным параметром $\xi_\mu(x)$.

Найдем вариацию такого лагранжиана, она будет иметь форму

$$\delta \mathcal{L} = [-\partial^2 h^{\mu\nu} + \partial^\mu(\partial h)^\nu + \partial^\nu(\partial h)^\mu - \partial^\mu\partial^\nu h - g^{\mu\nu}(\partial\partial h) + g^{\mu\nu}\partial^2 h]\delta h_{\mu\nu}.$$

Действительно, можно показать, что наш лагранжиан инвариантен относительно построенных нами калибровочных преобразований, то есть $\delta\mathcal{L} = 0$. Для построенного нами лагранжиана уравнения движения будут иметь вид:

$$\left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta h_{\mu\nu}}\right) = -\partial^2 h^{\mu\nu} + \partial^\mu(\partial h)^\nu + \partial^\nu(\partial h)^\mu - \partial^\mu\partial^\nu h - g^{\mu\nu}(\partial\partial h) + g^{\mu\nu}\partial^2 h = 0.$$

Как видно условие $\square h^{\mu\nu} = 0$ не доказывается напрямую из вида уравнений движения, для этого необходимо зафиксировать калибровочные параметры ξ^μ , например, следующим образом $(\partial h)^\nu = 0$. Мы получаем, что свободный лагранжиан безмассовых полей определяет кинетические члены по аналогии с классической механикой.

1.1.4 Произвольный целый спин s

Обобщим рассмотренные нами случаи полей спинов 0, 1 и 2 и построим теорию для поля произвольного целого спина s . Оно будет описываться полностью симметричным дважды бесследовым тензорным полем ранга s . То есть таким Φ^s , что $\tilde{\tilde{\Phi}}^{s-4} = 0$. Здесь мы используем следующие обозначения: $\Phi^s = \Phi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}$, $(\partial\Phi)^{s-1} = \partial_{\mu_1}\Phi^{\mu_1 s-1}$, $\tilde{\Phi}^{s-2} = g_{\mu_1\mu_2}\Phi^{\mu_1\mu_2 s-2}$. Для нахождения лагранжиана потребуем выполнения условий, следующих из неприводимых представлений группы Пуанкаре

$$\square\Phi^s = 0, \quad (\partial\Phi)^{s-1} = 0, \quad \tilde{\Phi}^{s-2} = 0.$$

Удовлетворяющий таким соотношениям лагранжиан будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (-1)^s \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \Phi^s \partial_\mu \Phi_s - \frac{s}{2} (\partial\Phi)^{s-1} (\partial\Phi)_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} (\partial\Phi)^{\mu_1 s-2} \partial_{\mu_1} \tilde{\Phi}_{s-2} \right. \\ & \left. - \frac{s(s-1)}{4} \partial^\mu \tilde{\Phi}^{s-2} \partial_\mu \tilde{\Phi}_{s-2} - \frac{s(s-1)(s-2)}{8} (\partial\tilde{\Phi})^{s-3} (\partial\tilde{\Phi})_{s-3} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Этот лагранжиан будет инвариантен относительно калибровочных преобразований имеющих форму

$$\delta\Phi_s = \partial_{(\mu_1} \xi_{s-1)}, \quad \tilde{\xi}_{s-3} = 0.$$

А уравнения движения для такого поля будут выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\Phi_s}\right) = & (-1)^s \left[-\partial^2 \Phi^s + \partial^{(\mu_1} (\partial\Phi)^{s-1)} - \partial^{(\mu_1} \partial^{\mu_2} \tilde{\Phi}^{s-2)} - g^{\mu_1\mu_2} (\partial\partial\Phi)^{s-2} \right. \\ & \left. + g^{(\mu_1\mu_2} \partial^2 \tilde{\Phi}^{s-2)} + \frac{1}{2} g^{(\mu_1\mu_2} \partial^{\mu_3} (\partial\tilde{\Phi})^{s-3)} \right]. \end{aligned}$$

С легкостью можно проверить, что и лагранжиан, и уравнения движения при подстановке конкретных s (0, 1, 2) дают согласующийся с найденными ранее выражениями результат. На этом мы закончим рассмотрение безмассовых полей.

1.2 Калибровочно-инвариантная формулировка массивных полей

В этой части мы построим лагранжианы и уравнения движения для массивных полей со спинами 0, 1 и 2. Также мы рассмотрим понятие вспомогательных штюкелберговских полей. На основании рассмотренных нами случаев, построим теорию для произвольного спина s . Здесь мы будем использовать те же соглашения и обозначения, что и ранее.

1.2.1 Спин 0

В реальном мире частица обладающая массой и нулевым спином была обнаружена относительно недавно, это бозон Хиггса. Как и в случае с безмассовым, массивное поле с нулевым спином описывается скалярным полем φ , которое удовлетворяет соотношению (являющимся неприводимым представлением группы Пуанкаре)

$$(\square + m^2)\varphi = 0. \quad (2)$$

Где m некая ненулевая масса нашего поля (при этом $m^2 > 0$). Лагранжиан, отвечающий такому соотношению, будет иметь вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi\varphi.$$

Найти вариацию такого лагранжиана будет гораздо проще, ведь безмассовую часть мы уж получили, когда рассматривали безмассовое свободное поле спина 0. Она будет иметь вид

$$\delta\mathcal{L} = [-\partial^2\varphi - m^2\varphi]\delta\varphi.$$

Уравнение движения, в этом случае, будет иметь форму

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}\right) = -(\partial^2 + m^2)\varphi = 0.$$

Откуда получаем непосредственное доказательство верности соотношения (2), на основании которого мы построили лагранжиан. Также видно, что лагранжиан имеет правильный безмассовый предел, то есть при $m \rightarrow 0$ не происходит скачка степеней свободы, и лагранжиан принимает форму для случая $s = 0$ и $m = 0$.

1.2.2 Спин 1

Продолжая аналогии с безмассовым случаем несложно догадаться, что массивное поле с спином 1 (W- и Z- бозоны) описывается векторным полем b_μ . Вновь построим обязательные к выполнению соотношения, следующие из неприводимых представлений

группы Пуанкаре. В случае $s = 1$ они имеют вид

$$(\square + m^2)b_\mu = 0, \partial^\mu b_\mu = 0.$$

Лагранжиан такого поля будет иметь вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\nu b_\mu + \frac{1}{2}m^2 b^\mu b_\mu = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 b^\mu b_\mu, \quad (3)$$

где мы вновь воспользовались обозначением $B_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$. Теперь найдем вариацию этого лагранжиана:

$$\delta\mathcal{L} = [\partial^2 b^\mu - \partial^\mu(\partial b) + m^2 b^\mu]\delta b_\mu.$$

Такой лагранжиан не будет инвариантным относительно калибровочных преобразований $\delta b_\mu = \partial_\mu \xi$, что легко проверить. Мы знаем, что инвариантной является часть "унаследованная" лагранжианом из безмассового случая. То есть, подставив преобразования в выражение для вариации лагранжиана, вместо нуля получим

$$\delta\mathcal{L} = -m^2 \partial_\mu b^\mu \xi \neq 0.$$

Отсюда следует, что такой лагранжиан не имеет правильного безмассового предела.

Теперь докажем верность соотношений, использованных нами для нахождения лагранжиана. Уравнения движения в нашем случае примут вид

$$\left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta b_\mu}\right) = \partial^2 b^\mu - \partial^\mu(\partial b) + m^2 b^\mu = 0.$$

Поддействуем на эти уравнения оператором ∂_μ

$$\partial_\mu[\partial^2 b^\mu - \partial^\mu(\partial b) + m^2 b^\mu] = 0 \implies \partial^2(\partial b) - \partial^2(\partial b) + m^2(\partial b) = 0.$$

Так как $m \neq 0$ получим

$$(\partial b) = 0.$$

Тем самым мы получили второе соотношение. Подставив его в изначальную форму уравнений движения получим

$$\partial^2 b_\mu + m^2 b_\mu = 0.$$

Мы получили выполнение обоих соотношений. Однако остается проблема, а именно тот факт, что лагранжиан (3) не имеет правильного безмассового предела. Для того чтобы в случае $m = 0$ лагранжиан (3) описывал безмассовое поле, необходимо, чтобы он был инвариантен относительно калибровочных преобразований. Эта проблема решается посредством ввода вспомогательных штюкельберговских полей, в данном случае это единственное скалярное поле φ . После его ввода можно построить лагранжиан для поля

$m \neq 0, s = 1$, который будет инвариантен относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \xi, \delta \varphi = \alpha \xi. \quad (4)$$

Лагранжиан отвечающий таким преобразованиям будет иметь вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\nu b_\mu + \frac{1}{2}\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + a_1(\partial b)\varphi + \frac{1}{2}m^2 b^\mu b_\mu + a_2 \varphi \varphi. \quad (5)$$

Давайте рассмотрим структуру построенного лагранжиана. Члены с двумя производными, соответствуют безмассовым лагранжианам для спинов 1 и 0 соответственно, будем называть их кинетическими членами. Затем идет член перекрестный между полями b_μ и φ с одной производной, можно заметить, что никаких других членов взаимодействия с одной производной написать невозможно. Затем идут два массовых члена без производных. В нашем лагранжиане (5) и калибровочных преобразованиях (4) мы ввели три константы α, a_1 и a_2 . Они найдутся из инвариантности лагранжиана относительно преобразований.

Итак, построим вариацию нашего расширенного лагранжиана. Для этого можно использовать вариации лагранжианов безмассовых полей b_μ и φ . Получим

$$\delta \mathcal{L} = [\partial^2 b^\mu - \partial^\mu(\partial b) - a_1 \partial^\mu \varphi + m^2 b^\mu] \delta b_\mu + [-\partial^2 \varphi + a_1(\partial b) + 2a_2 \varphi] \delta \varphi.$$

В таком случае уравнения движения для наших полей будут иметь следующий вид

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta b_\mu} \right) = \partial^2 b^\mu - \partial^\mu(\partial b) - a_1 \partial^\mu \varphi + m^2 b^\mu = 0,$$

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \right) = -\partial^2 \varphi + a_1(\partial b) + 2a_2 \varphi = 0.$$

Подставим калибровочные преобразования в вариацию лагранжиана и получим

$$\delta \mathcal{L} = [a_1 \partial^2 \varphi \xi - m^2(\partial b)\xi] + [-\alpha \partial^2 \varphi \xi + a_1 \alpha(\partial b)\xi + 2a_2 \alpha \varphi \xi] = (a_1 - \alpha) \partial^2 \varphi \xi - (m^2 - a_1 \alpha)(\partial b)\xi + 2a_2 \alpha \varphi \xi.$$

Используя определение калибровочной инвариантности $\delta \mathcal{L} = 0$, получим систему уравнений на наши коэффициенты

$$a_1 - \alpha = 0, \quad m^2 - a_1 \alpha = 0, \quad 2a_2 \alpha = 0.$$

Решение такой системы будет иметь вид

$$a_1 = \alpha = m, a_2 = 0.$$

Подставив эти значения, мы получим окончательный вид нашего лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\nu b_\mu + \frac{1}{2}\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + m(\partial b)\varphi + \frac{1}{2}m^2 b^\mu b_\mu,$$

который будет инвариантен относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \xi, \quad \delta \varphi = m\xi.$$

Теперь покажем эквивалентность этого лагранжиана лагранжиану (3). Это можно увидеть, если зафиксировать калибровочный параметр ξ так, что $\varphi = 0$. Также у полученного нами лагранжиана имеется правильный безмассовый предел $m = 0$. В нем лагранжиан принимает форму

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu \partial_\nu b_\mu + \frac{1}{2}\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi,$$

инвариантную относительно калибровочных преобразований

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \xi.$$

Такой лагранжиан описывает систему безмассовых полей со спином 1 и 0. Скачок степеней свободы не наблюдается. Имеющий такую структуру лагранжиан называется калибровочно-инвариантной формулировкой массивных полей.

1.2.3 Спин 2

Опять воспользуемся аналогией с безмассовым случаем. Несложно понять, что массивное поле со спином 2 описывается полностью симметричным тензорным полем второго ранга $h_{\mu\nu}$. Для нахождения лагранжиана потребуем, чтобы для нашего поля выполнялись условия

$$(\square + m^2)h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad h = g_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

Лагранжиан такого поля будет иметь вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\alpha h^{\mu\nu} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - (\partial h)^\mu (\partial h)_\mu - (\partial\partial h)h - \frac{1}{2}\partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{1}{2}m^2(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - hh). \quad (7)$$

Найдем его вариацию. Нам известен вид вариации для всего выражения кроме массивного члена. Запишем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & [-\partial^2 h^{\mu\nu} + \partial^\mu (\partial h)^\nu + \partial^\nu (\partial h)^\mu - \partial^\mu \partial^\nu h - g^{\mu\nu}(\partial\partial h) + g^{\mu\nu}\partial^2 h + \\ & + m^2(g^{\mu\nu}h - h^{\mu\nu})]\delta h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для этого лагранжиана не выполняется калибровочная инвариантность относительно преобразования

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu.$$

Подставив это преобразование в выражение (8) получим

$$\delta\mathcal{L} = -2m^2\partial^\nu h\xi_\nu + 2m^2(\partial h)^\nu\xi_\nu \neq 0.$$

Как видно, свойство калибровочной инвариантности для этих преобразований не выполнено. То есть такой лагранжиан не имеет правильного безмассового предела.

Рассмотрим полученные из него уравнения движения

$$\left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta h_{\mu\nu}}\right) = -\partial^2 h^{\mu\nu} + \partial^{(\mu}(\partial h)^{\nu)} - \partial^\mu\partial^\nu h - g^{\mu\nu}(\partial\partial h) + g^{\mu\nu}\partial^2 h + m^2 g^{\mu\nu} h - m^2 h^{\mu\nu} = 0. \quad (9)$$

Как видно, введенные нами соотношения (6) не доказываются непосредственно из них.

Подействуем на уравнения (9) оператором $A_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu + \alpha g_{\mu\nu}$ также, для удобства, введем обозначение $H^{\mu\nu} = \left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta h_{\mu\nu}}\right)$. Получим

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}H^{\mu\nu} &= (\partial_\mu\partial_\nu + \alpha g_{\mu\nu})[-\partial^2 h^{\mu\nu} + \partial^{(\mu}(\partial h)^{\nu)} - \partial^\mu\partial^\nu h - g^{\mu\nu}(\partial\partial h) + g^{\mu\nu}\partial^2 h \\ &+ m^2 g^{\mu\nu} h - m^2 h^{\mu\nu}] = -(m^2 + 2\alpha)(\partial\partial h) + (m^2 + 2\alpha)\partial^2 h \\ &+ m^2 3\alpha h = 0. \end{aligned}$$

Выбрав в качестве константы $\alpha = -m^2/2$, мы получим

$$A_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = -\frac{3m^4}{2}h = 0.$$

Откуда следует доказательство соотношения $h = 0$. Подставим такое значение h в уравнения движения и получим

$$H^{\mu\nu} = -\partial^2 h^{\mu\nu} + \partial^{(\mu}(\partial h)^{\nu)} - g^{\mu\nu}(\partial\partial h) - m^2 h^{\mu\nu} = 0.$$

Действуя оператором ∂_μ получим

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = -m^2(\partial h)^\nu = 0.$$

Что является доказательством соотношения $(\partial h)^\mu = 0$. Если оба этих соотношения подставить в уравнения движения, то получится $(\square + m^2)h^{\mu\nu} = 0$. Что и требовалось доказать.

Так как у такого лагранжиана отсутствует правильный безмассовый предел, то построим новый, введя вспомогательные штюкельберговские поля. В случае $s = 1$ нам хватило одного поля со спином 0, в этом же случае введем целых два, со спинами 1 и 0. Потребуем, чтобы для нашего лагранжиана имела место калибровочная инвариантность относительно преобразований

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} + \alpha g_{\mu\nu}\xi, \quad \delta b_\mu = \partial_\mu\xi + \beta\xi_\mu, \quad \delta\varphi = \gamma\xi.$$

Запишем теперь лагранжиан такой структуры

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial^\alpha h^{\mu\nu}\partial_\alpha h_{\mu\nu} - (\partial h)^\mu(\partial h)_\mu - (\partial\partial h)h - \frac{1}{2}\partial^\mu h\partial_\mu h - \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu\partial_\mu b_\nu \\ & + \frac{1}{2}(\partial b)(\partial b) + \frac{1}{2}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi + a_1(\partial h)^\nu b_\nu + a_2(\partial b)\varphi + a_3(\partial b)h \\ & + \frac{1}{2}m^2(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - hh) + a_4b_\nu b^\nu + a_5\varphi\varphi + a_6h\varphi.\end{aligned}$$

Здесь мы вновь имеем дело с кинетическими членами (все с двумя производными), членами взаимодействия между полями (с одной производной) и массовыми членами (без производных). Теперь построим вариацию данного лагранжиана

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = & -\partial^2 h^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu} + 2\partial^\mu(\partial h)^\nu\delta h_{\mu\nu} + [-\partial^\mu(\partial h)^\nu + \partial^\nu(\partial h)^\mu]\delta h_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\partial^2 h\delta h_{\mu\nu} + \partial^2 b^\nu\delta b_\nu \\ & -\partial^\nu(\partial b)\delta b_\nu - \partial^2\varphi\delta\varphi - a_1\partial^\mu b^\nu\delta h_{\mu\nu} + a_1(\partial h)^\nu\delta b_\nu - a_2\partial^\nu\varphi\delta b_\nu + a_2(\partial b)\delta\varphi - a_3\partial^\nu h\delta b_\nu \\ & + a_3g^{\mu\nu}(\partial b)\delta h_{\mu\nu} + m^2(g^{\mu\nu}h - h^{\mu\nu})\delta h_{\mu\nu} + 2a_4b^\nu\delta b_\nu + 2a_5\varphi\delta\varphi + a_6g^{\mu\nu}\varphi\delta h_{\mu\nu} + a_6h\delta\varphi.\end{aligned}$$

Запишем вид полной вариации нашего лагранжиана, с уже подставленными калибровочными подстановками

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = & [-\partial^2 h^{\mu\nu} + 2\partial^\mu(\partial h)^\nu - \partial^\mu(\partial h)^\nu + \partial^\nu(\partial h)^\mu + g^{\mu\nu}\partial^2 h - a_1\partial^\mu b^\nu + a_3g^{\mu\nu}(\partial b) \\ & + m^2(g^{\mu\nu}h - h^{\mu\nu}) + a_6g^{\mu\nu}\varphi](\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} + \alpha g_{\mu\nu}\xi) \\ & + [\partial^2 b^\nu - \partial^\nu(\partial b) + a_1(\partial h)^\nu - a_2\partial^\nu\varphi - a_3\partial^\nu h + 2a_4b^\nu](\partial_\mu\xi + \beta\xi_\mu) \\ & + [-\partial^2\varphi + a_2(\partial b) + 2a_5\varphi + a_6h](\gamma\xi) = 0.\end{aligned}$$

Теперь необходимо сгруппировать члены этой вариации, чтобы получить уравнения на введенные нами коэффициенты. Для удобства введем обозначения $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$, где индексами 0,1,2 обозначен наивысший порядок производной в данном члене. Вариацию можно в таком случае записать как

$$\delta\mathcal{L} = (\delta_1 + \delta_0)(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0) = \delta_1\mathcal{L}_2 + (\delta_1\mathcal{L}_1 + \delta_0\mathcal{L}_2) + (\delta_0\mathcal{L}_1 + \delta_1\mathcal{L}_0) + \delta_0\mathcal{L}_0.$$

Здесь член $\delta_1\mathcal{L}_2$ в нашем случае будет равен нулю (это следует из безмассового представления). То есть нам надо рассмотреть только члены с "суммарным" порядком производных не больше двух, а затем вынести необходимые к занулению коэффициенты. Каждое из слагаемых в такой форме должно зануляться. Найдём их

$$\delta_1\mathcal{L}_1 = a_1\partial^2 b^\nu\xi_\nu + (a_1 - 2a_3 - \beta)\partial^\nu(\partial b)\xi_\nu + a_1(\partial\partial h)\xi + a_2\partial^2\varphi\xi + a_3\partial^2 h\xi,$$

$$\delta_0\mathcal{L}_2 = 2\alpha\partial^2 h\xi - 2\alpha(\partial\partial h)\xi + \beta\partial^2 b^\nu\xi_\nu - \beta\partial^\nu(\partial b)\xi_\nu - \gamma\partial^2\varphi\xi.$$

Сложив эти два члена, мы получим следующие выражения

$$a_1 + \beta = 0, \quad a_1 - 2a_3 - \beta = 0,$$

$$a_1 - 2\alpha = 0, \quad a_2 - \gamma = 0, \quad a_3 + 2\alpha = 0.$$

Выразим здесь все коэффициенты из лагранжиана через коэффициенты калибровочных преобразований, получим

$$a_1 = -\beta, \quad a_3 = \beta, \quad 2\alpha = -\beta, \quad a_2 = \gamma.$$

Рассмотрим оставшиеся члены

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{L}_1 + \delta_1 \mathcal{L}_0 &= (-2a_4 - \alpha a_1 + \gamma a_2 + 4\alpha a_3)(\partial b)\xi + (\beta a_1 + 2m^2)(\partial h)^\nu \xi_\nu \\ &- (\beta a_3 + 2m^2)\partial^\nu h \xi_\nu - (2a_6 + \beta a_2)\partial^\nu \varphi \xi_\nu. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$-2a_4 - \alpha a_1 + \gamma a_2 + 4\alpha a_3 = 0, \quad \beta a_1 + 2m^2 = 0, \quad \beta a_3 + 2m^2 = 0, \quad 2a_6 + \beta a_2 = 0.$$

Последний член будет иметь вид

$$\delta_0 \mathcal{L}_0 = 3\alpha m^2 h \xi + 4\gamma a_6 \varphi \xi + 2\beta a_4 b^\nu \xi_\nu + 2\gamma a_5 \varphi \xi + \gamma a_6 h \xi,$$

откуда мы получим

$$3\alpha m^2 + \gamma a_6 = 0, \quad 4\gamma a_6 + 2\gamma a_5 = 0, \quad 2\beta a_4 = 0.$$

Из этих систем просто найти конкретные значения коэффициентов, в нашем случае

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 = \sqrt{2}m, \quad a_2 = -\sqrt{3}m, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 6m^2, \\ a_6 = -3m^2, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}m, \quad \beta = -\sqrt{2}m, \quad \gamma = -\sqrt{3}m. \end{aligned}$$

Итак, подставив эти коэффициенты, мы получим лагранжиан вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\alpha h^{\mu\nu}\partial_\alpha h_{\mu\nu} - (\partial h)^\mu(\partial h)_\mu - (\partial\partial h)h - \frac{1}{2}\partial^\mu h\partial_\mu h - \frac{1}{2}\partial^\mu b^\nu\partial_\mu b_\nu \\ &+ \frac{1}{2}(\partial b)(\partial b) + \frac{1}{2}\partial^\alpha \varphi\partial_\alpha \varphi + m(\sqrt{2}(\partial h)^\nu b_\nu - \sqrt{3}(\partial b)\varphi + \sqrt{2}(\partial b)h) \\ &+ m^2\left(\frac{1}{2}(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - hh) + 6\varphi^2 - 3h\varphi\right), \end{aligned} \tag{10}$$

который будет инвариантен относительно следующего набора калибровочных преобразований

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} + \frac{1}{\sqrt{2}}mg_{\mu\nu}\xi, \quad \delta b_\nu = -\sqrt{2}m\xi_\nu + \partial_\nu\xi, \quad \delta\varphi = -\sqrt{3}m\xi.$$

Давайте отметим основные особенности построенного лагранжиана:

- Данный лагранжиан обладает калибровочной инвариантностью, которая достигается благодаря введению вспомогательных штюкельберговских полей - векторного b_μ и скалярного φ .

- Построенная нами теория, действительно, описывает свободное массивное поле с $s = 2$. Произвол на калибровочные параметры ξ_ν и ξ позволяет нам зафиксировать их так, чтобы выполнялось требование $b_\nu = 0$, $\varphi = 0$. Тогда лагранжиан (10) сводится к виду (7). При этом подсчет независимых компонент $(10 + 4 + 1 - 2 \times (4 + 1)) = 5$ показывает, что теория содержит пять физических степеней свободы.

- Также заметим, что наш лагранжиан имеет правильный безмассовый предел (так как не происходит скачка степеней свободы). Если перейти к такому пределу $m \rightarrow 0$, то можно увидеть, что наш лагранжиан будет описывать систему свободных полей с нулевой массой и спинами 0, 1 и 2, которая содержит пять физических степеней свободы, как и наше массивное поле со спином 2.

В начале наш лагранжиан для массивного поля со спином 2 описывался одним полем. Но мы переформулировали теорию так, что теперь речь идет о системе из трех полей разных спинов, человеку непосвященному может показаться, что мы лишь усложнили изначальную задачу. Поэтому стоит отметить, что, во-первых, уже начиная с массивного поля обладающим спином 3 даже в описании нарушающем калибровочную инвариантность нам придется иметь дело с вспомогательными полями. Во-вторых, после такой трансформации наш лагранжиан стал обладать калибровочной инвариантностью и правильным безмассовым пределом.

1.2.4 Произвольный целый спин s

Теперь, обобщив рассмотренные нами случаи, мы построим калибровочно-инвариантное описание свободного массивного поля с произвольным целым спином s . По аналогии с безмассовым случаем можно понять, что такое поле будет описываться полностью симметричным тензорным полем Φ^s ранга s . Для того, чтобы такое поле описывало массивную частицу, оно должно удовлетворять следующим условиям, ассоциированным с неприводимым представлением группы Пуанкаре

$$(\square + m^2)\Phi^s = 0, \quad (\partial\Phi)^{s-1} = 0, \quad \tilde{\Phi}^{s-2} = 0.$$

Впервые лагранжево описание таких соотношений было дано Сингхом и Хагеном [48]. Они же показали, что помимо основного поля также требуется ввести набор вспомогательных тензорных полей рангом $(s - 2), (s - 1), \dots, 0$, которые обращаются в ноль на уравнениях движения. Такая теория не обладала калибровочной инвариантностью, а также в формальном пределе $m = 0$ происходит огромный скачок степеней свободы, и, как следствие, безмассовая теория не воспроизводится. В случае массивного поля со спином 2 мы показали, как эти условия могут быть заложены в теорию. Однако, мы последуем более систематическому подходу Зиновьева [49], для этого обратим внимание на структуру лагранжиана (10). Данный лагранжиан можно разбить на три части:

первую - состоящую из кинетических членов, определяемых лагранжианами безмассовых полей со спинами 2, 1 и 0, вторую - состоящую из всевозможных перекрестных членов для тензоров соседнего ранга с одной производной (например $h^{\mu\nu}\partial_\mu b_\nu$), и третью - состоящую из наиболее общего выражения для членов данных полей без производных. Проследив закономерность, можно прийти к заключению, что для произвольного спина s нам понадобится набор штюкельберговских полей Φ^j , $j = 0, 1, 2, \dots, s-1$, и общее выражение для лагранжиана запишется в виде ряда по k ($k = 0, 1, 2, \dots, s$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \sum_{k=0}^s \mathcal{L}_0(k) + \\ & + \sum_{k=0}^s (-1)^k m \left[a_{1k} \Phi^{k-1} (\partial\Phi)_{k-1} + a_{2k} \tilde{\Phi}^{k-2} (\partial\Phi)_{k-2} + a_{3k} (\partial\tilde{\Phi})^{k-3} \tilde{\Phi}_{k-3} \right] + \\ & + \sum_{k=0}^s (-1)^k m^2 \left[b_{1k} (\Phi^k)^2 + b_{2k} (\tilde{\Phi}^{k-2})^2 + b_{3k} \tilde{\Phi}^{k-2} \Phi_{k-2} \right],\end{aligned}$$

здесь как $\mathcal{L}_0(k)$ обозначен лагранжиан безмассового поля спина k (1), а $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}$ пока неизвестные коэффициенты. Запишем теперь наиболее общие калибровочные преобразования для таких полей

$$\delta\Phi_s = \partial_{(\mu_1}\xi_{k-1)} + m(\alpha_k\xi_k + \beta_k g_{(\mu_1\mu_2}\xi_{k-2)}), \quad \tilde{\xi}_{k-3} = 0.$$

Из требования калибровочной инвариантности $\delta_{\Phi_k}\mathcal{L} = 0$ мы получим систему алгебраических уравнений на неизвестные нам коэффициенты, откуда их можно выразить через параметр α_k

$$\begin{aligned}a_{1k} &= -\alpha_{k-1}, \quad b_{1k} = -\frac{1}{2(k+2)}(\alpha_{k+1})^2 \frac{4+2k}{2+2k}, \\ a_{2k} &= -\alpha_{k-1}(k-1), \quad b_{2k} = \frac{k-1}{4}(\alpha_{k-1})^2 + \frac{k(k+1)}{8(k+1)}(\alpha_k)^2 \frac{4+2k}{2k}, \\ a_{3k} &= -\alpha_{k-1} \frac{(k-1)(k-2)}{4}, \quad b_{3k} = -\frac{1}{2}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}, \quad \beta_k = \frac{2\alpha_{k-1}}{k(2k-2)}.\end{aligned}$$

В свою очередь α_k фиксируется требованием, чтобы коэффициент b_{1s} для главного поля Φ^s имел стандартное каноническое значение $b_{1s} = -1/2$, тогда получим

$$(\alpha_k)^2 = (s-k)(k+1) \frac{(s+k+1)}{(2k+2)}.$$

Можно проверить, что из этих соотношений получаются уже найденные нами лагранжианы для полей со спинами 0, 1 и 2. Уравнения движения можно найти из конкретного вида лагранжиана. На этом мы закончим рассмотрение свободных полей высших спинов.

2 Электромагнитное взаимодействие полей со спином 2

Электромагнитное взаимодействие — одно из четырех фундаментальных взаимодействий и его построение является важной проверкой на состоятельность той или иной модели. Электромагнитное взаимодействие существует между частицами, обладающими электрическим зарядом и осуществляется не прямо, а посредством электромагнитного поля. С точки зрения квантовой теории поля электромагнитное поле соответствует безмассовому бозону со спином 1 — фотону, являющемуся переносчиком электромагнитного взаимодействия. Нас не будут интересовать квантовые аспекты электромагнитного взаимодействия, однако, мы будем пользоваться квантово-полевым соответствием между полями и частицами.

В классической теории поля электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, описывается векторным потенциалом A_μ . В ковариантном виде уравнения Максвелла могут быть выведены из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — напряженность электромагнитного поля. Важная особенность электромагнитного поля — это инвариантность относительно калибровочных градиентных преобразований со скалярным калибровочным параметром

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \xi.$$

Это абелевы преобразования, отвечающие калибровочной группе $U(1)$. Таким образом, чтобы построить теорию электромагнитного взаимодействия для заряженных частиц, мы должны обеспечить инвариантность относительно $U(1)$ -симметрии. На практике это означает, что заряженные частицы описываются либо комплексными полями, либо дуплетом вещественных полей, а само электромагнитное поле должно входить либо через ковариантную производную $D_\mu = \partial_\mu + e_0 \varepsilon_{U(1)} A_\mu$ (здесь $\varepsilon_{U(1)}$ — генератор группы $U(1)$), либо через напряженность электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

Далее в этой главе мы сначала напомним как строится электромагнитное взаимодействие для полей низших спинов. Такое взаимодействие будет соответствовать минимальному электромагнитному взаимодействию. Затем покажем, что аналогичное включение минимального взаимодействия для высших спинов не согласуется. Чтобы разрешить эту несогласованность приходится строить неминимальное взаимодействие, и в последующих разделах этой главы кубичные вершины взаимодействия построены для безмассовых и массивных полей. Поскольку характерные проблемы включения электромагнитного взаимодействия высших спинов уже видны в случае спина 2, то мы

ограничим наше рассмотрение именно им. Еще одним ограничением будет взаимодействием с внешним электромагнитным полем, то есть не несущим никакой динамики, и постоянным, то есть $F_{\mu\nu} = \text{const.}$

2.1 Проблема включения электромагнитного взаимодействия

Спин 0. Рассмотрим безмассовое поле спина 0, описываемое скалярным полем φ . Лагранжиан для него имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi.$$

Включение электромагнитного взаимодействия осуществляется стандартным образом, мы переходим к дуплету скалярных полей и обычную производную заменяем на ковариантную

$$\varphi \rightarrow \varphi^i \quad (i = 1, 2), \quad \partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + e_0 \varepsilon^{ij} A.$$

Такую процедуру мы будем называть минимальным электромагнитным взаимодействием. Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D^\alpha \varphi^i D_\alpha \varphi^i.$$

Спин 1. Рассмотрим безмассовое поле спина 1, описываемое векторным полем b^μ . Лагранжиан для него имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu b^\nu \partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2} \partial^\mu b^\nu \partial_\nu b_\mu,$$

в отличие от безмассового спина 0, спин 1 является калибровочным полем со следующими преобразованиями

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \xi.$$

Построим электромагнитное взаимодействие для дуплета векторных полей $b^i, i = 1, 2$, согласно стандартной процедуре, заменив обычную производную на ковариантную. Однако, в силу того, что коммутатор ковариантных производных больше не равен нулю

$$[D_\mu, D_\nu] \xi^i = e_0 \varepsilon^{ij} F_{\mu\nu} \xi^j$$

инвариантность лагранжиана относительно калибровочных преобразований нарушается

$$\delta \mathcal{L} = -D^\mu b^{\nu,i} [D_\mu, D_\nu] \xi^i = -e_0 \varepsilon^{ij} F_{\mu\nu} D^\mu b^{\nu,i} \xi^j.$$

Несложно восстановить инвариантность, добавив поправку к лагранжиану

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{e_0}{2}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}b_{\alpha}{}^ib_{\beta}{}^j.$$

Несмотря на то, что нам пришлось ввести поправку к лагранжиану, мы все равно будем называть такое взаимодействие минимальным, поскольку модифицированный лагранжиан полностью инвариантен относительно исходных калибровочных преобразований.

Спин 2. Рассмотрим безмассовое поле со спином 2, которое описывается симметричным тензорным полем второго ранга $h_{\mu\nu}$. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\alpha}h^{\mu\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu} - (\partial h)^{\mu}(\partial h)_{\mu} - (\partial\partial h)h - \frac{1}{2}\partial^{\mu}h\partial_{\mu}h.$$

Он инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} = \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu}.$$

Включим электромагнитное взаимодействие для дуплета полей $h_{\mu\nu}{}^i, i = 1, 2$, заменив обычную производную на ковариантную. Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D^{\alpha}h^{\mu\nu,i}D_{\alpha}h_{\mu\nu}{}^i - (Dh)^{\mu,i}(Dh)_{\mu}{}^i - (DDh)^ih^i - \frac{1}{2}D^{\mu}h^iD_{\mu}h^i.$$

Однако теперь, в силу некоммутирования ковариантных производных, он не инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta h_{\mu\nu}{}^i = D_{\mu}\xi_{\nu}{}^i + D_{\nu}\xi_{\mu}{}^i.$$

Действительно

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -2h^{\mu\nu,i}[D^{\alpha}D_{\alpha}, D_{\mu}]\xi_{\nu}{}^i + 2h^{\alpha\mu,i}D_{\alpha}[D^{\nu}, D_{\mu}]\xi_{\nu}{}^i \\ &\quad - h^iD^{\mu}[D^{\nu}, D_{\mu}]\xi_{\nu}{}^i + h^i[D^{\mu}D_{\mu}, D^{\alpha}]\xi_{\alpha}{}^i \\ &= e_0\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[4h_{\mu\alpha}{}^iD_{\beta}\xi^{\mu,j} - 2h_{\mu\alpha}{}^iD^{\mu}\xi_{\beta}{}^j + 3h^iD_{\alpha}\xi_{\beta}{}^j].\end{aligned}$$

Попробуем восстановить инвариантность, добавив поправку к лагранжиану. Единственный член, который можно написать, это

$$\Delta\mathcal{L} = a_0\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}h^{\mu}{}_{\alpha}{}^ih_{\mu\beta}{}^j.$$

Вычисляя вариацию этой поправки, получим

$$\begin{aligned}\delta\Delta\mathcal{L} &= 2a_0\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}h^{\mu}{}_{\alpha}{}^i(D_{\mu}\xi_{\beta}{}^j + D_{\beta}\xi_{\mu}{}^j) \\ &= 2a_0\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[h^{\mu}{}_{\alpha}{}^iD_{\mu}\xi_{\beta}{}^j + h^{\mu}{}_{\alpha}{}^iD_{\beta}\xi_{\mu}{}^j].\end{aligned}$$

Видим, что компенсировать вклад от минимального взаимодействия не удастся. Такая проблема характерная для всех полей высших спинов и единственный выход - вводить неминимальное взаимодействие. При этом под неминимальным взаимодействием мы будем понимать такое взаимодействие, которое требует введения поправок к калибровочным преобразованиям.

Для безмассовых полей построение неминимального взаимодействия сталкивается с проблемой отсутствия естественного размерного параметра в теории. Действительно, самое простое неминимальное взаимодействие это кубичная вершина с двумя производными

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & e_0 \alpha \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [a_2 D^\mu h^\nu{}_\alpha{}^i D_\mu h_{\nu\beta}{}^j + a_3 (Dh)_\alpha{}^i (D)_\beta{}^j \\ & + a_4 D_\alpha h^\mu{}_\beta{}^i (Dh)_\mu{}^j + a_5 (Dh)_\alpha{}^i D_\beta h^j], \end{aligned}$$

где e_0 - заряд электромагнитного взаимодействия, α - некоторый размерный параметр, при этом его размерность в единицах массы должна быть равна $[\alpha] = \frac{1}{m^2}$. Эту проблему можно обойти, если рассматривать теорию не в плоском пространстве, а в пространстве постоянной кривизны анти-де Ситтера, где роль естественного размерного параметра играет радиус кривизны ρ , обратно пропорциональный космологической постоянной $\rho \sim \Lambda^{-1}$. Таким образом, построение нелинейной теории безмассовых полей высших спинов и электромагнитного взаимодействия в частности невозможно в плоском пространстве. Наиболее адекватным фоном выступает пространство анти-де Ситтера. В свою очередь, для массивных полей высших спинов возможность построения непротиворечивого взаимодействия в плоском пространстве остается. В общем случае, безмассовый предел в такой теории сингулярен, однако, можно рассмотреть частный случай, когда электрический заряд e_0 и масса m одновременно стремятся к нулю и их отношение остается константой. Таким образом, открывается возможность построения неминимальных кубичных вершин электромагнитного взаимодействия для безмассовых полей в плоском пространстве. Именно такой случай рассматривается ниже для безмассового случая. Далее мы опишем общую схему построения вершин и применим ее для безмассового и массивного спина 2.

2.2 Процедура построения взаимодействия с внешним электромагнитным полем

Мы хотим построить взаимодействия с внешним постоянным электромагнитным полем, обладающим напряженностью $F_{\mu\nu}$. Так как электромагнитное поле есть безмассовое векторное поле спина 1, то оно описывается калибровочной теорией, соответствующей группе $U(1)$ или изоморфной ей $SO(2)$. Инвариантности нашего лагранжиана взаимо-

действия относительно действия группы $SO(2)$ можно добиться несколькими способами. Для этого перейдем к рассмотрению дуплета полей и заменим в лагранжиане обычные частные производные на ковариантные вида

$$D_\mu = \partial_\mu - \varepsilon^{ij} A_\mu,$$

где A_μ - потенциал нашего электромагнитного поля, а ε^{ij} - антисимметричный тензор, являющийся генератором группы $SO(2)$. Или же добавим в него тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ имеющий форму

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

В случае постоянного внешнего электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ будет просто постоянной антисимметричной матрицей, и, так как поле внешнее, мы не будем включать в наш лагранжиан кинетический член с A_μ .

Построение вершин взаимодействия основанно на следующих двух моментах. Первый это калибровочная инвариантность, лагранжиан рассматриваемой модели должен быть калибровочно инвариантным, то есть его вариация при калибровочных подстановках должны быть равна нулю $\delta\mathcal{L} = 0$. Второй - пертурбативное рассмотрение, в котором лагранжиан строится как сумма членов, которые линейны, квадратичны и т.д. по напряженности электромагнитного поля. Это значит, что лагранжиан взаимодействия может быть представлен в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \dots$$

Где нижний индекс отображает степень напряженности в члене, то есть $\mathcal{L}_0$ свободный лагранжиан взаимодействующих полей, $\mathcal{L}_1$ - член линейный по $F_{\mu\nu}$ и так далее. В таком же виде можно записать калибровочные преобразования

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \dots$$

здесь δ_0 - калибровочные преобразования свободной теории, δ_1 - преобразования линейные по $F_{\mu\nu}$ и так далее.

Цель данной главы является построение в явном виде первого приближения вклада взаимодействия в полный лагранжиан $\mathcal{L}$, то есть мы будем учитывать только первую поправку к лагранжиану $\mathcal{L}_1$ и к калибровочному преобразованию δ_1 . Обе эти поправки линейны по $F_{\mu\nu}$. Член лагранжиана $\mathcal{L}_1$ является квадратичным по взаимодействующим полям и линейным по внешнему полю, тем самым он определяет кубическое взаимодействие полей высших спинов с внешним электромагнитным полем. Калибровочное преобразование действия с учетом первого приближения примет вид

$$\delta S = (\delta_0 + \delta_1)(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) = \delta_0\mathcal{L}_0 + \delta_0\mathcal{L}_1 + \delta_1\mathcal{L}_0 + \delta_1\mathcal{L}_1 = 0. \quad (11)$$

В нашем приближении мы будем отбрасывать члены квадратичные по $F_{\mu\nu}$, поэтому можно отбросить $\delta_1 \mathcal{L}_1$. В дальнейшем наша работа будет происходить по следующему алгоритму. Мы будем записывать наиболее общие формы калибровочного преобразования δ_1 и лагранжиана $\mathcal{L}_1$ базируясь на лоренцевской симметрии и требовании калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Эти структуры будут включать некоторые коэффициенты, которые мы сможем найти используя уравнение (11).

2.3 Кубичная вершина взаимодействия для безмассового поля

Мы рассматриваем заряженное безмассовое поле спина 2, распространяющееся во внешнем постоянном электромагнитном поле. Для сохранения инвариантности относительно группы $SO(2)$ мы будем работать с дуплетом симметричных тензоров второго ранга $h_{\mu\nu}^i, i = 1, 2$. Свободный лагранжиан такой теории будем иметь следующий вид

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\alpha h^{\mu\nu,i} \partial_\alpha h_{\mu\nu}^i - (\partial h)^\mu{}_{,i} (\partial h)_\mu{}^i - (\partial h)^\mu{}_{,i} \partial_\mu h^i - \frac{1}{2} \partial^\mu h^i \partial_\mu h^i, \quad (12)$$

здесь мы использовали обозначения $(\partial h)_\mu{}^i = \partial^\nu h_{\mu\nu}^i$ и $h^i = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^i$. Лагранжиан (12) является инвариантным относительно классических калибровочных преобразований с калибровочным параметром ξ_μ^i , которые имеют вид

$$\delta_0 h_{\mu\nu}^i = \partial_\mu \xi_\nu^i + \partial_\nu \xi_\mu^i = \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}^i. \quad (13)$$

Уравнения движения для данного лагранжиана имеют следующую форму

$$\frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}^i} = -\square h^{\mu\nu,i} + \partial^\mu (\partial h)^\nu{}_{,i} + \partial^\nu (\partial h)^\mu{}_{,i} - \partial^\mu \partial^\nu h^i - g^{\mu\nu} (\partial \partial h)^i + g^{\mu\nu} \square h^i.$$

И условие калибровочной инвариантности данного лагранжиана записывается следующим образом

$$\delta_0 \mathcal{L}_0 = \delta_0 h_{\mu\nu}^i \left(\frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}^i} \right) = 0.$$

Из теории безмассовых полей высших спинов нам известно, что данное условие верно, поэтому не будем на нем останавливаться.

Рассмотрим теорию взаимодействия линейную по внешнему полю. Для этого добавим поправки первого порядка $\mathcal{L}_1$ к свободному лагранжиану и δ_1 свободному калибровочному преобразованию δ_1 . Тогда условие калибровочной инвариантности данной теории примет вид

$$\delta_0 h_{\mu\nu}^i \left(\frac{\delta S_1}{\delta h_{\mu\nu}^i} \right) + \delta_1 h_{\mu\nu}^i \left(\frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}^i} \right) = 0. \quad (14)$$

Здесь S_1 действие соответствующее лагранжиану $\mathcal{L}_1$.

Теперь построим эти поправки по схеме, описанной в разделе 2.2. Мы должны записать лагранжиан $\mathcal{L}_1$ и калибровочное преобразование δ_1 в наиболее общем виде с некоторыми численными коэффициентами, которые мы затем должны будем найти. Наиболее общий анзац для первой поправки к лагранжиану будет иметь вид

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [a_1 \partial^\mu h_\alpha^{\nu,i} \partial_\mu h_{\mu\beta}^j + a_2 (\partial h)_\alpha^i (\partial h)_\beta^j + a_3 \partial_\alpha h_\beta^{\mu,i} (\partial h)_\mu^j + a_4 (\partial h)_\alpha^i \partial_\beta h^j], \quad (15)$$

где, как и упоминалось ранее, $\varepsilon^{ij} - \varepsilon^{ji}, \varepsilon^{12} = 1$, а a_1, a_2, a_3, a_4 - произвольные вещественные коэффициенты. Вклад от лагранжиана (15) в уравнения движения будет следующим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta S_1}{\delta h_{\mu\nu}^i} \right) &= \varepsilon^{ij} [a_1 F^{\alpha(\mu} \partial^2 h_\alpha^{\nu),j} + a_2 F^{\alpha(\mu} \partial^\nu (\partial h)_\alpha^j - \frac{1}{2} a_3 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha (\partial h)^{\nu),j} + \frac{1}{2} a_3 F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^{(\nu} h_\beta^{\mu),j} \\ &+ \frac{1}{2} a_4 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha \partial^\nu h^j + a_4 g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial h)_\alpha^j]. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что лагранжиан (15) неинвариантен относительно свободных калибровочных преобразований (13). Для восстановления калибровочной инвариантности нашей теории построим поправку δ_1 к нашим свободным калибровочным преобразованиям. Наиболее общий анзац для такой поправки будет иметь вид

$$\delta_1 h_{\mu\nu}^i = \varepsilon^{ij} [\gamma_1 F_{(\mu}^\alpha \partial_\alpha \xi_{\nu)}^j + \gamma_2 F_{(\mu}^\alpha \partial_\nu \xi_\alpha^j + \gamma_3 g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \xi_\beta^j], \quad (16)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ это произвольные вещественные коэффициенты. Так как лагранжиан взаимодействия имеет одинаковый со свободным высший порядок производных, то всегда можно произвести переобозначение наших полей и калибровочных параметров для удобства вычислений. В данном случае оно будет иметь следующую форму

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^i &\implies h_{\mu\nu}^i - \gamma_1 \varepsilon^{ij} F_{(\mu}^\alpha h_{\nu)\alpha}^j \\ \xi_\mu^i &\implies \xi_\mu^i + (\gamma_1 - \gamma_2) \varepsilon^{ij} F_\mu^\alpha \xi_\alpha^j. \end{aligned}$$

При подстановке такой замены мы сможем избавиться от первых двух слагаемых в калибровочном преобразовании (16).

Теперь нам необходимо доказать выполнение условия калибровочной инвариантности полного лагранжиана, которое как уже известно имеет вид

$$\delta_0 \mathcal{L}_1 + \delta_1 \mathcal{L}_0 = 0.$$

Эти вариации будут иметь следующую форму (подробные их вычисления приведены в Приложении)

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{L}_1 &= -\varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [(2a_1 - a_3) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\beta \partial^2 \xi_\nu^j + (2a_1 + 2a_2) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\nu \xi_\beta^j + (2a_2 - a_3 + 2a_4) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\nu \partial_\beta \partial^\mu \xi_\mu^j - \\ &- a_3 h^{\mu\nu,i} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \xi_\beta^j + a_4 h^i \partial_\alpha \partial^2 \xi_\beta^j + (a_4 - a_3) h^{\mu\nu,i} \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\beta \xi_\nu^j], \end{aligned}$$

$$\delta_1 \mathcal{L}_0 = \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [(d-2)\gamma_3 h^i \partial_\alpha \partial^2 \xi_\beta^j - (d-2)\gamma_3 h^{\mu\nu,i} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \xi_\beta^j].$$

Просуммировав их (или, другими словами, подставив получившиеся выражения в (14)) и удобно сгруппировав слагаемые, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \delta_1 \mathcal{L}_0 + \delta_0 \mathcal{L}_1 &= \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [-(2a_1 - a_3) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\beta \partial^2 \xi_\nu^j - (2a_1 + 2a_2) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\nu \xi_\beta^j - (2a_2 - a_3 + \\ &+ 2a_4) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\nu \partial_\beta \partial^\mu \xi_\mu^j + (a_3 - (d-2)\gamma_3) h^{\mu\nu,i} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \xi_\beta^j - (a_4 - (d- \\ &- 2)\gamma_3) h^i \partial_\alpha \partial^2 \xi_\beta^j - (a_4 - a_3) h^{\mu\nu,i} \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\beta \xi_\nu^j] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда мы можем получить систему линейных уравнений на наши произвольные коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 и γ_3 . Она будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_3 &= 0, & 2a_1 + 2a_2 &= 0, & 2a_2 - a_3 + 2a_4 &= 0, \\ a_3 - \gamma_3(d-2) &= 0, & a_4 - \gamma_3(d-2) &= 0, & a_4 - a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно с легкостью решить, тем самым получив, что все наши коэффициенты выражаются через единый параметр γ_3 и размерность нашего пространства d

$$a_1 = -a_2 = \frac{\gamma_3}{2}(d-2), \quad a_3 = a_4 = \gamma_3(d-2). \quad (17)$$

При этом мы помним, что $d \geq 3$, то есть наши коэффициенты будут равны нулю, только при нулевом γ_3 . Стоит также отметить, что этот параметр имеет размерность m^{-2} .

Как итог данного раздела, мы получили согласованный кубичный интеграл взаимодействия (15) поля спина 2 во внешнем постоянном электромагнитном поле и соответствующую ему поправку к калибровочным преобразования (16). Если быть более точными, то мы получили семейство однопараметрических лагранжианов и калибровочных преобразований. Теперь перейдем к массивному случаю.

2.4 Кубичная вершина взаимодействия для массивного поля

Для упрощения вычислений введем конденсированные обозначения. Лагранжиан и калибровочные преобразования данной теории будут иметь похожую структуру, а именно

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{00} + \mathcal{L}_{01} + \mathcal{L}_{02} + \mathcal{L}_{10} + \mathcal{L}_{11} + \dots$$

и

$$\delta = \delta_{00} + \delta_{01} + \delta_{10} + \delta_{11} + \dots$$

соответственно.

Здесь первый индекс у калибровочных преобразований и лагранжианов обозначает степени полей, и 0 — квадратичные члены, 1 — члены более чем квадратичные по полям. Второй индекс же отображает порядок производных в соответствующем члене. То есть в общем виде мы будем иметь $\delta_{kn} \sim \partial^\nu \Phi^k \xi$ и $\mathcal{L}_{kn} \sim \partial^\nu \Phi^{k+2}$, где ξ это калибровочный параметр. В таком случае вариация лагранжиана примет следующую форму

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \delta_{00} \mathcal{L}_{00} + (\delta_{00} \mathcal{L}_{01} + \delta_{01} \mathcal{L}_{00}) + (\delta_{00} \mathcal{L}_{02} + \delta_{01} \mathcal{L}_{11}) + \delta_{01} \mathcal{L}_{02} \\ & + (\delta_{00} \mathcal{L}_{10} + \delta_{10} \mathcal{L}_{00}) + (\delta_{00} \mathcal{L}_{11} + \delta_{01} \mathcal{L}_{10} + \delta_{10} \mathcal{L}_{01} + \delta_{11} \mathcal{L}_{00}) + \dots \end{aligned}$$

Здесь в правой части вариации сгруппированы так, чтобы сумма значений первого и второго индекса в пределах одной группы была одинаковой. Таким образом калибровочная инвариантность полного лагранжиана $\delta \mathcal{L} = 0$ требует независимого равенства нулю каждой из групп, что позволяет нам построить вершины взаимодействия, в принципе, любого порядка. Нас интересуют только кубические вершины, что соответствует в наших обозначениях сумме первых индексов вариаций равной или меньшей чем единица. Как пример, рассмотренное нами взаимодействие безмассового поля спина 2 в такой записи выглядит

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{02} + \mathcal{L}_{13}, \quad \delta = \delta_{01} + \delta_{12}.$$

Дальнейшие вычисления будут проведены с учетом этих замечаний.

Свободная теория. Для калибровочно инвариантного описания свободного массивного поля спина 2 нам понадобятся дополнительные штюкельберговские поля спина 1 и 0. В нашем случае поле спина два описывается симметричным тензором второго ранга $h_{\mu\nu}$, поле спина один - вектором b_μ , а поле спина ноль - скаляром φ . С учетом введенных нами обозначений свободный лагранжиан нашей теории примет вид:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{00} + \mathcal{L}_{01} + \mathcal{L}_{02}. \tag{18}$$

Где каждое из слагаемых имеют следующую структуру

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{02} &= \frac{1}{2} \partial^\alpha h^{\mu\nu} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - (\partial h)^\mu (\partial h)_\mu + (\partial h)^\mu \partial_\mu h - \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h - \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial^\mu b^\nu \partial_\mu b_\nu + \frac{1}{2} (\partial b)(\partial b) + \frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi, \\ \mathcal{L}_{01} &= m [\alpha_1 h^{\mu\nu} \partial_\mu b_\nu - \alpha_1 h (\partial b) + \alpha_0 b^\mu \partial_\mu \varphi], \\ \mathcal{L}_{00} &= m^2 [-\frac{1}{2} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h h + \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_0 h \varphi + \frac{d}{2(d-2)} \varphi^2]. \end{aligned}$$

Лагранжиан (18) будет инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta_0 = \delta_{00} + \delta_{01}.$$

В первой главе нами были получены необходимые калибровочные преобразования, но там мы приняли, что $d = 4$, здесь же мы запишем их в более общем виде. Итак, необходимые калибровочные преобразования будут иметь вид

$$\begin{aligned}(\delta_{01} + \delta_{00})h_{\mu\nu} &= \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} + \frac{m\alpha_1}{d-2}g_{\mu\nu}\xi, \\(\delta_{00} + \delta_{01})b_\mu &= \partial_\mu\xi + m\alpha_1\xi_\mu, \\ \delta_{00}\varphi &= -m\alpha_0\xi.\end{aligned}$$

Здесь мы используем следующие константы

$$(\alpha_1)^2 = 2, (\alpha_0)^2 = 2\frac{d-1}{d-2}.$$

Стоит заметить, что безмассовый предел $m \rightarrow 0$ построенного лагранжиана представляет сумму лагранжианов описывающих безмассовые поля спина 1 и 0. Уравнения движения, соответствующие лагранжиану (18) будут иметь вид

$$\left(\frac{\delta S_0}{\delta \Phi^a}\right) = \left(\frac{\delta S_{02}}{\delta \Phi^a}\right) + \left(\frac{\delta S_{01}}{\delta \Phi^a}\right) + \left(\frac{\delta S_{00}}{\delta \Phi^a}\right).$$

Здесь используется следующее обозначение $\Phi^a = \{h_{\mu\nu}, b_\mu, \varphi\}$.

Условие калибровочной инвариантности этого лагранжиана будет иметь вид

$$\delta_0 \mathcal{L}_0 = \delta_0 \Phi^a \left(\frac{\delta S_0}{\delta \Phi^a}\right) = 0.$$

Нам ранее было доказана верность этого выражения. Теперь рассмотрим дополнения к лагранжиану, отвечающие наличию взаимодействия нашего поля спина 2 с внешним электромагнитным полем.

Минимальное взаимодействие. Как и в безмассовом случае, для сохранения инвариантности относительно действия группы $SO(2)$, мы будем работать с дуплетами полей, то есть $\Phi^a = \{h_{\mu\nu}^i, b_\mu^i, \varphi^i\}$, где $i = 1, 2$. Для введения минимального электромагнитного взаимодействия в лагранжиане и калибровочных преобразованиях мы замени обычную частную производную на ковариантную производную следующего вида

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu^{ij} = \delta^{ij}\partial_\mu + e_0\varepsilon^{ij}A_\mu, \quad \varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}, \varepsilon^{12} = 1. \quad (19)$$

Коммутатор таких производных будет пропорционален напряженности электромагнитного поля, а именно

$$[D_\mu^{ik}, D_\nu^{kj}] = e_0\varepsilon^{ij}F_{\mu\nu}.$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а e_0 - заряд нашего поля.

Как следствие такой замены, нарушается калибровочная инвариантность нашего лагранжиана $\mathcal{L}_0$, неинвариантная часть в линейном приближении по $F_{\mu\nu}$ будет иметь вид

$$\bar{\delta}_0 \bar{\mathcal{L}}_0 = (\delta_{00} \bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{01}) + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02}. \quad (20)$$

Черта над соответствующим членом обозначает, что в нчм обычные частные производные были заменены на построенные нами ковариантные. Члены этого выражения будут иметь вид

$$\bar{\delta}_{00} \bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{01} = -m e_0 \alpha_1 \varepsilon^{ij} F^{\mu\nu} b_\mu^j \xi_\nu^i,$$

$$\bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02} = e_0 \varepsilon^{ij} \xi_\mu^i [-4 F^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_\beta^{\mu,j} - 2 F^{\alpha\mu} (\partial h)_\alpha^j + 3 F^{\alpha\mu} \partial_\alpha h^j] + e_0 \varepsilon^{ij} \xi^i [2 F^{\alpha\beta} \partial^\alpha b_\beta^j].$$

Так как введение минимального взаимодействия нарушило калибровочную инвариантность теории, то в дополнение к нему следует ввести некое неминимальное взаимодействие.

Неминимальное взаимодействие. Для восстановления калибровочной инвариантности построим неминимальные поправки к лагранжиану и калибровочным преобразованиям. Как и упоминалось ранее, мы предполагаем, что для свободной теории имеет место следующий правильный безмассовый предел $m^2 \rightarrow 0$, $e_0 \rightarrow 0$ и $\frac{e_0}{m^2} = \text{const}$. В таком случае логично искать поправки к лагранжиану и калибровочным преобразованиям в форме

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{13}, \quad \delta_1 = \delta_{12}.$$

А именно, в следующем виде

$$\delta_{12} h_{\mu\nu}^i = \frac{\gamma_2}{m^2} \varepsilon^{ij} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \xi_\beta^j, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{13} = & \frac{1}{m^2} \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [a_1 \partial^\mu h_\alpha^{\nu,i} \partial_\mu h_{\nu\beta}^j + a_2 (\partial h)_\alpha^i (\partial h)_\beta^j + a_3 \partial_\alpha h_\beta^{\mu,i} (\partial h)_\mu^j + \\ & + a_4 (\partial h)_\alpha^i \partial_\beta h^j + b_1 \partial^\mu b_\alpha^i \partial_\mu b_\beta^j + b_2 \partial_\alpha b_\beta^i (\partial b)^j]. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь нами введены произвольные вещественные коэффициенты γ_2 , a_1 , a_2 , a_3 и a_4 , которые мы найдем позднее.

Условие калибровочной инвариантности (11) в данном случае примет вид: $\bar{\delta}_0 \bar{\mathcal{L}}_0 + \delta_0 \mathcal{L}_1 + \delta_1 \mathcal{L}_0 =$, если расписать каждый из членов подробно, то мы получим

$$\begin{aligned} & (\delta_{00} \bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{01}) + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02} + (\delta_{00} + \delta_{01}) \mathcal{L}_{13} + \delta_{12} (\mathcal{L}_{00} + \mathcal{L}_{01} + \mathcal{L}_{02}) = \\ & = (\delta_{00} \bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{01}) + (\bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02} + \delta_{12} \mathcal{L}_{00}) + (\delta_{00} \mathcal{L}_{13} + \delta_{12} \mathcal{L}_{01}) + (\delta_{01} \mathcal{L}_{13} + \delta_{12} \mathcal{L}_{02}) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

В этом выражении мы сгруппировали вариации лагранжианов по суммам их индексов. Чтобы полная вариации была равна нулю мы должны занулить каждую из групп. Стоит заметить, что условие

$$\delta_{01}\mathcal{L}_{13} + \delta_{12}\mathcal{L}_{02} = 0$$

в точности совпадает с кубическими вершинами безмассовой теории. Используя полученные нами ранее результаты (17), мы получим следующие связи между коэффициентами

$$a_1 = -a_2 = \frac{1}{2}\gamma_2(d-2), \quad a_3 = a_4 = \gamma_2(d-2),$$

а также дополнительное условие

$$b_2 = 2b_1.$$

Теперь изучим остальные связи в (23). Первая группа содержит только неинвариатную часть, создаваемую минимальным взаимодействием, и никак не скомпенсирована, откуда сразу видно, что построенных нами поправок недостаточно. Также легко проверить, что не исчезает и третья группа, что приводит нас к еще одному требованию дополнительных поправок. Это можно сделать лишь добавив вариации вида $\delta_{01}\mathcal{L}_{12}$ и $\delta_{11}\mathcal{L}_{02}$. Таким образом нам нужно построить поправки δ_{11} и $\mathcal{L}_{12}$. Дальнейшие вычисления показывают, что нам также необходимы поправки к лагранжиану вида $\mathcal{L}_{11}$. Мы построим все новые поправки в наиболее общих формах. Для калибровочных преобразований единственно возможный вид это

$$\delta_{11}b_\mu^i = \frac{v_1}{m}\varepsilon^{ij}F_\mu^\alpha \xi_\alpha^j. \quad (24)$$

Дополнительные поправки к лагранжиану же выбраны в следующих формах

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{12} &= \frac{1}{m}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[c_1\partial_\alpha h_\beta^{\mu,i}b_\mu^j + c_2(\partial h)_\alpha^i b_\beta^j + c_3\partial_\alpha h^i b_\beta^j + c_4\partial_\alpha b_\beta^i \varphi^j], \\ \mathcal{L}_{11} &= \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[d_1 h_\alpha^{\mu,i} h_{\mu\beta}^j + d_2 b_\alpha^i b_\beta^j], \end{aligned} \quad (25)$$

здесь нами были введены новые произвольные вещественные коэффициенты $c_{1,2,3,4}$, $d_{1,2}$ и v_1 . Дальнейшая задача сводится к нахождению всех необходимых вариаций и выполнению следующих соотношений

$$\delta_{00}\mathcal{L}_{13} + \delta_{01}\mathcal{L}_{12} + \delta_{11}\mathcal{L}_{02} + \delta_{12}\mathcal{L}_{01} = 0, \quad (26)$$

$$\delta_{00}\bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{01} + \delta_{00}\mathcal{L}_{11} + \delta_{11}\mathcal{L}_{00} = 0, \quad (27)$$

$$\bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{02} + \delta_{00}\mathcal{L}_{12} + \delta_{01}\mathcal{L}_{11} + \delta_{11}\mathcal{L}_{01} + \delta_{12}\mathcal{L}_{00} = 0, \quad (28)$$

где мы учитываем вклад от минимальных взаимодействий (19). Соотношение (26) дает нам систему алгебраических уравнений, которые позволяют выразить коэффициенты $c_{1,2,3,4}$ через параметры калибровочных преобразований γ_2 , v_1 и коэффициент b_1 . Эти выражения будут иметь форму c_1 , c_2 , и c_3 в виде

$$c_1 = 2b_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_1(d-1) - v_1, \quad c_2 = 2b_1\alpha_1 - v_1, \quad c_3 = -2b_1\alpha_1 + \frac{v_1}{2}.$$

Из оставшихся двух соотношений (27), (28) при использовании найденных нами вариаций для минимального взаимодействия мы получаем следующие выражения для остальных численных коэффициентов

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{8b_1 + 2\gamma_2(d-1) - 6e_0}{3\alpha_1}, \quad d_1 = \frac{3e_0 - 2b_1 - 2\gamma_2(d-1)}{3}, \\ c_4 &= \alpha_0 \frac{\gamma_2(d+2) + 6e_0 - 8b_1}{6}. \end{aligned}$$

Здесь параметры e_0 , γ_2 и b_1 являются произвольными вещественными числами. Как результат, нами найдены кубичные вершины и соответствующие им калибровочные преобразования.

Фиксация калибровки и связи. Теперь мы исследуем причинные аспекты построенного нами лагранжиана, а именно мы покажем, что уравнения движения для поля $h_{\mu\nu}^i$ содержат высшие производные только в форме даламбертиана. Для начала, мы фиксируем калибровочные преобразования и избавимся от дополнительных полей b_μ^i и φ^i . После этого наш лагранжиан примет форму $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} D^\alpha h^{\mu\nu i} D_\alpha h_{\mu\nu}^i - (Dh)^{\mu i} (Dh)_\mu^i - (DDh)^i h^i - \frac{m^2}{2} h^{\mu\nu i} h_{\mu\nu}^i + \frac{m^2}{2} h^i h^i, \\ \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{m^2} \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [a_1 \partial^\mu h_\alpha^{\nu, i} \partial_\mu h_{\nu\beta}^j + a_2 (\partial h)_\alpha^i (\partial h)_\beta^j + a_3 \partial_\alpha h_\beta^{\mu, i} (\partial h)_\mu^j + a_4 (\partial h)_\alpha^i \partial_\beta h^j + \\ &\quad + m^2 d_1 h_\alpha^{\mu, i} h_{\mu\beta}^j]. \end{aligned}$$

Легко непосредственными вычислениями доказать, что из уравнений движения будут следовать обычные для данного поля алгебраические связи $h^i = 0$. Для этого сначала построим уравнения движения

$$\frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}^j} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}^j} &= -D^2 h^{\mu\nu, j} + D^{(\mu} (Dh)^{\nu), j} - \frac{1}{2} D^{(\mu} D^{\nu)} h^j - g^{\mu\nu} (DDh)^j + g^{\mu\nu} D^2 h^j - m^2 h^{\mu\nu, j} + \\ &\quad + m^2 g^{\mu\nu} h^j - \frac{1}{m^2} \varepsilon^{ij} [F^{\alpha(\mu} (a_1 \partial^2 h_\alpha^{\nu), i} + a_2 \partial^\nu) (\partial h)_\alpha^i - \frac{1}{2} a_3 \partial_\alpha (\partial h)^{\nu), i} - m^2 d_1 h_\alpha^{\nu), i} + \\ &\quad + \frac{1}{2} a_4 \partial^\nu) \partial_\alpha h^i) + F^{\alpha\beta} (\frac{1}{2} a_3 \partial^{(\nu} \partial_\alpha h_\beta^{\mu), i} + a_4 g^{\mu\nu} \partial_\beta (\partial h)_\alpha^i)]. \end{aligned}$$

Теперь подействуем на уравнения движения оператором второго порядка по производным

$$(D_\mu D_\nu + \theta m^2 g_{\mu\nu} + \frac{\tau}{m^2} \varepsilon^{ij} F_\mu^\alpha \partial_\alpha \partial_\nu) \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}^j} = 0.$$

Разложим наш оператор на две части: независимую от $F_{\mu\nu}$ и линейную по $F_{\mu\nu}$. Также распишем левую часть уравнения движения, обозначив ее за $H^{\mu\nu,j}$. Итак получим

$$\Delta_{\mu\nu}^{ij} H^{\mu\nu,j} = (\Delta_{\mu\nu}^{0ij} + \Delta_{\mu\nu}^{1ij})(H^{0\mu\nu,j} + H^{1\mu\nu,j}) = 0.$$

Здесь индекс 0 обозначает члены напряженности электромагнитного поля, а 1 линейные по ней. В вычислениях мы отбросим все члены квадратичные по $F_{\mu\nu}$. Необходимые нам слагаемые будут иметь следующий вид.

$$\Delta_{\mu\nu}^{0ij} H^{0\mu\nu,j} = e_0 \varepsilon^{ij} F^{\alpha\mu} \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^{\nu,j} - m^4 \frac{d-1}{d-2} h^i.$$

Для чего мы потребовали $\theta = -1/(d-2)$. Так как член $\Delta_{\mu\nu}^{1ij} H^{1\mu\nu,j}$ будет квадратичен по напряженности электромагнитного поля, то мы не учитываем его. Посчитаем оставшиеся слагаемые.

$$\Delta_{\mu\nu}^{1ij} H^{0\mu\nu,j} = -\tau \varepsilon^{ij} F^{\alpha\mu} \partial_\alpha (\partial h)_\mu^j,$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{0ij} H^{1\mu\nu,j} = -\varepsilon^{ij} F^{\alpha\mu} [2d_1 \partial_\alpha (\partial h)_\mu^j + \frac{d-1}{d-2} a_3 \partial_\alpha (\partial h)_\mu^j].$$

При суммировании этих членов получаем

$$(e_0 - \tau - 2d_1 - \frac{d-1}{d-2} a_3) \varepsilon^{ij} F^{\alpha\mu} \partial_\alpha (\partial h)_\mu^j - m^4 \frac{d-1}{d-2} h^i = 0.$$

Откуда будет следовать $h^i = 0$ при условии, что первая скобка равна нулю. То есть необходимо, чтобы

$$\tau = \frac{4b_1 - 3e_0 + \gamma_2(d-1)}{3}.$$

И мы можем найти точный вид необходимого оператора

$$\Delta_{\mu\nu}^{ij} = D_\mu D_\nu - \frac{m^2}{d-2} g_{\mu\nu} + \frac{4b_1 - 3e_0 + \gamma_2(d-1)}{3m^2} \varepsilon^{ij} F_\mu^\alpha \partial_\alpha \partial_\nu.$$

Теперь с учетом этой связи подействуем на уравнения движения оператором

$$\Lambda_{\mu\nu\alpha}^{ij} = g_{\mu\alpha} D_\nu^{ij} + \frac{e_0}{m^2} \varepsilon^{ij} (\kappa F_{\mu\alpha} \partial_\nu + \eta g_{\mu\nu} F^\sigma{}_\alpha \partial_\sigma).$$

Также разделим оператор на две части и найдем действие в виде

$$\Lambda_{\mu\nu\alpha}^{ij} H^{\mu\nu,j} = (\Lambda_{\mu\nu\alpha}^{0ij} + \Lambda_{\mu\nu\alpha}^{1ij})(H^{0\mu\nu,j} + H^{1\mu\nu,j}).$$

Отбросим члены квадратичные по напряженности и будем учитывать, что $h^i = 0$. Получим

$$\Lambda_{\mu\nu\alpha}^{0ij} H^{0\mu\nu,j} = 2e_0 \varepsilon^{ij} F^{\beta\nu} \partial_\beta h_{\nu\alpha}^j + e_0 \varepsilon^{ij} F_{\mu\alpha} (\partial h)^{\mu,j} - m^2 (Dh)_\alpha^i,$$

$$\Lambda_{\mu\nu\alpha}^{1ij} H^{0\mu\nu,j} = -\frac{e_0}{m^2} \varepsilon^{ij} F_{\mu\alpha} [(d-2)\eta \partial^\mu (\partial \partial h)^j + \kappa m^2 (\partial h)^{\mu,j}],$$

$$\Lambda_{\mu\nu\alpha}^{0ij} H^{1\mu\nu,j} = -\frac{1}{m^2} \varepsilon^{ij} [m^2 d_1 F^{\beta\nu} \partial_\nu h_{\beta\alpha}^j + F_{\mu\alpha} (-\frac{1}{2} \partial^\mu (\partial \partial h)^j + m^2 d_1 (\partial h)^{\mu,j})].$$

Сложим получившиеся члены и получим

$$\begin{aligned} & -m^2 (Dh)_\alpha^i + \varepsilon^{ij} F^{\beta\nu} (2e_0 + d_1) \partial_\beta h_{\nu\alpha}^j + \varepsilon^{ij} F_{\mu\alpha} [(e_0 - d_1 - e_0 \kappa) (\partial h)^{\mu,j} + \\ & + \frac{1}{m^2} (-e_0 (d-2)\eta - \frac{1}{2}) \partial^\mu (\partial \partial h)^j] = 0. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы член с тремя производными был равен нулю, для этого необходимо, чтобы $\eta = 1/(2e_0(d-2))$. Итак получим

$$-m^2 (Dh)_\alpha^i + \varepsilon^{ij} F^{\beta\nu} (2e_0 + d_1) \partial_\beta h_{\nu\alpha}^j + \varepsilon^{ij} F_{\mu\alpha} [(e_0 - d_1 - e_0 \kappa) (\partial h)^{\mu,j}] = 0.$$

Даже при $\kappa = (2b_1 + 2\gamma_2(d-1))/3e_0$, когда второе слагаемое у нас исчезает, останется член благодаря которому возможно получить соотношения $Dh \sim F$ и соответственно $DDh \sim F^2$. Таким образом, при использовании этих условий и связи $h^i = 0$, уравнения движения могут быть переписаны в виде

$$-D^2 h^{\mu\nu,j} - m^2 h^{\mu\nu,j} - \frac{1}{m^2} \varepsilon^{ij} F_{(\mu}^\alpha (a_1 \partial^2 h_{\nu)}^i - m^2 d_1 h_{\nu)}^i) - \frac{1}{m^2} \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} (\frac{a_3}{2} - 2e_0 - d_1) \partial^\mu \partial_\alpha h_\beta^{\nu)}{}^i = 0.$$

При условии, что

$$b_1 = -\frac{e_0 - \gamma_2(7d-10)}{4}.$$

Мы получаем, что производные высших порядков образуют даламбертиан, что гарантирует причинность нашего лагранжиана. Также мы получили, что определенные нами коэффициенты на деле зависят не от трех произвольных параметров, а всего от двух и размерности нашего пространства.

Заключение

В данной работе была рассмотрена проблема включения электромагнитного взаимодействия для безмассовых и массивных бозонных полей высших спинов на примере полей со спином 2.

В первой главе мы рассмотрели теорию свободных полей и дали калибровочно-инвариантную формулировку для полей произвольного целого спина. Вначале мы рассмотрели случай безмассовых полей, для которых калибровочно-инвариантное описание является единственной возможностью работать в явно лоренц-ковариантном виде. Такое описание дано последовательно для полей со спином 0, 1, 2 и обобщено для произвольного целого спина s . Затем была дана калибровочно-инвариантная формулировка массивных полей высших спинов, которая реализуется как система безмассовых полей, связанных штюкельберговскими симметриями. Данное построение начинается с суммы лагранжианов для безмассовых полей (кинетические члены) и соответствующих калибровочных преобразований. Затем добавляются перекрестные и массовые члены к лагранжиану и калибровочным преобразованиям. Полный вид лагранжиана фиксируется из условия калибровочной инвариантности модифицированного лагранжиана относительно модифицированных калибровочных преобразований. Такая схема подробно рассмотрена для спинов 0, 1, 2 и обобщена на случай произвольного целого спина. Все построенные лагранжианы имеют правильный безмассовый предел, в том смысле, что не происходит скачка физических степеней свободы.

Во второй главе была построена электромагнитное взаимодействие полей высших спинов. Для полей со спином 0 и 1 включение электромагнитного взаимодействия осуществляется стандартным образом, заменой обычных производных на ковариантные. Такое взаимодействие называется минимальным. Проблема включения минимального взаимодействия возникает уже на примере спина 2, характерна, в общем случае, для всех высших спинов. Решение данной проблемы - это построение неминимального взаимодействия. В дальнейшем построение такого взаимодействия показано на примере спина 2. Для удобства лагранжиан и калибровочные преобразования были разбиты на части естественные для свободной теории (основные) и линейные по напряженности электромагнитного поля (первые поправки), также мы приняли, что будет рассматривать члены только линейные по $F_{\mu\nu}$, пренебрегая квадратичными членами. Затем мы нашли кубичные вершины взаимодействия заряженного безмассового поля спина 2 с внешним электромагнитным полем. Для этого нами были введены поправки к лагранжиану (15) и калибровочным преобразованиям (16) в наиболее общем виде. Затем из условия калибровочной инвариантности нашего полного лагранжиана мы получили, что все введенные в (15) произвольные коэффициенты выражаются через параметр ка-

либровочных преобразований γ_3 - (17). Тем самым мы получили однопараметрические семейства лагранжианов и калибровочных преобразований.

Затем мы рассматривали заряженное массивное поле спина 2 в внешнем постоянном электромагнитном поле. Для начала мы рассмотрели свободную теорию, все выражения для которой были найдены нами в первой главе. Затем нами при помощи ковариантных производных вида (19) было введено минимальное взаимодействие, которое нарушило калибровочную инвариантность теории. Поэтому нами было введено дополнительное неминимальное взаимодействие и вместе с ним новые поправки к лагранжиану (22), (25) и к калибровочным преобразованиям (21), (24). Калибровочная инвариантность была восстановлена, а затем найдены ее кубичные вершины. После этого мы фиксировали калибровочные преобразования и ввели в нашу теорию связи. При помощи действия оператора на уравнения движения мы доказали существование наложенной нами связи, а затем при помощи другого оператора и установления пропорциональности между сверткой ковариантной производной с полем и степенью напряженности внешнего электромагнитного поля, мы доказали причинность нашего лагранжиана.

В результате было показано, что по-крайней мере в линейном включении электромагнитное взаимодействие можно построить. Для массивных полей со спином 2 оно существует в плоском пространстве. Для безмассовых полей возможно построить только неминимальные кубичные вершины при одновременном устремлении к нулю электрического заряда и массы, то есть возможен только предельный случай. Чтобы построить общий случай, необходимо рассматривать теорию в пространстве постоянно кривизны анти-де Ситтера. Построение электромагнитного взаимодействия в пространстве анти-де Ситтера является открытой проблемой.

Полученный в этой работе результат может быть использован для дальнейшего решения открытых проблем построения взаимодействия полей высших спинов. Приведем некоторые из них: построение электромагнитного взаимодействия полей высших спинов в пространстве анти-де Ситтера как с внешним, так и с динамическим полем; построение электромагнитного взаимодействия с фермионными полями высших спинов как в плоском пространстве, так и в пространстве анти-де Ситтера; построение вершин электромагнитного взаимодействия для полей высших спинов за пределами линейного приближения.

А Вариации безмассового поля спина 2

Мы построили поправку к лагранжиану вида

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} [a_1 \partial^\mu h_\alpha^{\nu,i} \partial_\mu h_{\nu\beta}^j + a_2 (\partial h)_\alpha^i (\partial h)_\beta^j + a_3 \partial_\alpha h_\beta^{\mu,i} (\partial h)_\mu^j + a_4 (\partial h)_\alpha^i \partial_\beta h^j].$$

Для дальнейших вычислений найдем его вариацию. Сделаем это почленно, здесь $\delta \mathcal{L}_1^1$ соответствует вариации первого слагаемого, $\delta \mathcal{L}_1^2$ - второго и так далее.

$$\delta \mathcal{L}_1^1 = a_1 \varepsilon^{ij} F^{\alpha(\mu} \partial^2 h_\alpha^{\nu)j} \delta h_{\mu\nu}^i,$$

$$\delta \mathcal{L}_1^2 = \varepsilon^{ij} a_2 F^{\alpha(\mu} \partial^\nu) (\partial h)_\alpha^j \delta h_{\mu\nu}^i,$$

$$\delta \mathcal{L}_1^3 = \frac{1}{2} a_3 \varepsilon^{ij} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^{(\nu} h_\beta^{\mu)j} \delta h_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2} a_3 \varepsilon^{ij} F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha (\partial h)^{\nu)j} \delta h_{\mu\nu}^i,$$

$$\delta \mathcal{L}_1^4 = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} a_4 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha \partial^\nu) h^j \delta h_{\mu\nu}^i + \varepsilon^{ij} a_4 g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial h)_\alpha^j \delta h_{\mu\nu}^i.$$

Объединив эти члены в вариацию поправки к нашему лагранжиану, получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1 &= \varepsilon^{ij} [a_1 F^{\alpha(\mu} \partial^2 h_\alpha^{\nu)j} + a_2 F^{\alpha(\mu} \partial^\nu) (\partial h)_\alpha^j - \frac{1}{2} a_3 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha (\partial h)^{\nu)j} + \frac{1}{2} a_3 F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^{(\nu} h_\beta^{\mu)j} \\ &+ \frac{1}{2} a_4 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha \partial^\nu) h^j + a_4 g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial h)_\alpha^j] \delta h_{\mu\nu}^i. \end{aligned}$$

Отдельно найдем вариации $\delta_0 \mathcal{L}_1$ и $\delta_1 \mathcal{L}_0$. Учитывая, что

$$\delta_0 h_{\mu\nu}^i = \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}^i, \delta_1 h_{\mu\nu}^i = \gamma_3 \varepsilon^{ij} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \xi_\beta^j.$$

Подставив эти калибровочные преобразования в вариацию лагранжиана свободного массивного поля спина 2 и построенной к нему поправки мы получим

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{L}_1 &= \varepsilon^{ij} [a_1 F^{\alpha(\mu} \square h_\alpha^{\nu)j} + a_2 F^{\alpha(\mu} \partial^\nu) (\partial h)_\alpha^j - \frac{1}{2} a_3 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha (\partial h)^{\nu)j} + \frac{1}{2} a_3 F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^{(\nu} h_\beta^{\mu)j} \\ &+ \frac{1}{2} a_4 F^{\alpha(\mu} \partial_\alpha \partial^\nu) h^j + a_4 g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial h)_\alpha^j] \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}^i = \varepsilon^{ij} [2a_1 F^{\alpha\mu} \square h_\alpha^{\nu,j} + 2a_2 F^{\alpha\mu} \partial^\nu (\partial h)_\alpha^j \\ &- a_3 F^{\alpha\mu} \partial_\alpha (\partial h)^{\nu,j} + a_3 F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^\nu h_\beta^{\mu,j} + a_4 F^{\alpha\mu} \partial_\alpha \partial^\nu h^j + 2a_4 g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial h)_\alpha^j] \partial_\mu \xi_\nu^i + \partial_\nu \xi_\mu^i \\ &= \varepsilon^{ij} [2a_1 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\nu,j} \partial_\beta \square \xi_\nu^i + 2a_1 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\nu,j} \partial_\nu \square \xi_\beta^i + 2a_2 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\nu,j} \partial_\nu \partial^\mu \partial_\beta \xi_\mu^i + 2a_2 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\mu,j} \partial_\mu \square \xi_\beta^i \\ &- a_3 F^{\alpha\beta} h^{\mu\nu,j} \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\beta \xi_\nu^i - a_3 F^{\alpha\beta} h^{\mu\nu,j} \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\nu \xi_\beta^i - a_3 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\nu,j} \partial^\mu \partial_\beta \partial_\nu \xi_\mu^i - a_3 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\nu,j} \partial_\beta \square \xi_\nu^i \\ &+ a_4 F^{\alpha\beta} h^j \partial_\alpha \partial^\nu \partial_\beta \xi_\nu^i + a_4 F^{\alpha\beta} h^j \partial_\alpha \square \xi_\beta^i + 2a_4 F^{\alpha\beta} h_\alpha^{\nu,j} \partial_\beta \partial_\nu \partial^\mu \xi_\mu^i] = -e^{ij} F^{\alpha\beta} [(2a_1 - \\ &- a_3) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\beta \square \xi_\nu^j + (2a_1 + 2a_2) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\nu \xi_\beta^j + (2a_2 - a_3 + 2a_4) h_\alpha^{\nu,i} \partial_\nu \partial_\beta \partial^\mu \xi_\mu^j - \\ &- a_3 h^{\mu\nu,i} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \xi_\beta^j + a_4 h^i \partial_\alpha \square \xi_\beta^j + (a_4 - a_3) h^{\mu\nu,i} \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\beta \xi_\nu^j], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 \mathcal{L}_0 &= (-\square h^{\mu\nu,i} + \partial^\mu (\partial h)^{\nu,i} + \partial^\nu (\partial h)^{\mu,i} - \partial^\mu \partial^\nu h^i - g^{\mu\nu} (\partial \partial h)^i + g^{\mu\nu} \square h^i) (\varepsilon^{ij} \gamma_3 g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \xi_\beta^j) \\
&= \varepsilon^{ij} [(d-2) \gamma_3 F^{\alpha\beta} \square h^i \partial_\alpha \xi_\beta^j - (d-2) \gamma_3 F^{\alpha\beta} (\partial \partial h)^i \partial_\alpha \xi_\beta^j] = e^{ij} F^{\alpha\beta} [(d-2) \gamma_3 h^i \partial_\alpha \square \xi_\beta^j \\
&- (d-2) \gamma_3 h^{\mu\nu,i} \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \xi_\beta^j].
\end{aligned}$$

Эти вариации входят в условия калибровочной инвариантности нашей теории в виде $\delta_0 \mathcal{L}_1 + \delta_1 \mathcal{L}_0 = 0$, откуда можно найти и коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 и a_4 через калибровочный параметр γ_3 .

В Вариации массивного поля спина 2

Минимальное взаимодействие Найдем вариации отвечающие минимальному взаимодействию

$$\begin{aligned}
\delta_{00} \bar{\mathcal{L}}_{02} &= [-D^2 h^{\mu\nu,i} + 2D^\mu (Dh)^{\nu,i} - D^\mu D^\nu h^i - g^{\mu\nu} (DDh)^i + g^{\mu\nu} D^2 h^i] (\frac{m\alpha_1}{d-2} g_{\mu\nu} \xi^i) + \\
&+ [D^2 b^{\nu,i} - D^\nu (Db)^i] m\alpha_1 \xi_\nu^i + m\alpha_0 D^2 \varphi^i \xi^i = \frac{m\alpha_1}{d-2} [(d-2) D^2 h^i - (d-2) (DDh)^i] \xi^i + \\
&+ m\alpha_1 [b^{\nu,i} D^2 \xi_\nu^i - b_\nu^i D^\nu D^\mu \xi_\mu^i] + m\alpha_0 \varphi^i D^2 \xi^i = m\alpha_1 (h^i D^2 \xi^i - h^{\mu\nu,i} D_\mu D_\nu \xi^i) + \\
&+ m\alpha_1 [b^{\nu,i} D^2 \xi_\nu^i - b_\nu^i D^\nu D^\mu \xi_\mu^i] + m\alpha_0 \varphi^i D^2 \xi^i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{01} &= m\alpha_1 [-(Dh)^{\nu,i} D_\nu \xi^i + D^\nu h^i D_\nu \xi^i] + m\alpha_1 [D^\mu b^{\nu,i} (D_\mu \xi_\nu^i + D_\nu \xi_\mu^i) - 2(Db)^i D^\mu \xi_\mu^i] - \\
&- m\alpha_0 \varphi^i D^2 \xi^i = m\alpha_1 [-h^i D^2 \xi^i + h^{\mu\nu,i} D_\mu D_\nu \xi^i] + m\alpha_1 [-b^{\nu,i} D^2 \xi_\nu^i - b_\nu^i D^\mu D^\nu \xi_\mu^i + \\
&+ 2b_\nu^i D^\nu D^\mu \xi_\mu^i] - m\alpha_0 \varphi^i D^2 \xi^i.
\end{aligned}$$

Теперь найдем их сумму

$$\bar{\delta}_{00} \bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{01} = m\alpha_1 b_\nu^i [D^\nu, D^\mu] \xi_\mu^i = m\alpha_1 e_0 \varepsilon^{ij} F^{\nu\mu} b_\nu^i \xi_\mu^j = -m e_0 \alpha_1 \varepsilon^{ij} F^{\mu\nu} b_\mu^j \xi_\nu^i.$$

Теперь найдем элемент вариации $\bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02}$. Просчитаем наглядно коммутаторы, необходимые для нахождения $\bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02}$

$$[D^2, D_\nu] \xi^i = D^\alpha [D_\alpha, D_\nu] \xi^i + [D_\alpha, D_\nu] D^\alpha \xi^i = e_0 \varepsilon^{ij} F_{\alpha\nu} D^\alpha \xi^j + e_0 \varepsilon^{ij} F_{\alpha\nu} D^\alpha \xi^j = 2e_0 \varepsilon^{ij} F_{\alpha\nu} \partial^\alpha \xi^j.$$

Сама вариация будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_{01} \bar{\mathcal{L}}_{02} &= [-D^2 h^{\mu\nu,i} + 2D^\mu (Dh)^{\nu,i} - D^\mu D^\nu h^i - g^{\mu\nu} (DDh)^i + g^{\mu\nu} D^2 h^i] D_\mu \xi_\nu^i + \\
&+ [D^2 b^{\nu,i} - D^\nu (Db)^i] D_\nu \xi^i = [-2h^{\mu\nu,i} D^2 D_\mu \xi_\nu^i + 2h^{\mu\nu,i} D_\mu D^2 \xi_\nu^i + 2h^{\alpha\nu,i} D_\alpha D_\nu D^\mu \xi_\mu^i - \\
&- h^i D^\nu D^2 \xi_\nu^i - h^i D^\nu D^\mu D_\nu \xi_\mu^i - 2h^{\alpha\nu,i} D_\alpha D_\nu D^\mu \xi_\mu^i + 2h^i D^2 D^\mu \xi_\mu^i] + [b^{\nu,i} D^2 D_\nu \xi^i - \\
&- b^{\nu,i} D_\nu D^2 \xi^i] = -2h^{\nu\mu,i} [D^2, D_\nu] \xi_\mu^i + 2h_\nu^{\alpha,i} D_\alpha [D^\mu, D^\nu] \xi_\mu^i + h^i [D^2, D^\mu] \xi_\mu^i + \\
&+ h^i D_\nu [D^\nu, D^\mu] \xi_\mu^i + b^{\nu,i} [D^2, D_\nu] \xi^i = e_0 \varepsilon^{ij} \xi_\mu^j [4F^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_\beta^{\mu,i} - 2F^{\mu\nu} (\partial h)_\nu^i - 2F^{\alpha\mu} \partial_\alpha h^i - \\
&- F^{\nu\mu} \partial_\nu h^i] - 2e_0 \varepsilon^{ij} \xi^j F_{\alpha\nu} \partial_\alpha b_\nu^i = e_0 \varepsilon^{ij} \xi_\mu^j [-4F^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_\beta^{\mu,j} - 2F^{\alpha\mu} (\partial h)_\alpha^j + 3F^{\alpha\mu} \partial_\alpha h^j] + \\
&+ e_0 \varepsilon^{ij} \xi^i [2F^{\alpha\beta} \partial^\alpha b_\beta^j].
\end{aligned}$$

Просчитаем наглядно коммутаторы, необходимые для нахождения $\bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{02}$

$$[D^2, D_\nu]\xi^i = D^\alpha[D_\alpha, D_\nu]\xi^i + [D_\alpha, D_\nu]D^\alpha\xi^i = e_0\varepsilon^{ij}F_{\alpha\nu}D^\alpha\xi^j + e_0\varepsilon^{ij}F_{\alpha\nu}D^\alpha\xi^j = 2e_0\varepsilon^{ij}F_{\alpha\nu}\partial^\alpha\xi^j.$$

Переход от D к ∂ произошел из-за требования линейности всех членов по F.

Неминимальное взаимодействие Нам необходимо найти вариации, которые участвуют в следующих условиях калибровочной инвариантности

$$\delta_{00}\mathcal{L}_{13} + \delta_{01}\mathcal{L}_{12} + \delta_{11}\mathcal{L}_{02} + \delta_{12}\mathcal{L}_{01} = 0,$$

$$\delta_{00}\bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{01} + \delta_{00}\mathcal{L}_{11} + \delta_{11}\mathcal{L}_{00} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{02} + \delta_{00}\mathcal{L}_{12} + \delta_{01}\mathcal{L}_{11} + \delta_{11}\mathcal{L}_{01} + \delta_{12}\mathcal{L}_{00} = 0.$$

Сначала найдем все вариации из первого условия . Приступим

$$\begin{aligned} \delta_{00}\mathcal{L}_{13} &= \frac{1}{m}\alpha_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{d-2}(-a_2\partial_\beta(\partial h)_\alpha^i\xi^j - a_2\partial_\alpha(\partial h)_\beta^j\xi^i - a_3\partial_\alpha(\partial h)_\beta^i\xi^j - a_3\partial_\alpha(\partial h)_\beta^j\xi^i - \right. \\ &\quad \left. - da_4\partial_\beta(\partial h)_\alpha^i\xi^j) - b_1(\partial^2b_\alpha^i\xi_\beta^j + \partial^2b_\beta^j\xi_\alpha^i + 2\partial^\nu\partial_\alpha b_\beta^i\xi_\nu^j + 2\partial_\alpha(\partial b)^j\xi_\beta^i)\right] = \\ &= \frac{1}{m}\alpha_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{d-2}(-2a_2h_\alpha^{\mu,i}\partial_\mu\partial_\beta\xi_\beta^j - da_4h_\alpha^{\mu,i}\partial_\mu\partial_\beta\xi_\beta^j) - b_1(2b_\alpha^i\partial^2\xi_\beta^j + 2b_\beta^i\partial_\alpha\partial^\nu\xi_\nu^j - \right. \\ &\quad \left. - 2b^{\nu,i}\partial_\nu\partial_\alpha\xi_\beta^j)\right] = \frac{1}{m}\alpha_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{d-2}(d-1)a_4h_\beta^{\mu,i}\partial_\mu\partial_\alpha\xi_\beta^j - 2b_1b_\beta^j\partial^2\xi_\alpha^i + \right. \\ &\quad \left. + 2b_1b_\beta^j\partial_\alpha\partial^\nu\xi_\nu^i - 2b_1b^{\nu,j}\partial_\nu\partial_\alpha\xi_\beta^i\right]. \end{aligned}$$

Следующая же имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{01}\mathcal{L}_{12} &= \frac{1}{m}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[c_1h_\alpha^{\mu,i}\partial_\beta\partial_\mu\xi_\beta^j - c_2h_\alpha^{\mu,i}\partial_\mu\partial_\beta\xi_\beta^j - c_1b^{\mu,i}\partial_\mu\partial_\alpha\xi_\beta^j + c_2b_\alpha^i\partial^2\xi_\beta^j - c_2b_\beta^i\partial_\alpha\partial^\nu\xi_\nu^j - \\ &\quad - 2c_3b_\beta^i\partial_\alpha\partial^\nu\xi_\nu^j] = \frac{1}{m}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[(c_2 - c_1)h_\beta^{\mu,i}\partial_\alpha\partial_\mu\xi_\beta^j + (c_2 + 2c_3)b_\beta^j\partial_\alpha\partial^\nu\xi_\nu^i + c_2b_\beta^j\partial^2\xi_\alpha^i + \\ &\quad + c_1b^{\mu,j}\partial_\mu\partial_\alpha\xi_\beta^i]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \delta_{11}\mathcal{L}_{02} &= \frac{v_1}{m}\varepsilon^{ij}F_\nu^\alpha[\partial^2b^{\nu,i}\xi_\alpha^j - \partial^\nu(\partial b)^i\xi_\alpha^j] = \frac{v_1}{m}\varepsilon^{ij}F^{\beta\alpha}[b_\beta^i\partial^2\xi_\alpha^j - b^{\mu,i}\partial_\mu\partial_\beta\xi_\alpha^j] = \\ &= \frac{v_1}{m}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[b^{\mu,j}\partial_\mu\partial_\alpha\xi_\beta^i + b_\beta^j\partial^2\xi_\alpha^i]. \end{aligned}$$

Теперь найдем

$$\begin{aligned} \delta_{12}\mathcal{L}_{01} &= \frac{\gamma_2}{m^2}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}m\alpha_1[\partial^\mu b^{\nu,i} - g^{\mu\nu}(\partial b)^i]\partial_\alpha\xi_\beta^j = \frac{\gamma_2}{m}\alpha_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[db^{\nu,i}\partial_\nu\partial_\alpha\xi_\beta^j - b^{\nu,i}\partial_\nu\partial_\alpha\xi_\beta^j] = \\ &= -\frac{\gamma_2}{m}\alpha_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}(d-1)b^{\nu,j}\partial_\nu\partial_\alpha\xi_\beta^i. \end{aligned}$$

Итак, сложив найденные нами вариации, получим следующее условие

$$\begin{aligned} \delta_{00}\mathcal{L}_{13} + \delta_{01}\mathcal{L}_{12} + \delta_{11}\mathcal{L}_{02} + \delta_{12}\mathcal{L}_{01} = & \frac{1}{m}\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[(c_2 - c_1 + (d-1)\gamma_2\alpha_1)h_{\beta}^{\mu,i}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\xi^j + (c_2 - \\ & - 2b_1\alpha_1 + v_1)b_{\beta}^j\partial^2\xi_{\alpha}^i + (c_2 + 2c_3 + 2b_1\alpha_1)b_{\beta}^j\partial_{\alpha}\partial^{\nu}\xi_{\nu}^i + (-2b_1\alpha_1 + v_1 - \gamma_2\alpha_1(d-1) + \\ & + c_1)b^{\mu,j}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^i] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 + \gamma_2\alpha_1(d-1) &= 0, \quad c_2 - 2b_1\alpha_1 + v_1 = 0, \\ c_2 + 2c_3 + 2b_1\alpha_1 &= 0, \quad c_1 - 2b_1\alpha_1 + v_1 - \gamma_2\alpha_1(d-1) = 0. \end{aligned}$$

Откуда получим выражения коэффициентов c_1 , c_2 , и c_3 в виде

$$c_1 = 2b_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_1(d-1) - v_1, \quad c_2 = 2b_1\alpha_1 - v_1, \quad c_3 = -2b_1\alpha_1 + \frac{v_1}{2}.$$

Часть членов из второго выражения нам уже известны, они представляют собой неинвариантную часть минимального взаимодействия. Посчитаем неизвестные

$$\begin{aligned} \delta_{00}\mathcal{L}_{11} &= \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}m\alpha_1\left[\frac{d_1}{d-2}(h_{\alpha}^{\mu,i}g_{\mu\beta}\xi^j + h_{\beta}^{\mu,j}g_{\mu\alpha}\xi^i) + d_2(b_{\alpha}^i\xi_{\beta}^j + b_{\beta}^j\xi_{\alpha}^i)\right] = \\ &= \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}m\alpha_1\left[\frac{d_1}{d-2}(h_{\beta\alpha}^i\xi^j + h_{\alpha\beta}^j\xi^i) + d_2(b_{\alpha}^i\xi_{\beta}^j + b_{\beta}^j\xi_{\alpha}^i)\right] = -2\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}m\alpha_1d_2b_{\alpha}^j\xi_{\beta}^i. \end{aligned}$$

Теперь найдем $\delta_{11}\mathcal{L}_{00}$

$$\delta_{11}\mathcal{L}_{00} = 0.$$

Теперь получим, что

$$\delta_{00}\bar{\mathcal{L}}_{02} + \bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{01} + \delta_{00}\mathcal{L}_{11} + \delta_{11}\mathcal{L}_{00} = -m\alpha_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}(2d_2 + e_0)b_{\alpha}^j\xi_{\beta}^i = 0.$$

Откуда получаем

$$d_2 = -\frac{e_0}{2}.$$

Найдем последнее выражение (и получим все коэффициенты). Для начала найдем

$$\begin{aligned} \delta_{00}\mathcal{L}_{12} &= \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[\alpha_1(c_1\partial_{\alpha}h_{\beta}^{\mu,i}\xi_{\mu}^j + c_2(\partial h)_{\alpha}^i\xi_{\beta}^j + c_3\partial_{\alpha}h^i\xi_{\beta}^j - c_4\partial_{\alpha}\varphi^j\xi_{\beta}^i) - \\ &- \frac{\alpha_1}{d-2}(c_1\partial_{\alpha}b^{\mu,j}g_{\mu\beta}\xi^i + c_2\partial^{\mu}b_{\beta}^jg_{\mu\alpha}\xi^i + g^{\mu\nu}c_3\partial_{\alpha}b_{\beta}^jg_{\mu\nu}\xi^i) - \alpha_0c_4\partial_{\alpha}b_{\beta}^i\xi^j] = \\ &= \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[\alpha_1(-c_1h_{\beta}^{\mu,i}\partial_{\alpha}\xi_{\mu}^j - c_2h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\mu}\xi_{\beta}^j - c_3h^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j - c_4\varphi^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j) + (\frac{\alpha_1}{d-2}(dc_3 + c_1 + \\ &+ c_2) - \alpha_0c_4)b_{\beta}^j\partial_{\alpha}\xi^i] = \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[\alpha_1(c_1h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\beta}\xi_{\mu}^j - c_2h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\mu}\xi_{\beta}^j - c_3h^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j - c_4\varphi^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j) + \\ &+ (\frac{\alpha_1}{d-2}(dc_3 + c_1 + c_2) - \alpha_0c_4)b_{\beta}^j\partial_{\alpha}\xi^i]. \end{aligned}$$

Далее получим

$$\delta_{01}\mathcal{L}_{11} = \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[2d_1h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{(\mu}\xi_{\beta)}^j + 2d_2b_{\alpha}^i\partial_{\beta}\xi^j] = \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[2d_1h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\mu}\xi_{\beta}^j + 2d_1h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\beta}\xi_{\mu}^j + 2d_2b_{\beta}^j\partial_{\alpha}\xi^i],$$

$$\begin{aligned}\delta_{11}\mathcal{L}_{01} &= v_1\varepsilon^{ij}F_{\nu}^{\alpha}[-\alpha_1(\partial h)^{\nu,i}\xi_{\alpha}^j + \alpha_1\partial^{\nu}h^i\xi_{\alpha}^j + \alpha_0\partial^{\nu}\varphi^i\xi_{\alpha}^j] = v_1\varepsilon^{ij}F^{\beta\alpha}[-\alpha_1h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\mu}\xi_{\beta}^j + \\ &+ \alpha_1h^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j + \alpha_0\varphi^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j] = v_1\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[\alpha_1h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\mu}\xi_{\beta}^j - \alpha_1h^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j - \alpha_0\varphi^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j]\end{aligned}$$

$$\delta_{12}\mathcal{L}_{00} = \gamma_2\varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[-h^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j + dh^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j + \frac{d}{2}\alpha_0\alpha_1\varphi^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j].$$

Просуммируем эти вариации и получим

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{01}\bar{\mathcal{L}}_{02} + \delta_{00}\mathcal{L}_{12} + \delta_{01}\mathcal{L}_{11} + \delta_{11}\mathcal{L}_{01} + \delta_{12}\mathcal{L}_{00} &= \varepsilon^{ij}F^{\alpha\beta}[(\alpha_1c_1 + 2d_1 + 4e_0)h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\beta}\xi_{\mu}^j + (2d_1 + \\ &+ 2e_0 + \alpha_1v_1 - \alpha_1c_2)h_{\alpha}^{\mu,i}\partial_{\mu}\xi_{\beta}^j + (-\alpha_1v_1 + \gamma_2(d-1) - \alpha_1c_3 - 3e_0)h^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j + \\ &+ (\frac{d}{2}\gamma_2\alpha_0\alpha_1 - \alpha_1c_4 - \alpha_0v_1)\varphi^i\partial_{\alpha}\xi_{\beta}^j + (\frac{\alpha_1}{d-2}(dc_3 + c_1 + c_2) - \alpha_0c_4 + 2d_2 - 2e_0)b_{\beta}^j] = 0.\end{aligned}$$

Откуда находим систему уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_1(2b_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_1(d-1) - v_1) + 4e_0 + 2d_1 &= 0, \quad 2d_1 + 2e_0 + \alpha_1v_1 - \alpha_1(2b_1\alpha_1 - v_1) = 0, \\ -\alpha_1v_1 + \gamma_2(d-1) - \alpha_1(-2b_1\alpha_1 + \frac{v_1}{2}) - 3e_0 &= 0, \quad \frac{d}{2}\gamma_2\alpha_0\alpha_1 - \alpha_1c_4 - \alpha_0v_1 = 0, \\ \frac{\alpha_1}{d-2}(-2db_1\alpha_1 + \frac{dv_1}{2} + 4b_1\alpha_1 - 2v_1 + \gamma_2\alpha_1(d-1)) - 3e_0 - \alpha_0c_4 &= 0.\end{aligned}$$

При решении которых мы получаем значения коэффициентов

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{8b_1 + 2\gamma_2(d-1) - 6e_0}{3\alpha_1}, \quad d_1 = \frac{3e_0 - 2b_1 - 2\gamma_2(d-1)}{3}, \\ c_4 &= \alpha_0\frac{\gamma_2(d+2) + 6e_0 - 8b_1}{6}.\end{aligned}$$

Мы нашли кубичные вершины взаимодействия массивного поля спина 2 с внешним постоянным элетромагнитным полем.

Список литературы

- [1] Пескин М. Введение в квантовую теорию поля : пер. с англ. / М. Пескин, Д. Шредер, под ред. А.А. Белафина, А.В. Беркова - М. Ижевск:РХД , 2001 - 784 с.;
- [2] Грин М. Теория суперструн в 2 т. : пер. с англ. / М.Грин, Дж. Швариц, Э. Виттен, под ред. С.И. Азакова, П.Б. Медведева, И.Я. Арефьевой - М. : Мир , 1990 - 518 с.;
- [3] M. Vasiliev, Higher spin gauge theories in various dimensions, Fortsc. Phys. 52 (2004) 702-707;
- [4] D. Sorokin, Introduction to classical theory of higher spins, hep-th/0405069;
- [5] N. Bonatta, G. Compere, A. Sagnotti, An introduction to free higher-spin fields, hep-th/0409068;
- [6] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, M.A. Vasiliev, Nonlinear higher spin theories in various dimensions, hep-th/0503128;
- [7] G. Velo, D. Zwanziger, Propagation and quantization of of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential, Phys.Rev. 186 (1969) 1337;
- [8] G. Velo, D. Zwanziger, Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spins one and higher, Phys.Rev. 188 (1969) 2218;
- [9] G. Velo, Anomalous behaviour of a massive spin two charged particle in an external electromagnetic field, Nucl.Phys. B43 (1972) 389;
- [10] C. Aragone, S. Deser, Consistency Problems of Spin-2 Gravity Coupling, Nuovo Cim. 57 (1980) 33;
- [11] A.K. Bengtsson, I. Bengtsson, L. Brink, Cubic interaction terms for arbitrary spin, Nucl.Phys. B227 (1983) 31;
- [12] A.K. Bengtsson, I. Bengtsson, L. Brink, Cubic interaction terms for arbitrary extended supermultiplets, Nucl.Phys. B227 (1983) 41;
- [13] F.A. Berends, G.J.H. Burgers, H. van Dam, On the theoretical problems in constructing interactions involving higher-spin massless particles, Nucl.Phys. B260 (1985) 295;
- [14] E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev, On the gravitational interaction of massless higher-spin fields, Phys. Lett. B189 (1987) 89;
- [15] E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev, Cubic interaction in extended theories of massless higher-spin fields, Nucl. Phys. B291 (1987) 141;

- [16] M.A. Vasiliev, Consistent equations for interacting massless fields of all spins in the 1st order in the curvature, *Ann.Phys.* 190 (1989) 59;
- [17] M.A. Vasiliev, Consistent equations for interacting gauge fields of all spins in 3+1 dimensions, *Phys.Lett.* 243 (1991) 1387;
- [18] Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in $(A)dS_d$, *Phys.Lett.* 567 (2003) 139;
- [19] N. Boulanger, P. Sundell, An action principle for Vasiliev's four-dimensional higher-spin gravity, [arXiv:1102.2219\[hep-th\]](#);
- [20] N. Doroud, L. Smolin, An action for higher spin gauge theory in four dimensions, [arXiv:1102.3297\[hep-th\]](#);
- [21] R.R. Metsaev, Cubic interaction vertices for massive and massless higher spin fields, *Nucl.Phys.* B759 (2006) 147;
- [22] N. Boulanger, S. Leclercq, Consistent coupling between spin-2 and spin-3 massless fields, *JHEP* 0611 (2006) 034;
- [23] X. Bekaert, N. Boulanger, S. Cnockaert, S. Leclercq, On Killing tensors and cubic vertices in higher spin field theories, *Fortschr.Phys.* 54 (2006) 282;
- [24] N. Boulanger, S. Leclercq, P. Sundell, On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory, *JHEP* 0808 (2008) 056;
- [25] Yu.M. Zinoviev, On spin 3 interacting with gravity, *Class.Quant.Grav.* 26 (2009) 035022;
- [26] X. Bekaert, E. Meunier, Higher spin interactions with scalar matter on constant curvature spacetimes: cubic coupling generating functions, *JHEP* 1011, 116;
- [27] Yu.M. Zinoviev, Gravitational cubic interactions for massive mixed symmetry gauge field, *Class.Quant.Grav.* 29 (2012) 015013;
- [28] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan, Conformal invariant interaction of a scalar field with the higher spin fields in AdS_D , *Mod.Phys.Lett.* A25 (2010) 1333;
- [29] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan, General trilinear interaction for arbitrary even higher spin gauge fields, *Phys.Lett.* 696 (2011) 410.
- [30] I.L. Buchbinder, A. Fotopoulos, A.C. Petkou, M. Tsulaia, Constructing the cubic interaction vertex of higher spin gauge fields, *Phys.Rev.* D74 (2006) 105018;

- [31] A. Fotopoulos, N. Irges, A.C. Petkou, M. Tsulaia, Higher spin gauge fields interacting with scalars: the Lagrangian cubic vertex, JHEP 0710 (2007) 021;
- [32] A. Fotopoulos, M. Tsulaia, On the tensionless limit of string theory, off-shell higher spin interaction vertices and BCFW recursion relations, JHEP 1011 (2010) 086;
- [33] M. Taronna, Higher spin interactions: four-point functions and beyond, arXiv:1107.5843;
- [34] E. Joung, M. Taronna, Cubic interactions of massless higher spins in $(A)dS$: metric-like approach, arXiv:1110.5918[hep-th];
- [35] S.M. Klishevich, Yu.M. Zinoviev, On electromagnetic interaction of massive spin-2 particle, Phys.Atom.Nucl. 61 (1998) 1527;
- [36] S.M. Klishevich, Massive fields with arbitrary integer spin in homogeneous electromagnetic field, Int.J.Mod.Phys. A15 (2000) 535;
- [37] Yu.M. Zinoviev, On spin 2 electromagnetic interactions, Mod.Phys.Lett. A24 (2009) 17;
- [38] Yu.M. Zinoviev, On massive spin 2 electromagnetic interactions, Nucl.Phys. B821 (2009) 431;
- [39] M. Porrati, R. Rahman, Intrinsic cutoff and acausality for massive spin 2 fields coupled to electromagnetism, Nucl.Phys. B801 (2008) 174;
- [40] M. Porrati, R. Rahman, Causal propagation of charged spin 3/2 field in an external electromagnetic background, Phys.Rev. D80 (2009) 025009;
- [41] M. Porrati, R. Rahman, Notes on a cure for higher-spin acausality, Phys.Rev. D84 (2011) 045013;
- [42] M. Porrati, R. Rahman, A Sagnotti, String theory and Velo-Zwanziger problem, Nucl.Phys. B846 (2011) 250;
- [43] P.C. Argyres, C.R. Nappi, Massive spin-2 bosonic string states in an electromagnetic background, Phys.Lett. B224 (1989) 89;
- [44] S.M. Klishevich, Electromagnetic interaction of massive spin-3 state from string theory, Int.J.Mod.Phys. A15 (2000) 395;
- [45] I.L. Buchbinder, D.M. Gitman, V.A. Krykhtin, V.D. Pershin, Equations of Motion for Massive Spin 2 Field Coupled to Gravity, Nucl.Phys. B584 (2000) 615;

- [46] I.L. Buchbinder, D.M. Gitman, V.D. Pershin, Causality of Massive Spin 2 Field in External Gravity, Phys.Lett. B492 (2000) 161;
- [47] I.L. Buchbinder, T.V. Snegirev, Yu.M. Zinoviev Cubic interaction vertex of higher-spin fields with external electromagnetic field, Nucl.Phys. B864 (2012) 694-721, arXiv:1204.2341v3[hep-th];
- [48] L.P.S. Singh, C. R. Hagen, Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case, Phys.Rev. **D9** (1974) 898-909;
- [49] Yu. M. Zinoviev, On Massive High Spin Particles in AdS , arXiv:hep-th/0108192 (2001).

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: stormhawkv@gmail.com / ID: 4367294

Проверяющий: stormhawkv@gmail.com / ID: 4367294

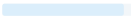
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- <http://www.antiplagiat.ru>

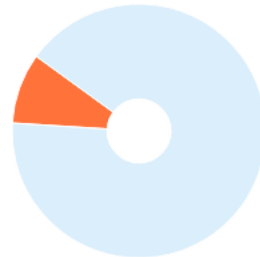
ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 5
Начало загрузки: 24.05.2018 16:05:40
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: diplomZ18_2
Размер текста: 190 кБ
Символов в тексте: 75240
Слов в тексте: 11154
Число предложений: 512

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 24.05.2018 16:05:41
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска:

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
9,42% 	0% 	90,58% 



Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.

Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	5,18%	6,39%	Cubic interaction vertex of hig...	http://arxiv.org	27 Мар 2015	Модуль поиска Интернет	42	60
[02]	0,44%	3,71%	From Higher Spins to Strings: ...	http://arxiv.org	26 Мар 2017	Модуль поиска Интернет	5	50
[03]	0,61%	3,52%	Higher-Spin Interactions: thre...	http://arxiv.org	26 Мар 2015	Модуль поиска Интернет	9	50

Еще источников: 8
Еще заимствований: 3,21%