

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
Институт прикладной математики и компьютерных наук

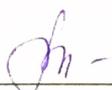
ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК  
Руководитель ООП  
д-р техн. наук, профессор  
А.М. Горцев  
« 05 » июня 2018 г.

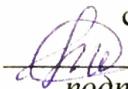
**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОФАЗНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ РЕСУРСНЫХ  
СМО ВИДА  $MMPP/GI/\infty$**

по основной образовательной программе подготовки бакалавров  
«Прикладная математика и информатика»  
направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Галилейская Анастасия Александровна

 Руководитель ВКР  
Е.Ю. Лисовская  
подпись  
« 05 » июня 2018г.

Автор работы  
студент группы №1141  
А.А. Галилейская  
  
подпись

Томск – 2018

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ  
Руководитель ООП  
д-р техн. наук, профессор  
А.М. Горцев  
« 15 » мая 2017 г.

**ЗАДАНИЕ**

по подготовке ВКР бакалавра студенту Галилейской Анастасии Александровне группы №1141.

1. Тема ВКР «Асимптотический анализ многофазных и неоднородных ресурсных СМО вида  $MMPP/GI/\infty$ ».

2. Срок сдачи студентом выполненной ВКР:

а) на кафедре 05.06.2018 г.

б) в ГЭК 07.06.2018 г.

3. Цель работы: построение и исследование математических моделей ресурсных систем массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ,  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$  и  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$  методом асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока.

Задачи:

- ✓ Найти научную литературу российских и зарубежных ученых по тематике исследования ресурсных систем массового обслуживания, ознакомиться и определить актуальность;
- ✓ Построить математическую модель двухфазной ресурсной системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ; с помощью методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа получить аппроксимацию стационарного распределения вероятностей четырехмерного случайного процесса числа заявок и суммарного объема занятого ресурса на фазах системы в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова для системы вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ;
- ✓ Построить математическую модель ресурсной системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$ ; обобщить полученные результаты для случая произвольного числа  $n$  фаз – получить аппроксимацию стационарного распределения вероятностей  $2n$ -мерного случайного процесса числа заявок и суммарного объема занятого ресурса на фазах системы в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова;
- ✓ Построить математическую модель неоднородной ресурсной системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ ; с помощью методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа получить аппроксимацию стационарного распределения вероятностей  $2n$ -мерного случайного процесса числа заявок и суммарного объема занятого ресурса каждого типа в системе в условии

растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова для системы вида  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ ;

- ✓ Провести численный анализ исследуемых систем вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ,  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$  и  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ , определить точность соответствующих аппроксимаций.

4. Краткое содержание работы:

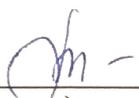
- ✓ Построение и исследование математической модели двухфазной ресурсной системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$  методом асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.  
Срок исполнения – 29.12.2017 г.
- ✓ Численный анализ ресурсной системы вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ .  
Срок исполнения – 22.01.2018 г.
- ✓ Построение и исследование математической модели многофазной ресурсной системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$  методом асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.  
Срок исполнения – 22.03.2018 г.
- ✓ Построение и исследование математической модели неоднородной ресурсной системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$  методом асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.  
Срок исполнения – 19.05.2018 г.
- ✓ Численный анализ ресурсной системы вида  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ .  
Срок исполнения – 02.06.2018 г.

5. Предприятие, организация, по заданию которого выполняется работа: кафедра теории вероятностей и математической статистики НИ ТГУ.

6. Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей): 10 рисунков, 5 таблиц.

7. Дата выдачи задания «15» ноября 2017 г.

Руководитель ВКР

  
\_\_\_\_\_ *подпись*

Е.Ю. Лисовская

Задание принял к исполнению

15.11.2017   
\_\_\_\_\_ *дата, подпись*

А.А. Галилейская

## РЕФЕРАТ

Рассматриваются бесконечнолинейные ресурсные системы массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ,  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$  и  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ . Рассмотрены системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, с входящим Марковски модулированным пуассоновским потоком. Предметом исследования является число заявок и суммарный объем занятого ресурса в бесконечнолинейных системах массового обслуживания. При помощи метода динамического просеивания проведено исследование математических моделей бесконечнолинейных систем массового обслуживания вида:  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ,  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$  и  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ , методом асимптотического анализа первого и второго порядков в условии высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова получена гауссовская аппроксимация характеристической функции числа заявок в системе и суммарного объема занятого ресурса.

Ключевые слова: система массового обслуживания, бесконечнолинейная система, объем ресурса, метод асимптотического анализа, гауссовская аппроксимация.

Бакалаврская работа содержит 59 страниц, 3 раздела, 10 рисунков, 5 таблиц.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 Исследование СМО $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$	8
1.1 Постановка задачи	8
1.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова	10
1.3 Метод асимптотического анализа	13
1.3 Численный анализ точности асимптотических результатов	20
2 Исследование СМО $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$	23
2.1 Постановка задачи	23
2.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова	26
2.3 Метод асимптотического анализа	28
3 Исследование СМО $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$	36
3.1 Постановка задачи	36
3.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова	39
3.3 Метод асимптотического анализа	41
3.4 Численный анализ точности асимптотических результатов	48
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	54

## ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания (СМО) требований случайного объема позволяют решать задачи современных технических систем, например, загрузки каналов, передачи данных в сети [1-3], в качестве математической модели имеют применение СМО требований случайного объема [4]. Сообщения или заявки, поступающие в систему, обладают различным информационным объемом, который представляет собой случайную величину.

В работах [5-8] были исследованы СМО с ограничением на суммарный объем заявок при инверсионном порядке обслуживания (дисциплина LIFO). Оказалось, что в этом случае можно получить алгоритмы, пригодные для численных расчетов стационарных характеристик.

В дальнейшем, большой вклад в развитие методов исследования ресурсных СМО внес О. М. Тихоненко с коллегами. В своих работах [9, 10, 11] авторы рассматривают два класса систем массового обслуживания:

1) системы, в которых суммарный объем требований неограничен, а время обслуживания зависит от длины требования [12]; в системе реализован алгоритм AQM (Active Queue Management), т.е. каждое требование, поступающее в систему может получить отказ в обслуживании и потеряться, даже если в памяти имеется свободное место для его размещения, с вероятностью, зависящей от объема данного требования и суммарного объема других требований, имеющих в системе в момент его поступления. Для описанной системы определяются стационарное распределение числа требований и вероятность потери;

2) системы с ограниченным суммарным объемом, в которых длины требований и времена их обслуживания независимы [13]. Для данной системы определяются стационарное распределение числа требований и вероятность потери требования.

Широко применяются методы теории массового обслуживания для адекватного описания процесса передачи информации. К тому же, ввиду неоднородности предоставляемых услуг (телефонные звонки, передача текстовых сообщений, видео- и аудиосообщений, использование интернет), необходимо учитывать объем передаваемой информации. В связи с этим, актуальным является разработка новых ресурсных моделей, сформулированных в терминах систем массового обслуживания, которые бы позволили оценить объемы занятого ресурса.

Системы и сети массового обслуживания уже давно применяются в качестве математических моделей различных информационно-компьютерных систем и сетей [14, 15]. Аналитические результаты удается получить, если входящие потоки – пуассоновские. Однако, марковские или рекуррентные потоки событий наиболее адекватно описывают современные потоки данных компьютерных и телекоммуникационных сетей.

Целью данной выпускной квалифицированной работы является построение и исследование математических моделей ресурсных систем массового обслуживания вида  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ ,  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^n$  и  $MMPP^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$  методом асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.

# 1 Исследование СМО ММРР<sup>(v)</sup>/(GI/∞)<sup>2</sup>

## 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим двухфазную СМО с неограниченным числом приборов. На вход системы поступает ММРР-поток заявок, управляемый цепью Маркова  $k(t) = 1, 2, \dots, K$ , задается матрицей инфинитезимальных характеристик  $Q = \|q_{ij}\|$  размера  $K \times K$  и диагональной матрицей условных интенсивностей  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  (Рисунок 1.1).

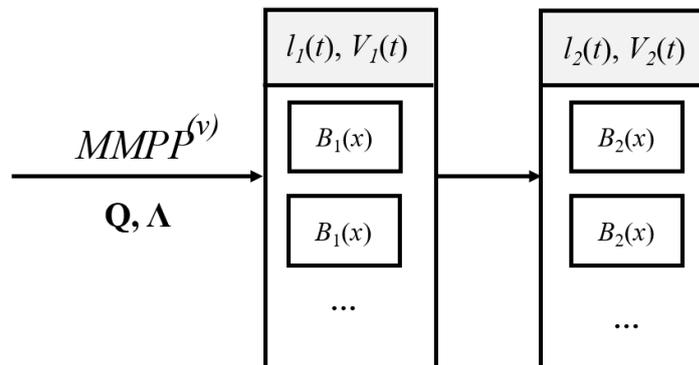


Рисунок 1.1 – Бесконечнолинейная ресурсная двухфазная СМО с входящим ММРР-поток

Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объемом  $v > 0$ , и  $G(y) = P\{v < y\}$  – функция распределения случайной величины  $v$ . Объемы различных требований независимы. Считаем, что продолжительность обслуживания заявки на первой фазе имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов, которую обозначим  $B_1(x)$ , и на второй фазе –  $B_2(x)$ . После обслуживания на первой фазе заявка с тем же объемом переходит на вторую фазу, после обслуживания на второй фазе заявка покидает систему и «уносит» с собой свой объем.

Пусть  $l_i(t)$  – число заявок на  $i$ -ой фазе системы в момент времени  $t$ ,  $V_i(t)$  – суммарный объем занятого ресурса на  $i$ -ой фазе в системе в момент времени  $t$ , где  $i = 1, 2$ .

Поставим задачу нахождения характеристик четырехмерного случайного процесса  $\{l_1(t), V_1(t), l_2(t), V_2(t)\}$ . Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания [16].

Изобразим три параллельных оси времени, пронумерованных от 0 до 2. Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 – второму (Рисунок 1.2).

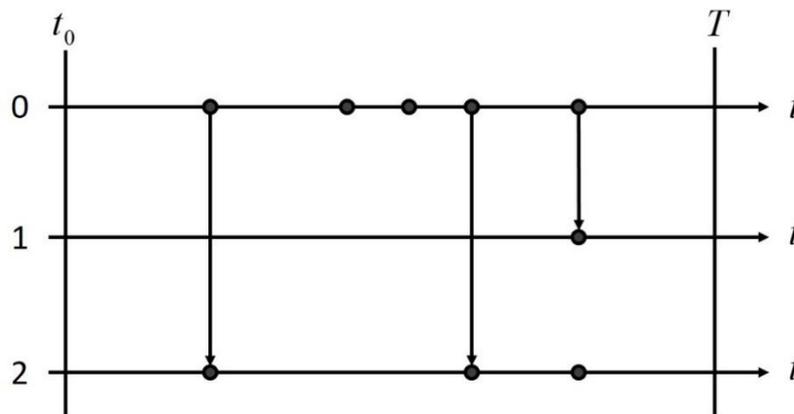


Рисунок 1.2 – Просеивание заявок входящего потока

Пусть имеется набор функций  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  значения которых лежат в диапазоне  $[0, 1]$  и обладают свойством

$$S_1(t) + S_2(t) \leq 1$$

для любых  $t$ .

Событие входящего потока может просеяться только на одну из двух осей, либо не просеяться ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени  $t > t_0$ , сформирует событие потока на оси 1, то есть к моменту времени  $T$  не закончит обслуживание на

первой фазе, равна  $S_1(t) = 1 - B_1(T - t)$ ; сформирует событие потока на оси 2, то есть к моменту времени  $T$  закончит обслуживание на первой фазе и не закончит на второй, равна  $S_2(t) = 1 - B_2(T - t) - B_2^*(T - t)$ , где  $B_2^*(\tau) = (B_1 * B_2)(\tau)$  – свертка функций распределения  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$  длительности обслуживания на фазах системы; не сформирует событие ни на одной из осей с вероятностью  $S_0(t) = 1 - S_1(t) - S_2(t)$ , то есть к моменту времени  $T$  заявка закончит обслуживание на обеих фазах и покинет систему.

Обозначим  $n_i(t)$  – число событий, наступивших на  $i$ -ой оси просеянного потока до момента  $t$ ,  $W_i(t)$  – суммарный объем занятого ресурса просеянными заявками на  $i$ -ую ось.

Как показано в [16], многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в момент времени  $T$  совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{l_1(T) = m_1, l_2(T) = m_2\} = P\{n_1(T) = m_1, n_2(T) = m_2\}$$

для любых  $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$ . Нетрудно показать, что для исследуемого процесса  $\{l_1(t), V_1(t), l_2(t), V_2(t)\}$  справедливо:

$$\begin{aligned} P\{l_1(T) = m_1, V_1(T) < z_1, l_2(T) = m_2, V_2(T) < z_2\} = \\ P\{n_1(T) = m_1, W_1(T) < z_1, n_2(T) = m_2, W_2(T) < z_2\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

для любых  $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$  и  $z_1, z_2 \geq 0$ . Будем использовать равенство (1.1) для исследования процесса  $\{l_1(t), V_1(t), l_2(t), V_2(t)\}$  с помощью исследования процесса  $\{n_1(t), W_1(t), n_2(t), W_2(t)\}$ .

## 1.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим распределение вероятностей многомерного Марковского процесса

$$P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t) = P\{k(t) = k, n_1(t) = n_1, W_1(t) < w_1, n_2(t) = n_2, W_2(t) < w_2\},$$

где  $k(t)$  – состояние управляющей цепи Маркова. Для этого распределения составим  $\Delta t$ -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем:

$$\begin{aligned} P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t + \Delta t) &= P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + \\ &+ P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t) \lambda_k \Delta t (1 - S_1(t) - S_2(t)) + \\ &+ \lambda_k \Delta t S_1(t) \int_0^{w_1} P(k, n_1 - 1, w_1 - y, n_2, w_2, t) dG(y) + \\ &+ \lambda_k \Delta t S_2(t) \int_0^{w_2} P(k, n_1, w_1, n_2 - 1, w_2 - y, t) dG(y) + \\ &+ \sum_{v \neq k} q_{vk} \Delta t P(v, n_1, w_1, n_2, w_2, t) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из (1.2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t)}{\partial t} &= -\lambda_k (S_1(t) + S_2(t)) P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t) + \\ &+ \lambda_k S_1(t) \int_0^{w_1} P(k, n_1 - 1, w_1 - y, n_2, w_2, t) dG(y) + \\ &+ \lambda_k S_2(t) \int_0^{w_2} P(k, n_1, w_1, n_2 - 1, w_2 - y, t) dG(y) + \\ &\quad \sum_v q_{vk} P(v, n_1, w_1, n_2, w_2, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

для  $k = 1, \dots, K; n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots; w_1, w_2 > 0$ .

Начальное условие для решения  $P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t)$  в момент времени  $t_0$  определим в виде:

$$P(k, n_1, w_1, n_2, w_2, t_0) = \begin{cases} r(k), & n_1 = w_1 = n_2 = w_2 = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $r(k)$  – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова  $k(t)$ .

Введем характеристические функции вида:

$$h(k, u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1} \int_0^{\infty} e^{jv_1 w_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2 n_2} \int_0^{\infty} e^{jv_2 w_2} P(k, n_1, dw_1, n_2, dw_2, t),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Тогда можем записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, u_1, v_1, u_2, v_2, t)}{\partial t} &= \sum_v q_{vk} h(v, u_1, v_1, u_2, v_2, t) + \\ &+ \lambda_k h(k, u_1, v_1, u_2, v_2, t) \left[ S_1(t) \left( e^{ju_1} G^*(v_1) - 1 \right) + S_2(t) \left( e^{ju_2} G^*(v_2) - 1 \right) \right], \end{aligned}$$

для  $k = 1 \dots K$ , где

$$G^*(v) = \int_0^{\infty} e^{jvy} dG(y).$$

Тогда (1.3) можем переписать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \times \\ &\times \left[ \mathbf{\Lambda} \left( S_1(t) \left( e^{ju_1} G^*(v_1) - 1 \right) + S_2(t) \left( e^{ju_2} G^*(v_2) - 1 \right) \right) + \mathbf{Q} \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t_0) = \mathbf{r}, \quad (1.5)$$

где

$$\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = [h(1, u_1, v_1, u_2, v_2, t), \dots, h(K, u_1, v_1, u_2, v_2, t)],$$

$\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$  – вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова  $k(t)$ , удовлетворяющий системе:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases} \quad (1.6)$$

и  $\mathbf{e}$  – единичный вектор-столбец.

### 1.3 Метод асимптотического анализа

Применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции рассматриваемого случайного процесса при определенных условиях [16]. Для нашей системы мы будем рассматривать условие высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова [17-19].

Подставим в уравнение (1.4)  $\Lambda = N\Lambda_1$  и  $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}_1$ , где  $N \rightarrow \infty$  – некоторый параметр, который используется для асимптотического анализа. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \times \\ &\times \left[ \overline{\Lambda} \left( S_1(t) (e^{ju_1} G^*(v_1) - 1) + S_2(t) (e^{ju_2} G^*(v_2) - 1) \right) + \overline{\mathbf{Q}} \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

с начальным условием (1.5).

Теорема 1.1. Асимптотическая характеристическая функция первого порядка многомерного случайного процесса  $\{n_1(t), W_1(t), n_2(t), W_2(t)\}$  имеет вид:

$$\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda \left[ (ju_1 + jv_1 a_1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + (ju_2 + jv_2 a_1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right] \right\},$$

где  $\lambda = \mathbf{r} \overline{\Lambda \mathbf{e}}$  – интенсивность входящего потока,  $a_1$  – первый момент случайной величины с функцией распределения вероятностей  $G(y)$ .

Доказательство.

Обозначим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u_1 = \varepsilon x_1, \quad v_1 = \varepsilon y_1, \quad u_2 = \varepsilon x_2, \quad v_2 = \varepsilon y_2, \\ \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Перепишем задачу (1.7)–(1.5) с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) \times \\ \times \left\{ \overline{\mathbf{Q}} + \overline{\Lambda} \left[ S_1(t) (e^{j\varepsilon x_1} G^*(\varepsilon y_1) - 1) + S_2(t) (e^{j\varepsilon x_2} G^*(\varepsilon y_2) - 1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (1.10)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (1.9)–(1.10) в два этапа.

Этап 1. Выполнив предельный переход в (1.9) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это уравнение с первым в системе (1.6) и сделав вывод,  $\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$  можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \mathbf{r} \Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t), \quad (1.11)$$

где  $\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$  – некоторая скалярная дифференцируемая функция, которая удовлетворяет условию

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 1. \quad (1.12)$$

Этап 2. Умножим (1.9) на вектор  $\mathbf{e}$ , подставим (1.11), учитывая разложение

$$e^{j\epsilon x} = 1 + j\epsilon x + O(\epsilon^2), \quad (1.13)$$

разделим результаты на  $\epsilon$  и произведем предельный переход при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Тогда, учитывая, что  $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{e} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$ , для функции  $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  получим следующее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \times \\ \times \lambda [S_1(t)(jx_1 + jy_1 a_1) + S_2(t)(jx_2 + jy_2 a_1)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Проинтегрировав уравнение (1.14) от  $t_0$  до  $t$ , учитывая начальное условие (1.12), получим

$$\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \exp \left\{ \lambda \left[ (jx_1 + jy_1 a_1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + (jx_2 + jy_2 a_1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Подставляя это выражение в (1.11) и выполняя замены, обратные к (1.8), получим

$$\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda \left[ (ju_1 + jv_1 a_1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + (ju_2 + jv_2 a_1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Теорема 1.1. доказана.

Теорема 1.2. Асимптотическая характеристическая функция второго порядка многомерного случайного процесса  $\{n_1(t), W_1(t), n_2(t), W_2(t)\}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \approx & \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda (ju_1 + jv_1 a_1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \right. \\
& + N\lambda (ju_2 + jv_2 a_1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \frac{(ju_1)^2}{2} \left( N\lambda \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \frac{(jv_1)^2}{2} \left( N\lambda a_2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N\kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + ju_1 jv_1 \left( N\lambda a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N\kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \frac{(ju_2)^2}{2} \left( N\lambda \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(jv_2)^2}{2} \left( N\lambda a_2 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N\kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + ju_2 jv_2 \left( N\lambda a_1 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N\kappa a_1 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + ju_1 ju_2 N\kappa \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + jv_1 jv_2 N\kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + \\
& \left. + (ju_1 jv_2 + ju_2 jv_1) N\kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\},
\end{aligned}$$

где  $\kappa = 2\mathbf{g}(\bar{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$ ,  $a_2$  – второй начальный момент случайной величины с функцией распределения  $G(y)$ .

Доказательство.

Представим функцию  $\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t)$  в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = & \mathbf{H}_2(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \times \\
& \times \exp \left\{ N\lambda \left[ (ju_1 + jv_1 a_1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + (ju_2 + jv_2 a_1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (1.15)
\end{aligned}$$

получим уравнение относительно функции  $\mathbf{H}_2(u_1, v_1, u_2, v_2, t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, v_1, u_2, v_2, t)}{\partial t} + \lambda [(ju_1 + jv_1 a_1) S_1(t) + (ju_2 + jv_2 a_1) S_2(t)] \mathbf{H}_2(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \\
= \mathbf{H}_2(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \left[ \bar{\Lambda} (S_1(t) (e^{ju_1} G^*(v_1) - 1)) + \right. \\
\left. + S_2(t) (e^{ju_2} G^*(v_2) - 1) \right] + \bar{\mathbf{Q}}. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, u_1 = \varepsilon x_1, v_1 = \varepsilon y_1, u_2 = \varepsilon x_2, v_2 = \varepsilon y_2, \\ \mathbf{H}_2(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon). \quad (1.17)$$

С использованием этих обозначений, уравнение (1.16) переписется в виде

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) \lambda \left[ S_1(t)(j\varepsilon x_1 + j\varepsilon y_1 a_1) + \right. \\ \left. + S_2(t)(j\varepsilon x_2 + j\varepsilon y_2 a_1) \right] = \mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) \times \\ \times \left[ \overline{\Lambda} \left( S_1(t)(e^{j\varepsilon x_1} G^*(\varepsilon y_1) - 1) + S_2(t)(e^{j\varepsilon x_2} G^*(\varepsilon y_2) - 1) \right) + \overline{\mathbf{Q}} \right]. \quad (1.18)$$

Найдем асимптотическое, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , решение этой задачи, то есть  $\mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon)$ .

Этап 1. Выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (1.18), получим:

$$\mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Представим  $\mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$  в виде

$$\mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \mathbf{r} \Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t), \quad (1.19)$$

где  $\Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$  – некоторая скалярная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию  $\Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t_0) = 1$ .

Этап 2. Решение уравнения (1.18) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) = \Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \left\{ \mathbf{r} + \right. \\ \left. + \left[ (j\varepsilon x_1 + j\varepsilon y_1 a_1) S_1(t) + (j\varepsilon x_2 + j\varepsilon y_2 a_1) S_2(t) \right] \mathbf{g} \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{g}$  – некоторая вектор-строка. Подставим разложение (1.20) в (1.18), используя разложение (1.13), получим матричное уравнение для вектора  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g}\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{r}(\lambda\mathbf{I} - \bar{\mathbf{\Lambda}}).$$

Этап 3. Домножим (1.18) на вектор  $\mathbf{e}$ , используя (1.20) и разложение

$$e^{j\epsilon x} = 1 + j\epsilon x + \frac{(j\epsilon x)^2}{2} + O(\epsilon^3), \quad (1.21)$$

в результате несложных преобразований, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)}{\partial t} = & \Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \times \\ & \times \left[ \frac{(jx_1)^2}{2} (\lambda S_1(t) + \kappa S_1^2(t)) + \frac{(jy_1)^2}{2} (\lambda a_2 S_1(t) + \kappa a_1^2 S_1^2(t)) \right. \\ & + jx_1 jy_1 (\lambda a_1 S_1(t) + \kappa a_1 S_1^2(t)) + jx_2 jy_2 (\lambda a_1 S_2(t) + \kappa a_1 S_2^2(t)) + \\ & + jx_1 jx_2 \kappa S_1(t) S_2(t) + jy_1 jy_2 \kappa a_1^2 S_1(t) S_2(t) + \\ & + (jx_1 jy_2 + jx_2 jy_1) \kappa a_1 S_1(t) S_2(t) + \frac{(jx_2)^2}{2} (\lambda S_2(t) + \kappa S_2^2(t)) \\ & \left. + \frac{(jy_2)^2}{2} (\lambda a_2 S_2(t) + \kappa a_1^2 S_2^2(t)) \right], \end{aligned}$$

где  $\kappa = 2\mathbf{g}(\bar{\mathbf{\Lambda}} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$ .

Решение этого уравнения, с учетом начального условия, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = & \exp \left\{ \frac{(jx_1)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ & + \frac{(jy_1)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + jx_1 jy_1 \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + \frac{(jx_2)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(jy_2)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\ & \left. + jx_2 jy_2 \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + jx_1 jx_2 \kappa \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$+ j y_1 j y_2 \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + (j x_1 j y_2 + j y_2 j x_1) \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \Big\}.$$

подставляя которое в (1.19), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) = & \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{(j x_1)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ & + \frac{(j y_1)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + j x_1 j y_1 \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + \frac{(j x_2)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(j y_2)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + j x_2 j y_2 \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + j x_1 j x_2 \kappa \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + j y_1 j y_2 \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + \\ & \left. + (j x_1 j y_2 + j x_2 j y_1) \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Выполним замены, обратные к (1.17) и (1.15), запишем приближенное равенство для характеристической функции  $\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) \approx & \mathbf{r} \exp \left\{ N \lambda (j u_1 + j v_1 a_1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \right. \\ & + N \lambda (j u_2 + j v_2 a_1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \frac{(j u_1)^2}{2} \left( N \lambda \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N \kappa \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + \frac{(j v_1)^2}{2} \left( N \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + \frac{j u_1 j v_1}{2} \left( N \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\ & + \frac{(j u_2)^2}{2} \left( N \lambda \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N \kappa \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(j v_2)^2}{2} \left( N \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\ & \left. + \frac{j u_2 j v_2}{2} \left( N \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{j u_1 j u_2}{2} N \kappa \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + \frac{j v_1 j v_2}{2} N \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau + \\
& \left. + \frac{(j u_1 j v_2 + j u_2 j v_1)}{2} N \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Теорема 1.2. доказана.

Следствие. Асимптотическое совместное стационарное распределение вероятностей четырехмерного процесса числа заявок и суммарных объемов занятого ресурса на фазах системы  $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^2$ , при условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний управляющей  $MMPP$ -потокот цепи Маркова, является четырехмерным гауссовским распределением вероятностей с параметрами:

– вектором математических ожиданий:

$$\mathbf{a} = [N\lambda b_1 \quad N\lambda a_1 b_1 \quad N\lambda b_2 \quad N\lambda a_1 b_2],$$

где

$$b_1 = \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau)) d\tau, \quad b_2 = \int_0^{\infty} (B_1(\tau) - B_2^*(\tau)) d\tau,$$

– ковариационной матрицей:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} N\lambda b_1 + N\kappa\beta_1 & N\lambda a_1 b_1 + N\kappa a_1 \beta_1 & N\kappa b & N\kappa a_1 b \\ N\lambda a_1 b_1 + N\kappa a_1 \beta_1 & N\lambda a_2 b_1 + N\kappa a_1^2 \beta_1 & N\kappa a_1 b & N\kappa a_1^2 b \\ N\kappa b & N\kappa a_1 b & N\lambda b_2 + N\kappa\beta_2 & N\lambda a_1 b_2 + N\kappa a_1 \beta_2 \\ N\kappa a_1 b & N\kappa a_1^2 b & N\lambda a_1 b_2 + N\kappa a_1 \beta_2 & N\lambda a_2 b_2 + N\kappa a_1^2 \beta_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau))^2 d\tau, \quad \beta_2 = \int_0^{\infty} (B_1(\tau) - B_2^*(\tau))^2 d\tau, \\
b &= \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau))(B_1(\tau) - B_2^*(\tau)) d\tau.
\end{aligned}$$

### 1.3 Численный анализ точности асимптотических результатов

Пусть входящий ММРР-поток задан следующими матрицами

$$\mathbf{\Lambda} = N \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = N \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix}.$$

Тогда  $\lambda = N$ , (при  $N \rightarrow \infty$  получаем асимптотическое условие растущей интенсивности входящего потока), а время обслуживания имеет гамма-распределение вероятностей с параметрами:

$$\alpha_1 = 1,5, \beta_1 = 2, \alpha_2 = 0,5, \beta_2 = 1,5,$$

для первой и второй фаз соответственно. Тогда  $b_1 = 0,75$  и  $b_2 = 1/3$ .

Пусть количество ресурса, необходимого для обслуживания одной заявки, имеет равномерное на  $[0,1]$  распределение вероятностей.

Целью является найти нижнюю границу параметра  $N$  применимости приближения (1.23). С этой целью мы провели серию экспериментов увеличивая значения  $N$ , и сравнили асимптотические распределения с эмпирическими, используя расстояние Колмогорова:

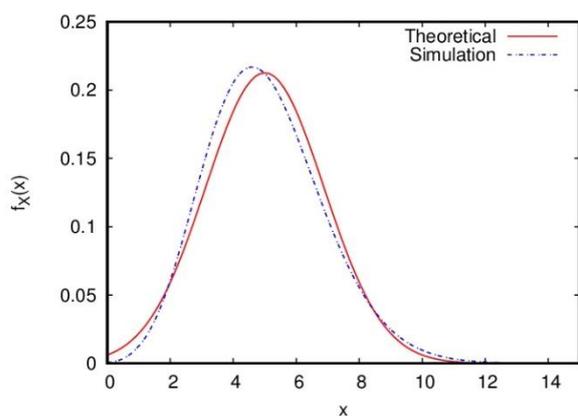
$$\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|,$$

где  $F(x)$  – асимптотическая гауссовская функция распределения с математическим ожиданием  $0,5N$  и дисперсией  $0,352N$ , а  $G(x)$  – эмпирическая.

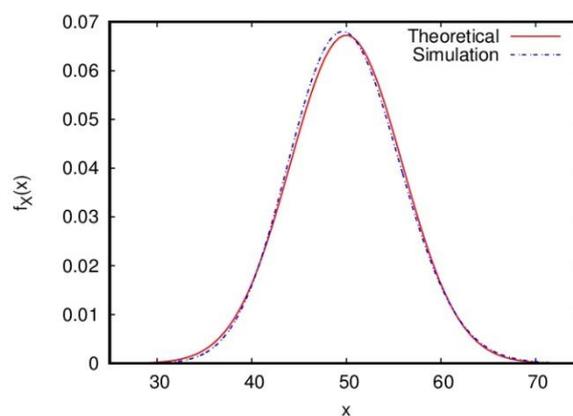
В таблице 1.1 приведены значения расстояния Колмогорова между асимптотической и эмпирической функциями распределений суммарных объемов занятых ресурсов на второй фазе для различных значений параметра  $N$ . Точность аппроксимации увеличивается с ростом интенсивности входящего потока  $N$ , а рисунок 1.3 демонстрирует это.

Таблица 1.1 – Расстояние Колмогорова между асимптотическим и эмпирическим распределениями вероятностей суммарного объема занятого ресурса на второй фазе

$N$	1	5	10	15	20	50	100
$\Delta$	0,173	0,040	0,028	0,023	0,020	0,013	0,009



А)  $N = 10$



Б)  $N = 100$

Рисунок 1.3 – Распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса на второй фазе системы (Асимптотические результаты – «Theoretical», эмпирические – «Simulation»)

## 2 Исследование СМО ММРР<sup>(v)</sup>/(GI/∞)<sup>n</sup>

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим  $n$ -фазную ресурсную СМО с неограниченным числом приборов и неограниченным объемом предоставляемого ресурса на каждой фазе. На вход системы поступает ММРР-поток заявок, управляемый цепью Маркова  $k(t) = 1, 2, \dots, K$ , которая задается матрицей инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$  размера  $K \times K$ , и диагональной матрицей условных интенсивностей  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  (Рисунок 2.1).

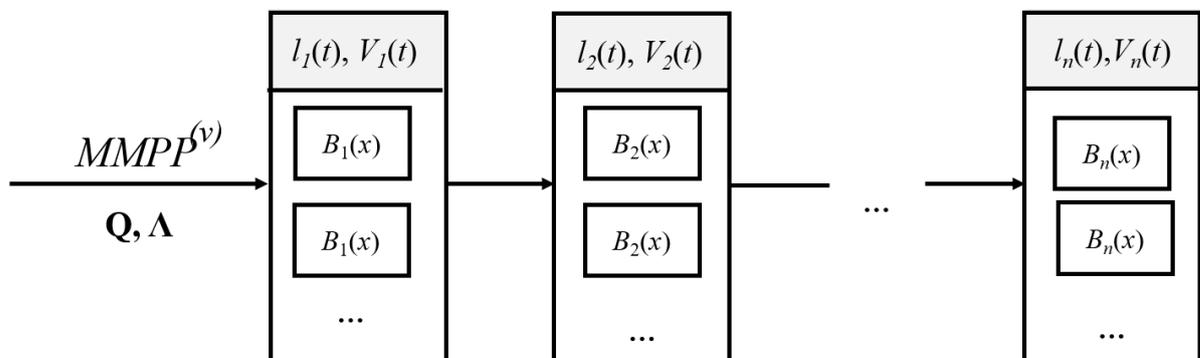


Рисунок 2.1 – Бесконечнолинейная ресурсная многофазная СМО с входящим ММРР-поток

Поступающее требование занимает любой свободный прибор на первой фазе, где обслуживается в течение случайного времени  $\tau_1 \geq 0$  с функцией распределения  $B_1(x) = P\{\tau_1 < x\}$  и формирует запрос на предоставление случайного объема ресурса  $v \geq 0$  с функцией распределения  $G(y) = P\{v < y\}$ . По окончании обслуживания на первой фазе, заявка освобождает тот же объем ресурса, мгновенно переходит на вторую фазу, где обслуживается в течение случайного времени  $\tau_2 \geq 0$  с функцией распределения  $B_2(x) = P\{\tau_2 < x\}$  и занимает такой же объем ресурса, как и на первой фазе. И так далее, после окончания обслуживания на  $n$ -й фазе, заявка покидает систему и освобождает занимаемый ресурс.

Пусть  $l_i(t)$  – число заявок на  $i$ -й фазе в момент времени  $t$ ,  $V_i(t)$  – суммарный объем занятого ресурса на  $i$ -й фазе в момент времени  $t$ , где  $i = \overline{1, n}$  – номер фазы.

Поставим задачу нахождения характеристик многомерного случайного процесса  $\{\mathbf{I}(t), \mathbf{V}(t)\} = \{l_1(t), \dots, l_n(t), V_1(t), \dots, V_n(t)\}$ . Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [16].

Изобразим  $n$  параллельных осей времени, пронумерованных от 0 до  $n$ . Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 – второму, и так далее, ось под номером  $n$  соответствует  $n$ -му просеянному потоку (Рисунок 2.2).

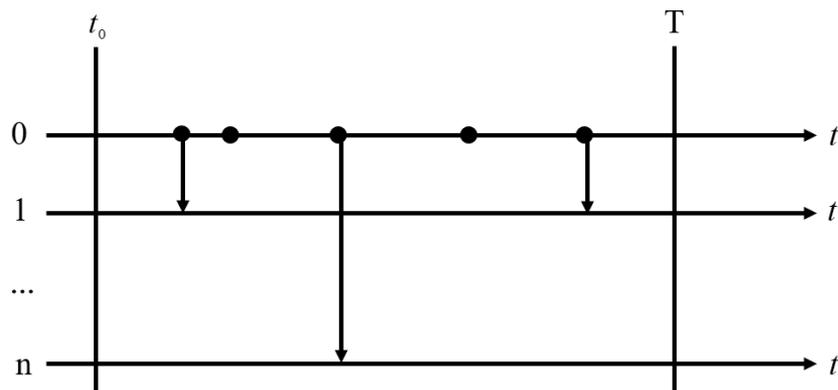


Рисунок 2.2 – Просеивание входящего потока

Пусть имеется набор функций  $S_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  значения которых лежат в диапазоне  $[0, 1]$  и обладают свойством

$$\sum_{i=1}^n S_i(t) \leq 1,$$

для любых  $t$ .

Событие входящего потока может просеяться только на одну из осей, либо не просеяться ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени  $t > t_0$  сформирует событие

потока на  $i$ -ой оси, то есть к моменту времени  $T$  будет находиться на обслуживании на  $i$ -ой фазе равна  $S_i(t) = B_{i-1}^*(T-t) - B_i^*(T-t)$ , где  $B_i^*(\tau) = (B_{i-1} * B_i)(\tau)$  – свертка функций распределения  $B_{i-1}(x)$ ,  $B_i(x)$  длительности обслуживания на фазах системы. Вероятность того, что заявка не сформирует событие ни на одной из осей равна  $S_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^n S_i(t)$ , то есть к моменту времени  $T$  заявка закончит обслуживание на всех фазах и покинет систему.

Обозначим  $n_i(t)$  – число событий, наступивших на  $i$ -ой оси просеянного потока до момента  $t$ ,  $W_i(t)$  – суммарный объем занятого ресурса просеянными заявками на  $i$ -ой оси.

Как показано в [16], многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в момент времени  $T$  совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{\mathbf{l}(T) = \mathbf{m}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}\}$$

для любых  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_n]$ . Нетрудно показать, что для исследуемого процесса справедливо:

$$P\{\mathbf{l}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{V}(T) < \mathbf{z}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{W}(T) < \mathbf{z}\} \quad (2.1)$$

для любых  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_n]$  и любых  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$ . Следует отметить, что неравенства  $\mathbf{V}(T) < \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{W}(T) < \mathbf{z}$  подразумевают поэлементное сравнение векторов, т.е.  $W_1(T) < z_1$  и так далее. Будем использовать равенство (2.1) для исследования процесса  $\{\mathbf{l}(t), \mathbf{V}(t)\}$  с помощью исследования процесса  $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$ .

## 2.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Добавим компоненту  $k(t)$  – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени  $t$ , к процессу  $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$ , тогда полученный многомерный процесс будет являться Марковским. Введем обозначение для его распределения вероятностей

$$P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) = P\{k(t) = k, \mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, \mathbf{W}(t) < \mathbf{w}\}.$$

Для этого распределения составим  $\Delta t$ -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем:

$$\begin{aligned} P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t + \Delta t) = & P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)\lambda_k \Delta t S_0(t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_k \Delta t S_i(t) \int_0^{w_i} P(k, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \mathbf{w} - \mathbf{y}_i, t) dG(y) + \\ & + \sum_{v \neq k} q_{vk} \Delta t P(v, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)}{\partial t} = & -\lambda_k (S_0(t) - 1) P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) + \\ & + \sum_{v \neq k} q_{vk} P(v, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_k S_i(t) \int_0^{w_i} P(k, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \mathbf{w} - \mathbf{y}_i, t) dG(y), \end{aligned}$$

для  $k = 1, \dots, K$ ,  $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_n]$ ,  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]$ , где  $\mathbf{y}_i$  – вектор, все элементы которого нулевые, за исключением  $i$ -го, который равен  $y$ ,  $\mathbf{e}_i$  – вектор, все элементы которого нулевые, за исключением  $i$ -го, который равен 1.

Начальное условие для решения  $P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)$  в момент времени  $t_0$  определим в виде

$$P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t_0) = \begin{cases} r(k), \mathbf{n} = \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

где  $r(k)$  – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова  $k(t)$ .

Введем частичные характеристические функции вида:

$$h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1} \int_0^{\infty} e^{jv_1 w_1} \dots \sum_{n_n=0}^{\infty} e^{ju_n n_n} \int_0^{\infty} e^{jv_n w_n} P(k, \mathbf{n}, d\mathbf{w}, t),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Тогда (2.3) можем переписать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} &= \sum_{\mathbf{v}} q_{\mathbf{v}k} h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \\ &+ \lambda_k \sum_{i=1}^n S_i(t) h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left( e^{ju_i} G^*(v_i) - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

для  $k = 1 \dots K$ , где

$$G^*(v) = \int_0^{\infty} e^{jvy} dG(y).$$

Перепишем эту систему в виде матричного уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ \mathbf{\Lambda} \sum_{i=1}^n S_i(t) \left( e^{ju_i} G^*(v_i) - 1 \right) + \mathbf{Q} \right] \quad (2.4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t_0) = \mathbf{r}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = [h(1, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \dots, h(K, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t)],$$

$\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$  – вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова  $k(t)$ , удовлетворяющий системе:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

и  $\mathbf{e}$  – единичный вектор-столбец.

### 2.3 Метод асимптотического анализа

Для решения задачи (2.3)–(2.4) воспользуемся методом асимптотического анализа [16]. Для нашей системы будем рассматривать условие высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова [17-19].

Подставим в уравнение (2.4)  $\Lambda = N\bar{\Lambda}$  и  $\mathbf{Q} = N\bar{\mathbf{Q}}$ , где  $N \rightarrow \infty$  – некоторый параметр, который используется для асимптотического анализа. Тогда можно записать:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n S_i(t) \left( e^{ju_i} G^*(v_i) - 1 \right) + \bar{\mathbf{Q}} \right] \quad (2.7)$$

с начальным условием (2.5).

Теорема 2.1. Асимптотическая характеристическая функция первого порядка многомерного случайного процесса  $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$  имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_i) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\},$$

где  $\lambda = \mathbf{r}\bar{\Lambda}\mathbf{e}$  – интенсивность входящего потока,  $a_1$  – средний объем занимаемого одной заявкой ресурса.

Доказательство.

Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{x}, \mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon). \quad (2.8)$$

Перепишем задачу (2.7)–(2.5) с учетом введенных обозначений

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n S_i(t) \left( e^{j\varepsilon x_i} G^*(\varepsilon y_i) - 1 \right) + \bar{\mathbf{Q}} \right], \quad (2.9)$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (2.9)–(2.10) в два этапа.

Этап 1. Подставляя в (2.9)  $\varepsilon = 0$ , получим

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это уравнение с первым в системе (2.6), перепишем его в виде:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (2.11)$$

где  $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  – некоторая скалярная функция, которая удовлетворяет условию:

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 1. \quad (2.12)$$

Этап 2. Умножим (2.9) на вектор  $\mathbf{e}$ , подставим (2.11), учитывая разложение (1.13), разделим результаты на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Тогда, учитывая, что  $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{e} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$ , для функции  $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t} = \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \lambda \sum_{i=1}^n S_i(t) (jx_i + jy_i a_1). \quad (2.13)$$

Проинтегрировав уравнение (2.13) от  $t_0$  до  $t$ , учитывая начальное условие (2.12), получим

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n (jx_i + jy_i a_1) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставляя это выражение в (2.11) и выполняя замены, обратные к (2.8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \\ &= \mathbf{r} \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n (jx_i + jy_i a_1) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\} = \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_1) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. доказана.

Теорема 2.2. Асимптотическая характеристическая функция второго порядка многомерного случайного процесса  $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) &\approx \\ \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_1) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + N \sum_{i=1}^n \frac{(ju_i)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) \right\} &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +N \sum_{i=1}^n \frac{(jv_i)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right) + \\
& +N \sum_{i=1}^n \frac{j u_i j v_i}{2} \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right) + \\
& +N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j u_i j u_m}{2} \kappa \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j v_i j v_m}{2} \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& \left. +N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j u_i j v_m}{2} \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\},
\end{aligned}$$

где  $\kappa = 2\mathbf{g}(\bar{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$ ,  $a_2$  – второй начальный момент случайной величины с функцией распределения  $G(y)$ .

Доказательство.

Представим функцию  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$  в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n (j u_i + j v_i a_1) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\}, \quad (2.14)$$

получим уравнение относительно функции  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ N\lambda \sum_{i=1}^n (j u_i + j v_i a_1) S_i(t) \right] = \\
= \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n (e^{j u_i} G^*(v_i) - 1) S_i(t) + \bar{\mathbf{Q}} \right]. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{x}, \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{y}, \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon). \quad (2.16)$$

С использованием этих обозначений уравнение (2.16) переписется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \lambda \sum_{i=1}^n (j\varepsilon x_i + j\varepsilon y_i a_{i1}) S_i(t) = \\ = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n S_i(t) (e^{j\varepsilon x_i} G^*(\varepsilon y_i) - 1) + \bar{\mathbf{Q}} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Найдем асимптотическое, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , решение этой задачи, то есть  $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)$ .

Этап 1. Выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (2.17), получим:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Представим  $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{r} \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (2.18)$$

где  $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  – некоторая скалярная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию  $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 1$ .

Этап 2. Решение уравнения (2.17) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \left\{ \mathbf{r} + \mathbf{g} \sum_{i=1}^n (j\varepsilon x_i + j\varepsilon y_i a_{i1}) S_i(t) \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{g}$  – некоторая вектор-строка. Подставим разложение (2.19) в (2.17), используя разложение (1.13), получим матричное уравнение для вектора  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{r} (\lambda \mathbf{I} - \bar{\Lambda}).$$

Этап 3. Домножим (2.17) на вектор  $\mathbf{e}$ , используя (2.19) и разложение (1.21), в результате несложных преобразований, получаем

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t} = \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(jx_i)^2}{2} (\lambda S_i(t) + \kappa S_i^2(t)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \frac{(jy_i)^2}{2} (\lambda a_2 S_i(t) + \kappa a_1 S_i^2(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{jx_i jy_i}{2} (\lambda a_1 S_i(t) + \kappa a_1 S_i^2(t)) + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jx_m}{2} \kappa S_i(t) S_m(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jy_i jy_m}{2} \kappa a_1^2 S_i(t) S_m(t) + \\
& \left. \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jy_m}{2} \kappa a_1 S_i(t) S_m(t) \right],
\end{aligned}$$

где  $\kappa = 2\mathbf{g}(\bar{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$ .

Решение этого уравнения с учетом начального условия, имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(jx_i)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(jy_i)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{jx_i jy_i}{2} \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jx_m}{2} \kappa \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jy_i jy_m}{2} \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jy_m}{2} \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\},
\end{aligned}$$

подставляя которое в (2.18), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) = & \mathbf{r} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(jx_i)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \frac{(jy_i)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \frac{jx_i jy_i}{2} \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jx_m}{2} \kappa \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jy_i jy_m}{2} \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jy_m}{2} \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Выполним замены, обратные к (2.16) и (2.14), запишем приближенное равенство для характеристической функции  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \approx \\
& \exp \left\{ N \lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_1) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + N \sum_{i=1}^n \frac{(ju_i)^2}{2} \left( \lambda \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\
& \quad + N \sum_{i=1}^n \frac{(jv_i)^2}{2} \left( \lambda a_2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& \quad + N \sum_{i=1}^n \frac{ju_i jv_i}{2} \left( \lambda a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& \quad + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{ju_i ju_m}{2} \kappa \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jv_i jv_m}{2} \kappa a_1^2 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{ju_i jv_m}{2} \kappa a_1 \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Теорема 2.2. доказана.

Следствие. Асимптотическое совместное стационарное распределение вероятностей  $2n$ -мерного процесса числа заявок и суммарных объемов занятых ресурсов на фазах системы  $\text{MMPP}/(\text{GI}/\infty)^n$ , при условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний управляющей  $\text{MMPP}$ -поток цепи Маркова, является  $2n$ -мерным гауссовским распределением вероятностей с параметрами:

– вектором математических ожиданий:

$$\mathbf{a} = N\lambda[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n],$$

где

$$\mathbf{a}_i = [1 \quad a_1] \int_0^\infty (B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau)) d\tau,$$

– ковариационная матрица:

$$\mathbf{K} = N(\lambda\mathbf{K}^{(1)} + \kappa\mathbf{K}^{(2)}),$$

где

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_n^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{1n}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_2^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1}^{(2)} & \mathbf{K}_{n2}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \int_0^\infty (B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau)) d\tau, \quad \mathbf{K}_i^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_1^2 \end{bmatrix} \int_0^\infty (B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau))^2 d\tau,$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_1^2 \end{bmatrix} \int_0^\infty (B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau))(B_{j-1}^*(\tau) - B_j^*(\tau)) d\tau.$$

### 3 Исследование СМО ММРР<sup>(v)</sup>/GI<sup>(n)</sup>/∞

#### 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания ММРР<sup>(v)</sup>|GI<sup>(n)</sup>|∞ с  $n$  типами неоднородных (в смысле скорости обслуживания) [20] обслуживающих приборов, на вход которой поступает ММРР-поток разнотипных заявок, управляемый цепью Маркова  $k(t) = 1, 2, \dots, K$ , задается матрицей инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q} = \|q_{vk}\|$ ,  $v, k = 1, \dots, K$  и диагональной матрицей условных интенсивностей  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$  (Рисунок 3.1).

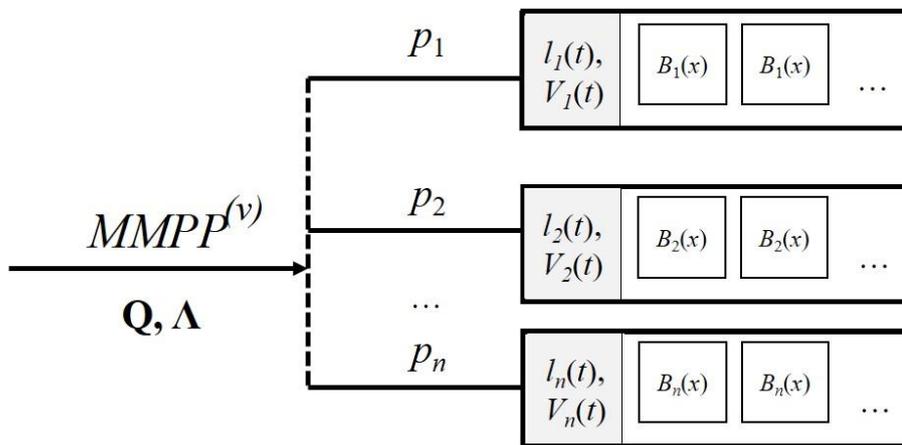


Рисунок 3.1 – Бесконечнолинейная ресурсная СМО с  $n$  типами неоднородных приборов и с входящим ММРР-поток

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом. Заявка, поступающая в систему, с вероятностью  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) требует для обслуживания случайное количество некоторого ресурса соответствующего типа с функцией распределения  $G_i(v)$  и обслуживается в течение случайного времени, имеющего функцию распределения  $B_i(x)$ . Вероятности  $p_i$  удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Пусть  $l_i(t)$  – число заявок  $i$ -го типа в системе в момент времени  $t$ ,  $V_i(t)$  – суммарный объем занятого ресурса  $i$ -го типа в системе в момент времени  $t$ , где  $i = 1, \dots, n$ .

Поставим задачу нахождения характеристик многомерного случайного процесса  $\{\mathbf{l}(t), \mathbf{V}(t)\} = \{l_1(t), \dots, l_n(t), V_1(t), \dots, V_n(t)\}$ . Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [16].

Изобразим  $n$  параллельных осей времени, пронумерованных от 0 до  $n$ . Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 – второму и так далее, ось под номером  $n$  соответствует  $n$ -му просеянному потоку (Рисунок 3.2).

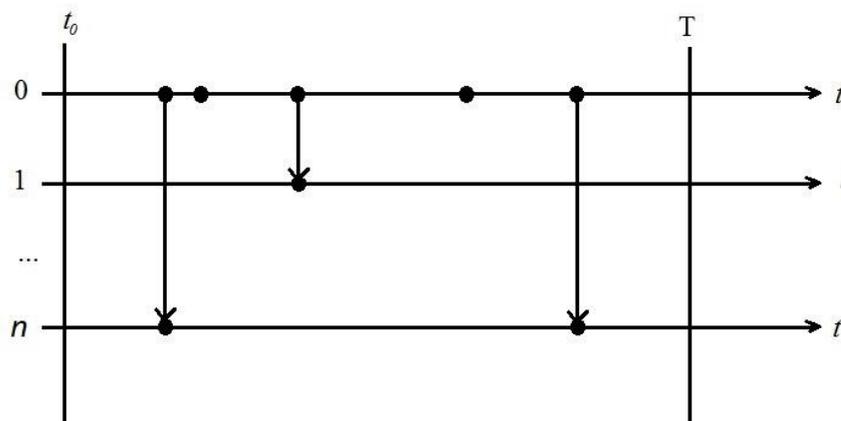


Рисунок 3.2 – Просеивание заявок входящего потока

Пусть имеется набор функций  $S_i(t)$ ,  $i = 1, n$  значения которых лежат в диапазоне  $[0, 1]$  и обладают свойством

$$\sum_{i=1}^n S_i(t) \leq 1,$$

для любых  $t$ .

Событие входящего потока может просеяться только на одну из осей, либо не просеется ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени  $t > t_0$  сформирует событие потока на  $i$ -ой оси, то есть к моменту времени  $T$  будет находиться на обслуживании равна  $S_i(t) = 1 - B_i(T - t)$ . Вероятность того, что заявка не сформирует событие ни на одной из осей равна

$$S_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^n p_i S_i(t),$$

то есть к моменту времени  $T$  заявка закончит обслуживание на всех фазах и покинет систему.

Обозначим  $n_i(t)$  – число событий, наступивших на  $i$ -ой оси просеянного потока до момента  $t$ ,  $W_i(t)$  – суммарный объем занятого ресурса просеянными заявками на  $i$ -й оси.

Как показано в [16], многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в момент времени  $T$  совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{\mathbf{l}(T) = \mathbf{m}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}\},$$

для любых  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_n]$ . Нетрудно показать, что для исследуемого процесса  $\{\mathbf{i}(t), \mathbf{V}(t)\}$  справедливо:

$$P\{\mathbf{l}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{V}(T) < \mathbf{z}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{W}(T) < \mathbf{z}\}, \quad (3.1)$$

для любых  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_n]$  и любых  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$ . Следует отметить, что неравенства  $\mathbf{V}(T) < \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{W}(T) < \mathbf{z}$  подразумевают поэлементное сравнение векторов, т.е.  $V_1(T) < z_1, W_1(T) < z_1$  и так далее. Будем использовать равенство

(3.1) для исследования процесса  $\{\mathbf{I}(t), \mathbf{V}(t)\}$  с помощью исследования процесса  $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$ .

### 3.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Добавим компоненту  $k(t)$  – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени  $t$ , к процессу  $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$ , тогда полученный многомерный процесс будет являться марковским. Введем обозначение для его распределения вероятностей

$$P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) = P\{k(t) = k, \mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, \mathbf{W}(t) < \mathbf{w}\}.$$

Для этого распределения составим  $\Delta t$ -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем:

$$\begin{aligned} P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t + \Delta t) = & P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)\lambda_k \Delta t S_0(t) + \\ & + \lambda_k \Delta t \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) \int_0^{w_i} P(k, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \mathbf{w} - \mathbf{y}_i, t) dG_i(y) + \\ & + \sum_{v \neq k} q_{vk} \Delta t P(v, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{y}_i$  – вектор, все элементы которого нулевые, за исключением  $i$ -го, который равен  $y$ ,  $\mathbf{e}_i$  – вектор, все элементы которого нулевые, за исключением  $i$ -го, который равен 1.

Из (3.2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t)}{\partial t} = & -\lambda_k \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) + \\ & + \sum_{v \neq k} q_{vk} P(v, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t) + \lambda_k \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) \int_0^{w_i} P(k, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m, \mathbf{w} - \mathbf{y}_m, t) dG_i(y), \end{aligned}$$

для  $k = 1, \dots, K$ ;  $w_i > 0, n_i = 0, 1, \dots, i = \overline{1, n}$ .

Начальное условие для решения  $P(k, n, \mathbf{w}, t)$  в момент времени  $t_0$  определим в виде

$$P(k, \mathbf{n}, \mathbf{w}, t_0) = \begin{cases} r(k), & \mathbf{n} = \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где  $r(k)$  – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова  $k(t)$ .

Введем характеристические функции вида:

$$h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1} \int_0^{\infty} e^{jv_1 w_1} \dots \sum_{n_n=0}^{\infty} e^{ju_n n_n} \int_0^{\infty} e^{jv_n w_n} P(k, \mathbf{n}, d\mathbf{w}, t),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Тогда можем записать следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sum_{\mathbf{v}} q_{\mathbf{v}k} h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \lambda_k \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) h(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) (e^{ju_i} G_i^*(v_i) - 1),$$

для  $k = 1 \dots K$ , где

$$G_i^*(v) = \int_0^{\infty} e^{jvy} dG_i(y).$$

Перепишем эту систему в виде матричного уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ \Lambda \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (e^{ju_i} G_i^*(v_i) - 1) + \mathbf{Q} \right], \quad (3.3)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t_0) = \mathbf{r}, \quad (3.4)$$

где

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = [h(1, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \dots, h(K, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t)],$$

$\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$  – вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова  $k(t)$ , удовлетворяющий системе:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases}$$

и  $\mathbf{e}$  – единичный вектор-столбец.

### 3.3 Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (3.3) не представляется возможным, то для решения задачи (3.3)–(3.4) воспользуемся методом асимптотического анализа [16]. Для нашей системы мы будем рассматривать условие высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова [17-19].

Подставим в уравнение (3.3)  $\Lambda = N\bar{\Lambda}$  и  $\mathbf{Q} = N\bar{\mathbf{Q}}$ , где  $N \rightarrow \infty$  – некоторый параметр, который используется для асимптотического анализа. Тогда можно записать:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n p_i \mathcal{S}_i(t) (e^{ju_i} G_i^*(v_i) - 1) + \bar{\mathbf{Q}} \right], \quad (3.5)$$

с начальным условием (3.4).

Теорема 3.1. Асимптотическая характеристическая функция первого порядка многомерного случайного процесса  $\{k(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$  имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ N \lambda \sum_{i=1}^n \left( j u_i + j v_i a_1^{(i)} \right) p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\},$$

где  $\lambda = \mathbf{r} \bar{\Lambda} \mathbf{e}$  – средняя интенсивность входящего потока,  $a_1^{(i)}$  – математическое ожидание занимаемого ресурса  $i$ -го типа.

Доказательство.

Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{x}, \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon). \quad (3.6)$$

Перепишем задачу (3.5)–(3.4) с учетом введенных обозначений

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) \left( e^{j \varepsilon x_i} G_i^*(\varepsilon y_i) - 1 \right) + \bar{\mathbf{Q}} \right], \quad (3.7)$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (3.8)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (3.7)–(3.8) в два этапа.

Этап 1. Подставляя в (3.7)  $\varepsilon = 0$ , получим

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это равенство с первым в системе для  $\mathbf{r}$ , то  $\mathbf{F}_1(x, y, t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{r} \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (3.9)$$

где  $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  – некоторая скалярная функция, которая удовлетворяет условию:

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 1. \quad (3.10)$$

Этап 2. Умножим (3.7) на вектор  $\mathbf{e}$ , подставим (3.9), учитывая разложение (1.11), разделим результаты на  $\varepsilon$  и произведем асимптотический переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда, учитывая, что  $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{e} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$ , для функции  $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t} = \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \lambda \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (jx_i + jy_i a_1^{(i)}). \quad (3.11)$$

Проинтегрировав уравнение (3.11) от  $t_0$  до  $t$ , учитывая начальное условие (3.10), получим

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n (jx_i + jy_i a_1^{(i)}) p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставляя это выражение в (3.9) и выполняя замены, обратные к (3.6), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \\ &= \mathbf{r} \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n (jx_i + jy_i a_1^{(i)}) p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\} = \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_1^{(i)}) p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. доказана.

Теорема 3.2. Асимптотическая характеристическая функция второго порядка многомерного случайного процесса  $\{k(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{W}(t)\}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) &\approx \mathbf{r} \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_1^{(i)}) p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \right. \\ &\left. + N \sum_{i=1}^n \frac{(ju_i)^2}{2} \left( \lambda p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +N \sum_{i=1}^n \frac{(jv_i)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa (a_1^{(i)})^2 p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& +N \sum_{i=1}^n \frac{j u_i j v_i}{2} \left( \lambda a_1^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1^{(i)} p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j u_i j u_m}{2} \kappa p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j v_i j v_m}{2} \kappa a_1^{(i)} p_i a_1^{(m)} p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& +N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j u_i j v_m}{2} \kappa a_1^{(i)} p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \Bigg\},
\end{aligned}$$

где  $\kappa = 2\mathbf{g}(\bar{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}$ ,  $a_1^{(i)}$  и  $a_2^{(i)}$  – первый и второй начальные моменты случайных величин с функцией распределения вероятностей  $G_i(y)$ .

Доказательство.

Перейдем к построению гауссовской аппроксимации суммарных объемов занятых ресурсов каждого типа. Представим функцию  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$  в виде:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \exp \left\{ N \lambda \sum_{i=1}^n p_i \left( j u_i + j v_i a_1^{(i)} \right) \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau \right\}, \quad (3.12)$$

получим уравнение относительно функции  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \lambda \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) \left( j u_i + j v_i a_1^{(i)} \right) = \\
& = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) \left( e^{j u_i} G_i^*(v_i) - 1 \right) + \bar{\mathbf{Q}} \right]. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{y}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon). \quad (3.14)$$

С использованием обозначений (3.14) уравнение (3.13) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \lambda \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (j\varepsilon x_i + j\varepsilon y_i a_1^{(i)}) = \\ = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \left[ \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (e^{j\varepsilon x_i} G_i^*(\varepsilon y_i) - 1) + \bar{\mathbf{Q}} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Найдем асимптотическое, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , решение этой задачи, то есть  $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)$ .

Этап 1. Выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (3.15), получим:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Представим  $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{r} \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (3.16)$$

где  $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  – некоторая скалярная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию  $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 1$ .

Этап 2. Решение уравнения (15) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \left\{ \mathbf{r} + \mathbf{g} \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (j\varepsilon x_i + j\varepsilon y_i a_1^{(i)}) \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{g}$  – некоторая вектор-строка. Подставим разложение (3.17) в (3.15), используя разложение (1.11), получим матричное уравнение для вектора  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{r} (\lambda \mathbf{I} - \bar{\Lambda}).$$

Этап 3. Домножим (3.15) на вектор  $\mathbf{e}$ , используя (3.17) и разложение (1.21), в результате несложных преобразований, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t} = & \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(jx_i)^2}{2} (\lambda p_i S_i(t) + \kappa p_i^2 S_i^2(t)) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(jy_i)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(i)} p_i S_i(t) + \kappa (a_1^{(i)})^2 p_i^2 S_i^2(t) \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{jx_i jy_i}{2} \left( \lambda a_1^{(i)} p_i S_i(t) + \kappa a_1^{(i)} p_i^2 S_i^2(t) \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jx_m}{2} \kappa p_i p_m S_i(t) S_m(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jy_i jy_m}{2} \kappa a_1^{(i)} p_i a_1^{(m)} p_m S_i(t) S_m(t) + \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ l \neq i}}^n \frac{jx_i jy_m}{2} \right]
\end{aligned}$$

где  $\kappa = 2\mathbf{g}(\bar{\Lambda} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}$ .

Решение этого уравнения, с учетом начального условия, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(jx_i)^2}{2} \left( \lambda p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(jy_i)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa (a_1^{(i)})^2 p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{jx_i jy_i}{2} \left( \lambda a_1^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1^{(i)} p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jx_m}{2} \kappa p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jy_i jy_m}{2} \kappa a_1^{(i)} p_i a_1^{(m)} p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jy_m}{2} \kappa a_1^{(m)} p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\},
\end{aligned}$$

подставляя которое в (3.16), получаем

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) = \mathbf{r} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(jx_i)^2}{2} \left( \lambda p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \frac{(jy_i)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa (a_1^{(i)})^2 p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{jx_i jy_i}{2} \left( \lambda a_1^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1^{(i)} p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{jx_i jx_m}{2} \kappa p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n jy_i jy_m \kappa a_1^{(i)} p_i a_1^{(m)} p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n jx_i jy_m \kappa a_1^{(m)} p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Выполним замены, обратные к (3.12) и (3.14), запишем приближенное равенство для характеристической функции  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) & \approx \mathbf{r} \exp \left\{ N \lambda \sum_{i=1}^n (ju_i + jv_i a_1^{(i)}) p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \right. \\
& + N \sum_{i=1}^n \frac{(ju_i)^2}{2} \left( \lambda p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + N \sum_{i=1}^n \frac{(jv_i)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa (a_1^{(i)})^2 p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + N \sum_{i=1}^n \frac{j u_i j v_i}{2} \left( \lambda a_1^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \kappa a_1^{(i)} p_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(\tau) d\tau \right) + \\
& + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j u_i j u_m}{2} \kappa p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + \\
& + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j v_i j v_m}{2} \kappa a_1^{(i)} p_i a_1^{(m)} p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau + N \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{j u_i j v_m}{2} \kappa a_1^{(m)} p_i p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Теорема 3.2. доказана.

Следствие. Асимптотическое совместное стационарное распределение вероятностей многомерного процесса числа заявок и суммарных объемов занятых ресурсов каждого типа, при условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний управляющей ММРР-поток цепи Маркова, является многомерным гауссовским распределением вероятностей с параметрами:

– вектором математических ожиданий

$$\mathbf{a} = N\lambda[\mathbf{a}_1 b_1 \quad \mathbf{a}_2 b_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n b_n],$$

где

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(i)} \end{bmatrix}, \quad b_i = p_i \int_0^{\infty} (1 - B_i(\tau)) d\tau,$$

– ковариационной матрицей:

$$\mathbf{K} = N(\lambda \mathbf{K}^{(1)} + \kappa \mathbf{K}^{(2)}),$$

где

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{(1)} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^{(1)} b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_n^{(1)} b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{1n}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1}^{(2)} & \mathbf{K}_{n2}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(i)} \\ a_1^{(i)} & a_2^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{il}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(l)} \\ a_1^{(l)} & a_1^{(i)} a_1^{(l)} \end{bmatrix} p_i p_l \int_0^{\infty} (1 - B_i(\tau))(1 - B_l(\tau)) d\tau.$$

### 3.4 Численный анализ точности асимптотических результатов

Пусть входящий ММРР-поток задан следующими матрицами

$$\mathbf{\Lambda} = N \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = N \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix},$$

(при  $N \rightarrow \infty$ , получаем асимптотическое условие растущей интенсивности входящего потока).

Вероятности для  $i$ -го типа заявок определены следующим образом ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$p_1 = 0,5, p_2 = 0,3, p_3 = 0,2,$$

ресурсы имеют экспоненциальное распределение с параметрами:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0,4,$$

а время обслуживания имеет гамма-распределение с параметрами:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0,5, \alpha_2 = \beta_2 = 1,5, \alpha_3 = \beta_3 = 2,5,$$

для соответствующих типов заявок.

Целью является найти нижнюю границу параметра  $N$  применимости приближения (3.18). Для этого мы провели серию экспериментов (в каждом из них генерируется  $10^9$  событий), увеличивая значения  $N$ , и сравнили асимптотические распределения с эмпирическими, используя расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|,$$

где  $F(x)$  – асимптотическая гауссовская функция распределения с параметрами, приведенными в таблице 3.1, а  $G(x)$  – эмпирическая.

Таблица 3.1 – Параметры гауссовской аппроксимации

Тип заявки	Мат. ожидание	Дисперсия
------------	---------------	-----------

Первый	$0,25N$	$0,256N$
Второй	$0,3N$	$0,613N$
Третий	$0,5N$	$2,541N$

В таблицах 3.2-3.4 приведены значения расстояния Колмогорова между асимптотической и эмпирической функциями распределений суммарных объемов занятых ресурсов трех типов. Точность аппроксимации увеличивается с ростом интенсивности входящего потока  $N$ , а рисунки 3.3-3.5 демонстрируют это.

$N$	1	35	50	75	100	125	200	500	1000
$\Delta$	0,305	0,035	0,029	0,023	0,020	0,018	0,015	0,008	0,006

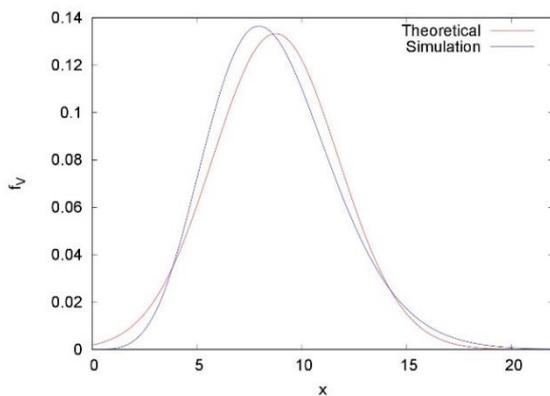
Таблица 3.2 – Расстояние Колмогорова для первого типа заявок

Таблица 3.3 – Расстояние Колмогорова для второго типа заявок

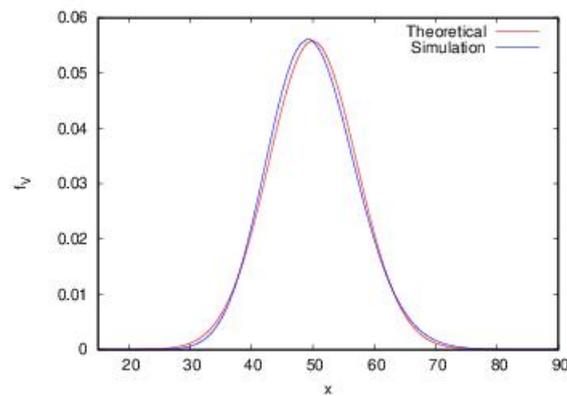
$N$	1	35	50	75	100	125	200	500	1000
$\Delta$	0,365	0,045	0,037	0,030	0,026	0,024	0,019	0,012	0,009

Таблица 3.4 – Расстояние Колмогорова для третьего типа заявок

$N$	1	35	50	75	100	125	200	500	1000
$\Delta$	0,426	0,055	0,045	0,037	0,032	0,029	0,022	0,014	0,010

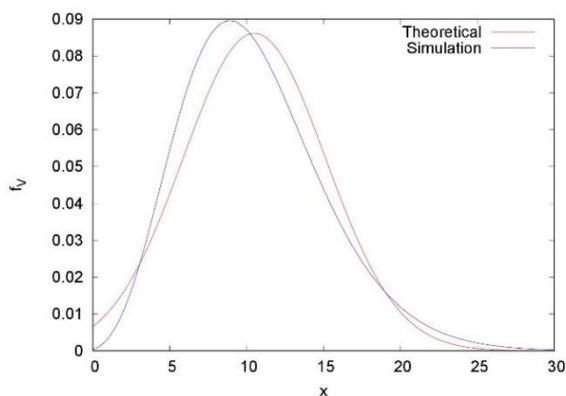


A)  $N = 35$

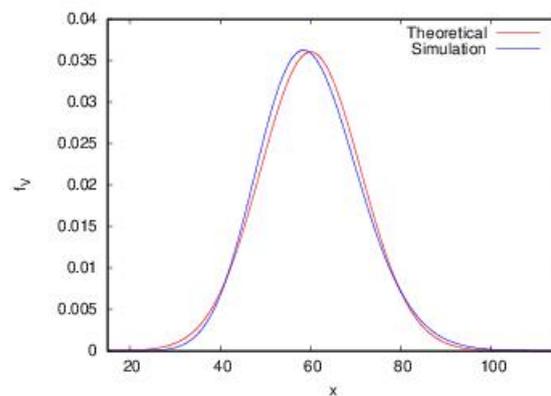


Б)  $N = 200$

Рисунок 3.3 – Распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса первого типа

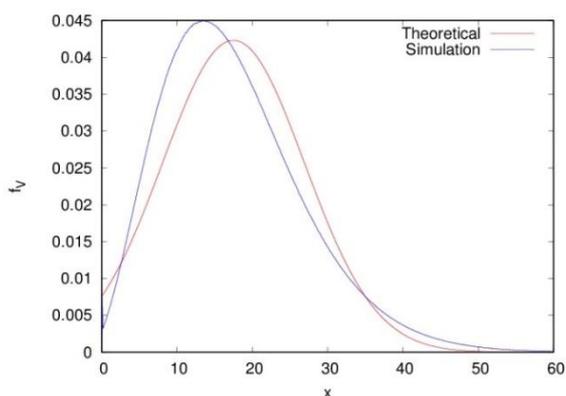


A)  $N = 35$

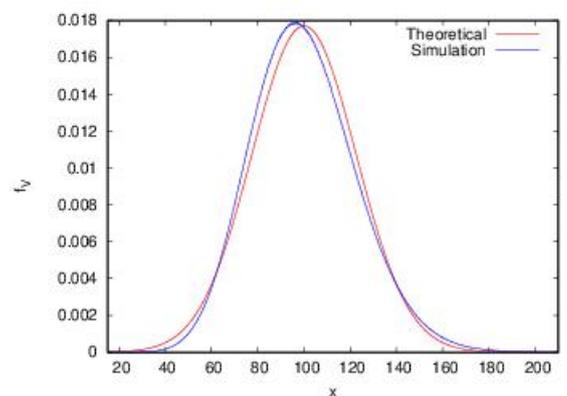


Б)  $N = 200$

Рисунок 3.4 – Распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса второго типа



A)  $N = 35$



Б)  $N = 200$

Рисунок 3.5 – Распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса третьего типа

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлено исследование математических моделей немарковских ресурсных систем массового обслуживания с произвольным временем обслуживания и ММРР входящим потоком. Получены формулы для стационарных вероятностных характеристик процессов числа заявок и суммарного объема занятого ресурса в системе.

Были исследованы двухфазная, многофазная и неоднородная ресурсные СМО с неограниченным числом приборов с входящим ММРР-потоком.

Для двухфазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с помощью методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа получена аппроксимация стационарного распределения вероятностей четырехмерного случайного процесса числа заявок и суммарного объема занятого ресурса на фазах системы в условии высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.

Для многофазной ресурсной бесконечнолинейной системы массового обслуживания обобщены полученные результаты, а именно получена аппроксимация стационарного распределения вероятностей  $2n$ -мерного случайного процесса числа заявок и суммарного объема занятого ресурса на фазах системы.

Для неоднородной ресурсной СМО с неограниченным числом приборов показано, что совместное асимптотическое распределение вероятностей числа заявок и суммарного объема занятого ресурса каждого типа сходится к многомерному гауссовскому распределению в асимптотическом условии высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.

Для каждой из систем проведен численный анализ, который демонстрирует высокую точность аппроксимации.

По результатам выпускной квалификационной работы были сделаны доклады на международных и всероссийских конференциях:

- 19–20 мая 2017 г. – V-я Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск;

- 25–30 июня 2017 г. – «Вычислительная и прикладная математика 2017», Новосибирск, Академгородок.

- 24–26 мая 2018 г. – VI-я Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск.

По материалам выпускной квалификационной работы подготовлено 11 публикаций: опубликовано [21-27] и четыре работы находятся в печати [28-31].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихоненко, О. М. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О. М. Тихоненко. – Минск : БГУ, 2008. – 148 с.
2. Вихрова, О. Г. Анализ показателей качества сети LTE с помощью систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом и случайными требованиями / О. Г. Вихрова, Э. С. Сопин. – Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2015. – Т. 2. № 11. – С. 185–191.
3. Morozov, E. V. Speed-up estimation of a system with random volume customers / E. V. Morozov, L. V. Potakhina. – Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы 19-й международной научной конференции, 2016. – С. 334–336.
4. Наумов, В. А. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками / В. А. Наумов, К. Е. Самуйлов, А. К. Самуйлов. – Автоматика и телемеханика, 2016. – № 8. – С. 125–135.
5. Печинкин, А. В. Система M/G/1/n с дисциплиной LIFO и ограничением на суммарный объем требований / А. В. Печинкин. – Автоматика и телемеханика, 1998. – № 4. – С. 106–116.
6. Печинкин, А. В. Система обслуживания с дисциплиной LIFO и ограничением на суммарный объем требований / А. В. Печинкин. – Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика, 1996. – № 2. – С. 85–99.
7. Печинкин, А. В. Система  $M^k/G/1/n$  с дисциплиной LIFO с прерыванием и ограничением на суммарный объем требований / А. В. Печинкин, О. А. Печинкина. – Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика, 1996. – № 1. – С. 86–93.

8. Позняк, Р. И. Определение характеристик суммарного объема требований в однолинейных системах обслуживания с ограничениями / Р. И. Позняк, В. В. Ревинский, А. М. Старовойтов, О. М. Тихоненко. – Автоматика и телемеханика, 1990. – № 11. – С. 182–186.
9. Тихоненко, О. М. Системы обслуживания требований случайной длины с ограничениями / О. М. Тихоненко. – Автоматика и телемеханика, 1991. – № 10. – С. 126–134.
10. Тихоненко, О. М. Распределение суммарного объема в однолинейной системе с экспоненциальным обслуживанием и рекуррентным входным потоком / О. М. Тихоненко. – Автоматика и телемеханика, 1999. – № 7. – С. 80–84.
11. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в системах обработки информации / О. М. Тихоненко. – Минск: Университетское, 1990. – 191 с.
12. Тихоненко, О. М. Система обслуживания с разделением процессора и ограниченным объемом памяти, управляемая механизмом AQM / О. М. Тихоненко, В. М. Кемпа. – Автоматика и телемеханика, 2015. – № 10. – С. 90–105.
13. Тихоненко, О. М. Анализ систем обслуживания требований случайной длины при ограниченном суммарном объеме / О. М. Тихоненко, К. Г. Климович. – Проблемы передачи информации, 2001. – Т. 37. № 1. – С. 78–88.
14. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М. : Техносфера, 2003. – 506 с.
15. Матальцкий, М. А. Теория массового обслуживания и ее применения / М. А. Матальцкий, О. М. Тихоненко, А. В. Паньков. – Гродно : ГрГУ, 2008. – 771 с.

16. Моисеев, А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.
17. Лисовская, Е. Ю. Асимптотический анализ системы  $MPP|GI|_{\infty}$  с обслуживанием требований случайного объема / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева. – Труды Томского государственного университета. – Т. 299. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Международной молодежной научной конференции. Томск, 20-21 мая 2016 г. / под общ. ред. И. С. Шмырина. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – С. 99–104.
18. Лисовская, Е. Ю. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим  $MPP$ -поток / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева. – Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции им. А. Ф. Терпугова (12-16 сентября 2016 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. – Ч. 1. – С. 77–82.
19. Лисовская, Е. Ю. Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева. – Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой международной научной конференции, 21–25 нояб. 2016 г.: в 3 т.; под общ. ред. В. М. Вишневого и К. Е. Самуйлова – М.: РУДН, 2016. – С. 313–325.
20. Ефросинин, Д. В. Методы анализа управляемых динамических систем: дис...доктора физ.-мат. наук: 05.13.01 / Москва, 2013. – 332 с.
21. Галилейская, А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной системы массового обслуживания с  $MPP$  входящим потоком

- требований случайного объема / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Труды Томского государственного университета. – Т. 301. Серия физико-математическая : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы V Международной молодежной научной конференции. Томск, 19–20 мая 2017 г. – С. 92–97.
22. Галилейская, А. А. Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в двухфазной системе массового обслуживания с простейшим входящим потоком / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2017 : Математика. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. 16–20 апреля 2017 г. – С. 105.
23. Галилейская, А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим простейшим потоком / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Вычислительная и прикладная математика 2017 (ВПМ 2017), Новосибирск, Академгородок, 25-30 июня 2017 г. – С. 152.
24. Галилейская, А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной СМО с ММРР входящим потоком требований случайного объема / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (29 сентября – 3 октября 2017 г.). – Томск: Изд-во НТЛ, 2017. – Ч. 1. – С. 77–82.
25. Лисовская, Е. Ю. Моделирование процессов передачи данных с помощью СМО требований случайного объема / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева, А. А. Галилейская. – Материалы XVIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию,

- г. Иркутск, Россия, 21-25 августа 2017 г. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017г. – С. 80–81.
26. Галилейская, А. А. Исследование многофазной ресурсной СМО с ММРР входящим потоком / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева. – Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (АРТСТ–2017) : материалы Международной научной конференции, Россия, Москва. 23-27 октября 2017 г. – С. 80–82.
27. Галилейская, А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим простейшим потоком / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Труды Международной конференции «Марчуковские научные чтения – 2017», 25 июня – 14 июля 2017 г. Новосибирск: [б. и.], 2017. – С. 186–190.
28. Галилейская, А. А. Асимптотический анализ многофазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с входящим ММРР потоком / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика (в печати).
29. Галилейская, А. А. Стационарное асимптотическое распределение вероятностей числа заявок и объемов занятых ресурсов в неоднородной ресурсной бесконечнолинейной СМО с входящим ММРР-потоком / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VI Международной молодежной научной конференции. (в печати).
30. Галилейская, А. А. Суммарный объем занятого ресурса в ресурсной системе массового обслуживания  $GI^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$  с  $n$  типами заявок /

А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская. – Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции им. А. Ф. Терпугова (в печати).

31. Галилейская, А. А. Гауссовская аппроксимация распределения вероятностей объемов занятых ресурсов в неоднородной бесконечнолинейной системе массового обслуживания с входящим ММРР-поток / А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева. – VIII Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А. М. Богомолова (в печати).

## **Exactus Like - поиск текстовых заимствований**

Обработан файл:  
Диплом 2018.docx.

Год публикации: 2018.

---

**Оценка оригинальности  
документа - 87.31%**

**Процент условно корректных  
заимствований - 0.32%**

**Процент некорректных  
заимствований - 12.37%**

**Просмотр заимствований в  
документе**

Время выполнения: 33 с.

Процент оригинальности документа  
- 87.31%

*Oh -  
верно*