Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет
Кафедра квантовой теории поля

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
главный научный сотрудник,
доцент
________ О.Н. Чайковская
«20» мая 2017 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ГРАФЕНЕ

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки 03.03.02 – Физика

Лазаренко Георгий Юрьевич

Руководитель ВКР
д-р физ.-мат.наук, доцент
________ П.О. Казинский
подпись
«24» мая 2017 г.

Автор работы
студент группы № 0534
________ Г.Ю. Лазаренко
подпись

Томск-2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»
Физический факультет
Кафедра квантовой теории поля

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой КТП
______В.Г. Багров
«_20_»_09_2016г.

ЗАДАНИЕ

по подготовке ВКР _бакалавра_

специалиста, бакалавра, магистра нужное вписать (напечатать)

студенту _Лазаренко Георгию Юрьевичу_ группы № _0534_

фамилия, имя, отчество

1.Тема ВКР работы _Квазиклассическое описание излучения электрона в графене_

2.Срок сдачи студентом выполненной ВКР:

а) на кафедре _1 июня 2017 года_

б) в ГЭК _9 июня 2017 года_

3.Исходные данные к работе _Получить спектрально угловое распределение электрона в графене_

цели и задачи исследования,

В работе используется квазиклассический подход к описанию излучения создаваемого электроном находящемся в графене

объекты и методы исследования,

Сравнение с уже полученными результатами и экспериментальными данными

методы оценки достоверности результатов

4.Краткое содержание работы _Динамика движения в постоянном и однородном электромагнитном поле, динамика в поле плоской электромагнитной волне , излучение создаваемое частицей с линейным законом дисперсии_

дать перечень основных разделов,

Срок выполнения до 01.06.2017 года и получение выражений для траектории частицы, а так же спектрально угловое распределение создаваемое электроном в графене

сроки их выполнения и ожидаемые результаты

5.Указать предприятие, организацию по заданию которого выполняется работа _Кафедра квантовой теории поля ФФ ТГУ_

6.Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей) _Презентация к докладу_

7.Дата выдачи задания «_20_» _09_ 2016 г.

Руководитель ВКР

доцент, ФФ ТГУ ______ Кудрявцев П.О.

должность, место работы *подпись* *инициалы, фамилия*

Задание принял к исполнению _20-09-16._

дата, подпись студента

Содержание

1 Введение

Поведение массивных заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле и создаваемое ими излучение изучалось многими авторами, как в уже ставших классическими учебниках [1], [8], [18], [22], так и в статьях [5], [6], [23]. Также есть исследования, посвящённые излучению безмассовых заряженных частиц [3].

Целью данной работы является исследование поведения массивной заряженной частицы с линейным законом дисперсии. Подобная ситуация имеет место для электрона, находящегося в графене, при низких энергиях [10].

Данная тема исследования интересна тем, что рассматриваемая частица имеет постоянный модуль скорости. Помимо этого, за счёт линейного закона дисперсии отсутствует запрещенная зона между валентной зоной и зоной проводимости, что делает возможным переход электрона в дырку при наличии электрического поля [13].

В работе была рассмотрена динамика заряженной частицы с линейным законом дисперсии во внешнем электромагнитном поле и создаваемое ей излучение. Для вывода уравнений движения использовалась модель, описываемая функционалом действия (1). Были предложены два подхода к решению уравнения движения (5) без учёта реакции излучения. Также в работе обсуждаются общие свойства, характерные для частиц с линейным законом дисперсии, не имеющие аналога в модели классической заряженной массивной частицы.

Результатом работы является получение решений уравнений движения (3) – (6), описывающих движение заряженной частицы в плоскости с постоянным модулем скорости, в наиболее физически интересных случаях, а именно, в постоянном электромагнитном поле (4) и в поле плоской электромагнитной волны 1. Для данных решений получены условия, при которых будет происходить переход частицы в античастицу при движении в постоянном поле 7, 8, 9 и в поле монохроматической волны 5. Был предложен метод построения решения для античастицы на основе решения для частицы. Также были получены явные выражения для спектрально углового распределения в трёх режимах в постоянном поле.

2 Графен и его особенности

Углерод – один из наиболее важных химических элементов, являющийся основой всей органической химии. Разнообразие связей, которые образует углерод, приводит к разнообразию различных структур систем на углеродной основе, а также к разнообразию их физических свойств, которые являются, по большей части, результатом размерности этих структур. Среди систем только с атомом углерода, графен – двухмерный аллотроп углерода – играет важную роль, так как является основой для понимания электронных свойств в других аллотропах.

Фуллерены – это молекулы, где атомы углерода расположены сферически. Следовательно, с физической точки зрения, они являются нуль-мерными объектами с дискретными энергетическими состояниями. Фуллерены могут быть получены из графена с введением пятиугольников, и, следовательно, они могут рассматриваться как завёрнутый графен. Углеродные нанотрубки также получаются из графена путём прокатки вдоль заданного направления с повторным включением углеродных связей. Следовательно, они состоят только из шестиугольников и могут рассматриваться в качестве одномерных объектов. Графит – трехмерный аллотроп углерода стал широко известен человечеству после изобретения карандаша в 1564-м году. Возможность его использования в качестве инструмента для письма является следствием того, что графит состоит из стопок графеновых слоёв, слабо связанных силами Ван-дер-Ваальса. Поэтому, когда человек нажимает на лист бумаги карандашом, на самом деле он производит графеновые стопки, и где-то среди них могут отделяться графеновые слои. Хотя графен и является источником всех этих разнообразных аллотропов, и был, вероятно, произведён каждый раз, когда кто-то пишет карандашом, но экспериментально не был получен вплоть до 2004-го года. Причина в том, что, во-первых, никто не мог предположить, что графен существует в чистом виде, и, во-вторых, тогда даже не существовало экспериментальных методов обнаружения в обломках карандаша макроскопической области слоя толщиной в один атом. Он в итоге был обнаружен из-за тонкого оптического эффекта, который он создавал на умело подобранной подложке из SiO_2, что позволяет наблюдать его в обычном микроскопе [11]. Хотя графен является относительно простым, его обнаружение было непростой задачей.

В 2004-м году русскими учёными Андреем Гейманом и Константином Новосёловым была опубликована работа в журнале Science [12], где сообщалось о получении графена на подложке окисленного кремния. Таким образом, стабилизация двумерной плёнки достигалась благодаря наличию связи с тонким слоем диэлектрика SiO_2 по аналогии с тонкими плёнками, выращенными с помощью молекулярно-пучковой эпитаксии (МПЭ). Впервые были измерены проводимость, эффект Шубникова–де Гааза, эффект Холла для образцов, состоящих из плёнок углерода атомарной толщины.

Графен – двумерная аллотпопная модификация углерода, образованная слоем атомов углерода толщиной в один атом, находящихся в sp_3 – гибридизации и соединённых посредством σ- и π-связей в гексагональную двумерную кристаллическую решетку. Его теоретическое исследование началось задолго до получения реальных образцов материала, поскольку из него можно собрать трехмерный кристалл графита. Таким образом, графен является базой для построения теории этого кристалла и других аллотропов углерода. Он является полуметаллом, и, как было показано в 1947-м году Ф.Уоллесом [13], в зонной структуре графена также отсутствует запрещенная зона, причем в точках соприкосновения валентной зоны и зоны проводимости энергетический спектр электронов и дырок линеен как функция волнового вектора. Такого рода спектром обладают безмассовые фотоны и ультрарелятивистские частицы, а также нейтрино. Поэтому говорят, что эффективная масса электронов и дырок в нем вблизи точки соприкосновения зон равна нулю. Но здесь стоит заметить, что, несмотря на сходство фотонов и безмассовых носителей, у графена есть несколько существенных отличий, делающих его носители уникальными по своей физической природе, а именно: электроны и дырки представляют собой фермионы, и они заряжены. В настоящее время аналогов для этих безмассовых заряженных фермионов среди известных элементарных частиц нет. Несмотря на такие специфические особенности, до 2005-го года экспериментального подтверждения этих выводов не было, поскольку графен не удавалось получить.

3 Основные формулы

В настоящей работе греческие индексы пробегают значения 0,1,2, а греческие 0,1,2,3. Для краткости записей, выбрана система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка выбраны равными единице: $c = 1$ $\hbar = 1$.

Рассмотрим модель заряженой частицы с зарядом e, имеющей линейный закон дисперсии, и взаимодействующей с электромагнитным полем A_ν, которая задаётся функционалом действия $S[x, p, A, \lambda]$ следующего вида:

$$S[x, p, A, \lambda] = \int d\tau [(p_\mu + eA_\mu)\dot{x}^\mu - \frac{\lambda}{2} p_\mu p_\nu \tilde{\eta}^{\mu\nu}] - \frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu} := \partial_{[\mu} A_{\nu]}$ – тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

, $\tilde{\eta}^{\mu\nu} := diag(a, -1, -1, -1)$ – эта метрика обеспечивает постоянный модуль скорость частицы

$v = \sqrt{(\frac{dx^1}{dx^0})^2 + (\frac{dx^2}{dx^0})^2} = a^{-1/2}$ и $\lambda(\tau)$ – функция смысл, которой станет ясен позднее.

Примером физической реализации данной модели является электрон при низких энергиях в монослое графена и схожих наноструктурах . В графене модуль скорости электрона равен скорости Ферми $v_F \simeq 10^{-3}$. Справедливость линейного закона дисперсии имеет ограничения по энергии $E \leq 0,1eV$.

После варьирования функционала (1) получим следующую систему уравнений:

$$p_\mu p_\nu \tilde{\eta}^{\mu\nu} = 0; \tag{3}$$

$$\dot{x}^\mu - \lambda p_\nu \tilde{\eta}^{\mu\nu} = 0; \tag{4}$$

$$\dot{p}_\mu = eF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu; \tag{5}$$

$$e\int d\tau \dot{x}^{\mu}\delta(x-x(\tau)) = \frac{1}{4\pi}\partial_{\nu}F^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Отметим, что в силу симметрии уравнений Лоренца, по второй теореме Нётер, между уравнениями движения имеется связь:

$$\dot{p}_{\mu}p_{\nu}\tilde{\eta}^{\mu\nu} = 0,$$

проинтегрировав которую, получим первое из выведенных путем вариации действия уравнений. Таким образом, эта связь не приносит в систему новой информации и связывает лишь начальные импульсы заряженной частицы.

Будем предполагать, что токи в среде отсутствуют:

$$j^{\mu} := e\int d\tau \dot{x}^{\mu}\delta(x-x(\tau)),$$

а также наложим на 4-потенциал калибровку Лоренца: $\partial_{\nu}A^{\nu} = 0$. Это приводит к тому, что электромагнитное поле должно удовлетворять волновому уравнению $\partial_{\mu}\partial^{\mu}A_{\mu} = 0$, а значит оно может быть только электромагнитной волной, в предельном своём случае дающей постоянное поле.

Информацию, необходимую для решения системы уравнений несут только (4) и (5) уравнения, представляющие собой восемь уравнений на девять неизвестных. Мы приходим к тому, что рассматриваемая нами система не может быть однозначно решена без введения дополнительного условия. В качестве такого условия разумно взять $\dot{x}^0 = 1$, т.е. выбрать в качестве системы отчёта времени лабораторное время. Но можно поступить иным образом, а именно, воспользовавшись тем, что уравнения допускают переход от произвольного временного параметра τ к параметру t :

$$t := m\int \lambda(\tau)d\tau \tag{7}$$

В терминах времени t уравнения имеют тот же вид, что и уравнения для обычной частицы с зарядом e и массой m

$$mx'^{\mu} = p_{\nu}\tilde{\eta}^{\mu\nu}, \tag{8}$$

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} m x''^{\nu} = e F_{\mu\nu} x'^{\nu}, \tag{9}$$

где штрихом обозначена производная по t. Переход от лабораторного времени к параметру t по формуле (8) возможен лишь тогда, когда функция $\lambda(\tau)$ не обращается в ноль. Что, как мы увидим, имеет место быть. Заметим, что при учёте реакции излучения данное преобразование также возможно.

Будем изменять длины в единицах комптоновской длины волны $l_C := \hbar/mc$. Для этого необходимо сделать преобразование

$$x^{\mu} \to l_C x^{\mu}, \qquad t \to l_C t. \tag{10}$$

Напряжённости поля будем измерять в единицах швингеровского поля E_0, а энергии – в энергиях покоя электрона,

$$l_C \approx 3.86 \times 10^{-11} cm, \quad m \approx 5.11 \times 10^{5} eV, \quad E_0 = \frac{m^2}{|e|\hbar} \approx 4.41 \times 10^{13} G. \tag{11}$$

В этой системе единиц уравнение (9) примет вид:

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} x''^{\nu} = \bar{F}_{\mu\nu} x'^{\nu}, \bar{F}_{\mu\nu} := e\hbar m^{-2} F_{\mu\nu} = sgn(e) F_{\mu\nu}/E_0, \tag{12}$$

а величины $x^{\mu}, t, \bar{F}_{\mu\nu}$ безразмерны.

Потребуем чтобы электрон двигался лишь в плоскости графена, для чего ограничим тензор электромагнитного поля на эту плоскость:

$$x^{\mu} = \begin{cases} x^{a} & \text{если } \mu = 0, 1, 2 \\ const & \text{если } \mu = 3 \end{cases}$$

$$\phi_{ab} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{a}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{b}} \bar{F}_{\mu\nu}, \quad \tilde{\eta}_{ab} := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{a}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{b}} \tilde{\eta}_{\mu\nu}, \tag{13}$$

после чего уравнение (12) примет следующий вид:

$$\tilde{\eta}_{ab} x''^{a} = \phi_{ab} x'^{b}. \tag{14}$$

В следующих разделах будут получены и исследованы решения данного уравнения (14), а также получены формулы, описывающие создаваемое частицей излучение с использованием соответствующих решений.

4 Динамика движения в постоянном электромагнитном поле

В случае постоянного электромагнитного поля $\phi_{ab} = const$, для решения уравнений удобно совершить поворот в плоскости графена такой, чтобы одна из компонент напряжённости электрического поля обратилась в ноль. Пусть это будет E_y, после чего проекция тензора электромагнитного поля будет иметь всего дне независимые и отличные от нуля компоненты:

$$\phi_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & -H \\ 0 & H & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Общим решением системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (14) с тензором электромагнитного поля (15) будет:

$$p_0 = \frac{p_0(0)}{1-\beta^2}\left[\cos\psi\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{sh}\,\hat{t} + (1-\beta\sin\psi)\,\mathrm{ch}\,\hat{t} - \beta^2 + \beta\sin\psi\right] \tag{16}$$

$$p_1 = p_0(0)v_F\left[\cos\psi\,\mathrm{sh}\,\hat{t} - \frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{sh}\,\hat{t}\right] \tag{17}$$

$$p_2 = \frac{p_0(0)v_F}{1-\beta^2}\left[\sqrt{1-\beta^2}\beta\cos\psi\,\mathrm{sh}\,\hat{t} + \beta(1-\beta\sin\psi)\,\mathrm{ch}\,\hat{t} - \beta + \sin\psi\right] \tag{18}$$

$$p_3 = 0$$

$$x^0 = x^0(0) + \frac{h}{v_F(1-\beta^2)}\left[\cos\psi(\mathrm{sh}\,\hat{t} - 1) + \frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{sh}\,\hat{t} - \right.$$
$$\left. - \frac{\beta^2 - \beta\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\hat{t}\right] \tag{20}$$

$$x^1 = x^1(0) + \frac{h}{1-\beta^2}\left[(1-\beta\sin\psi)(\mathrm{ch}\,\hat{t} - 1) - \sqrt{1-\beta^2}\cos\psi\,\mathrm{sh}\,\hat{t}\right] \tag{21}$$

$$x^2 = x^2(0) + \frac{h}{1-\beta^2}\left[\frac{\beta - \sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\hat{t} - \beta\cos\psi(\operatorname{ch}\hat{t} - 1) - \frac{\beta - \beta^2\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{sh}\hat{t}\right] \tag{22}$$

$$x^3 = x^3(0), \tag{23}$$

где $\hat{t} := \sqrt{E^2 v_F^{-2} - H^2} t$ – безразмерный параметр вдоль траектории, $h = p_0(0)/E$ –параметр, характеризующий силу поля, $\beta = v_F H/E$, $= p_2(0)/p_1(0)$ и ψ – угол под которым в начальный момент времени электрон влетает в поле.

Как уже говорилось ранее, можно решить уравнения (14) другим способом, а именно наложив дополнительное условие $\dot{x}^0 = 1$. Помимо этого, стоит воспользоваться тем фактом, что частица движется с постоянной скоростью:

$$v = \sqrt{(\frac{dx^1}{dx^0})^2 + (\frac{dx^2}{dx^0})^2}$$

и, следовательно, её компоненты в плоскости графена могут быть представлены следующим образом:

$$v_x = v_F\cos\varphi, \quad v_y = v_F\sin\varphi \tag{24}$$

Подставляя данное выражение в имеющиеся уравнения, придём к уравнению на угол φ между осью X и направлением движения заряда. Решив которое получим траекторию в фазовом пространстве следующего вида:

$$p_0 = p_0(0)\frac{\beta + \sin\varphi_0}{\beta + \sin\varphi} \tag{25}$$

$$p_1 = -v_F^{-1} p_0(0)\cos\varphi\frac{\beta + \sin\varphi_0}{\beta + \sin\varphi} \tag{26}$$

$$p_2 = -v_F^{-1} p_0(0)\sin\varphi\frac{\beta + \sin\varphi_0}{\beta + \sin\varphi} \tag{27}$$

$$x^0 = x^0(0) + \frac{h(\beta + \sin\varphi_0)}{v_F(1-\beta^2)}\left[\frac{\cos\varphi}{\beta + \sin\varphi} - \frac{\cos\varphi_0}{\beta + \sin\varphi_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta\varphi_0/2) + 1 + \sqrt{1-\beta^2}}{\beta\varphi_0/2) + 1 - \sqrt{1-\beta^2}}\right) + \right.$$

$$+\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta\varphi/2)+1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\varphi/2)+1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)\Bigg] \qquad (28)$$

$$x^1 = x^1(0) + h(\frac{\beta+\sin\varphi_0}{\beta+\sin\varphi} - 1) \qquad (29)$$

$$x^2 = x^2(0) + h\frac{\beta+\sin\varphi_0}{1-\beta^2}\Bigg[\frac{\beta\cos\varphi_0}{\beta+\sin\varphi_0} - \frac{\beta\cos\varphi}{\beta+\sin\varphi} +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta\varphi_0/2)+1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\varphi_0/2)+1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta\varphi/2)+1+\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\varphi/2)+1-\sqrt{1-\beta^2}}\right)\Bigg] \qquad (30)$$

$$\lambda = \frac{v_F^2}{p_0(0)}\frac{\beta+\sin\varphi}{\beta+\sin\varphi_0}, \qquad (31)$$

где $\varphi_0 = \arcsin(-v_F p_2(0)/p_0(0))$, h и β - такие же, как в прошлом решении.

Выражения (16) – (23) и (25) – (31) аналитичны относительно параметра β. Заметим, что при $p_0(0) = 0$, несмотря на присутствие поля, частица будет покоится. Эта аномалия связана с тем, что в данной точке модель не применима, т.к. свободная частица, обладающая нулевой энергией не может при этом обладать отличной от нуля скоростью. Влияние электрического поля на частицу значительно сильнее, чем магнитного, и поэтому присутствие даже слабого электрического поля сильно меняет динамику. Как видно из траектории (16) – (23), динамика частицы кардинальным образом зависит от параметра β и, в зависимости от его значения, имеет место три режима: когда $|\beta| > 1$ – сильно доминирует магнитное поле, когда $|\beta| = 1$ получаем аналог скрещенных полей и в случае, когда $|\beta| < 1$, – доминирует электрическое поле. В дальнейшем, при расчёте создаваемого излучения зарядом эти случаи будут рассматриваться отдельно.

Переход между двумя решениями осуществляется естественным способом через связь лабораторного времени с параметром

t. Несмотря на то, что начальные данные, хотя и имеют одинаковые обозначения, но, вообще говоря, не равны друг другу. Поэтому можно воспользоваться произволом в определении параметра t и тем самым сделать их одинаковыми:

$$t(\tau) := m \int_0^\tau \lambda(\tau')d\tau'. \tag{32}$$

Выражение (49) обеспечивает нам то, что начало отсчёта в решениях одно и то же.

Стоит отметить, что на решениях разность скоростей $\dot{x}^0 - \dot{x}^2$ может быть не просто равной нулю, как для частицы двигающейся со скоростью света, а ещё и принимать отрицательные значения. Данную особенность, которая не может иметь места для массивной частицы, можно интерпретировать, согласно Фейнмановской интерпретации античастиц [17], как переход электрона в позитрон. С точки зрения классической механики данный процесс невозможен, но мы имеем частицу с линейным законом дисперсии, за счёт чего отсутствует энергетическая щель между положительными и отрицательными значениями энергии. Поэтому под действием внешнего электрического поля такой процесс оказывается возможным.

$$\dot{x}^0 - \dot{x}^2 = m^2\lambda^2(\tau)(x'^0(t(\tau)) - x'^2(t(\tau))) \tag{33}$$

Вопрос о том, при каких значениях параметров это становится возможным, будет рассматриваться позже в разделах 7, 8, 9. Данный эффект возникает под действием плоской волны и соответственно рассматривается в разделе 5. Отметим, что это существенно влияет на создаваемое зарядом излучение, и поэтому эффект может быть легко наблюдаем в эксперименте.

5 Динамика движения в поле плоской волны

Теперь рассмотрим случай, когда поле задаётся 4-потенциалом следующего вида $A^\mu = A^\mu(x_-)$ и наложим на него калибровку Кулона $\partial_\mu A^\mu = 0$, где $x_- = x^\mu n^\nu \eta^{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ и n^μ - волновой 4-вектор электромагнитной волны. Он светоподобный $n^\mu n_\mu = 0$ и его трехмерная часть совпадает по направлению с распространением волны в пространстве. При решении будет удобно воспользоваться параметризацией (49). Для упрощения поиска решения уравнений движения, сделаем поворот в плоскости графена так, чтобы обратить в ноль одну из компонент n^μ. В качестве такой компоненты выберем n^1 и после перехода к новой системе отсчёта обозначения оставим прежними. После сделанных преобразований, упрощающих решение, и учета условий на выбранный нами потенциал, ограниченный тензор ϕ_{ab} имеет вид:

$$\phi_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & n_0 A' & 0 \\ -n_0 A' & 0 & n_2 A' \\ 0 & -n_2 A' & 0 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где $A' := \frac{\partial A_1}{\partial x_-}$. Уравнения движения запишутся в виде:

$$\tilde{\eta}_{ab} \ddot{x}^b = \phi_{ac} \dot{x}^c. \tag{35}$$

Для первой компоненты четырёхмерного вектора x^μ уравнение сразу можно проинтегрировать дважды в квадратурах:

$$x^1 = \int dx_- \dot{x}_-^{-1} (A(x_-) + C_1) dx_- + C_2. \tag{36}$$

Оказывается невозможным решение уравнений относительно всех координат в параметризации t. Чтобы получить явный вид выражений для x^0, x^2, скомбинируем уравнения так, чтобы получить уравнение второго порядка на x_-, в результате чего получим следующее уравнение:

$$\ddot{x}_- = (a(n^0)^2 - (n^2)^2)(A - C_1)A' \tag{37}$$

Выражение (81) можно проинтегрировать один раз по x_-, дополнительно не конкретизировав вид 4-потенциала A^μ:

$$\dot{x}_-^2 = (a(n^0)^2 - (n^2)^2)(A^2 - 2C_1 A + C_3). \tag{38}$$

В левой части выражения (38) стоит квадрат строго положительной величины так же, как и для частицы $\dot{x}_- > 0$. Преобразовав и проинтегрировав (38), получим зависимость параметра t от нового параметра x_-:

$$t = (a(n^0)^2 - (n^2)^2)^{-1/2} \int \frac{dx_-}{[A^2 - 2C_1 A + C_3]^{1/2}} + C_4 \tag{39}$$

5.1 Плоская монохроматическая волна

Для дальнейшего рассмотрения возьмём конкретный вид потенциала $A^\mu = A^\mu \sin(\Omega x_- + \varphi)$, φ– начальная фаза волны. Дополнительно введем удобное обозначение $b = n^2/n^0$. Получим явные выражения траектории в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} p_0 = \frac{b}{a - b^2}\Bigg[&\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_2(0) - bp_0(0) + \\ &+ \frac{1}{b}\Bigg((a - b^2)\left[\frac{E_{0x}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_1(0)\right]^2 + \\ &+ a\left[\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_2(0) - bp_0(0)\right]^2\Bigg)^{1/2}\Bigg], \end{aligned} \tag{40}$$

$$p_1 = p_1(0) - \frac{E_{0x}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi), \tag{41}$$

$$\begin{aligned} p_2 = -\frac{a}{a - b^2}\Bigg[&\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_2(0) - bp_0(0) + \\ &+ \frac{b}{a}\Bigg((a - b^2)\left[\frac{E_{0x}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_1(0)\right]^2 + \\ &+ a\left[\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_2(0) - bp_0(0)\right]^2\Bigg)^{1/2}\Bigg], \end{aligned} \tag{42}$$

$$x^0 = \frac{ab}{(a - b^2)\Omega}\left[\frac{\Omega}{b}x_- + Z(x_-)\right], \tag{43}$$

$$x^1 = \frac{1}{\Omega} Q(x_-), \tag{44}$$

$$x^2 = \frac{a}{(a-b^2)\Omega} \Big[\Omega b x_- + Z(x_-) \Big]. \tag{45}$$

Здесь для краткости записи были использованы следующие обозначения:

$$Q(x_-) := \int_{\varphi}^{\Omega x_- + \varphi} \frac{(\frac{E_{0x}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_1(0)) d(\Omega x_- + \varphi)}{W}, \tag{46}$$

$$Z(x_-) := \int_{\varphi}^{\Omega x_- + \varphi} (\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - \\ - p_2(0) - b p_0(0)) \frac{d(\Omega x_- + \varphi)}{W}, \tag{47}$$

$$W := \Bigg((a-b^2) \left[\frac{E_{0x}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_1(0) \right]^2 + \\ + a \left[\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_2(0) - b p_0(0) \right]^2 \Bigg)^{1/2}. \tag{48}$$

Введённые выше интегралы берутся и выражаются через эллиптические функции, а также тригонометрические функции при любых значениях их аргументов и параметров.

Рассматриваемый вид потенциала является приближённым к реальной ситуации [9], но хорошо описывает реальные лазеры.

Так как линейный закон дисперсии имеет место для электрона в графене лишь при энергиях меньших p_{0max}, это даёт нам ограничения на возможные значения параметров. В силу того, что выражение (40) периодично по x_-, ограничения на данный параметр можно избежать, подобрав нужным образом поля. Простое условие получается в случае, когда $b = 0$, и имеет следующий вид:

$$\left| \frac{E_{0x}\sin\psi - E_{0y}\cos\psi}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \right| > \frac{p_{0max} v_F}{p_0(0)}. \tag{49}$$

5.2 Анализ одномерной подзадачи

При решении уравнений движения оказалось, что невозможно решить их относительно координат как функций параметра t. Несмотря на это, удаётся получить решение в виде квадратур: то есть не конкретизируя вид потенциала в предположении, что он представляет из себя достаточно хорошую функцию от x_-, для того, чтобы в полученных выражениях интегралы брались. Основной характер динамики рассматриваемой частицы можно узнать, построив фазовый портрет данной подсистемы. Рассмотрим данную подзадачу для 4-потенциала вида $A^\mu = A^\mu \sin(\Omega x_- + \varphi)$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_- = &\frac{1}{2\Omega} a(E_{0x}^2 + E_{0y}^2) - b^2 E_{0x}^2 \sin 2(\Omega x_- + \varphi) - \\ &- \Bigg(\frac{1}{\Omega} a(E_{0x}^2 + E_{0y}^2) - b^2 E_{0x}^2 \sin\varphi + (a - b^2) E_{0x} p_1(0) + \\ &+ a E_{0y}(p_2(0) + b p_0(0))\Bigg) \cos(\Omega x_- + \varphi),\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_- = &\Bigg((a - b^2)\left[\frac{E_{0x}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_1(0)\right]^2 + \\ &+ a\left[\frac{E_{0y}}{\Omega}(\sin(\Omega x_- + \varphi) - \sin\varphi) - p_2(0) - b p_0(0)\right]^2\Bigg)^{1/2}\Bigg].\end{aligned} \tag{51}$$

Где $\dot{x}_- := \dot{x}^0 - b\dot{x}^2$, а b есть величина, обратная фазовой скорости падающей монохроматической волны и определяющая угол, под которым она падает к плоскости графена. Для частицы должно выполняться условие $\dot{x}_- > 0$, а для античастицы – $\dot{x}_- < 0$. Выражение (51) при определённых значениях параметров может обращаться в ноль, что можно интерпретировать как переход частицы в античастицу. Если он возможен, то данный процесс будет периодическим с периодом $4\pi/\Omega$. Условия для реализации описанной ситуации при $b = 0$ имеют следующий вид:

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{E_x}{E_y},$$

$$x_- = \Omega^{-1}\arcsin(h_x^{-1}\cos\psi + \sin\varphi) - \Omega^{-1}\varphi + 2\pi n, \tag{53}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Данные условия согласуются с условием (49). Таким образом, в случае, когда волна направлена перпендикулярно к плоскости графена переход электрона в дырку возможен. В общем же случае, условия $p_0 = 0$ и $p_0 < p_{0max}$ не противоречат друг другу и следовательно данный переход возможен при других направлениях падения волны.

6 Излучение заряженной частицы

Поле произвольно движущегося точечного заряда описывается 4-потенциалом Лиенара-Вихерта:

$$A^\mu = -\frac{ev^\mu}{\tilde{r}_\nu v^\nu}, \quad \tilde{r}_\mu \tilde{r}^\mu = 0, \tag{54}$$

где $v^\mu = dr^\mu/d\tau$, $\tilde{r}^\mu = r^\mu - R^\mu$, R^μ-4-вектор, определяющий положение наблюдателя, а r^μ- 4-вектор положения заряда [1].

Любой заряд, движущийся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Одной из важнейших характеристик излучения является спектрально-угловое распределение для одной заряженной частицы, усреднённое по поляризациям фотонов:

$$d\mathcal{E}(\mathbf{k}) = |\mathbf{E}(\mathbf{k})|^2 \frac{R^2 d\mathbf{k}}{4\pi^2 k_0^2} = -e^2 j_\mu^*(\mathbf{k}) j^\mu(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^2}, \tag{55}$$

где

$$j^\mu(\mathbf{k}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{x}^\mu e^{-ik_\nu x^\nu(\tau)} - \frac{i\dot{x}^\mu}{k_\nu \dot{x}^\nu} e^{-ik_\nu x^\nu(\tau)} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad k_\mu j^\mu(\mathbf{k}) = 0. \tag{56}$$

В данных формулах $k_\mu = \omega(1, \mathbf{k}/\omega)$ – это четырёхмерный волновой вектор фотона, который является светоподобным, т.е. $k_\mu k_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$, а $\mathbf{k}/\omega$ – единичный вектор, вдоль которого распространяется излучение в пространстве. Проекции напряженности электрического поля излучения, создаваемого зарядом, в волновой зоне имеют вид:

$$E_\alpha(\mathbf{k}) = -iek_0 \frac{e^{-ik_0 R}}{R} b^\mu_{(\alpha)} j_\mu(\mathbf{k}), \quad \alpha = 1, 2, \tag{57}$$

где $b^\mu_{(\alpha)}$ – физические векторы поляризации фотона, а R – расстояние от точки наблюдения до источника излучения фотона. Для анализа излучения удобно использовать параметры Стокса:

$$\xi_1 = 2\frac{\mathrm{Re}(E_1 E_2^*)}{|\mathbf{E}|^2}, \quad \xi_2 = 2\frac{\mathrm{Im}(E_1 E_2^*)}{|\mathbf{E}|^2}, \quad \xi_3 = \frac{|E_1|^2 - |E_2|^2}{|\mathbf{E}|^2}. \tag{58}$$

Из них можно получить удобные выражения в расчётах поляризации излучения:

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1 - \xi_2^2 = \frac{|\mathbf{E}^2|^2}{|\mathbf{E}|^4} = \frac{|j_\mu j^\mu|^2}{(j_\nu^* j^\nu)^2}.,$$

$\xi_2 = \pm 1$. При линейной поляризации электромагнитной волны $\xi_2 = 0$, причём оставшиеся два параметра выражаются через угол θ между плоскостью поляризации и осью с ортом $\mathbf{b}_{(1)}$

$$\xi_1 = \sin(2\theta), \quad \xi_3 = \cos(2\theta).$$

При исследовании изучения, создаваемого заряженной частицей, влетающей в электромагнитное поле, особый интерес представляют ситуации, когда в (56) доминирует одно из двух слагаемых. Первое из них отвечает за излучение, создаваемое зарядом, находящимся в поле, а второе отвечает за ту часть излучения, которая получается при влете и вылете из поля. Если преобладает внеинтегральное слагаемое, то говорят, что излучение ещё не сформировалось.

Излучение, создаваемое зарядом вне волновой зоны, удобней рассчитывать, используя запись формулы (55) через Фурье-образ 4-тока (56).

Проинтегрировав выражение (55) по углам, получим распределение создаваемого излучения по частотам фотонов, а если по частоте – то угловое распределение излучения. Произведя интегрирование по углам и частотам, получим полную мощность излучения. Поэтому в дальнейшем расчёт сводится к вычислению (56), позволяющему получить всю информацию об излучении.

7 Излучение, создаваемое в режиме $|\beta| = 1$

Рассмотрим излучение создаваемое зарядом в режиме $|\beta| = 1$. Траектория (20) − (23) приобретает следующий вид:

$$x^0 = x^0(0) + \frac{h}{v_F}\left[t' + \cos\psi\frac{t'^2}{2} + (1-\beta\sin\psi)\frac{t'^3}{6}\right], \qquad (61)$$

$$x^1 = x^1(0) + h\left[-\cos\psi t' + (1-\beta\sin\psi)\frac{t'^2}{2}\right], \qquad (62)$$

$$x^2 = x^2(0) - h\left[\sin\psi t' + \beta\cos\psi\frac{t^2}{2} + \beta(1-\beta\sin\psi)\frac{t^3}{6}\right], \qquad (63)$$

где $t' = |E|t/v_F$.

$$\begin{aligned} k_\mu x^\mu(t') = k_\mu x^\mu(0) + hk_0\Big[&(v_F + n_1\sin\psi + n_2\cos\psi)t' + \\ &+ (v_F\cos\psi - (1-\beta\sin\psi)n_1 + \beta\cos\psi n_2)t'^2/2 + \\ &+ (v_F(1-\beta\sin\psi) + \beta n_2(1-\beta\sin\psi))t'^3/6\Big]. \end{aligned} \qquad (64)$$

Удобно ввести следующие обозначения: $\hat{h} = \frac{hk_0}{v_F}$, $\hat{\mathbf{n}} = v_F\mathbf{n}$. В этих терминах аргумент экспоненты в Фурье-образах токов (56) принимает вид:

$$\begin{aligned} k_\mu x^\mu(t') = k_\mu x^\mu(0) + \hat{h}\Big[&(1 + \hat{n}_1\sin\psi + \hat{n}_2\cos\psi)t' + \\ &+ \hat{n}_1(\cos\psi - (1-\beta\sin\psi) + \beta\hat{n}_2\cos\psi)t'^2/2 + \\ &+ ((1-\beta\sin\psi) + \beta\hat{n}_2(1-\beta\sin\psi))t'^3/6\Big]. \end{aligned} \qquad (65)$$

Излучение можно посчитать по методу, аналогичному применяемому в работе [[6]]. Для этого надо сделать замену переменных в выражении (65) вида $\zeta = \delta + \gamma t'$, где $\gamma^{-3} = \frac{\hat{h}}{2}(1+\beta\hat{n}_2)(1-\beta\sin\psi)$ и $\delta = -\frac{\cos\psi}{1-\beta\sin\psi} + \frac{\hat{n}_1}{1+\beta\hat{n}_2}$. После этого (65) примет вид:

$$k_\mu x^\mu = \bar{k_\mu x^\mu} + B\zeta + \zeta^3/3,$$

$$k_\mu \bar{x}^\mu = k_\mu x^\mu(0) + \hat{h}\Big[(1 + \hat{n}_1 \sin\psi + \hat{n}_2 \cos\psi)\delta +$$
$$+ \hat{n}_1(\cos\psi - (1 - \beta\sin\psi) + \beta\hat{n}_2\cos\psi)\delta^2/2 +$$
$$+ ((1 - \beta\sin\psi) + \beta\hat{n}_2(1 - \beta\sin\psi))\delta^3/6\Big]. \quad (66)$$

Было использовано обозначение:

$$B = \gamma\hat{h}\left[1 + \hat{n}_1\cos\psi + \hat{n}_2\sin\psi - \frac{\delta^2}{2}(1 + \beta\hat{n}_2)(1 - \beta\sin\psi)\right]. \quad (67)$$

Траектория в терминах ζ записывается следующим образом:

$$\dot{x}^0 = \frac{h}{v_F}\Big[1 + \delta\cos\psi + \frac{\delta^2}{2}(1 - \beta\sin\psi) +$$
$$+ (\cos\psi + \delta(1 - \beta\sin\psi)\gamma\zeta + (1 - \beta\sin\psi)\frac{\gamma^2\zeta^2}{2}\Big], \quad (68)$$

$$\dot{x}^1 = h\Big[-\cos\psi + (1 - \beta\sin\psi)\delta + (1 - \beta\sin\psi)\gamma\zeta\Big], \quad (69)$$

$$\dot{x}^2 = -h\Big[\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1 - \beta\sin\psi)\beta\delta^2/2 +$$
$$+ (\cos\psi + \delta(1 - \beta\sin\psi))\beta\gamma\zeta + (1 - \beta\sin\psi)\beta\gamma^2\zeta^2/2\Big]. \quad (70)$$

Если граничными вкладами в (56) можно приберечь, что имеет место, когда выполнено (122), то компоненты j^μ можно записать следующим образом:

$$C^{-1}j^0 = \frac{h\gamma}{v_F}\Big[(1 + \delta\cos\psi + \frac{\delta^2}{2}(1 - \beta\sin\psi))I_0 +$$
$$+ (\cos\psi + \delta(1 - \beta\sin\psi)\gamma I_1 + (1 - \beta\sin\psi)\frac{\gamma^2}{2}I_2\Big], \quad (71)$$

$$C^{-1}j^1 = h\gamma\Big[(-\cos\psi + (1 - \beta\sin\psi)\delta)I_0 + \gamma(1 - \beta\sin\psi)I_1\Big], \quad (72)$$

$$C^{-1}j^2 = -h\gamma\Bigg[(\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)I_0 +$$

$$+ (\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))\beta\gamma I_1 + +(1-\beta\sin\psi)\beta\gamma^2/2I_2\Bigg], \quad (73)$$

$$C^{-1}j^3 = 0, \quad (74)$$

где I_n для интегралов и было введено обозначение C для фазового множителя:

$$I_n = \int_G d\xi\xi^n e^{-i(B\xi+\frac{\xi^3}{3})}, \quad C = e^{-ik_\mu \bar{x}^\mu}. \quad (75)$$

В дальнейшем нам потребуются выражения:

$$|j^0|^2 = \left(\frac{h|\gamma|}{v_F}\right)^2\Bigg[(1+\delta\cos\psi + \delta^2/2(1-\beta\sin\psi))^2|I_0|^2 +$$
$$+ (1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^4|I_2|^2/4 +$$
$$+ (\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi)^2)|\gamma|^2|I_1|^2 + (1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^4|I_2|^2/4 +$$
$$+(1+\delta\cos\psi+\delta^2(1-\beta\sin\psi)/2)(\cos\psi+\delta(1-\beta\sin\psi)(\gamma I_0^* I_1+\gamma^* I_0 I_1^*) +$$
$$+\frac{1}{2}(1+\delta\cos\psi+\delta^2(1-\beta\sin\psi)/2)(1-\beta\sin\psi)(\gamma^2 I_0^* I_2 + (\gamma^2)^* I_0 I_2^*) +$$
$$+ |\gamma|^2/2(\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))(1-\beta\sin\psi)(\gamma I_1^* I_2 + \gamma^* I_1 I_2^*)\Bigg], \quad (76)$$

$$|j^1|^2 = h^2|\gamma|^2\Bigg[((1-\beta\sin\psi)\delta - \cos\psi)^2|I_0|^2 + (1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^2|I_1|^2 +$$
$$+ (1-\beta\sin\psi)((1-\beta\sin\psi)\delta - \cos\psi)(\gamma I_0^* I_1 + \gamma^* I_0 I_1^*)\Bigg], \quad (77)$$

$$|j^2|^2 = h^2|\gamma|^2\Bigg[(\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)^2|I_0|^2 +$$
$$+ (1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^4/4|I_2|^2 + (\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))^2|\gamma|^2|I_1|^2 +$$
$$+ (\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)(\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))$$
$$(\gamma I_0^* I_1 + \gamma^* I_0 I_1^*) +$$

$$+\frac{\beta}{2}(1-\beta\sin\psi)(\sin\psi+\beta\delta\cos\psi+(1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)(\gamma^2 I_0^* I_2+\gamma^* I_0 I_2^*)+$$
$$+\frac{\beta|\gamma|^2}{2}(1-\beta\sin\psi)(\cos\psi+\delta(1-\beta\sin\psi))(\gamma I_1^* I_2+\gamma^* I_1 I_2^*)\Bigg], \quad (78)$$

$$|j^3|^2 = 0.$$

Интегралы I_n выражаются через функцию Эйри и её первую производную (81):

$$I_0 = 2\pi\,\mathrm{Ai}(B), \quad I_1 = 2\pi i\,\mathrm{Ai}'(B), \quad I_2 = -2\pi B\,\mathrm{Ai}(B). \qquad (80)$$

$$\mathrm{Ai}(B) = \int_G \frac{d\xi}{2\pi} e^{-i(B\xi+\frac{\xi^3}{3})}, \quad \mathrm{Ai}'(B) = \frac{-i}{2\pi}\int_G d\xi\xi e^{-i(B\xi+\frac{\xi^3}{3})} \qquad (81)$$

Контур интегрирования G выберется стандартным образом для функций Эйри [4].

В этих терминах выражения примут следующий вид:

$$|j^0|^2 = \left(\frac{2\pi|\gamma|h}{v_F}\right)^2\Bigg[(\cos\psi+\delta(1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^2|\,\mathrm{Ai}'(B)|^2+$$
$$+\Bigg((1+\delta\cos\psi+\frac{\delta^2}{2}(1-\beta\sin\psi))^2+(1-\beta\sin\psi)^2\frac{|\gamma|^4}{4}|B|^2-$$
$$-\frac{1}{2}(1+\delta\cos\psi+\frac{\delta^2}{2}(1-\beta\sin\psi))(1-\beta\sin\psi)(\gamma^2 B+B^*(\gamma^2)^*)\Bigg)|\,\mathrm{Ai}(B)|^2+$$
$$+i(\cos\psi+\delta(1-\beta\sin\psi))\Bigg((1+\delta\cos\psi+\frac{\delta^2}{2}(1-\beta\sin\psi))\gamma-$$
$$-\frac{|\gamma|^2}{2}(1-\beta\sin\psi)B^*\gamma^*\Bigg)\,\mathrm{Ai}^*(B)\,\mathrm{Ai}'(B)+$$
$$+i(\cos\psi+\delta(1-\beta\sin\psi)\Bigg(\frac{|\gamma|^2}{2}(1-\beta\sin\psi)B\gamma-$$
$$-(1+\delta\cos\psi+\frac{\delta^2}{2}(1-\beta\sin\psi))\gamma^*\Bigg)\,\mathrm{Ai}'^*(B)\,\mathrm{Ai}(B)\Bigg], \quad (82)$$

$$|j^1|^2 = \Big(2\pi h|\gamma|\Big)^2\Bigg[(1-\beta\sin\psi)\delta-\cos\psi)^2|\,\mathrm{Ai}(B)|^2+$$

$$+ i(1-\beta\sin\psi)((1-\beta\sin\psi)\delta - \cos\psi)(\gamma\operatorname{Ai}^*(B)\operatorname{Ai}'(B) -$$
$$- \gamma^* \operatorname{Ai}(B)\operatorname{Ai}'^*(B)) + (1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^2|\operatorname{Ai}'(B)|^2\Big], \quad (83)$$

$$|j^2|^2 = \left(2\pi h|\gamma|\right)^2 \Big[(\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))^2|\gamma|^2|\operatorname{Ai}'(B)|^2 +$$
$$+\Big((\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)^2 +$$
$$+ (1-\beta\sin\psi)^2|\gamma|^4/4|B|^2 - \frac{\beta}{2}(1-\beta\sin\psi)(\sin\psi + \beta\delta\cos\psi +$$
$$+ (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)(\gamma^2 B + B^*\gamma^*)\Big)|\operatorname{Ai}(B)|^2 +$$
$$+ i(\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))((\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)\gamma -$$
$$- \frac{\beta|\gamma|^2}{2}(1-\beta\sin\psi)B^*\gamma^*)\operatorname{Ai}^*(B)\operatorname{Ai}'(B) -$$
$$- i(\cos\psi + \delta(1-\beta\sin\psi))((\sin\psi + \beta\delta\cos\psi + (1-\beta\sin\psi)\beta\delta^2/2)\gamma^* -$$
$$- \frac{\beta|\gamma|^2}{2}(1-\beta\sin\psi)B\gamma)\operatorname{Ai}(B)\operatorname{Ai}'^*(B)\Big], \quad (84)$$

$$|j^3|^2 = 0.$$

В случае, когда параметр B вещественен, функция Эйри принимает вещественные значения и с увеличением своего аргумента спадает экспоненциально.

Выражение спектрально-углового распределения, в приближении малости граничных вкладов:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dB} = \frac{3}{8}e^2(1-\beta\sin\psi)^4 h^{-1} v_F (1+\beta\hat{n}_2)^2$$
$$\left((1-\beta\sin\psi)\frac{1-\hat{n}_2^2-\hat{n}_1^2}{2(1+\beta\hat{n}_2)} + 2\hat{n}_1\cos\psi\right)^{-7/2}\gamma^{-7/2}$$
$$B^{3/2}\Big[4B\Big(\frac{\cos^2\psi}{(1-\beta\sin\psi)^2}\Big((v_F^2-1)\frac{\hat{n}_1^2}{(1+\beta\hat{n}_2)^2} + v_F^2) +$$
$$+ \frac{\hat{n}_1\cos\psi}{(1-\beta\sin\psi)(1+\beta\hat{n}_2)^3}(\beta\hat{n}_2 + (1-v_F^2)(\hat{n}_1^2+\hat{n}_2^2)) +$$

$$+\frac{v_F^2-\hat{n}_2^2+v_F^2\hat{n}_1^2}{(1+\beta\hat{n}_2)^2}+(v_F^2-1)(\frac{\hat{n}_1}{1+\beta\hat{n}_2})^4-\frac{2(v_F^2+\hat{n}_2^2)\cos^2\psi}{(1+\beta\hat{n}_2)^3}\Bigg)\operatorname{Ai}^2(B)+$$
$$+\gamma^2\left(\frac{1-\hat{n}_2^2-\hat{n}_1^2}{(1+\beta\hat{n}_2)^2}+\frac{4\hat{n}_1\cos\psi}{(1+\beta\hat{n}_2)(1-\beta\sin\psi)}\right)\left(v_F^2-\frac{(1-v_F^2)\hat{n}_1^2}{(1+\beta\hat{n}_2)^2}\right)\operatorname{Ai}'^2\Bigg]. \tag{86}$$

Выражение (8) допускает интегрирование по всевозможным значениям энергии излучаемых фотонов

$$\int_0^\infty dB B^{3/2}[C_1 B\operatorname{Ai}^2(B)+C_2\operatorname{Ai}'^2(B)=\frac{5C_1+7C_2}{192}, \tag{87}$$

что позволяет получить угловое распределение излучения.

8 Излучение в режиме $|\beta| > 1$

Рассмотрим ситуацию, когда электрон движется в электромагнитном поле при $H^2 > E^2 v_F^{-2}$. Что с физической точки зрения соответствует сильной деноминации магнитного поля над электрическим. Траектория (16) – (23) в данном случае будет иметь вид:

$$p_0 = \frac{p_0(0)}{\beta^2 - 1}\left[\cos\psi \sin\tilde{t} - (1 - \beta\sin\psi)\cos\tilde{t} + \beta^2 - \beta\sin\psi\right], \quad (88)$$

$$p_1 = -p_0(0) v_F^{-1}\left[\frac{1 - \beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\sin\tilde{t} + \cos\psi\cos\tilde{t}\right], \quad (89)$$

$$p_2 = \frac{p_0(0) v_F^{-1}}{\beta^2 - 1}\left[\beta - \sin\psi + \beta\sqrt{\beta^2 - 1}\cos\psi\sin\tilde{t} - \beta(1 - \beta\sin\psi)\cos\tilde{t}\right], \quad (90)$$

$$p_3 = 0, \quad (91)$$

$$x^0 = x^0(0) - \frac{h v_F^{-1}}{\beta^2 - 1}\left[\cos\psi(\cos\tilde{t} - 1) + \frac{1 - \beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\sin\tilde{t} - \beta\frac{\beta - \sin\psi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\tilde{t}\right], \quad (92)$$

$$x^1 = x^1(0) - \frac{h}{\beta^2 - 1}\left[(1 - \beta\sin\psi)(\cos\tilde{t} - 1) - \sqrt{\beta^2 - 1}\cos\psi\sin\tilde{t}\right], \quad (93)$$

$$x^2 = x^2(0) - \frac{h}{\beta^2 - 1}\left[\frac{\beta - \sin\psi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\tilde{t} - \beta\cos\psi(\cos\tilde{t} - 1) - \beta\frac{1 - \beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\sin\tilde{t}\right], \quad (94)$$

$$x^3 = x^3(0). \quad (95)$$

Здесь $\tilde{t} := t\sqrt{H^2 - E^2 v_F^{-2}}$ – вещественный безразмерный параметр вдоль траектории.

Как видно из формулы для энергии (88), несмотря на присутствие электрического поля, т.е. $\beta \neq \infty$ и $h \neq \infty$. Энергия не растёт до бесконечности, как это было бы для обычного электрона, а вместо этого осциллирует вокруг своего среднего значения:

$$< p_0 >= p_0(0)\beta\frac{\beta - \sin\psi}{\beta^2 - 1}. \tag{96}$$

Движение вдоль электрического поля происходит периодически (89) и в среднем отсутствует, т.е. $\bar{p}_1 = 0$, а перпендикулярно полю (90) происходит с постоянной скоростью

$$< x_2' >= \frac{p_0(0)v_F^{-1}}{\beta^2 - 1}(\sin\psi - \beta). \tag{97}$$

Найдём значение параметра $\tilde{t}$, при котором происходит процесс перехода электрона в дырку: $p_0(\tilde{t}_0) = 0$

$$\frac{1}{\beta^2 - 1}\left[\cos\psi\sin\tilde{t}_0 - (1 - \beta\sin\psi)\cos\tilde{t}_0 + \beta^2 - \beta\sin\psi\right] = 0. \tag{98}$$

В (98) важную роль играет общий множитель $(\beta^2 - 1)^{-1}$. В зависимости от того, равен ли он нулю или нет будут наблюдаться две различные ситуации. В случае конечных значений β, переход в античастицу происходит при значениях параметра $\tilde{t} = \tilde{t}_0 + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{t}_0 = \arcsin(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}}) - \varepsilon_0, \quad \sin\varepsilon_0 = \frac{\beta}{\beta^2 - 1}. \tag{99}$$

Таким образом, переход частицы в античастицу и, соответственно, обратно происходит периодически с периодом $\Delta\tilde{t} = 2\pi$. В крайнем случае $\beta = \infty$, частица уже не будет иметь таких особенностей, и её поведение будет таким же, как и у обычной массивной частицы.

Обсудив особенности траектории частицы, можно перейти к непосредственному расчёту спектральной плотности излучения. Фаза в (56) для данной траектории имеет вид:

$$k_\mu x^\mu = \frac{\hat{h}}{\beta^2 - 1}\Bigg[(\cos\psi(\beta^2 - 1)\hat{n}_1 - (1 + \beta\hat{n}_2)(1 - \beta\sin\psi))\frac{\sin\tilde{t}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} +$$

$$+((1-\beta\sin\psi)\hat{n}_1-(1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi)(\cos\tilde{t}-1)+$$
$$\left.+\frac{\beta-\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}(\beta+\hat{n}_2)\tilde{t}\right]+k_\mu x^\mu(0). \quad (100)$$

Введём ряд удобных для дальнейшего расчёта обозначений:

$$\bar{k_\mu x^\mu} := k_\mu x^\mu(0)+\frac{\hat{h}}{\beta^2-1}((1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi-(1-\beta\sin\psi)\hat{n}_1)-m\varepsilon, \tag{101}$$

$$m := \hat{h}(\beta+\hat{n}_2)\frac{\beta-\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}^3}, \tag{102}$$

$$z := \frac{\hat{h}}{\sqrt{\beta^2-1}^3}\Bigg[(\cos\psi(\beta^2-1)\hat{n}_1-(1+\beta\hat{n}_2)(1-\beta\sin\psi))^2+$$
$$+(\beta^2-1)((1-\beta\sin\psi)\hat{n}_1-(1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi)^2\Bigg]^{1/2}, \tag{103}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon := \sqrt{\beta^2-1}\frac{\cos\psi(\beta^2-1)\hat{n}_1-(1+\beta\hat{n}_2)(1-\beta\sin\psi)}{(1-\beta\sin\psi)\hat{n}_1-(1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi}. \tag{104}$$

С их использованием выражение (106) примет следующий вид:

$$k_\mu x^\mu = \bar{k_\mu x^\mu}+m(\tilde{t}+\varepsilon)+z\sin(\tilde{t}+\varepsilon). \tag{105}$$

Если в (56) граничным вкладом можно пренебречь или не интересоваться той частью излучения, которая создаётся при влете и вылете в поле, то Фурье-образы 4-векторов тока можно записать следующим образом:

$$C^{-1}v_F j^0 = \cos\psi D_1-\frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}D_2+\frac{\beta^2-\beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}D_0, \tag{106}$$

$$C^{-1}j^1 = (1-\beta\sin\psi)D_1+\sqrt{\beta^2-1}\cos\psi D_2, \tag{107}$$

$$C^{-1}j^2 = -\beta\cos\psi D_1+\frac{\beta-\beta^2\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}D_2-\frac{\beta-\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}D_0, \tag{108}$$
$$C^{-1}j^3 = 0,$$

где использованы обозначения:

$$C = \frac{h}{\beta^2 - 1} e^{ik_\mu \bar{x}^\mu},$$

$$D_{(0,1,2)} := \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} d\tilde{t} e^{i(m\tilde{t} + m\varepsilon - z\sin(\tilde{t}+\varepsilon))}(1, \sin\tilde{t}, \cos\tilde{t}). \tag{111}$$

Квадрат модуля компонент (106)–(108) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
|C|^{-2} v_F^2 |j^0|^2 &= \cos^2\psi |D_1|^2 + \frac{(1-\beta\sin\psi)^2}{\beta^2 - 1}|D_2|^2 - \\
&- \frac{(\beta^2 - \beta\sin\psi)^2}{\beta^2 - 1}|D_0|^2 - \\
&- (\beta^2 - \beta\sin\psi)\frac{1-\beta\sin\psi}{\beta^2-1}(D_0^* D_2 + D_0 D_2^*) + \\
&+ \cos\psi \frac{\beta^2 - \beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}(D_0^* D_1 + D_0 D_1^*) - \\
&+ \cos\psi \frac{\beta^2 - \beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}(D_0^* D_1 + D_0 D_1^*) - \\
&- \cos\psi \frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}(D_1^* D_2 + D_1 D_2^*),
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
|C|^{-2}|j^1|^2 &= (1-\beta\sin\psi)^2 |D_1|^2 + (\beta^2-1)\cos^2\psi |D_2|^2 + \\
&+ \sqrt{\beta^2-1}\cos\psi(1-\beta\sin\psi)(D_1^* D_2 + D_1 D_2^*),
\end{aligned} \tag{113}$$

$$|C|^{-2}|j^2|^2 = \beta^2\cos^2\psi|D_1|^2 + \beta^2\frac{1-\beta\sin\psi}{\beta^2-1}|D_2|^2 + \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{(\beta - \sin\psi)^2}{\beta^2-1}|D_0|^2 - \\
&- (1-\beta\sin\psi)\frac{\beta^2 - \beta\sin\psi}{\beta^2-1}(D_0^* D_2 + D_0 D_2^*) - \\
&- \beta^2\cos\psi\frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}(D_1^* D_2 + D_1 D_2^*) -
\end{aligned}$$

$$-\cos\psi\beta\frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}(D_0^*D_1+D_0D_1^*), \tag{115}$$

где

$$|C|^2=\left(\frac{h}{\beta^2-1}\right)^2. \tag{116}$$

Если рассматривать излучение, создаваемое лишь за один период, то граничный вклад в (56) будет равен нулю, а введённые нами функции $D_{(0,1,2)}$ можно выразить, как показано в [[1]], через [2] функцию Бесселя $J_m(mz)$ и её первую производную $J'_m(mz)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D_0 &= 2\pi J_m(mz),\\ D_1 &= 2\pi\left(i\cos\varepsilon J'_m(mz)-\frac{\sin\varepsilon}{z}J_m(mz)\right),\\ D_2 &= 2\pi\left(i\sin\varepsilon J'_m(mz)+\frac{\cos\varepsilon}{z}J_m(mz)\right). \end{aligned} \tag{117}$$

Интегральное представление используемой нами специальной функции имеет вид:

$$J_m(mz):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}du e^{i(mu-z\sin u)}. \tag{118}$$

Теперь выражения (112) – (114) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{|j^0|v_F}{2\pi|C|}\right)^2 = \frac{\hat{n}_1^2}{\beta^2-1}\left[(\beta+\sin\psi)^2-2\beta^2\sin^2\psi\right]^2 {J'_m}^2(mz)+\\ +\left[\frac{1}{z}\left(\frac{1+\beta\hat{n}_2}{\beta^2-1}(\beta-\sin\psi)^2-2\cos\psi(1-\beta\sin\psi)\hat{n}_1\right)-\right.\\ \left.-\frac{\beta^2-\beta\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}}\right]^2 J_m^2(mz), \end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{|j^1|}{2\pi|C|}\right)^2 = [(\beta+\sin\psi)^2-2\beta^2\sin^2\psi]^2 z^{-2}\hat{h}^2(\beta^2-1)^3\times\\ \times\left(\frac{(1+\beta\hat{n}_2)^2}{(\beta^2-1)}{J'_m}^2(mz)+\frac{\hat{n}_1^2}{z^2}J_m^2(mz)\right), \end{aligned} \tag{120}$$

$$\left(\frac{|j^2|}{2\pi|C|}\right)^2 = \left[\frac{1+\beta\hat{n}_2}{\beta^2-1}(\beta-\sin\psi)^2 - \right.$$

$$\left. - 2\cos\psi(1-\beta\sin\psi)\hat{n}_1\right]^2 z^{-2}(\beta^2-1)^3\hat{h}^2 {J'_m}^2(mz) +$$

$$+\left[\frac{\beta-\sin\psi}{\sqrt{\beta^2-1}} + \frac{\hat{h}\hat{n}_1\beta}{z^2}(\beta^2-1)((\beta+\sin\psi)^2-2\beta^2\sin^2\psi)^2\right]^2 J_m^2(mz). \tag{121}$$

В результате получим:

$$\frac{j^*_\mu j^\mu}{(2\pi|C|)^2} = \left[((\beta+\sin\psi)^2-2\beta^2\sin^2\psi)^2(v_F^{-2}\hat{n}_1^2 - \right.$$

$$-(1+\beta\hat{n}_1)^2)(\beta^2-1) - ((1+\beta\hat{n}_2)(\beta-\sin\psi)^2 -$$

$$\left. -2(\beta^2-1)\hat{n}_1\cos\psi(1-\beta\sin\psi))^2\right]\frac{\hat{h}^2(\beta^2-1){J'_m}^2(mz)}{z^2} +$$

$$+\left[\frac{v_F^{-2}}{\beta^2-1}\left[z^{-2}\hat{h}((1+\beta\hat{n}_2(\beta-\sin\psi)^2-2(\beta^2-1)\hat{n}_1\cos\psi(1-\beta\sin\psi)) - \right.\right.$$

$$\left. -\beta^2+\beta\sin\psi\right]^2 - ((\beta+\sin\psi)^2-2\beta^2\sin^2\psi)^2\frac{(\hat{n}_1^2)\hat{h}^2(\beta^2-1)^3}{z^4} -$$

$$\left. -\left[\frac{\beta-\sin\psi}{\beta^2-1} + \frac{\beta\hat{n}_1\hat{h}(\beta^2-1)}{z^2}((\beta+\sin\psi)^2-2\beta^2\sin^2\psi)\right]^2\right] J_m^2(mz). \tag{122}$$

Зависимость (122) от углов наблюдения даёт вклад в номер функции Бесселя m, и из-за этого он не является целым числом, как это происходит в случае излучения, создаваемого зарядом в постоянном и однородном магнитном поле. В предельном случае чисто магнитного поля полученная формула (122) переходит в хорошо изученную формулу Шотта [1].

9 Излучение в режиме $|\beta| < 1$

Траектория в случае $E^2 > H^2 v_F^2$ преобладания электрического поля над магнитным имеет вид:

$$x^0 = x^0(0) + \frac{h}{v_F(1-\beta^2)}[\cos\psi(\operatorname{ch}\hat{t} - 1) + \frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{sh}\hat{t} - \frac{\beta^2 - \beta\sin\psi}{1-\beta^2}\hat{t}] \tag{123}$$

$$x^1 = x^1(0) + \frac{h}{1-\beta^2}[(1-\beta\sin\psi)(\operatorname{ch}\hat{t} - 1) - \sqrt{1-\beta^2}\cos\psi\operatorname{sh}\hat{t}] \tag{124}$$

$$x^2 = x^2(0) + \frac{h}{1-\beta^2}[-\beta\cos\psi(\operatorname{ch}\hat{t} - 1) - \frac{\beta(1-\beta\sin\psi)}{\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{sh}\hat{t} + \frac{\beta - \sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\hat{t}]. \tag{125}$$

В данном подразделе будет рассмотрено излучение, создаваемое электроном, подчиняющимся траектории (123)$-$(125). Также будут получены явные аналитические выражения для основной характеристики излучения.

Как уже обсуждалось, нам необходимо рассчитать Фурье-образы от 4-тока. Аргумент экспоненты, стоящей в интегральной части (56) для данного режима будет иметь вид:

$$\begin{aligned} k_\mu x^\mu = k_\mu x^\mu(0) + \frac{\hat{h}}{1-\beta^2}[((1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi - \hat{n}_1(1-\beta\sin\psi))\operatorname{ch}\hat{t} + \\ + ((1+\beta\hat{n}_2)(1-\beta\sin\psi) + (1-\beta^2)\hat{n}_1\cos\psi)\frac{\operatorname{sh}\hat{t}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \\ - (\beta + \hat{n}_2)\frac{\beta - \sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\hat{t}]. \end{aligned} \tag{126}$$

Будет удобным ввести следующие безразмерные параметры:

$$z\operatorname{ch}\xi = \frac{\hat{h}}{(1-\beta^2)^{3/2}}((1+\beta\hat{n}_2)(1-\beta\sin\psi) + (1-\beta^2)\hat{n}_1\cos\psi), \tag{127}$$

$$z\operatorname{sh}\xi = \frac{\hat{h}}{1-\beta^2}((1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi - \hat{n}_1(1-\beta\sin\psi)), \tag{128}$$

$$\eta = \frac{\hat{h}}{(1-\beta^2)^{3/2}}(\beta + \hat{n}_2)(\beta - \sin\psi). \tag{129}$$

С использованием введённых параметров фаза (126) запишется в удобном для нас виде:

$$k_\mu x^\mu = \overline{k_\mu x^\mu} + z\,\mathrm{sh}(\hat{t}-\xi) - \eta\hat{t}, \tag{130}$$

где

$$\overline{k_\mu x^\mu} = k_\mu x^\mu(0) - \frac{\hat{h}}{1-\beta^2}((1+\beta\hat{n}_2)\cos\psi - \hat{n}_1(1-\beta\sin\psi)) \tag{131}$$

– постоянная составляющая фазы, не оказывающая влияния на создаваемое частицей излучение при условии того, что граничным вкладом в (56) можно пренебречь.

Введём обозначения для возникающих интегралов:

$$B_{0,1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{t}e^{ik_\mu x^\mu}(1, \mathrm{sh}\,\hat{t}, \mathrm{sh}\,\hat{t}), \tag{132}$$

$$B_1 = -i\frac{\partial B_0}{\partial(z\,\mathrm{ch}\,\xi)}, \tag{133}$$

$$B_2 = i\frac{\partial B_0}{\partial(z\,\mathrm{sh}\,\xi)}. \tag{134}$$

В этих обозначениях компоненты Фурье образов токов запишутся в следующем виде:

$$C^{-1}j^0 = \frac{v_F^{-1}h}{1-\beta^2}\left[\cos\psi B_1 + \frac{(1-\beta\sin\psi)B_2 - \beta(\beta-\sin\psi)B_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right], \tag{135}$$

$$C^{-1}j^1 = \frac{h}{1-\beta^2}\left[(1-\beta\sin\psi)B_1 - \sqrt{1-\beta^2}\cos\psi B_2\right], \tag{136}$$

$$C^{-1}j^2 = \frac{h}{1-\beta^2}\left[\frac{\beta-\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}B_0 - \beta\cos\psi B_1 - \frac{1-\beta\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta B_2\right], \tag{137}$$

$$C^{-1}j^3 = 0. \tag{138}$$

Запишем квадраты модулей компонент j^μ:

$$\left|j^0\right|^2 = \left(\frac{v_F^{-1}h}{1-\beta^2}\right)^2\left[\cos^2\psi\,|B_1|^2\,\frac{(1-\beta\sin\psi)^2}{1-\beta^2}\,|B_2|^2 + \right.$$

$$+\beta^2\frac{(\beta-\sin\psi)^2}{1-\beta^2}\left|B_0\right|^2+(1-\beta\sin\psi)\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_1B_2^*+B_1^*B_2)-$$

$$-(\beta-\sin\psi)\frac{\beta\cos\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_1B_0^*+B_1^*B_0)-$$

$$-(1-\beta\sin\psi)\beta\frac{\beta-\sin\psi}{1-\beta^2}(B_2B_0^*+B_2^*B_0)\Big], \quad (139)$$

$$\left|j^1\right|^2=(\frac{h}{1-\beta^2})^2[(1-\beta\sin\psi)^2\left|B_1\right|^2-(1-\beta^2)\cos^2\psi\left|B_2\right|^2-$$

$$-\sqrt{1-\beta^2}\cos\psi(1-\beta\sin\psi)(B_1B_2^*)+B_1^2B_2)], \quad (140)$$

$$\left|j^2\right|^2=(\frac{h}{1-\beta^2})^2\Big[\beta^2\cos^2\psi\left|B_1\right|^2+\frac{\beta^2(1-\sin\psi)^2}{1-\beta^2}\left|B_2\right|^2+$$

$$+\frac{(\beta-Sin\psi)^2}{1-\beta^2}\left|B_0\right|^2-$$

$$-\beta\cos\psi\frac{\beta-\sin\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_1B_0^*+B_1^*B_0)-$$

$$-\beta(1-\beta\sin\psi)\frac{\beta-\sin\psi}{1-\beta^2}(B_2^*B_0+B_2B_0^*+$$

$$+(1-\beta\sin\psi)\frac{\beta^2\cos\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_2B_1^*+B_2^*B_1)\Big]. \quad (141)$$

В результате:

$$j_\mu^*j^\mu=\left(\frac{h}{1-\beta^2}\right)^2\Big[((v_F^{-2}-\beta^2)\cos^2\psi-(1-\beta\sin\psi)^2)\left|B_1\right|^2+$$

$$+(\beta^2v_F^{-2}-1)\frac{(\beta-\sin\psi)^2}{1-\beta^2}\left|B_0\right|^2+$$

$$+((v_F^{-2}-\beta^2)\frac{(1-\beta\sin\psi)^2}{1-\beta^2}-(1-\beta^2)\cos^2\psi)\left|B_2\right|^2+$$

$$+(1-v_F^{-2})(1-\beta\sin\psi)\frac{\beta\cos\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_0B_1^*+B_0^*B_1)+$$

$$+\beta(1-v_F^{-2})(1-\beta\sin\psi)\frac{\beta-\sin\psi}{1-\beta^2}(B_0B_2^*+B_0^*B_2)+$$

$$+ (1-2\beta^2+v_F^{-2})(1-\beta\psi)\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_1B_2^*+B_1^*B_2)\Bigg]. \quad (142)$$

Спектрально-угловое излучения выражается через функцию Макдональда и её первую производную:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{i(z\,\mathrm{sh}\,u-\nu u)} = i\pi H_{iz}^{(1)}(iz) = 2e^{\pi\nu/2}K_{i\nu}(z), \quad (143)$$

$$B_0 = 2e^{\pi\nu/2}K_{i\nu}(z), \quad (144)$$

$$B_1 = -2ie^{\pi\nu/2}Ch^{-1}\xi K'_{i\nu}(z), \quad (145)$$

$$B_2 = 2ie^{\pi\nu/2}Sh^{-1}\xi K'_{i\nu}(z). \quad (146)$$

Получаемая формула (142) имеет тот же вид, что и для излучения, создаваемого массивной частицей в электрическом поле [23].

10 Заключение

Благодаря используемому в работе подходу удалось получить выражения, описывающие эволюцию системы и рассчитать спектрально угловое распределение в различных режимах. В рамках же квантовой электродинамики (КЭД) получение спектральных характеристик многофотонного излучения затруднительно. Рассмотренная модификация в виде линейного закона дисперсии (3), (4) к стандартным уравнениям Лоренца, описывающим массивную заряженную частицу в электромагнитном поле, приводят к ряду отличий, из которых стоит выделить возможность перехода частицы в античастицу. Также специфический вид динамики в монохроматической волне и аналоге скрещенных полей $|\beta| = 1$. В режиме $|\beta| = 1$ полная мощность излучения конечна, а спектрально-угловое распределение имеет интересны особенности.

Дальнейший интерес представляет расчёт спектральных характеристик излучения в поле плоской электромагнитной волны. Помимо этого, можно рассмотреть модификацию данной задачи, учитывающею реакцию излучения.

Список литературы

[1] В.Г. Багров, В.А. Бородовицын. Теория излучения релятивистских частиц. // М.: Физматлит, – 2002. – 576 с.

[2] В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. Методы математической физики. Т.1. // Томск: НТЛ, – 2002. – 670 с.

[3] P.O. Kazinski, A.A. Sharapov. Radiation reaction for a massless charged particle. // Class. Quant. Grav. – 2003. – V. 20. – P. 2715-2725.

[4] O. V. Bogdanov, P.O. Kazinski, G.Yu. Lazarenko. Properties of an ultrarelativistic charged particle radiation in a constant homogeneous crossed electromagnetic field. // Annals of Physics. – 2017. – V. 380. – P. 23-40.

[5] P.O. Kazinski. Radiation of de-excited electrons at large times in a strong electromagnetic plane wave. // Annals of Physics. – 2013. – V. 339. – P. 446.

[6] O. V. Bogdanov, P.O. Kazinski. Properties of electrons scattered by a strong plane electromagnetic wave with a linear polarization: semiclassical treatment. // Pis'ma v ZhETF. – 2014. – V. 101. – No. 3. – P. 224-231.

[7] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Eields. // Pergamon, Oxford. – 1962. - 504 p.

[8] Д. Джексон. Классическая электродинамика. // М.: Мир, – 1965. – 702 с.

[9] E. Hemsing, G. Stupakov, D. Xiang, A. Zholents. //Rev. Mod. Phys. – 2014. – V. 86. – P. 897.

[10] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. The electronic properties of graphene. // arXiv

e-print archive. – 2007. – V. 0709. – P. 1163. – URL: http://arxiv.org/abs/0709.1163v2

[11] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. The electronic properties of graphene. // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 109. – P. 81-109.

[12] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Gregorieva and A.A. Fiesov. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. // Science – 2004. – V. 306. – P. 666-669.

[13] P.R. Wallace. The Band Theory of Graphite. // Phys. Rev. – 1947. – V. 71. – P. 622.

[14] J.S. Bunch, A.M. van der Zande, S.S. Verbridge, I.W. Frank, D.M. Tanenbaum, J.M. Parpia, H.G. Craighead , P.L. McEuen. Electromechanical Resonators from Graphene Sheets. // Science – 2007. – V. 315. – P. 490.

[15] A.A. Balandin, S. Ghosh, W. Bao, I. Calizo, D. Teweldebrhan, F. Miao, C.N. Lau. Extremely High Thermal Conductivity of Graphene: Experimental Study. // Nano Letters. – 2008. – V. 8. – No. 3. – P. 902-907.

[16] Z. Chen, Yu-Ming Lin, M.J. Rooks, P. Avouris. Graphene nanoribbon electronics. // Phys. E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. – 2007. – V. 40. – No. 2. – P. 228–232.

[17] А.И. Ахиейзер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. // М.: Наука, – 1981. – 431 с.

[18] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля // М.: Наука, – 1973. – 536 с.

[19] В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. Методы математической физики. Т.2.1. // Томск: НТЛ, – 2002. – 352 с.

[20] В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. Методы математической физики. Т.2.2. // Томск: НТЛ, – 2002. – 370 с.

[21] С. Швеьер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. // М.: ИИА, – 1963. – 842 с.

[22] Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейманoвские лекции по физики. Т.6. Электродинамика. // М.: Мир, – 1966. – 340 с.

[23] V. Ritus. Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field. // J. Russ. Laser Res. 6 – 1985. – V. 6. – No. 5. – P. 497-617.

[24] A.Di Piazza, C. Müller, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel. // Rev. Mod. Phys. – 2012. – V. 84. – P. 1177.

Уважаемый пользователь!
Обращаем ваше внимание, что система Антиплагиат отвечает на вопрос, является ли тот или иной фрагмент текста заимствованным или нет. Ответ на вопрос, является ли заимствованный фрагмент именно плагиатом, а не законной цитатой, система оставляет на ваше усмотрение. Также важно отметить, что система находит источник заимствования, но не определяет, является ли он первоисточником.

Информация о документе:

Имя исходного файла:	diplom2017.pdf
Имя компании:	Томский гос. Университет
Тип документа:	ПРочее
Имя документа:	Диплом_Лазаренко
Дата проверки:	07.06.2017 20:29
Модули поиска:	Кольцо вузов, Томский гос. Университет, Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика, Модуль поиска ЭБС "Айбукс", Модуль поиска ЭБС "Лань", Научные статьи Elibrary, Университетская библиотека онлайн, Интернет (Антиплагиат), Диссертации и автореферати РГБ

Текстовые статистики:

Индекс читаемости:	простой
Неизвестные слова:	в пределах нормы
Макс. длина слова:	в пределах нормы
Большие слова:	в пределах нормы

Источник	Ссылка на источник	Коллекция/ модуль поиска	Доля в отчёте	Доля в тексте
[1] Крупкин А.А. Исследо...		Кольцо вузов	12.06%	12.06%
[2] Disser _Yanz_2014.pd...		Томский гос. Университет	2.13%	10.97%
[3] Вестник Иркутского Г...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=16640	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0.54%	10.67%
[4] Внешняя баллистика: ...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=339578	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	10.01%
[5] Геометрия	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=29312	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	9.65%
[6] Графен	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=18766	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0.94%	9.59%
[7] 50531	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=50531	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	9.11%
[8] 622	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=622	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	8.95%
[9] 72216	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=72216	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0.11%	8.81%
[10] 2155	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2155	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	8.64%
[11] Abramova.pdf		Кольцо вузов	0%	8.58%
[12] Курс дифференциально...	http://elibrary.ru/item.asp?id=15250420	Научные статьи Elibrary	0.05%	8.43%
[13] 72217	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=72217	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0.76%	8.38%
[14] Избранные труды. Т. ...	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=67770	Университетская библиотека онлайн	0%	8.28%
[15] 59258	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59258	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	8.22%
[16] 2220	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2220	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	7.99%
[17] Properties of electr...	http://arxiv.org/pdf/1409.1990.pdf	Интернет (Антиплагиат)	0.58%	7.85%
[18] 2226	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2226	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	7.73%
[19] Курс математического...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=335262	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	7.72%
[20] Задачи и упражнения ...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=25555	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	7.71%
[21] 214228	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=214228	Университетская библиотека онлайн	0%	7.66%
[22] Howard Anton Student...	http://faculty.ksu.edu.sa/fawaz/Exams107/Books/Howard%20Anto...	Интернет (Антиплагиат)	0%	7.6%
		Университетская		

[23] 222880	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=222880	библиотека онлайн	0%	7.52%
[24] Теоретическая механи...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=28208	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	7.41%
[25] Основы физической те...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=8253	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	7.41%
[26] Курс классической ма...	http://elibrary.ru/item.asp?id=15211479	Научные статьи Elibrary	0%	7.34%
[27] Finite Packings of S...	http://elibrary.ru/item.asp?id=1046088	Научные статьи Elibrary	0%	7.28%
[28] Основы физической те...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=335324	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	7.27%
[29] Конченков, Владимир ...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005499000/rsl01005499...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.16%	7.13%
[30] Курс математического...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=8669	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	7.1%
[31] Тригонометрические ф...	http://elibrary.ru/item.asp?id=15211536	Научные статьи Elibrary	0%	6.95%
[32] Интегралы и рядыт. В...	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82607	Университетская библиотека онлайн	0%	6.83%
[33] 2227	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2227	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0.07%	6.77%
[34] Задачи и упражнения ...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=20067	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	6.71%
[35] 2364	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2364	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	6.69%
[36] Прочность и разрушен...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=29397	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	6.62%
[37] 47554	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=47554	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	6.59%
[38] Задачи по высшей мат...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=20068	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	6.58%
[39] 255647	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=255647	Университетская библиотека онлайн	0%	6.3%
[40] 3481	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3481	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	6.28%
[41] Задачи и упражнения ...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=12171	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	5.99%
[42] Предельное состояние...	http://elibrary.ru/item.asp?id=15211502	Научные статьи Elibrary	0%	5.71%
[43] Математика. Учебниое...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=22198	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	5.59%
[44] 59323	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59323	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	5.59%
[45] Теоретические основы...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=21572	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	5.4%
[46] 2019	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2019	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	3.83%
[47] 129577	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=129577	Университетская библиотека онлайн	0%	2.89%
[48] КФБН 000000.094 ПЗ.d...		Кольцо вузов	0%	2.73%
[49] Гуриева, 4 ОФО, МИТ....		Кольцо вузов	0%	2.23%
[50] kuhar_egor_ivanovich...	http://vstu.ru/files/thesis_defence/13492/kuhar_egor_ivanovi...	Интернет (Антиплагиат)	0.35%	2.09%
[51] Огарков, Станислав Л...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004930000/rsl01004930...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.02%	2.05%
[52] Electronic transport...	http://physics.wm.edu/%7Eerossi/Publications/RevModPhys.83.4...	Интернет (Антиплагиат)	0.56%	1.76%
[53] Electronic transport...	http://arxiv.org/pdf/1003.4731.pdf#7	Интернет (Антиплагиат)	0%	1.39%
[54] 235955	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=235955	Университетская библиотека онлайн	0%	1.3%
[55] Interactions in nove...	http://eprints.ucm.es/11728/1/T32107.pdf#14	Интернет (Антиплагиат)	0%	1.14%
[56] Ларкин А. И. Собрани...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=29342	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	0.97%
[57] Properties of an ult...	http://arxiv.org/abs/1608.02215	Интернет (Антиплагиат)	0.46%	0.94%
[58] Аль-Касвани Маджид м...	http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006773000/rsl01006773...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.17%	0.92%

[59] Вялых, Денис Василье...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005092000/rsl01005092...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.86%
[60] Известия ПГПУ им. В....	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=341533	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	0.84%
[61] Ефимкин, Дмитрий Кир...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005525000/rsl01005525...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.83%
[62] Шипуля, Михаил Алекс...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005413000/rsl01005413...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.24%	0.76%
[63] Свинцов, Дмитрий Але...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005523000/rsl01005523...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.74%
[64] Савченко, Денис Вита...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004916000/rsl01004916...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.09%	0.73%
[65] Соколик, Алексей Але...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004714000/rsl01004714...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.67%
[66] Чэнь Сяосин диссерта...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005380000/rsl01005380...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.5%
[67] Генералов, Александр...	http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006751000/rsl01006751...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.49%
[68] Кузькин, Виталий Анд...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005115000/rsl01005115...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.43%
[69] Шаляпина, Анастасия ...	http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006559000/rsl01006559...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.41%
[70] P. O. Kazinski, A. A...	http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm...	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.38%
[71] Колесников, Антон Ал...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004887000/rsl01004887...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.36%
[72] Предметный указатель...	http://elibrary.ru/item.asp?id=25373126	Научные статьи Elibrary	0%	0.32%
[73] Тюрнина, Анастасия В...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004826000/rsl01004826...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.28%
[74] Усачев, Дмитрий Юрье...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004657000/rsl01004657...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.26%
[75] Казинский, Пётр Олег...	http://dlib.rsl.ru/rsl01003000000/rsl01003310000/rsl01003310...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.24%
[76] Шарапов, Алексей Ана...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004273000/rsl01004273...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.18%

Оригинальные блоки: 80.7%

Заимствованные блоки: 19.3%

Заимствование из "белых" источников: 0%

Итоговая оценка оригинальности: **80.7%**