Министерство образования и науки Российской Федерации
(МИНОБРНАУКИ РОССИИ)
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат.наук, профессор
____________ В.В. Конев

«_5_»_июня_2017 г.

Потатуева Виктория Владимировна

Асимптотический анализ системы массового обслуживания с ММРР входящим потоком требований случайного объема

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание степени магистра
по направлению подготовки
01.04.02 – Прикладная математика и информатика
и направленности (профилю) подготовки
«Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности»

Научный руководитель ВКР
д-р. физ.-мат. наук, доцент
____________ С.П.Моисеева
подпись
«_1_»_июня_2017 г.

Автор работы
студент группы №_1151М_
____________ В.В.Потатуева
подпись

Томск – 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
(МИНОБРНАУКИ РОССИИ)
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ООП
д-р физ.-мат.наук, профессор
____________ В.В. Конев
«19» января 2017 г.

ЗАДАНИЕ

по подготовке ВКР магистра студенту Потатуевой Виктории Владимировне группы №1151М.

1. Тема ВКР Асимптотический анализ системы массового обслуживания с ММРР входящим потоком требований случайного объема

2. Срок сдачи студентом выполненной ВКР:
а) на кафедре 2.06.2017
б) в ГЭК 9.06.2017

3. Цель работы: построение и исследование математической модели изменения объема требований, находящихся в системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и ММРР входящим потоком.

4. Задачи: В соответствии с целью поставлены следующие задачи:

- Исследовать характеристики системы массового обслуживания MMPP/M/∞ с требованиями случайного объема, а именно число занятых приборов и суммарный объм требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системе методом асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.
- Исследовать характеристики системы массового обслуживания MMPP/GI/∞ с требованиями случайного объема, а именно число занятых приборов и суммарный объм требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системе методом динамического просеивания. Получить асимптотическую аппроксимацию характеристической функции для числа занятых приборов и суммарного объема требований.
- Провести численный анализ и имитационное моделирование исследуемых систем и определить область применимости полученных асимптотических результатов.

4. Краткое содержание работы.

- Обзор литературы и обоснование актуальности исследования.
- Исследование математической модели бесконечнолинейной системы массового обслуживание требований случайного объема с простейшим входящим потоком и с экспоненциальной функцией распределения времени обслуживания.

  Срок исполнения – 20.02 2017г.
- Исследование математической модели системы массового обслуживания требований случайного объема с ММРР - потоком и с экспоненциальной функцией распределения времени обслуживания.

  Срок исполнения – 22.03 2017г.

- Исследование математической модели системы массового обслуживания требований случайного объема с ММРР - потоком и с произвольной функцией распределения времени обслуживания.

  Срок исполнения – 10.05 2017г.

- Анализ результатов имитационного моделирования и исследование области применимости асимптотического

метода.

Срок исполнения – 20.05 2017г.

5. Предприятие, организация, по заданию которого выполняется работа: кафедра теории вероятностей и математической статистики НИ ТГУ.

6. Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей): 10 рисунков, 5 таблиц

7. Дата выдачи задания «19» января 2017г.

Руководитель ВКР
профессор каф. ТВиМС, ТГУ
д-р физ.-мат. наук, доцент ________________ С.П. Моисеева
подпись

Задание принял к исполнению ________________ В.В. Потатуева
дата, подпись

РЕФЕРАТ

В работе проведено исследование бесконечнолинейных систем массового обслуживания с требованиями случайного объема. Рассмотрены система с простейшим входящим потоком (M) и система с входящим модулированным пуассоновским потоком (MMPP). Предметом исследования математическая модель изменения объема требований, находящихся в системе в стационарном режиме. Основные числовые характеристики находятся при помощи метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания. Получена гауссовская аппроксимация характеристической функции суммарного объема требований. Проведен численный анализ, в результате которого определена область применимости полученных результатов.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, система массового обслуживания, бесконечнолинейная система, характеристическая функция, метод асимптотического анализа, метод динамического просеивания.

Выпускная квалификационная работа включает в себя 4 главы, 61 страницы, 10 рисунков, 5 таблиц, 65 источников.

Объект исследования: бесконечнолинейные системы массового обслуживания требований случайного объема.

Цель работы: Провести исследование бесконечнолинейных систем массового обслуживания требований случайного объёма.

Проведено исследование характеристик системы массового обслуживания вида $M^{(v)}/M/\infty$ и $MMPP^{(v)}/M/\infty$ с требованиями случайного объема, а именно числа занятых приборов и суммарный объем требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системы. С помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания получен аналитический вид аппроксимаций второго и третьего порядков суммарного объема требований в СМО $MMPP^{(v)}/M/\infty$ с требованиями случайного объема. Построена гауссовская аппроксимация характеристической функции для числа занятых приборов и суммарного объема требований при условии растущего времени обслуживания системы массового обслуживания $MMPP^{(v)}/GI/\infty$. Проведен численный анализ и имитационное моделирование исследуемых систем и определена область применимости полученных асимптотических результатов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В настоящее время внимание к теории массового обслуживания в значительной степени стимулируется необходимостью применения её результатов для важных практических задач, возникающих в жизнедеятельности человека.

Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению систем массового обслуживания (СМО), рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО. Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров): характера потока заявок, числа каналов и их производительности и правил работы СМО.

Первые положения теории массового обслуживания предложил А. К. Эрланг [55]. Исследования Эрланга дали толчок к дальнейшему развитию теории. В настоящее время системы массового обслуживания имеют приложение к таким областям как: телекоммуникационные сети и сотовая связь [8,10,13,39,58], обработки информации [14,22,46], социально-экономической деятельности [52,53], колл-центры [12,15,23,25], управление запасами [20,49], управление транспортными потоками [7,16,47].

Системы с неограниченным числом приборов являются наиболее приближенными к реальным системам. Первые результаты для бесконечно-линейных систем массового обслуживания были получены еще в середине прошлого века [50,51,54]. Однако интерес к таким системам сохраняется и в наши дни. Помимо уже перечисленных ранее областей применения СМО (телекоммуникационные сети и др.), системы с бесконечным числом обслуживающих приборов применяются в процессах иммиграции [62], в биологических системах [56], в финансовых моделях [48], в надежности больших систем [3].

СМО с заявками случайного объема позволяют решать задачи проектирования информационных систем, объектом преобразования в которых является информация, поступающая порциями в виде дискретных или непрерывных сообщений. Сообщения или заявки обладают различным информационным объемом, который представляет собой случайную величину.

Задача исследования систем массового обслуживания (СМО), в которых каждая поступающая в систему заявка наряду со случайной длиной имеет случайный объем, причем суммарный объем всех находящихся в системе заявок ограничен [2,37,40], играет важную роль при моделировании работы самых разнообразных технических устройств, в частности современных информационно-вычислительных систем.

В работах [1,30,29,31] были исследованы СМО с ограничением на суммарный объем заявок, но при инверсионном порядке обслуживания (дисциплина LIFO). Оказалось, что в этом случае можно получить алгоритмы, пригодные для численных расчетов стационарных характеристик. В статье [28] рассматривается система Geo_k/G/1/∞ с ограничением на суммарный объем находящихся в ней заявок и объем каждой заявки является дискретной случайной величиной, что позволило авторам получить более простые и эффективные алгоритмы расчета основных стационарных показателей функционирования. В [5] исследуется сеть массового обслуживания Джексона с требованиями случайной длины. Определены числовые характеристики функции распределения суммарного объема в случаях, когда время обслуживания зависит от длины.

В статье [26] рассматривается модель многолинейной системы массового обслуживания с потерями, вызванными нехваткой ресурсов, необходимых для обслуживания заявок. Принятая на обслуживание заявка занимает случайный объем ресурсов нескольких типов с заданными функциями распределения. Случайные векторы, описывающие требования заявок к ресурсам, не зависят от процессов поступления и обслуживания заявок, независимы в совокупности и одинаково распределены. В предположении о пуассоновском входящем потоке и экспоненциальном обслуживании в аналитическом виде получено совместное распределение числа заявок в системе и вектора объемов занимаемых ими ресурсов. Приведен пример расчетов, иллюстрирующий применение модели к анализу характеристик услуги видеоконференции в беспроводной сети LTE.

Большой вклад в исследование СМО с заявками случайного объема внес Тихоненко О. М. В работе [45] находится преобразование Лапласа–Стилтьеса и определяются начальные моменты функции распределения суммарного объема сообщений для однолинейной однофазной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, групповым поступлением сообщений и пуассоновским входящим потоком. В [42] исследуется влияние дисциплин обслуживания, зависящих от длин требований, на характеристики суммарного объема в системе $M/G/1/\infty$ $M/G/1/\infty$ с произвольной зависимостью времени обслуживания от длины требования и бесконечной памятью. Для системы с относительным приоритетом, произвольной зависимостью времени обслуживания от длины требования каждого приоритета и бесконечной памятью определяются характеристики суммарного объема требований каждого приоритета. В [44] Определяется распределение числа требований в системах обслуживания $M/M/n/m$ $M/M/n/m$, в которых каждое требование обладает некоторой случайной длиной, ограничена полная сумма длин требований, находящихся в системе, время обслуживания не зависит от длины, ограничено время пребывания или ожидания. В [41] Для многолинейных систем обслуживания требований случайной длины типа $M|G|n|0$ и $M|G|\infty$ с ограниченным суммарным объемом и временем обслуживания, не зависимым от длины требования, определяются стационарное распределение числа требований и вероятность потери требования. В [43] Рассматривается система обслуживания требований случайного объема с разделением процессора и ограниченным объемом памяти, в которой длина требования зависит от его объема. В системе реализован алгоритм AQM (Active Queue Management), т.е. каждое требование может в момент своего поступления получить отказ в обслуживании и потеряться даже в том случае, если в памяти имеется свободное место для его размещения, с вероятностью, зависящей от объема данного требования и суммарного объема других требований, имеющихся в системе в момент его поступления. Для описанной системы определяются стационарное распределение числа требований и вероятность потери.

Реальные потоки современных информационных систем, в основном, не являются пуассоновскими. Это привело к созданию новых математических моделей с более сложными входящими потоками. В частности, в качестве существенного обобщения простейших потоков для более адекватного описания реальных потоков была предложена модель MAP-потока (Markovian Arrival Process). Его понятие впервые было введено М. Ньютсом [61] и Д. Лукантони [60]. Широко используемым частным случаем MAP-потоков является класс MMP-потоков (Markov Modulated Poisson Process).

Марковизируемые входящие потоки стали использоваться в исследовании в исследовании систем с заявками случайного объема. Так в работе [19] исследуется система MAP|GI|∞ с заявками случайного объема, определяются асимптотические характеристические функции первого и второго порядка в условии растущей интенсивности входящего потока. В работах [34,33,32] исследуются асимптотические характеристики системы MMPP|M|∞ с заявками случайного объема в условии растущего времени обслуживания.

Аналитических решений этой задачи при дисциплине выбора заявок из очереди на обслуживание в порядке поступления (FIFO) до сих пор не найдено, поскольку для корректного построения, соответствующего марковского процесса, описывающего функционирование СМО, необходимо учитывать объемы всех заявок в системе. Фактически приходится сталкиваться с теми же самыми трудностями, что и при исследовании многолинейных СМО [21], для которых также не найдено удовлетворительных аналитических решений.

Настоящая курсовая работа посвящена исследованию систем обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и случайным объемом заявок.

Целью магистерской диссертации является построение и исследование математической модели изменения объема требований, находящихся в системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов в стационарном режиме функционирования системы.

В соответствии с целью поставлены следующие задачи:

- исследовать характеристики системы массового обслуживания вида $M^{(v)}/M/\infty$ и $MMPP^{(v)}/M/\infty$ с требованиями случайного объема, а именно число занятых приборов и суммарный объем требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системе;
- провести исследование суммарного объема требований в СМО $MMPP^{(v)}/M/\infty$ с требованиями случайного объема методом асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания;
- исследовать характеристики системы массового обслуживания $MMPP^{(v)}/GI/\infty$ с требованиями случайного объема, а именно число занятых приборов и суммарный объём требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системы методом динамического просеивания;
- получить асимптотическую аппроксимацию характеристической функции для числа занятых приборов и суммарного объема требований при условии растущего времени обслуживания;
- провести численный анализ и имитационное моделирование исследуемых систем и определить область применимости полученных асимптотических результатов.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы из 65 источников. Общий объем работы 62 страницы.

Во **введении** показана актуальность, значимость работы, определены цель и задачи исследования, дано краткое изложение диссертации по главам.

В **первом разделе** проведено исследование математической модели бесконечнолинейной системы массового обслуживание требований случайного объема с простейшим входящим потоком и с экспоненциальной функцией распределения времени обслуживания.

Во **втором разделе** проведено исследование математической модели системы массового обслуживания требований случайного объема с MMPP - потоком и с экспоненциальной функцией распределения времени обслуживания.

В **третьем разделе** проведено исследование математической модели системы массового обслуживания требований случайного объема с MMPP - потоком и с произвольной функцией распределения времени обслуживания.

В **четвертом разделе** построена имитационная модель данной системы $MMPP^{(v)}/GI/\infty$ и исследована область применимости асимптотического метода.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе настоящей диссертационной работы.

Глава 1 Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с требованиями случайного объема, с пуассоновским входящим потоком и с экспоненциальной функцией времени обслуживания

Системы массового обслуживания с входящими пуассоновскими потоками (потоки, обладающие свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия) и экспоненциальным временем обслуживания стали называть марковскими моделями, так как для их исследования применялись методы теории цепей Маркова [18].

1.1 Математическая модель системы $M^{(v)}/M/\infty$

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает простейший (пуассоновский) с параметром λ поток заявок, время обслуживание экспоненциальное с параметром μ (Рисунок 1).

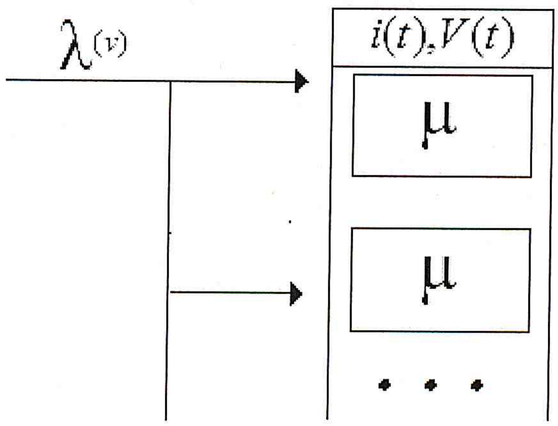


Рисунок 1 – СМО с требованиями случайного объема, бесконечным числом приборов, простейшим входящим потоком и с экспоненциальным обслуживанием

Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым объемом $v > 0$. Объемы различных требований являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $G(y) = P\{v < y\}$.

Пусть $i(t)$ – число заявок в системе, то есть число приборов, занятых в момент времени t. Обозначим $V(t)=\sum_{k=0}^{i(t)} v_k$ – суммарный объем заявок, находящихся в системе в момент времени t.

Задача заключается в определении основных характеристик суммарного объема заявок в системе.

1.2 Метод производящих функций

Введем характеристическую функцию для суммарного объема находящихся в системе требований.

$$H(u)=M\left\{e^{juV(t)}\right\}=M\left\{\exp\left\{ju\sum_{k=0}^{i(t)}v_k\right\}\right\}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}M\left\{\exp\left\{ju\sum_{k=0}^{i(t)}v_k\right\}\Big|i(t)=i\right\}P\left\{i(t)=i\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}M\left\{\exp\left\{ju\left(v_1+v_2+\ldots+v_i\right)\right\}\right\}P(i);$$

Обозначим $\varphi(u)=M\left\{e^{juv}\right\}$, тогда

$$H(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\varphi(u)\right)^i P(i)=F(\varphi(u)) \tag{1}$$

Таким образом, характеристическая функция суммарного объема требований имеет вид производящей функции числа занятых приборов с аргументом $\varphi(u)$.

Найдем вид производящей функции числа занятых приборов, для этого построим для распределения вероятностей $\mathrm{P}(i,t)=\mathrm{P}\left\{i(t)=i\right\}$ систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(i,t)}{\partial t}=-\left(\lambda+i\mu\right)P(i,t)+\lambda P(i-1,t)+\left(i+1\right)\mu P(i+1,t);$$

Введем характеристическую функцию

$$H(u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(i,t);$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда система уравнений Колмогорова для характеристических функций, будет иметь вид

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=\lambda H(u,t)\left(e^{ju}-1\right)+j\mu\frac{\partial H(u,t)}{\partial u}\left(1-e^{-ju}\right);$$

В стационарном режиме

$$j\mu\frac{\partial H(u)}{\partial u}\left(e^{-ju}-1\right)=\lambda H(u)\left(e^{ju}-1\right);$$

Решение данной системы имеет вид

$$H(u)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{ju}\right)\right\};$$

Переходя от характеристической функции к производящей и обозначив $e^{ju}=z$, получим

$$F(z)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\right\};$$

Тогда, используя выражение (1), найдем характеристическую функцию для суммарного объема требований, находящихся в системе в стационарном режиме

$$H(u)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-\varphi(u))\right\};$$

Следовательно, математическое ожидание суммарного объема требований в системе

$$\alpha=M\{V\}=\left.\frac{\partial H(u)}{\partial u}\right|_{u=0}=\frac{\lambda}{\mu}a_1;$$

где $a_1=M\{v\}=\int\limits_0^\infty(1-G(y))dy$.

Вычислим второй момент

$$\alpha^2 = M\left\{V^2\right\} = \frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}\bigg|_{u=0} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_2 + \frac{\lambda}{\mu} a_2 \ ;$$

Тогда дисперсия имеет вид

$$\beta = M\left\{V^2\right\} - \left(M\left\{V\right\}\right)^2 = \frac{\lambda}{\mu} a_2 ;$$

где $a_2 = M\left\{v^2\right\}$.

Глава 2 Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с требованиями случайного объема, с MMPP входящим потоком и с экспоненциальной функцией времени обслуживания

Развитие техники, телефонии, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи привело к необходимости создания и применения более адекватных математических моделей процессов передачи данных, так как циркулирующие в них потоки перестали соответствовать пуассоновской модели [63,65]. С данной задачей хорошо справляются модулированные пуассоновские потоки, в частности, в данной работе рассматривается марковский модулированный поток (MMPP).

1.3 Математическая модель системы $\mathrm{MMPP}^{(v)}/\mathrm{M}/\infty$

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \ldots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, K$, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\,\lambda_k$, $\lambda_k \geq 0$. Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром μ (Рисунок 2).

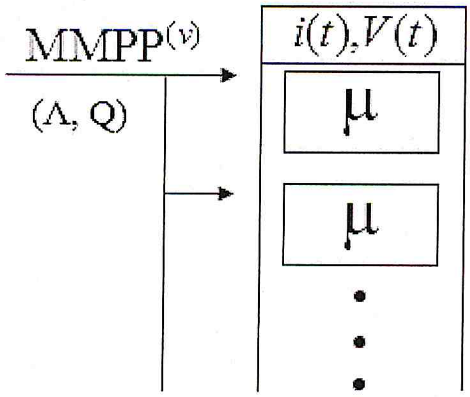


Рисунок 2 – СМО с требованиями случайного объема, бесконечным числом приборов, ММРР входящим потоком и с экспоненциальным обслуживанием

Ставится аналогичная предыдущей задача исследования характеристик суммарного объема требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системы.

Рассмотрим двумерный процесс $\{k(t),i(t)\}$, для которого распределение вероятностей имеет вид $P(k,i,t)=P\{k(t)=k,i(t)=i\}$.

Для $P(k,i,t)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,i,t)}{\partial t}=-\left(\lambda_k+i\mu\right)P(k,i,t)+\lambda_k P(k,i-1,t)+$$

$$+\left(i+1\right)\mu P(k,i+1,t)+\sum_{\xi}q_{\xi k}P(\xi,i,t);$$

Начальные условия для данной системы имеют вид

$$P(k,i,0)=\mathbf{r}(k);$$

где $\mathbf{r}(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемое системой уравнений

$$\sum_{\xi}\mathbf{r}(\xi)q_{\xi k};$$

и условием нормировки

$$\sum_{k} \mathbf{r}(k) = 1 .$$

Система Колмогорова в стационарном режиме:

$$-\left(\lambda_k + i\mu\right)P(k,i,t) + \lambda_k P(k,i-1,t) + \left(i+1\right)\mu P(k,i+1,t) +$$

$$+\sum_{\xi} q_{\xi k} P(\xi,i,t) = 0 .$$

Введем частичную характеристическую функцию

$$H(k,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k,i) .$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k,i-1) = e^{ju} H(k,u) ;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(i+1\right) e^{jui} P(k,i+1) = je^{-ju} \frac{\partial H(k,u)}{\partial u} ;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} ie^{jui} P(k,i) = j \frac{\partial H(k,u)}{\partial u} ;$$

можно получить систему уравнений для характеристической функции в матричном виде

$$j\mu\left(e^{-ju} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{ju} - 1\right)\mathbf{\Lambda}\right\} ; \qquad (2)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{r} ;$$

где $\mathbf{H}(u,t) = [H(1,u,t), H(2,u,t), ..., H(K,u,t)]$,

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & \lambda_K\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & . & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & . & q_{2K}\\ . & . & . & .\\ q_{K1} & q_{K2} & . & q_{KK}\end{bmatrix}.$$

1.4 Метод асимптотического анализа

В теории массового обслуживания существует достаточно много моделей, исследование которых не удается выполнить аналитическими методами и получить окончательные результаты в виде формул.

Для решения данной проблемы, можно воспользоваться методом асимптотического анализа.

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания будем называть исследование уравнений определяющих какие-либо характеристики системы при выполнении некоторого асимптотического (предельного) условия [24].

2.2.1 Асимптотика первого порядка

Для решения уравнения (2) воспользуемся асимптотическим анализом в условии растущего времени обслуживания, то есть $\mu\to 0$.

Для нахождения асимптотики первого порядка, обозначим $\mu=\varepsilon$ и выполним замены $u=\varepsilon x, \mathbf{H}(u)=\mathbf{F}_1(x,\varepsilon)$, получим

$$j\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\frac{\partial\mathbf{F}_1(x,\varepsilon)}{\partial x}=\mathbf{F}_1(x,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q}+\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{\Lambda}\right\}. \tag{3}$$

Сформулируем следующую теорему

Теорема 1. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_1(x,\varepsilon)$ *уравнения* (3) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(x,\varepsilon)=\mathbf{r}\exp\{jx\kappa_1\}; \tag{4}$$

где $\kappa_1=\mathbf{r\Lambda e}$, $\mathbf{e}$ *– единичный вектор-столбец.*

Доказательство.

В уравнение (3) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\mathbf{F}_1(x)\mathbf{Q} = 0;$$

решение которого запишем в виде

$$\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{r}\Phi_1(x). \tag{5}$$

Скалярную функцию $\Phi_1(x)$ определим следующим образом: просуммируем все уравнения системы (3), получим равенство

$$j\left(e^{-j\varepsilon x} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_1(x,\varepsilon)}{\partial x}\mathbf{e} = \mathbf{F}_1(x,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{j\varepsilon x} - 1\right)\mathbf{\Lambda}\right\}\mathbf{e} = \mathbf{F}_1(x,\varepsilon)\left(e^{j\varepsilon x} - 1\right)\mathbf{\Lambda e};$$

разложим экспоненты в ряд Тейлора, поделим левую и правую части этого равенства на ε и устремим его к нулю, получим, что для $\mathbf{F}_1(x)$ выполняется равенство

$$x\frac{\partial \mathbf{F}_1(x)}{\partial x}\mathbf{e} = \mathbf{F}_1(x)\,jx\mathbf{r\Lambda e};$$

подставив в которое (5) и учитывая, что $\mathbf{re} = 1$, получим для $\Phi_1(x)$ уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} = j\Phi_1(x)\mathbf{r\Lambda e}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi_1(x) = \exp\left\{jx\kappa_1\right\};$$

где $\kappa_1 = \mathbf{r\Lambda e}$.

Подставляя это выражение в (5), получим. Что $\mathbf{F}_1(x)$ определяется равенством (4).

Теорема доказана.

Сделав обратные замены, можно записать приближенное равенство

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(x,\varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(x) = \mathbf{r}\exp\left\{jx\kappa_1\right\};$$

Следовательно, для характеристической функции стационарного процесса $i(t)$ запишем

$$h_i^{(1)}(u) = M\exp\left\{jui(t)\right\} = \mathbf{H}(u)\mathbf{e} \approx \exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\mu}\right\};$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка числа занятых приборов в системе.

Используя выражение (1), запишем характеристическую функцию стационарного процесса $V(t)$

$$h_V^{(1)} = M\exp\left\{juV(t)\right\} \approx \exp\left\{jua_1\frac{\kappa_1}{\mu}\right\}.$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка суммарного объема требований в системе.

Отметим, что асимптотика первого порядка определяет асимптотическое среднее значение для числа занятых приборов, равное $\frac{\kappa_1}{\mu}$, для суммарного объема требований, равное $\frac{\kappa_1}{\mu}a_1$.

2.2.2 Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (2) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u)\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\mu}\right\}.$$

Тогда для $\mathbf{H}_2(u)$ получим уравнение

$$j\mu\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial \mathbf{H}_2(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_2(u)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{ju}-1\right)\mathbf{\Lambda} + \kappa_1\left(e^{-ju}-1\right)\mathbf{I}\right\};$$

где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица.

Обозначим $\mu = \varepsilon^2$ и выполним замены $u = \varepsilon x, \mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(x,\varepsilon)$, получим

$$j\varepsilon\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_2(x,\varepsilon)}{\partial x}=\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q}+\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{I}\right\}. \tag{6}$$

Докажем следующее утверждение

Теорема 2. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)$ *уравнения* (6) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)=\mathbf{r}\exp\left\{\frac{(jx)^2}{2}\kappa_2\right\}; \tag{7}$$

где $\kappa_2=\mathbf{r}\Delta\mathbf{e}+\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}$, *а* $\mathbf{f}_2$ *является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases}\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+\mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda}-\mathrm{k}_1\mathbf{I}\right)=0,\\ \mathbf{f}_2\mathbf{e}=0.\end{cases}$$

Доказательство.

В уравнении (6) выполним придельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим уравнение

$$\mathbf{F}_2(x)\mathbf{Q}=0; \tag{8}$$

решение которого запишем в виде

$$\mathbf{F}_2(x)=\mathbf{r}\Phi_2(x).$$

Решение $\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)$ уравнения (6) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)=\Phi_2(x)\left\{\mathbf{r}+j\varepsilon x\mathbf{f}_2\right\}+O(\varepsilon^2); \tag{9}$$

подставив которое в (6) получим

$$O(\varepsilon^2)=\Phi_2(x)\left\{\mathbf{r}+j\varepsilon x\mathbf{f}_2\right\}\left[\mathbf{Q}+j\varepsilon x\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\right)\mathbf{I}\right]=$$

$$=\Phi_2(x)\left\{\mathbf{r}\mathbf{Q}+j\varepsilon x\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+j\varepsilon x\mathbf{r}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\right\}.$$

Из того, что $\mathbf{r}\mathbf{Q}=0$, следует, что вектор $\mathbf{f}_2$ определяется решением системы уравнений

$$\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+\mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda}-\mathrm{k}_1\mathbf{I}\right)=0.$$

Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(x)$ просуммируем все уравнения системы (6), получим

$$j\varepsilon\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_2(x,\varepsilon)}{\partial x}\mathbf{e}=\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q}+\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{I}\right\}\mathbf{e}=$$

$$\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)\left\{\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{I}\right\}\mathbf{e}.$$

Разложим в ряд экспоненты в этом равенстве

$$e^{j\varepsilon x}=1+j\varepsilon x+O(\varepsilon^2),$$

получим следующее соотношение

$$j\varepsilon(-j\varepsilon)\frac{\partial \mathbf{F}_2(x,\varepsilon)}{\partial x}=\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)\left\{j\varepsilon x\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\left(\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I}\right)\right\}\mathbf{e}+O(\varepsilon^3);$$

Подставим в данное выражение разложение (9), получим

$$\varepsilon^2 x\frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x}\mathbf{re}=$$

$$=\Phi_2(x)\left\{\mathbf{r}+j\varepsilon x\mathbf{f}_2\right\}\left[j\varepsilon x\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\right]\mathbf{e}+O(\varepsilon^3)=$$

$$=\Phi_2(x)j\varepsilon x\left\{\mathbf{r}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}+\frac{j\varepsilon x}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}+j\varepsilon x\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}\right\}+O(\varepsilon^3).$$

В силу того, что $\mathbf{r}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}=0$, последнее равенство примет вид

$$\frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x}=j^2 x\Phi_2(x)\left\{\mathbf{r\Lambda e}+\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}\right\};$$

Решение этого уравнение, удовлетворяющее условию $\Phi_2(0)=1$ можно записать в виде выражения

$$\Phi_2(x)=\exp\left\{\frac{(jx)^2}{2}\kappa_2\right\};$$

где $\kappa_2=\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{e}$.

Подставляя это выражение в (8), получим. Что $\mathbf{F}_2(x)$ определяется равенством (7).

Теорема доказана.

Сделав обратные замены, можно написать, что

$$\mathbf{H}_2(u)=\mathbf{F}_2(x,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_2(x)=\mathbf{r}\exp\left\{\frac{(jx)^2}{2}\kappa_2\right\}=\mathbf{r}\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}.$$

Тогда асимптотика второго порядка для характеристической функции числа занятых приборов в стационарном режиме имеет вид

$$h_i^{(2)}=\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\mu}+\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}.$$

Следовательно, асимптотика второго порядка для характеристической функции суммарного объема требований в системе в стационарном режиме имеет вид

$$h_V^{(2)}=\exp\left\{jua_1\frac{\kappa_1}{\mu}+\frac{(ju)^2a_2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}.$$

Отметим, что вторая асимптотика для числа занятых приборов и для суммарного объема имеет гауссовское распределение с параметрами

$$\alpha_i=Mi(t)=\frac{\kappa_1}{\mu},\qquad \beta_i=M\left\{\left(i(t)-\alpha_i\right)^2\right\}=\frac{\kappa_2}{\mu},$$

$$\alpha_V=MV(t)=\frac{\kappa_1}{\mu}a_1,\qquad \beta_V=M\left\{\left(V(t)-\alpha_V\right)^2\right\}=\frac{\kappa_2}{\mu}a_2,$$

2.2.3 Асимптотика третьего порядка

Для нахождения асимптотики третьего порядка в уравнении (2) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_3(u)\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\};$$

Тогда для $\mathbf{H}_3(u)$ получим уравнение

$$j\mu\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial \mathbf{H}_3(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_3(u)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{ju}-1\right)\mathbf{\Lambda} + \left(e^{-ju}-1\right)\left(\kappa_1 + ju\kappa_2\right)\mathbf{I}\right\}.$$

Обозначим $\mu = \varepsilon^3$ и, выполнив замены $u = \varepsilon x$, $\mathbf{H}_3(u) = \mathbf{F}_3(x,\varepsilon)$, получим

$$j\varepsilon^2\left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_3(x,\varepsilon)}{\partial x} = \mathbf{F}_3(x,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\mathbf{\Lambda} + \right.$$

$$\left. + \left(e^{-j\varepsilon x}-1\right)\left(\kappa_1 + j\varepsilon x\kappa_2\right)\mathbf{I}\right\}. \quad (10)$$

Докажем следующее утверждение

Теорема 3. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_3(x,\varepsilon)$ *уравнения* (10) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_3(x,\varepsilon) = \mathbf{r}\exp\left\{\frac{(jx)^3}{6}\kappa_3\right\}; \quad (11)$$

где $\kappa_3 = \mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda} + (\kappa_1 - 2\kappa_2)\mathbf{I}\right)\mathbf{E} + \mathbf{f}_3\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{E} + \kappa_2$, *а* $\mathbf{f}_3$ *является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_3\mathbf{Q} + 2\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right) + \mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda} + (\mathrm{k}_1 - 2\kappa_2)\mathbf{I}\right) = 0, \\ \mathbf{f}_3\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Доказательство.

Выполнив предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\mathbf{F}_3\mathbf{Q} = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$\mathbf{F}_3(x) = \mathbf{R}\Phi_3(x). \tag{12}$$

Тогда решение уравнения (10) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_3(x,\varepsilon) = \Phi_3(x)\left\{\mathbf{R} + j\varepsilon x\mathbf{f}_2 + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\mathbf{f}_3\right\} + O(\varepsilon^3); \tag{13}$$

подставив которое в (10), получим

$$O(\varepsilon^3) = \Phi_3(x)\left\{\mathbf{r} + j\varepsilon x\mathbf{f}_2 + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\mathbf{f}_3\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\mathbf{Q} + j\varepsilon x\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right) + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\left(\mathbf{\Lambda} + \left(\kappa_1 - 2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right)\right] =$$

$$= \Phi_3(x)\left\{\mathbf{rQ} + j\varepsilon x\mathbf{r}\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right) + \mathbf{r}\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\left(\mathbf{\Lambda} + \left(\kappa_1 - 2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{f}_2\mathbf{Q} + (j\varepsilon x)^2\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right) + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2}\mathbf{f}_3\mathbf{Q}\right\};$$

Так как $\mathbf{rQ} = 0$ и $\mathbf{f}_2\mathbf{Q} + \mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda} - \mathrm{k}_1\mathbf{I}\right) = 0$, то вектор $\mathbf{f}_3$ определяется решением системы уравнений

$$\mathbf{f}_3\mathbf{Q} + 2\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right) + \mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda} + \left(\mathrm{k}_1 - 2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right) = 0.$$

Для нахождения $\Phi_3(x)$ просуммируем все уравнения системы (10), получим

$$j\varepsilon\left(e^{-j\varepsilon x} - 1\right)\frac{\partial\mathbf{F}_3(x,\varepsilon)}{\partial x}\mathbf{e} =$$

$$= \mathbf{F}_3(x,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{j\varepsilon x} - 1\right)\mathbf{\Lambda} + \left(e^{-j\varepsilon x} - 1\right)\left(\kappa_1 + j\varepsilon x\kappa_2\right)\mathbf{I}\right\}\mathbf{e} =$$

$$= \mathbf{F}_3(x,\varepsilon)\left\{\left(e^{j\varepsilon x} - 1\right)\mathbf{\Lambda} + \left(e^{-j\varepsilon x} - 1\right)\left(\kappa_1 + j\varepsilon x\kappa_2\right)\mathbf{I}\right\}\mathbf{e}.$$

Разложим в ряд экспоненты в этом равенстве, тогда получим выражение

$$j\varepsilon^2\left(-j\varepsilon x\right)\frac{\partial \mathbf{F}_3(x,\varepsilon)}{\partial x}\mathbf{e}=\mathbf{F}_3(x,\varepsilon)\left\{j\varepsilon x\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+\frac{\left(j\varepsilon x\right)^2}{2}\left(\mathbf{\Lambda}+\left(\kappa_1-2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right)\right\};$$

Подставив в которое разложение (13), имеем

$$\varepsilon^3 x\frac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x}=\Phi_3(x)\left\{\mathbf{r}+j\varepsilon x\mathbf{f}_2+\frac{\left(j\varepsilon x\right)^2}{2}\mathbf{f}_3\right\}\Big[j\varepsilon x\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+$$

$$+\frac{\left(j\varepsilon x\right)^2}{2}\left(\mathbf{\Lambda}+\left(\kappa_1-2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right)+\frac{\left(j\varepsilon x\right)^3}{3!}\left(\mathbf{\Lambda}+\left(3\kappa_2-\kappa_1\right)\mathbf{I}\right)\Big]+O(\varepsilon^4)$$

Таким образом, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Phi_3(x)}{dx}=\frac{j^3x^3}{2}\Phi_3(x)\left(\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}+\left(\kappa_1-2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right)\mathbf{E}+\mathbf{f}_3\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{E}+\kappa_2\right).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi_3(x)=\exp\left\{\frac{\left(jx\right)^3}{6}\kappa_3\right\},$$

где $\kappa_3=\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda}+\left(\kappa_1-2\kappa_2\right)\mathbf{I}\right)\mathbf{E}+\mathbf{f}_3\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{E}+\kappa_2$.

Подставляя это выражение в (12), получим. Что $\mathbf{F}_2(x)$ определяется равенством (11).

Теорема доказана.

Сделав обратные замены, можно написать, что

$$\mathbf{H}_3(u)=\mathbf{F}_3(x,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_3(x)=\mathbf{r}\exp\left\{\frac{\left(jx\right)^3}{6}\kappa_3\right\}=\mathbf{r}\exp\left\{\frac{\left(ju\right)^3}{6}\frac{\kappa_3}{\mu}\right\}.$$

Тогда асимптотика второго порядка для характеристической функции числа занятых приборов в стационарном режиме имеет вид

$$h_i^{(3)} = \exp\left\{ ju\frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6}\frac{\kappa_3}{\mu} \right\};$$

Следовательно, асимптотика второго порядка для характеристической функции суммарного объема требований в системе в стационарном режиме имеет вид

$$h_V^{(3)} = \exp\left\{ jua_1\frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2 a_2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu} + \frac{(ju)^3 a_3}{6}\frac{\kappa_3}{\mu} \right\};$$

где $a_3 = M\left\{v^3\right\}$.

Глава 3 Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с требованиями случайного объема, с MMPP входящим потоком и с произвольным временем обслуживания

Для рассматриваемой системы обслуживания не только двумерный процесс $\{i(t),V(t)\}$, но также и трехмерный процесс $\{k(t),i(t),V(t)\}$ не является марковским.

Для исследования таких систем массового обслуживания предлагается использовать метод просеянного потока, впервые предложенный в 2006 году в монографии [24]. Предлагаемый метод позволяет решить проблему исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов, сведя ее к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

3.1 Математическая модель системы $\mathrm{MMPP}^{(v)}/\mathrm{GI}/\infty$

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает марковски модулированный поток (MMPP-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t)=1,2,...,K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$, i, j = 1, 2, …, K, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}\,\lambda_k$, $\lambda_k \geq 0$. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$ (рисунок 1). Каждое требование характеризуется некоторым случайным объемом v. Объемы различных требований являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $G(y)=\mathrm{P}\{v<y\}$.

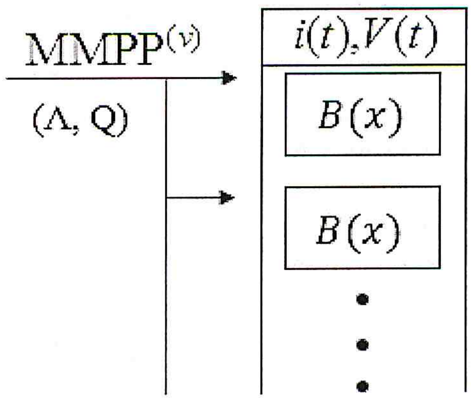


Рисунок 3 – Бесконечнолинейная система массового обслуживания с заявками случайного объема, MMPP входящим потоком и с произвольным временем обслуживания

Аналогично предыдущим параграфам, $i(t)$ – число заявок в системе, $V(t) = \sum_{k=0}^{i(t)} v_k$ – суммарный объем заявок, находящихся в системе.

3.2 Метод просеянного потока

Базовой конструкцией для применения данного метода является просеянный поток.

На оси времени t отметим моменты наступления событий нашего потока (Рисунок 4)

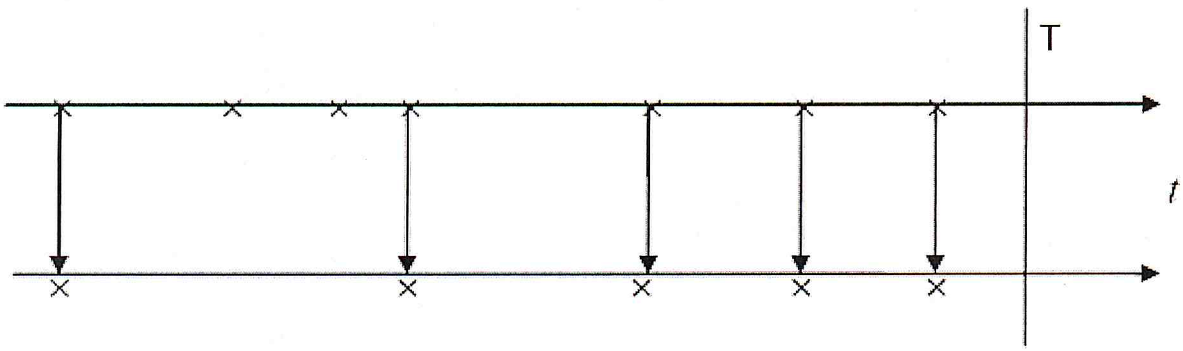


Рисунок 4 – Просеивание входящего потока

Отметим некоторый момент времени Т. Полагается, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $t<T$ с вероятностью

$$S(t)=1-B(T-t);$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1-S(t)$ не рассматривается.

Заявки, которые не попали в просеянный поток, завершат обслуживание и покинут систему до момента Т, а все заявки просеянного потока в момент времени Т будут находиться в системе, занимая ее приборы.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента t. $W(t)$ – суммарный объем просеянных заявок.

Если в некоторый начальный момент времени $t_0<T$ система обслуживания свободна, то для момента времени T выполняется равенство

$$i(T)=n(T);$$

$$W(T)=V(T).$$

3.2.1 Метод просеянного потока для системы $\mathrm{MMPP}^{(v)}/\mathrm{GI}/\infty$

Для распределения вероятностей

$$P(k,n,z,t)=P\{k(t)=k,n(t)=n,W(t)<z\};$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$P(k,n,z,t+\Delta t)=P(k,n,z,t)(1-\lambda_k S(t)\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t)+$$

$$\lambda_k S(t)\Delta t\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)dG(y)+\sum_{\upsilon\neq k}P(\upsilon,n,z,t)q_{\upsilon k}\Delta t+o(\Delta t);$$

$$\frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial t}=\lambda_k s(t)\left[\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)dG(y)-P(k,n,z,t)\right]+$$

$$+\sum_{\upsilon}P(\upsilon,n,z,t)q_{\upsilon k}.$$

В матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{P}(n,z,t)}{\partial t} = \mathbf{\Lambda} S(t)\left[\int_0^z \mathbf{P}(n-1,z-y,t)dG(y) - \mathbf{P}(n,z,t)\right] + \mathbf{P}(n,z,t)\mathbf{Q}.$$

Введем характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju_1 n}\int_0^{\infty} e^{ju_2 z}\mathbf{P}(n,z,t)dz.$$

Тогда систему уравнений Колмогорова можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)\mathbf{\Lambda} S(t) + \mathbf{Q}\right], \qquad (14)$$

где $G^*(u_2) = \int_0^{\infty} e^{ju_2 y}dG(y)$.

Начальное условие имеет вид

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0) = \mathbf{r}.$$

Для решения системы (14) применим метод асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания.

3.3 Метод асимптотического анализа

Обозначим среднее время обслуживания как

$$b_1 = \int_0^{\infty} x dB(x) = \int_0^{\infty}(1-B(x))dx.$$

Предполагается, что функция распределения $B(x)$ имеет вид

$$B(x) = B_1\left(\frac{x}{b_1}\right);$$

где $B_1(x)$ – независящая от b функция распределения неотрицательной случайной величины, математическое ожидание которой равно единице.

Найдем асимптотическое решение задачи (14) при условии $b_1 \to \infty$.

3.3.1 Асимптотика первого порядка

Обозначим $\dfrac{1}{b_1}=\varepsilon$ и выполним замены в задаче (14)

$$\varepsilon t=\tau,\ S(t)=S_1(\tau),\ u_1=\varepsilon x_1,\ u_2=\varepsilon x_2,\ \mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon).$$

тогда рассматриваемая задача примет вид

$$\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}S_1(\tau)\left(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2)-1\right)+\mathbf{Q}\right],\qquad(15)$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau_0,\varepsilon)=\mathbf{r}.$$

Сформулируем и докажем следующую теорему

Теорема 4. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ *уравнения* (15) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau)=\mathbf{r}exp\left\{j\mathrm{k}_1\left(x_1+x_2a_1\right)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(w)dw\right\};\qquad(16)$$

где $\kappa_1=\mathbf{r\Lambda e}$, $\tau_0=\varepsilon t_0$, $a_1=\int\limits_0^\infty ydG(y)$.

Доказательство.

В (15) выполним предельный переход при $\varepsilon\to0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau)\mathbf{Q}=0,\\ \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau_0)=\mathbf{r},\end{cases}$$

для которой решение имеет вид

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau)=\mathbf{r}\Phi_1(x_1,x_2,\tau),\qquad(17)$$

где для скалярной функции $\Phi_1(x_1,x_2,\tau)$ выполняется начальное условие

$$\Phi_1(x_1,x_2,\tau_0)=1.$$

Для нахождения $\Phi_1(x_1,x_2,\tau)$ сложим все уравнения системы (15), умножив справа эту систему на единичный вектор, получим

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{e}=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}S_1(\tau)\left(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2)-1\right)+\mathbf{Q}\right]\mathbf{e}=$$

$$=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2)-1\right)S_1(\tau)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}.$$

Поделив правую и левую части этого равенства на ε и выполнив предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau}\mathbf{e}=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left(jx_1+jx_2a_1\right)S_1(\tau)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e},$$

где $a_1=\int\limits_0^\infty ydG(y)$.

Подставляя в это равенство произведение (17), запишем уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau}=j\Phi_1(x_1,x_2,\tau)\left(x_1+x_2a1\right)\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}S_1(\tau).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi_1(x_1,x_2,\tau)=\exp\left\{j\kappa_1\left(x_1+x_2a_1\right)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(v)dv\right\},$$

где $\kappa_1=\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$.

Подставляя это выражение в (17), получим равенство (16).

Теорема доказана.

Сделав обратную замену, получим функцию

$$h^{(1)}(u_1,u_2,t)=\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1+u_2a1\right)\int\limits_{t_0}^{t}S_1(v)dv\right\}.$$

При $t=T$, $t_0\to-\infty$ и в силу того, что $i(T)=n(T)$ и $W(T)=V(T)$ выполняется равенство

$$h^{(1)}(u_1,u_2)=\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1+u_2a_1\right)b_1\right\}, \tag{18}$$

где $b_1=\int\limits_{-\infty}^{T}S(z)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{T}\left(1-B(T-\tau)\right)d\tau=\int\limits_{0}^{\infty}(1-B(\tau))d\tau$.

Равенство (18) будем называть асимптотикой первого порядка для процесса $\left\{i(t),V(t)\right\}$ в стационарном режиме, определяющей среднее число событий, наступивших в просеянном потоке. Вектор математического ожидания имеет вид

$$a=\left[\kappa_1b_1 \quad \kappa_1a_1b_1\right].$$

3.3.2 Асимптотика второго порядка

В задаче (14) выполним замену

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)\exp\left\{j\kappa_1\left(u_1+u_2a_1\right)\int\limits_{t_0}^{t}S_1(z)dz\right\};$$

получим

$$\frac{\partial\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)\Big[\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)\mathbf{\Lambda}S(t)-$$

$$-j\kappa_1\left(u_1+a_1u_2\right)S(t)\mathbf{I}+\mathbf{Q}\Big], \tag{19}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t_0)=\mathbf{r}.$$

Обозначим $\dfrac{1}{b_1}=\varepsilon^2$ и выполним замены

$\varepsilon^2t=\tau$, $S(t)=S_1(\tau)$, $u_1=\varepsilon x_1$, $u_2=\varepsilon x_2$, $\mathbf{H}_2(u_1,u_2,t)=\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$.

Тогда рассматриваемая задача примет вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\Big[\left(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2)-1\right)\mathbf{\Lambda}S_1(t)-$$

$$-\kappa_1\left(j\varepsilon x_1 + a_1 j\varepsilon x_2\right)S_1(\tau)\mathbf{I} + \mathbf{Q}\big] \tag{20}$$

$$\mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}.$$

Теорема 5. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$ *уравнения* (20) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r}\exp\left\{\frac{(jx_1)^2}{2}\left(\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v)dv + \kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v)dv\right) + \right.$$

$$+\frac{(jx_2)^2}{2}\left(\kappa_1 a_2\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v)dv + \kappa_2 a_1^2\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v)dv\right) +$$

$$\left. + jx_1 jx_2\left(\kappa_1 a_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v)dv + \kappa_2 a_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v)dv\right)\right\}, \tag{21}$$

где $\kappa_2 = 2\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{E}$, $a_2 = \int_0^\infty y^2 dG(y)$, *а вектор* $\mathbf{f}_2$ *является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_2\mathbf{Q} + \mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}\right) = 0, \\ \mathbf{f}_2\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Доказательство.

В (20) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим систему

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau)\mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau_0) = \mathbf{r}. \end{cases}$$

Решение $\mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau)$ имеет вид

$$\mathbf{F}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r}\Phi_2(x_1, x_2, \tau), \tag{22}$$

где для скалярной функции $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$ выполняется начальное условие

$$\Phi_2(x_1, x_2, \tau_0) = 1.$$

Решение $\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)$ системы (20) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)=\Phi_2(x_1,x_2,\tau)\left\{\mathbf{r}+\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)S_1(\tau)\mathbf{f}_2\right\}+O(\varepsilon^2), \qquad (23)$$

подставив которое в (20), получим

$$O(\varepsilon^2)=\Phi_2(x_1,x_2,\tau)\left\{\mathbf{r}+\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)S_1(\tau)\mathbf{f}_2\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\mathbf{Q}+\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)S_1(\tau)\right]=$$

$$=\Phi_2(x_1,x_2,\tau)\left\{\mathbf{rQ}+\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)S_1(\tau)+\right.$$

$$\left.+\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)S_1(\tau)\mathbf{f}_2\mathbf{Q}\right\}.$$

Учитывая, что $\mathbf{rQ}=0$, получим уравнение для определения вектора $\mathbf{f}_2$

$$\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+\mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)=0.$$

Для нахождения $\Phi_2(x_1,x_2,\tau)$ сложим все уравнения системы (12), умножив справа эту систему на единичный вектор, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{e}=\mathbf{F}_2(x_1,x_2,\tau,\varepsilon)\left[\left(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2)-1\right)\mathbf{\Lambda}S_1(\tau)-\right.$$

$$\left.-j\kappa_1\left(j\varepsilon x_1+a1j\varepsilon x_2\right)S_1(\tau)\mathbf{I}+\mathbf{Q}\right]\mathbf{e}.$$

Подставляя разложение (23) в последнее равенство и учитывая, что

$$e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2)=1+j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2+\frac{\left(j\varepsilon x_1\right)^2}{2}+j\varepsilon x_1 j\varepsilon x_2 a_1+\frac{\left(j\varepsilon x_2\right)^2}{2}a_2,$$

получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau}=$$

$$=\Phi_2(x_1,x_2,\tau)\left\{\mathbf{r}+\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)S_1(\tau)\mathbf{f}_2\right\}\left[S_1(\tau)\left(j\varepsilon x_1+j\varepsilon x_2 a_1\right)\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+\right.$$

$$\left.+\mathbf{\Lambda}S_1(\tau)\left(\frac{\left(j\varepsilon x_1\right)^2}{2}+j\varepsilon x_1 j\varepsilon x_2 a_1^2+\frac{\left(j\varepsilon x_2\right)^2}{2}a_2\right)\right]\mathbf{e}+O(\varepsilon^3)=$$

$$= \Phi_2(x_1, x_2, \tau)\left\{ \frac{(j\varepsilon x_1)^2}{2}\left(\kappa_1 S_1(\tau) + \kappa_2 S_1^2(\tau)\right) + \right.$$

$$+ \frac{(j\varepsilon x_2)^2}{2}\left(\kappa_1 a_2 S_1(\tau) + \kappa_2 a_1^2 S_1^2(\tau)\right) +$$

$$\left. + j\varepsilon x_1 j\varepsilon x_2 \left(\kappa_1 a_1 S_1(\tau) + \kappa_2 a_1^2 S_1^2(\tau)\right)\right\} + O(\varepsilon^3);$$

где $\kappa_2 = 2\mathbf{f}_2\left(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}\right)\mathbf{e}$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi_2(x_1, x_2, \tau) = exp\left\{ \frac{(jx_1)^2}{2}\left(\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v)dv + \kappa_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v)dv \right) + \right.$$

$$+ \frac{(jx_2)^2}{2}\left(\kappa_1 a_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v)dv + \kappa_2 a_1^2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v)dv \right) +$$

$$+ jx_1 jx_2 \left(\kappa_1 a_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v)dv + \kappa_2 a_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v)dv \right);$$

где $a_2 = \int_0^{\infty} y^2 dG(y)$,

подставляя которое в (22), получим выражение (21).

Теорема доказана.

Сделав обратную замену получим

$$h^{(2)}(u_1, u_2, t) = \mathbf{r}\exp\left\{ j\kappa_1 \left(u_1 + u_2 a 1\right) \int_{t_0}^{t} S_1(v)dv + \right.$$

$$+ \frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1 \int_{t_0}^{t} S(v)dv + \kappa_2 \int_{t_0}^{t} S^2(v)dv \right) +$$

$$+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(\kappa_1 a_2\int_{t_0}^{t}S(v)dv+\kappa_2 a_1^2\int_{t_0}^{t}S^2(v)dv\right)+$$

$$+ju_1 ju_2\left(\kappa_1 a_1\int_{t_0}^{t}S(v)dv+\kappa_2 a_1\int_{t_0}^{t}S^2(v)dv\right).$$

При $t=T$, $t_0\to-\infty$ и в силу того, что $i(T)=n(T)$ и $W(T)=V(T)$ выполняется равенство

$$h^{(2)}(u_1,u_2)=\exp\left\{j\kappa_1 b_1\left(u_1+u_2 a_1\right)+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1 b_1+\kappa_2 b_2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(\kappa_1 a_2 b_1+\kappa_2 a_1^2 b_2\right)+ju_1u_2\left(\kappa_1 a_1 b_1+\kappa_2 a_1 b_2\right)\right\},$$

где $b2=\int_0^\infty(1-B(\tau))^2d\tau$.

Данное равенство определяет асимптотику второго порядка для характеристической функции процесса $\{i(t),V(t)\}$, которая определяет гауссовскую характеристическую функцию с параметрами математического ожидания

$$a=\left[\mathrm{k}_1 b_1\quad \mathrm{k}_1 a_1 b_1\right],$$

ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathrm{k}_1 b_1+\mathrm{k}_2 b_2 & \mathrm{k}_1 a_1 b_1+\mathrm{k}_2 a_1 b_2\\ \mathrm{k}_1 a_1 b_1+\mathrm{k}_2 a_1 b_2 & \mathrm{k}_1 a_2 b_1+\mathrm{k}_2 a_1^2 b_2\end{bmatrix},$$

и коэффициентом корреляции

$$r=\frac{\mathrm{k}_1 a_1 b_1+\mathrm{k}_2 a_1 b_2}{\sqrt{\mathrm{k}_1 b_1+\mathrm{k}_2 b_2}\sqrt{\mathrm{k}_1 a_2 b_1+\mathrm{k}_2 a_1^2 b_2}}.$$

Следовательно, отдельно можно записать асимптотическую характеристическую функцию для процесса $i(t)$ числа занятых приборов в стационарном режиме получим

$$h_i^{(2)}(u) = \exp\left\{ j\mathrm{k}_1 b_1 u + \frac{(ju)^2}{2}\left(\mathrm{k}_1 b_1 + \mathrm{k}_2 b_2\right) \right\},$$

и для процесса суммарного объема требований в стационарном режиме получим

$$h_V^{(2)}(u) = \exp\left\{ j\mathrm{k}_1 b_1 a_1 u + \frac{(ju)^2}{2}\left(\mathrm{k}_1 a_2 b_1 + \mathrm{k}_2 a_1^2 b_2\right) \right\}.$$

Глава 4 Исследование области применимости асимптотического метода

Основные результаты, представленные в данной работе, получены в асимптотическом условии увеличения времени обслуживания входящего потока и представляют из себя аппроксимации искомых распределений, которые применимы при условии достаточно большого значения времени обслуживания. В связи с этим возникает задача определения нижней границы области значений времени обслуживания, для которой полученные аппроксимации дают приемлемую погрешность.

Аналитическое решение данной задачи не представляется возможным, поэтому полученные асимптотическим методом результаты, будем сравнивать с результатами, полученными при помощи имитационного моделирования [38,17].

В отличие от других методов моделирования (например, аналитический), метод имитационного моделирования универсальный, то есть он применим для исследований любых достаточно сложных систем, с учетом таких факторов и условий, которые трудно или вообще невозможно учитывать при аналитическом моделировании.

4.1 Алгоритм имитационного моделирования

Имитационная модель рассматриваемой СМО разрабатывалась на основе дискретно-событийного метода моделирования (discrete event modeling), в основе которого лежит представление процесса функционирования системы, как последовательная смена состояний системы во времени.

Из постановки задачи, моменты поступления заявок в систему, их объем и время их обслуживания независимы, поэтому их моделирование проводится независимо.

Программа имитационного моделирования работает следующим образом:

Блок 1. Задание параметров системы.

1. Задаем количество событий входящего потока М.

2. Определяем входящий ММРР – поток. Задаем:

- число состояний управляющей цепи Маркова К.
- матрицу инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \left\| q_{ij} \right\| \ i, j = 1, ..., K$;
- матрицу условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\ \lambda_{\mathrm{k}}$.

3. Задаем параметры функции распределения времени обслуживания.

4. Задаем параметры функции распределения объема заявок.

Блок 2. Алгоритм моделирования функционирования системы:

1. Происходит генерация М моментов прихода заявок, которые образуют массив моментов прихода заявок.

2. Для каждого значения момента прихода генерируются две независимые случайные величины (объем заявки, продолжительность времени ее обслуживания).

3. Складывая соответствующие моменты прихода заявок и длину времени их обслуживания, получим моменты завершения обслуживания.

Блок 3. Статистический анализ результатов.

Имея массив моментов прихода заявок в систему и моментов окончания обслуживания, можно сделать оценку стационарных вероятностей $\hat{P}(i)$ – числа занятых приборов, как доля времени, в течение которого в системе было занято i проборов.

Значение оценок стационарного распределения вероятностей находим по формуле

$$\hat{P}(i) = \frac{T(i)}{T},$$

где $T(i)$ – суммарное время, в течение которого в системе было занято i приборов за время моделирования T. Далее строим функцию распределения

$$\hat{F}(j)=\sum_{i=0}^{j}\hat{P}(i).$$

Имея массив моментов прихода заявок в систему, моментов окончания обслуживания, значений объема каждой заявки, можно сделать оценку плотности стационарных вероятностей

$$\hat{P}(z_k)=\frac{T(z_k)}{T},$$

где $T(z_k)$ – суммарное время, в течение которого значение суммарного объема заявок в системе принимало значение из интервала $[z_k;z_k+\Delta z)$ за время моделирования T $(k=0,1,...,k_{\max}$, где $k_{\max}$ - определяется, как «максимальное значение суммарного объема»/Δz). Далее строим функцию распределения

$$\hat{F}(V)=\sum_{k=0}^{k_{\max}}\hat{P}(z_k).$$

Область применимости асимптотических результатов будем определять с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta=\max_x\left|\hat{F}(x)-F(x)\right|,$$

где $\hat{F}(x)$ – эмпирическое распределение вероятностей, полученное с помощью имитационного моделирования, $F(x)$ - гауссовское распределение вероятностей, полученное методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания ($b_1\to\infty$).

Получим расстояние Колмогорова для различных интенсивностей входящего потока и различных распределений объема заявок и времени обслуживания.

4.2 Численный пример

Пусть на вход системы поступает MMPP-поток с параметрами

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}-0,8 & 0,4 & 0,4\\ 0,3 & -0,6 & 0,3\\ 0,4 & 0,4 & -0,8\end{pmatrix},\ \mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}0,5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1,5\end{pmatrix};$$

время обслуживания имеет гамма – распределение с параметрами формы $\alpha=1,5$ и масштаба $\beta=\frac{\alpha}{N}$.

$$B(x)=\begin{cases}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases};$$

где $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx-$ гамма–функция Эйлера.

Таким образом, при $N\to\infty$ мы получим асимптотическое условие бесконечно растущего времени обслуживания ($b_1=\frac{\alpha}{\beta}=N\to\infty$).

Объемы заявок имеют равномерное распределение на интервале $(0,1)$.

$$G(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases};$$

Тогда можно записать, что

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}_2=\begin{pmatrix}-0,125 & 0 & 0,125\end{pmatrix},$$

$$a_1=0,5,\qquad a_2=0,333,$$

$$b_1=N,\qquad b_2=0,576N,$$

$$\kappa_1=1,\qquad \kappa_2=0,25,$$

следовательно, характеристическая функция числа занятых приборов в системе имеет значение математического ожидания, равное N и значение дисперсии, равное $1{,}144N$. Характеристическая функция суммарного объема требований, находящихся в системе имеет значение математического ожидания, равное 0,5 N и значение дисперсии, равное $0{,}369N$.

Напомним, что перед нами стоит задача определения нижней границы N параметра времени обслуживания, для которой полученные аппроксимации дают удовлетворительную погрешность, т.е. расстояние Колмогорова не превышает допустимого значения.

В таблице 1, 2 приведены значения расстояния Колмогорова для различных значений величины N.

Таблица 1 – Расстояние Колмогорова между эмпирической и гауссовской характеристической функциями для числа занятых приборов

N	1	10	25	50	100
Δ	0,265	0,039	**0,025**	**0,017**	**0,012**

Таблица 2 – Расстояние Колмогорова между эмпирической и гауссовской характеристической функциями для суммарного объема требований

N	1	10	25	50	100
Δ	0,355	0,033	**0,019**	**0,013**	**0,010**

Можно заметить, что при росте N, расстояние Колмогорова уменьшается, что указывает нам на увеличение точности асимптотических результатов.

Если в качестве допустимой погрешности выбрать расстояние Колмогорова, равное 0,03, то можно сказать, что данная асимптотика дает достаточно точную аппроксимацию при значении параметра $N \geq 25$ (здесь и далее в таблицах жирным шрифтом выделяются значения, удовлетворяющие заданной погрешности).

Продемонстрируем более наглядно данный эффект на графиках.

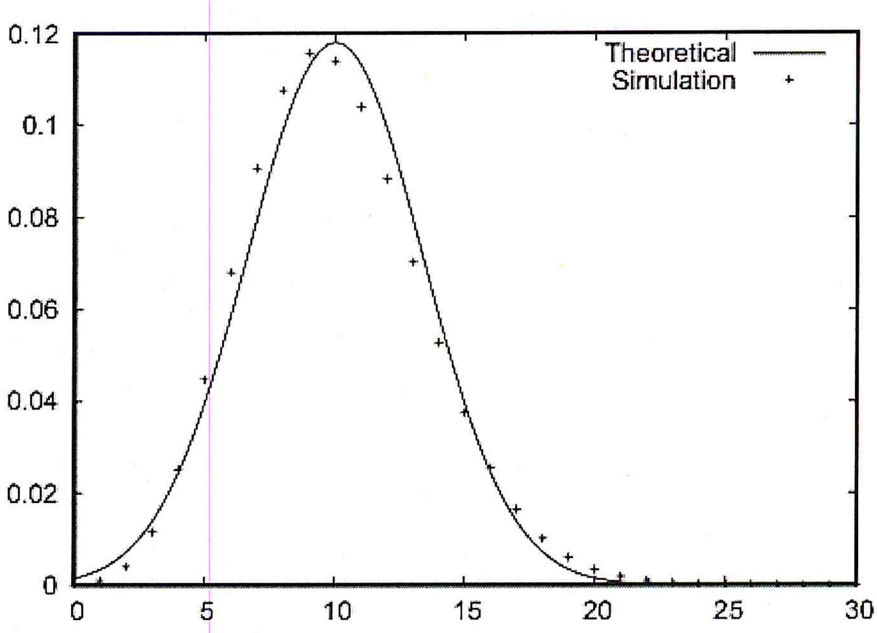


Рисунок 5 – Плотность вероятности асимптотической и эмпирической функции распределения для числа занятых приборов при N=10.

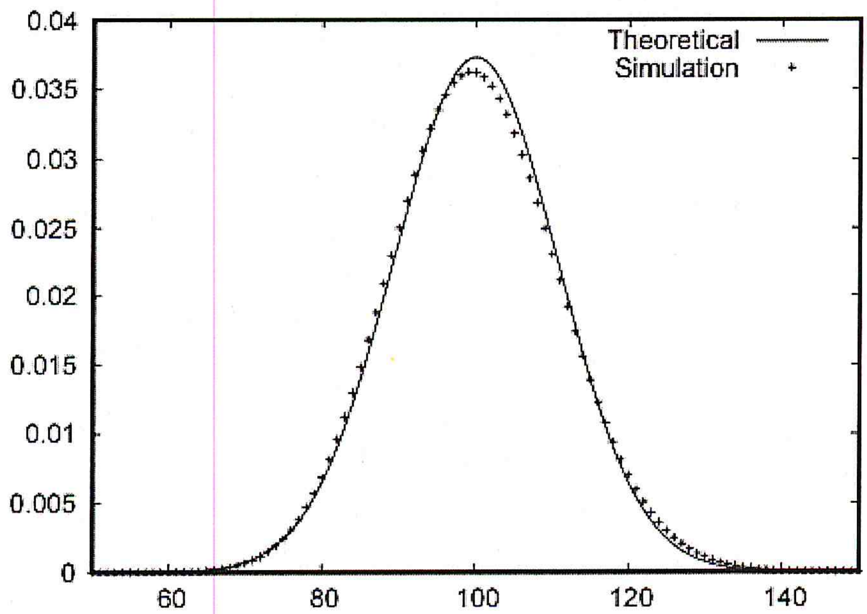


Рисунок 6 – Плотность вероятности асимптотической и эмпирической функции распределения для числа занятых приборов при N=100.

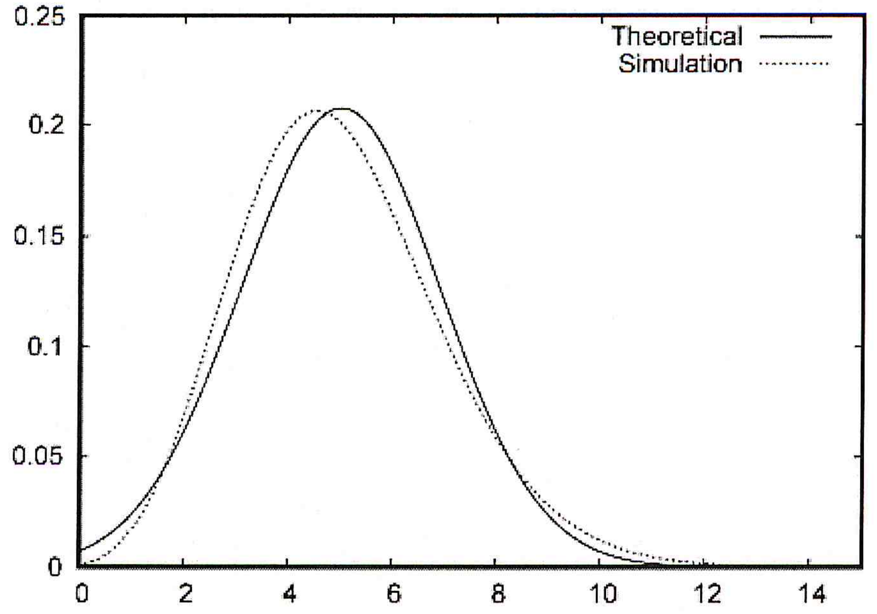


Рисунок 7 – Плотность вероятности асимптотической и эмпирической функции распределения для суммарного объема при N=10.

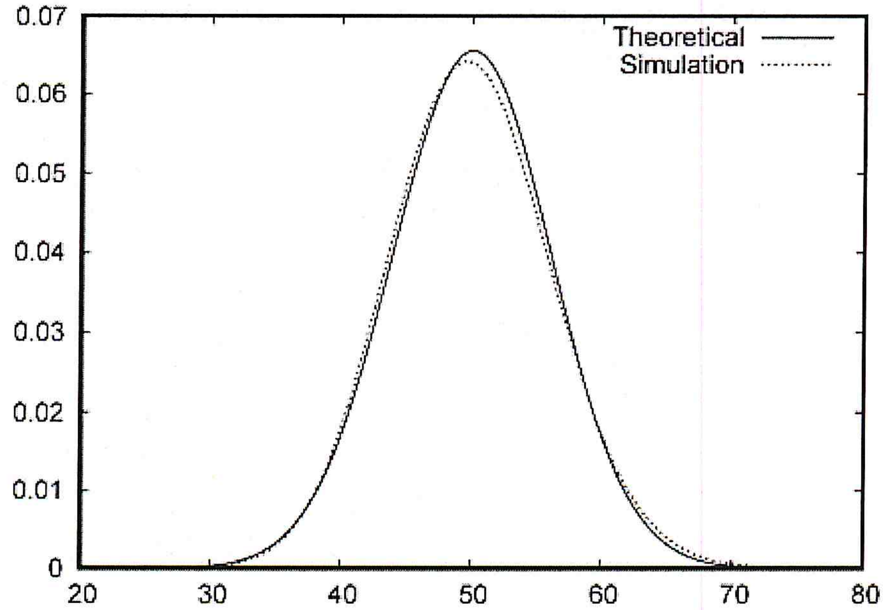


Рисунок 8 – Плотность вероятности асимптотической и эмпирической функции распределения для суммарного объема при N=100.

Сравним асимптотические характеристики процесса с эмпирическими характеристиками, используя относительную погрешность

$$\delta = \frac{|d - a|}{d}$$

где d - характеристика, построенная по результатам моделирования, a - характеристика, полученная аналитически.

В таблице 3, 4 приведены относительная погрешность между эмпирической и асимптотической дисперсиями числа занятых приборов и суммарного объема требований при увеличении параметра N.

Таблица 3 – Относительная ошибка между эмпирической и асимптотической дисперсией числа занятых приборов.

N	1	10	25	50	100
Δ	$6*10^{-2}$	$9*10^{-3}$	$4*10^{-3}$	$1*10^{-3}$	$0{,}9*10^{-3}$

Таблица 4 – Относительная ошибка между эмпирической и асимптотической дисперсией суммарного объема требований.

N	1	10	25	50	100
Δ	$4*10^{-2}$	$7*10^{-3}$	$3*10^{-3}$	$0{,}7*10^{-3}$	$0{,}5*10^{-3}$

Продемонстрируем для наглядности данные результаты на графике (Рисунок 6).

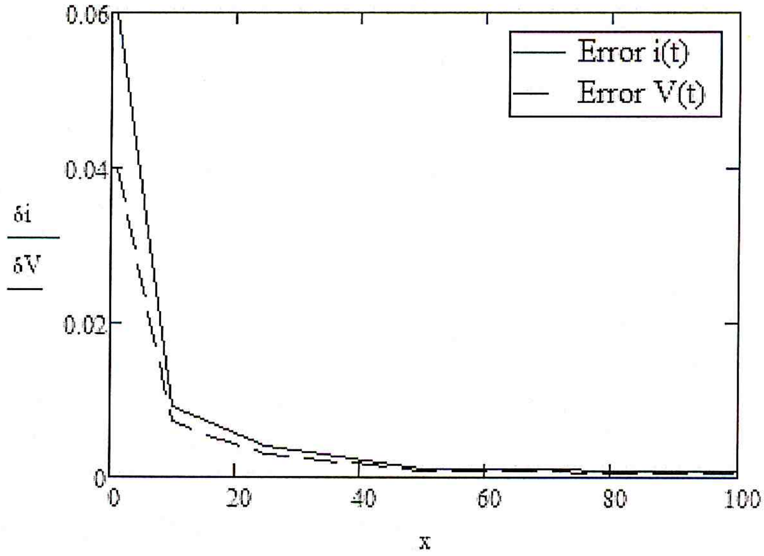


Рисунок 9 – Относительная ошибка между эмпирической и асимптотической дисперсией числа занятых приборов $i(t)$ и суммарного объема $V(t)$ в системе.

Относительная ошибка между эмпирическим и аналитическим математическими ожиданиями имеет порядок меньше чем 10^{-4}.

В таблице 5 приведена относительная ошибка между коэффициентом корреляции, построенным при моделировании и коэффициентом корреляции, полученным аналитически.

Таблица 5 – Относительная ошибка между эмпирическим и асимптотическим коэффициентом корреляции.

N	1	10	25	50	100
Δ	$60*10^{-4}$	$11*10^{-4}$	$4*10^{-4}$	$1*10^{-4}$	$0,8*10^{-4}$

Покажем наглядно на графике (Рисунок 7).

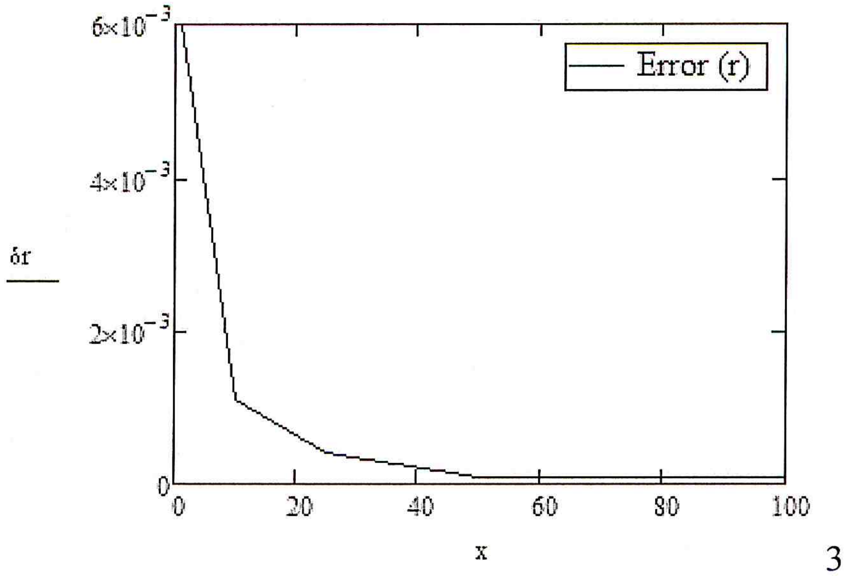


Рисунок 10 – Относительная ошибка между эмпирическим и асимптотическим коэффициентом корреляции.

Отметим, что при увеличении параметра N, точность асимптотических результатов увеличивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей магистерской диссертации представлено исследование математических моделей изменения объема требований, находящихся в системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и MMPP входящим потоком, а именно:

- проведено исследование характеристик системы массового обслуживания вида M/M/∞ и MMPP/M/∞ с требованиями случайного объема, а именно числа занятых приборов и суммарный объем требований, находящихся в системе при стационарном режиме функционирования системы;
- с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания получен аналитический вид аппроксимаций второго и третьего порядков суммарного объема требований в СМО MMPP/M/∞ с требованиями случайного объема;
- построена гауссовская аппроксимация характеристической функции для числа занятых приборов и суммарного объема требований при условии растущего времени обслуживания системы массового обслуживания MMPP/GI/∞;
- проведен численный анализ и имитационное моделирование исследуемых систем и определена область применимости полученных асимптотических результатов. Численные результаты показывают, что асимптотические характеристики для числа занятых приборов и суммарного объема, находящихся в системе требований, имеют достаточную точность, когда скорость обслуживания превышает интенсивность прихода заявок в 25 и более раз.

По результатам магистерской диссертации были сделаны доклады на международных и всероссийских конференциях:

- 28 – 29 апреля 2016 года – Всероссийская Молодежная Научная конференция «Научное творчество молодежи» (НТМ – 2016), секция «Computer science »;

- 28 – 29 апреля 2016 года – Всероссийская Молодежная Научная конференция «Научное творчество молодежи» (НТМ – 2016), секция «Системы массового обслуживания»;

- 12 – 15 сентября 2016 года – XV Международная научно-практическая конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ – 2016), секция «Системы массового обслуживания»;

- 24 – 28 апреля 2017 года – Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем 2017 (ИТТММ-2017);

- 19 – 20 мая 2017 года – V Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем»;

По материалам диссертации опубликовано 6 статей [34,33,32,35,36], из них 1 статья принята в журнал « Информатика и ее применение», входящая в перечень ВАК [59].

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамушкина, Т. В. Численные методы расчета стационарных вероятностей состояний системы M/G/1/n с дисциплиной LIFO PR и ограничением на суммарный объем требований /Т. В. Абрамушкина, С. В. Апарина, Е. Н. Кузнецова, А. В. Печинкин // Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика. –1998. – № 1. – С. 40–47.
2. Александров, А. М. Обслуживание потоков неоднородных требований / А. М. Александров, Б. А. Кац // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. – 1973. – N. 2. – С. 47–53.
3. Афанасьева, Л. Г. Надежность систем с регенерирующим потоком отказов элементов / Л. Г. Афанасьева, Е. В. Булинская // Автоматика и телемеханика. – 2010. –Т. 7. – С. 15-28.
4. Боровков, А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
5. Бородин, Н. Н. Характеристики суммарного объема требований в СеМО джексона / Н. Н. Бородин, Ю. В. Малиновский // Вестник Том. Гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – С. 25-32.
6. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 520 с.
7. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / А. В. Гасников [и др.]; под ред. А. В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.
8. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
9. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – Москва: Техносфера, 2003. – 512 с.

10. Гайдамака, Ю. В. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова, К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 72 с.
11. Галажинская, О. Н. Бесконечно линейная бесконечнофазная система массового обслуживания со случайным прерыванием обслуживания / О. Н. Галажинская // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 261–266.
12. Гарайшина, И. Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Гарайшина Ирина Рашитовна. – Томск, 2005. – 148 с.
13. Гарайшина, И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
14. Грачев, В. В. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных / В. В. Грачев, А. Н. Моисеев, А. А. Назаров, В. З. Ямпольский // Доклады ТУСУРа. – 2012. – № 2 (26), Ч. 2. – С. 248–251.
15. Ежов, И. И. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Т. 14, вып. 1. – С. 3–14.
16. Задорожный В. Н. Транспортная сеть массового обслуживания: теория и эксперименты / В. Н. Задорожный // Динамика систем, механизмов и машин. – 2014. – № 3. – С. 162–165.
17. Задорожный, В. Н. Аналитико-имитационные исследования систем и сетей массового обслуживания: монография / В. Н. Задорожный. – Омск: изд-во ОмГТУ, 2010. – 280 с.
18. Кёнинг, Д. Теория массового обслуживания / Д. Кёнинг, В. В. Рыков, Д. Штоян. – М.: Московский институт нефтехимической и газовой промылен-ности, 1979. – 112 с.

19. Коновалов, И. А. Исследование бесконечнолинейной СМО MAP|GI|∞ с заявками случайного объема /И.А. Коновалов, Е.Ю. Лисовская // ИТММ: Материалы 15-й Международной конференции имени А. Ф. Терпугова: 12-15 сентября 2016 г. –Томск: Изд-во Том. Ун-та. –2016. – 67-71 с.

20. Матвеев, С.А. Применение метода начальных моментов для исследования многофазной системы массового обслуживания GI/(M/∞)K / С. А. Матвеев, А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Доклады ТУСУРа. – 2014. – № 3 (33). – С. 129–134.

21. Моисеев, А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров . – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240с.

22. Мокров, Е. В. Модель системы облачных вычислений в виде системы массового обслуживания с несколькими очередями и с групповым поступлением заявок / Е. В. Мокров, К. Е. Самуйлов // Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7, № 11. – С. 139–141.

23. Морозова, А. С. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, К. М. Одинцов // Научное творчество молодежи: материалы XI Всерос. научно-практ. конф. (Ан-жеро-Судженск, 20–21 апр. 2007). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – Ч. 1. – С. 37–39.

24. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

25. Назаров, А. А. Асимптотический анализ разомкнутой немарковской сети массового обслуживания HIMMPP-(GI|∞)K / А. А. Назаров, А. Н. Моисеев // Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптими-зации информационно-телекоммуникационных сетей: материалы междунар. науч. конф. (Минск, 28–31 янв. 2013). – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 132–140.

26. Наумов, В. А. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками /В. А. Наумов, К. Е. Самуйлов, А. К. Самуйлов // Автоматика и телемеханика. – 2016. – N. 8. – С. 1419-1427.

27. Носова, М. Г. Автономная немарковская система массового обслуживния и ее применение в задачах демографии: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / М. Г. Носова. – Томск, 2010. – 204 с.

28. Печинкин, А. В. Ограничение на суммарный объем заявок в дискретной система Geo_k/G/1/∞ /А. В. Печинкин, И. А. Соколов, С. Я. Шоргин // Информатика и ее применение. - 2012. – Т.:, вып.3. – С. 107-113.

29. Печинкин. А. В. Система M^K/G/1/n с дисциплиной LIFO с прерыванием и ограничением на суммарный объем требований / А. В. Печинкин, О. А. Печинкина // Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика, 1996. No 1. С. 86–93.

30. Печинкин, А. В. Система M/G/1/n с дисциплиной LIFO и ограничением на суммарный объем требований / А. В. Печинкин // Автоматика и телемеханика, 1998. № 4. С. 106–116.

31. Печинкин, А. В. Система обслуживаниясдисциплиной LIFO и ограничением на суммарный объем требований / А. В. Печинкин // Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика, 1996.No 2. С. 85–99.

32. Потатуева, В. В. Асимптотика третьего порядка для суммарного объема требований в СМО вида MMPP/M/∞ при условии растущего времени обслуживания / В. В. Потатуева, С.П. Моисеева // ИТММ: Материалы 15-й Международной конференции имени А. Ф. Терпугова: 12-15 сентября 2016 г. –Томск: Изд-во Том. Ун-та. –2016. – 114-117 с.

33. Потатуева, В. В. Асимптотический анализ суммарного объема требований в СМО вида MMPP/M/∞ / В. В. Потатуева // Научное творчество молодежи: Материалы XXI Всероссийской научно-практической конференции: 28-29 апреля 2016 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2016. –107 с.

34. Потатуева, В. В. Исследование системы $MMPP/GI/\infty$ с неограниченным числом обслуживающих приборов и случайным объемом заявок / В. В. Потатуева // МНСК-2017: Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции: 17-20 апреля 2017 г. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та. – 2017. –108 с.
35. Потатуева, В. В. Исследование систем массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и случайным объемом заявок / В. В. Потатуева // МНСК: Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции: 16-20 апреля 2016 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2016. –110 с.
36. Потатуева, В. В. Асимптотический анализ системы MMPP/GI/∞ с заявками случайного объема / В. В. Потатуева, Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : Материалы Всероссийской конференции с международным участием: 24-28 апреля 2017 г. –Москва: Изд-во РУДН. –2017. – С. 47-49.
37. Ромм, Э. Л. Об одном обобщении задачи Эрланга / Э. Л. Ромм, В. В. Скитович // Автоматика и телемеханика. – 1971. – N. 6. – С. 164–167.
38. Рыжиков, Д. И. Имитационное моделирование систем массового обслуживания // Л.: ВИККИ им А.Ф, Можайского. 1991. – 111 с.
39. Самуйлов, К. Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС–7 / К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 292 с.
40. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в системах обработки информации / О.М. Тихоненко. — Минск: Университетское, 1990.
41. Тихоненко, О. М Определение характеристик систем обслуживания с ограниченной памятью / О.М. Тихоненко. – *Автомат. и телемех.*, 1997, № 6, 105–110 с.

42. Тихоненко, О. М Определение характеристик суммарного объема требования в однолинейных приоритетных системах массового обслуживания / О.М. Тихоненко. – *Автомат. и телемех.*, 1989, № 2, 106–115 с.
43. Тихоненко, О. М Система обслуживания с разделением процессора и ограниченным объемом памяти, управляемая механизмом AQM / О.М. Тихоненко, В. М. Кемпа – *Автомат. и телемех.*, 2015, № 10, 90–105 с.
44. Тихоненко, О. М Системы обслуживании требований случайной длины с ограничениями / О.М. Тихоненко. –*Автомат. и телемех.*, 1991, № 10, 126–134 с.
45. Тихоненко, О. М. Распределение суммарного объема сообщений в однолинейной системе массового обслуживания с групповым поступлением / О.М. Тихоненко. – *Автомат. и телемех.*, 1985, № 11, 78–83 с.
46. Топорков, В. В. Модели распределенных вычислений // В. В. Топор-ков. – М.: Изд-во Физматлит, 2004. – 320 с.
47. Федоткин, М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6. – С. 51–70.
48. Albrecher, H. Ruin Excursions, the G|G|∞ Queue and Tax Payments in Renewal Risk Models / H. Albrecher, S. C. Borst,O. J. Boxma,J. Resing // *Journal of Applied Probability* . – 2011. –Vol. 48. – P. 3-14.
49. Balsamo, S. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction / S. Balsamo, V. De Nitto Personè, P. Inverardi // Performance Evaluation. – 2003. – Vol. 51, Iss. 2. – P. 269–288.
50. Bartlett, M. S. Some Evolutionary Stochastic Processes / J. Roy // Stat. Soc. – 1949. – B. 11. – P. 211-229.
51. Benes, V. E. Mathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic. – New York: Academic Press, 1965.

52. Borst, S. Dimensioning large call centers / S. Borst, A. Mandelbaum, M. I. Reiman // Operations Research. – 2004. – Vol. 52. – P. 17–34.
53. Brown, L. Statistical analysis of a telephone call center: a queueing-science perspective / L. Brown [et al.] // Journal of the American Statistical Association. – 2005. – Vol. 100. – P. 36–50.
54. Cramer, H. Leadbetter, M. R., Stationary and Related Stochastic Processes. – New York: Wiley, 1967.
55. Erlang, A. K. The theory of probabilities and telephone conversations / A. K. Erlang // Nyt Tidsskrift for Matematik. Seria B. – 1909. – Vol. 20. – P. 33–39.
56. Kendall, D. G. Les processus Stochastic de croissance en biologie // Annales de l'institut Henri Poincaré –1952 . –Vol. 13, no. 1 – P. 43-108.
57. Kleinrock L. Queueing systems: Volume I – Theory. – New York: Wiley Interscience, 1975. – 417 p.
58. Lee, W. C. Y. Mobile cellular telecommunications: analog and digital systems / W. C. Y. Lee; 2nd ed. – N.Y.: McGraw-Hill, 1995. – 664 p.
59. Lisovskaya, E. Sudy of the MMPP/GI/∞ Queueing System with Random Customers' Capacities / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano, V. Potatueva // Informatics and Applications. – Moskow. –2017. –T. 11. –№4. (In the press)
60. Lucantoni D. M., New results on single server queue with a batch Markovian arrival process / D. M. Lucantoni // Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.
61. Neuts, M. F., Models based on the Markovian arrival process / M. F Neuts // IEICE Trans. Commun. – 1992. – P. 1255–1265.
62. Pakes, A. G. Oil the Subcritical Bellman-Harris Process with Immigration / A. G. Pakes, N. L. Kaplan // *Journal of Applied Probability*. –1974. –Vol. 11. – P. 652-668.
63. Paxson, V. Wide-area traffic: the failure of Poisson modeling / V. Paxson, S. Floyd // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1995. – Vol. 3, Iss. 3. – P. 226–244.

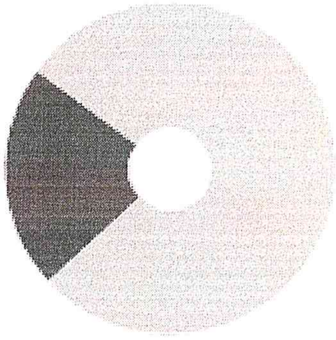
64. Sztrik J. Queueing Theory and its Applications, A Personal View/ J. Sztrik // Queueing Systems. Theory and Applications. – 2007. – Vol. 41. – P. 1-22
65. Zukerman, M. Introduction to Queueing Theory and Stochastic Teletraffic Models / M. Zukerman. – Hong Kong: Copyright M. Zukerman (c), 2000-2014. – P. 238.

Отчет о проверке № 1

дата выгрузки: 04.06.2017 14:25:35
пользователь: victoria.voronko@mail.ru / ID: 4649407
отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»
на сайте http://www.antiplagiat.ru

Информация о документе

№ документа: 2
Имя исходного файла: Потатуева В.В..docx
Размер текста: 830 кБ
Тип документа: Не указано
Символов в тексте: 54749
Слов в тексте: 6350
Число предложений: 315



Информация об отчете

Дата: Отчет от 04.06.2017 14:25:35 - Последний готовый отчет
Комментарии: не указано
Оценка оригинальности: 77.77%
Заимствования: 22.23%
Цитирование: 0%

Оригинальность: 77.77%
Заимствования: 22.23%
Цитирование: 0%

Источники

Доля в тексте	Источник	Ссылка	Дата	Найдено в
4.15%	[1] Full text (in Russian, with English abstracts): PDF file	http://ipiran.ru	19.11.2016	Модуль поиска Интернет
3.96%	[2] Исследование системы MMP|GI|методом просеянного потока	http://sun.tsu.ru	раньше 2011 года	Модуль поиска Интернет
2.72%	[3] Full text (in Russian, with English abstracts): PDF file (9/10)	http://ipiran.ru	18.10.2014	Модуль поиска Интернет

/Моисеева С.Д.