Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Радиофизический факультет
Кафедра радиофизики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р. физ.-мат. наук
_____ Д.Я. Суханов
«22» июня 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

«УЧЕТ ЯВЛЕНИЯ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ»

по направлению подготовки 03.04.03 Радиофизика
направленность (профиль) «Радиофизика, электроника и информационные системы»

Сальников Кирилл Сергеевич

Руководитель ВКР
канд. физ-мат. наук, доцент
_____Д.В. Лосев
«12» июня 2023 г.

Научный консультант
ст. преподаватель
_____Д.С. Бардашов
«12» июня 2023 г.

Автор работы
студент группы № 072171
_____ К.С. Сальников
«12» июня 2023 г.

Томск – 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Радиофизический факультет
Кафедра радиоэлектроники

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ООП
д-р. физ.-мат. наук
_____ Д.Я. Суханов
«28» 09 2021 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы магистра обучающемуся
Сальникову Кириллу Сергеевичу
(Ф.И.О. обучающегося)

по направлению подготовки 03.04.03 Радиофизика, направленность (профиль) «Радиофизика, электроника и информационные системы».

1 Тема выпускной квалификационной работы
Учет явления деполяризации в неоднородных средах

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:
а) на кафедру – 25.05.2023
б) в ГЭК – 23.06.2023

3 Исходные данные к работе:
Объекты исследования – процесс распространения электромагнитных волн в неодонородных средах.
Предмет исследования – математическая модель распространения электромагнитных волн в неодонородных средах.
Цель исследования – разработать математическую модель, учитывающую деполяризацию электромагнитных волн в неоднородных средах.

Задачи:
а) перейти от уравнений Максвелла для безграничной неоднородной среды к эквивалентной системе интегральных уравнений;
б) вычислить вспомогательные интегралы;
г) получить решение системы интегральных уравнений, эквивалентной уравнениям Максвелла, в приближении плавно-неоднородной среды;
д) сравнить метод с существующими.

Методы исследования:
Строгие математические способы описания электромагнитных волн в неоднородных средах.

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа
НИ ТГУ

4. Краткое содержание работы
В результате работе предложено приближенное решение задачи распространения волн в плавно-неоднородной среде с учетом изменения векторной структуры поля на основе использования метода итерированных ядер. Это решение позволяет одновременно учесть эффекты многолучевого распространения и многократного взаимодействия излучения со средой, тем самым объединяя достоинства теории однократного рассеяния

и методов коротковолновой асимптотики.

Руководитель выпускной квалификационной работы
к.ф-м.н., доцент, ТГУ _____ / Д.В. Лосев
(должность, место работы) (подпись) (И.О. Фамилия)

Научный консультант выпускной квалификационной работы
ст. преподаватель, ТГУ _____ / Д.С. Бардашов
(должность, место работы) (подпись) (И.О. Фамилия)

Задание принял к исполнению
студент, ТГУ _____ / К.С. Сальников
(должность, место работы) (подпись) (И.О. Фамилия)

АННОТАЦИЯ

Магистерская диссертация: страниц 52, глав 5, рисунков 15, источников 29.
Ключевые слова: распространение волн в неоднородных средах, объемное интегральное уравнение, метод итерированных ядер, деполяризация электромагнитных волн.
В ходе работы была поставлена следующая цель: разработать математическую модель, учитывающую деполяризацию электромагнитных волн в неоднородных средах. Для достижения цели, были поставлены следующие задачи:

1) перейти от уравнений Максвелла для безграничной неоднородной среды к эквивалентной системе интегральных уравнений;

2) вычислить вспомогательные интегралы;

3) получить решение системы интегральных уравнений, эквивалентной уравнениям Максвелла, в приближении плавно–неоднородной среды,

4) сравнить метод с существующими.

В результате в работе предложено приближенное решение задачи распространения волн в плавно-неоднородной среде с учетом изменения векторной структуры поля на основе использования метода итерированных ядер. Это решение позволяет одновременно учесть эффекты многолучевого распространения и многократного взаимодействия излучения со средой, тем самым объединяя достоинства теории однократного рассеяния и методов коротковолновой асимптотики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1 Обзор методов описания распространения волн в неоднородных средах . 7

1.1 Метод геометрической оптики 8

1.2 Метод Рытова 9

1.3 Борновское приближение 10

1.4 Метод ВКБ 11

2 Вывод интегрального уравнения 12

2.1 Фундаментальное решение волнового уравнения 12

2.2 Вывод объемного интегрального уравнения 13

2.3 Альтернативная система интегральных уравнений 14

2.4 Проверка эквивалентности рассматриваемой системы интегральных уравнений и волнового уравнения 16

3 Векторное обобщение метода итерированных ядер 18

3.1 Применение метода итерированных ядер 18

3.2 Оценка границ применимости решения по следующему приближению 23

4 Скалярный случай, центрированный источник в сферической полости . . 26

4.1 Приближение дальней зоны 26

4.2 Вычисление без приближения дальней зоны, при $\theta = 0$ 30

4.3 Проверка условия сшивания на границе 32

4.4 Точное решение при сшивании на границе 33

4.5 Моделироване 34

5 Векторный случай 36

5.1 Центрированный диполь в сферической полости 36

5.2 Рассеяние Ми 39

5.3 Линза Люнеберга 45

5.4 Экспоненциальный профиль 46

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 49

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 52

ВВЕДЕНИЕ

При распространении радиоволн довольно существенную роль играет их поляризация. Этот термин определяет неодинаковость напряженностей электрического и магнитного полей в различных направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. В результате дифракции электромагнитной волны на неоднородностях ее изначальная поляризация может измениться, т.е. произойдет деполяризация. Математическое моделирование процесса деполяризации и оценка ее влияния на характеристики антенн являются обязательными при их проектировании. Также требуется учитывать поляризационные потери, возникающие в процессе распространения электромагнитных волн в системах связи и радиолокации. К таким потерям относят, например, энергетические потери вследствие паразитного возбуждения кросс-поляризационной составляющей в зеркальной параболической антенне, потери из-за деполяризации электромагнитной волны каплями дождя или кристаллами льда в облаках, а также при отражении электромагнитных волн от объектов сложной формы.

В задачах радиолокационного распознавания опасных атмосферных явлений на трассе движения самолетов одним из основных факторов являются поляризационные характеристики рассеянного сигнала. Одним из признаков наличия града в облаке является высокая деполяризация радиоэха, отраженного от несферических частиц града [1]. Однако несферичность присуща и дождевым каплям, поэтому для распознавания града очень важно знать деполяризационные свойства капель. Во время гравитационного падения в атмосфере дождевые капли сплющиваются и, кроме того, испытывают колебания.

Это свойство, очевидно, должно проявляться в рассеивающих свойствах дождей как в видимом, так и в микроволновом диапазоне. Особенно велики эти явления у крупных капель. Несферичность и вибрация относительно мало изучены, в то время как они могут на $20-40\%$ влиять даже на мощность обратного рассеяния.

Учет деполяризационных потерь повышает точность дистанционного определения интенсивности выпадающих дождей и позволит более эффективно распознавать наличие градовой опасности по траектории движения самолета. Помимо этого, деполяризационная компонента дает возможность определять фазовое состояние(капельные, смешанные, ледяные) облаков и осадков. Реализация этих возможностей была осуществлена А. Б. Шупяцким и В. Е. Минервиным при работе на специально разработанной опытной радиолокационной установке с дополнительным разнесенным приемом [2].

Также, используя поляризационные компоненты, можно осуществлять радиолокационный контроль за сезонной миграцией птиц, а также вычислить ориентацию птиц

в пространстве и их форму, т.е. отношение длины к ширине. Так, в работе [3] отмечается заметная зависимость ЭПР птиц от поляризации излучаемого и принимаемого сигнала и от их ориентации относительно излучателя радиолокатора. По данным этих авторов степень деполяризации радиолокационных сигналов от птиц составляет около $-7 \div -9$ дБ .

Перистые облака представляют собой тонкие полупрозрачные облака, расположенные на высотах 5-12 км и состоящие преимущественно из ледяных кристаллов размерами от единиц до тысяч микрон. Они покрывают около 30% поверхности Земли и существенным образом влияют на ее радиационный баланс [4] и, следовательно, на климат. Современные численные модели прогноза погоды требуют оперативной информации о состоянии облочности в глобальном масштабе для повышения точности прогнозов [5].Недостаток знаний о радиационных характеристиках перистых облаков являются одним из основных источников неопределенности в современных климатических моделях и долгосрочном прогнозировании погоды.

Причиной неопределенности является преобладание несферичных частиц различных ориентаций, составляющие эти облака. Основным инструментом, позволяющим оперативно получать информацию о микрофизических параметрах облаков, являются лидары [6], [7]. Значительным шагом в решении проблемы интерпретации лидарного сигнала является разработанный в Томском государственном университете (ТГУ) и Институте оптики атмосферы (ИОА СО РАН) метод лазерного поляризационного зондирования [8]. Этот метод позволяет эффективно определять пространственную ориентацию плоских кристаллических частиц перистых облаков. Однако интерпретация лидарного сигнала требуется решение прямой задачи рассеяния света на частицах произвольной формы и пространственной ориентации.

Резюмируя, учет распространения электромагнитных волн в неоднородных средах необходим для адекватного решения практически важных задач радиолокации, зондирования атмосферы, оптики, томографии и других областей науки. Поскольку электромагнитные волны имеют векторный характер, необходима модель, которая учитывает исходную поляризацию волны и предсказывает результирующую поляризацию, т.е. учитывает явление деполяризации. Примерами существующих моделей являются аналитические методы: метод геометрической оптики [9], метод Кирхгофа [10], борновское приближение, а также численные методы: приближение физической оптики [11], метод дискретных диполей [12], метод Т-матрицы [13], метод Галеркина и др. Однако аналитические методы для векторного случая недостаточно точны, а численные методы к тому же ограничены вычислительными ресурсами. Поэтому актуальна разработка новых подходов, учитывающих явление деполяризации в неоднородных средах.

Исходя из вышеперечисленного, в ходе работы была поставлена **цель**: разрабо-

тать математическую модель, учитывающую деполяризацию электромагнитных волн в неоднородных средах.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1) перейти от уравнений Максвелла для безграничной неоднородной среды к эквивалентной системе интегральных уравнений;

2) вычислить вспомогательные интегралы;

3) получить решение системы интегральных уравнений, эквивалентной уравнениям Максвелла, в приближении плавно–неоднородной среды;

4) сравнить метод с существующими.

Объектом исследования является процесс распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. **Предметом исследования** является математическая модель распространения электромагнитных волн в неоднородных средах.

Научная новизна исследования, заключается в пополнении существующих векторных аналитических методов, описывающие распространение электромагнитной волны в неоднородных средах.

Методы исследования основываются на использовании строгих математических способов описания электромагнитных волн в неоднородных средах.

Научные положения, выносимые на защиту

1) Использование метода итерированных ядер при решении векторного уравнения Гельмгольца для безграничной изотропной неоднородной среды без дисперсии позволяет описать возникающие эффекты многолучевого и многократного распространения волн, а также деполяризацию волны.

2) Применимость предложенного решения ограничивается требованиями малости хотя бы одной из следующих величин: 1) абсолютной величины контраста диэлектрической проницаемости неоднородностей среды, 2) модуля градиента диэлектрической проницаемости, 3) длины трассы распространения, выраженной в длинах волн.

Практическая значимость научных положений: используя полученное решение в качестве начального приближения в итерационном методе решения исследуемого интегрального уравнения, можно получить решение с заданной точностью быстрее в сравнении со стандартным методом, когда в качестве нулевого приближения принимают падающее поле [14]. Также полученное решение прямой задачи может быть основой для решения обратных задач.

1 Обзор методов описания распространения волн в неоднородных средах

На данный момент существующие методы описания распространения волн в неоднородных средах, в основном, позволяют описать только один доминирующий эффект – рассеяние, поглощение, рефракцию, дифракцию и другие. Количество точно решенных задач не превышает десятка и то лишь для одномерного или для двумерного случая. Задача же создания метода, эффективного для среды с разными размерами неоднородностей, который описывал бы искажения падающей волны и рассеянное поле, еще не решена.

Математические методы, лежащие в основе теории распространения волн, основаны на решении системы уравнений Максвелла, а также волнового уравнения и связанного с ним уравнения Гельмгольца. В связи со сложностью и в значительной мере незавершенностью теории дифференциальных уравнений с частными производными точное решение вышеуказанных уравнений возможно лишь в наиболее простых случаях (свободное пространство, отражение от импедансной плоскости, канонические задачи дифракции на клине, цилиндре, шаре и т.д.). К настоящему времени количество возможных для строгого решения случаев можно считать исчерпанным, поскольку сложность представления решения с использованием специальных функций или бесконечных рядов зачастую делает его невозможным для анализа. В то же время существующие точные решения эталонных задач дают возможность для понимания происходящих физических процессов и являются основой для развития приближенных методов. Эти решения также используются для оценки точности приближенных методов и определения области их применимости. К настоящему времени разработано большое количество различных приближенных методов теории распространения волн. Некоторые из них, получившие наибольшую известность, будут рассмотрены далее. Их можно разделить на два класса: методы, описывающие многолучевое распространение (рассеяние волн), и методы, учитывающие многократное взаимодействие волны со средой (распространение волн). К первому классу относятся теория однократного рассеяния, теория многократного взаимодействия, теория Тверского и уравнение Дайсона, уравнение переноса излучения и т.д. Эти методы хорошо описывают процесс взаимодействия волны с мелкомасштабными по сравнению с длиной волны неоднородностями среды, сопровождающийся образованием вторичного излучения в результате рассеяния. При этом изменение характеристик падающей волны не учитывается. Второй класс методов образуют асимптотические методы, описывающие преимущественно изменение фазы падающей волны за счет прохождения через среду с крупномасштабными неоднородностями. При этом считается, что рассеяние происходит в основном в направлении распространения

основной волны, и им можно пренебречь. Наиболее важными представителями такого подхода являются метод геометрической оптики, метод плавных возмущений (приближение Рытова) и метод параболического уравнения. Еще один возможный метод описания прохождение волны через неоднородную среду – метод итерированных ядер [15], который имеет компактный вид и объединяет в себе достоинства методов борновского рассеяния и геометрической оптики. Далее рассмотрим некоторые методы.

1.1 Метод геометрической оптики

Приближение геометрической оптики [9] занимает совершенно исключительное положение в волновой теории. Перечислим основные на то причины:

1) Метод дает наглядную картину направления потоков энергии, которая распространяется вдоль лучей. Интенсивность поля волны определяется из простого закона сохранения потока энергии в лучевой трубке.

2) Во многих задачах это метод является единственно возможным и достаточно универсальным аналитическим методом решения.

3) Из решения можно получить определенные сведения о дифракционных процессах, приближенные дифракционные решения(т.н. эвристические методы).

Как известно, в основе метода геометрической оптики лежит представление о почти плоской волне, амплитуда и градиент фазы которой мало изменяются на расстояниях порядка длины волны. Для проверки правильности решения, как правило, принято рассматривать коротковолновую асимптотику точного решения. В основе многих попыток получить коротковолновую асимптотику лежит желание сделать сложные явления более понятными. Например, попытка описать дифракционное расхождение волновых пучков как явление "поперечной диффузии", при котором энергия распространяется преимущественно вдоль прямолинейных лучей, но имеющаяся небольшая составляющая вектора Пойнтинга поперек лучей отвечает за перетекание энергии из одной лучевой трубки в соседнюю, где плотность энергии меньше.

Для более общего случая $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \mathbf{r})$, разложение проводится по следующему параметру $\mu \sim \frac{1}{kL} \ll 1$, характеризующему медленность изменения ε, A и $\bigtriangledown \phi$, где L - характерный масштаб изменения величин ε, A и $\bigtriangledown \phi$, Пусть $L \gg \lambda$ или

$$\frac{1}{L} \sim \frac{|\bigtriangledown \varepsilon|}{\varepsilon} \ll \frac{2\pi}{\lambda} = k,$$

то есть предполагаем, что среда "почти однородна" в масштабе длины волны. В безразмерных координатах $x_1 = kx, y_1 = ky, z_1 = kz$ уравнение Гельмгольца примет вид

$$\triangle u + \varepsilon u = 0. \tag{1}$$

Решение (1) ищут в виде разложения по прямым волнам

$$u(\vec{r}_1) = \Big(\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{\mu}{i})^m A_m(\mu, \vec{r}_1)\Big)e^{\frac{i\Psi(\mu,\vec{r}_1)}{\mu}}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение (1) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ, получаем следующие уравнения:

$$(\bigtriangledown_1\Psi)^2 = \varepsilon,$$
$$2(\bigtriangledown_1 A_0 \bigtriangledown_1 \Psi) + A_0 \triangle_1 \Psi = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

где $\bigtriangledown_1 = (\frac{\partial}{\partial(x_1)}, \frac{\partial}{\partial(y_1)}, \frac{\partial}{\partial(z_1)})$ и $\triangle_1 = (\frac{\partial^2}{\partial^2(x_1)}, \frac{\partial^2}{\partial^2(y_1)}, \frac{\partial^2}{\partial^2(z_1)})$.

Первое уравнение называется уравнением эйконала, а последующие - уравнениями переноса, которые отвечают за нахождение фазы и амплитуды волны соответственно.

Соединение методов геометрической оптики с теорией дифракции расширяет область применения геометрической оптики, особенно в случае рассеяния вперёд и отражения от сфер с высоким поглощением, когда лучи не могут проникать в глубь частицы. Подобный подход сделан в приближении физической оптики[11].

1.2 Метод Рытова

Флуктуации амплитуды и фазы, возникающие в проходящей через неоднородную среду волне, обусловлены интерференцией прямой волны с рассеянными волнами. Флуктуации амплитуды и фазы наиболее сильны в случае коротких по сравнению с размерами неоднородностей волн. При выполнении условия $kl \gg 1$ дифракционные эффекты могут стать существенными. Поэтому рассмотрим флуктуации амплитуды и фазы при помощи предложенного С.М. Рытовым метода плавных возмущений(метод Рытова[16]), который занимает промежуточное место между методами геометрической оптики и параболического уравнения и учитывает дифракционные эффекты.

В методе Рытова решение задают в виде

$$u = A_0 e^{\Phi}, \tag{3}$$

где Φ –комплексная фаза. Запишем уравнение Гельмгольца для неоднородной среды в виде

$$\triangle u + k^2[1 + 2n'(\vec{r})]u = 0.$$

где $2n'(\vec{r}) = \frac{\varepsilon(r)-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ - относительная величина флуктуации диэлектрической проницаемости. Учтем, что

$$\frac{\triangle u}{u} = \triangle \ln u + (\bigtriangledown \ln u)^2 = \triangle\Phi + (\bigtriangledown\Phi)^2,$$

получаем уравнение

$$\triangle\Phi + (\bigtriangledown\Phi)^2 + k^2[1 + 2n'(\vec{r})] = 0. \tag{4}$$

Будем искать Φ в виде ряда

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots. \tag{5}$$

где Φ_k имеет порядок малости $(n')^k$. Тогда подставляя (5) в (4) и приравнивая нулю группы членов одного порядка малости, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&\triangle\,\Phi_0 + (\bigtriangledown\Phi_0)^2 + k^2 = 0,\\
&\triangle\,\Phi_1 + 2\bigtriangledown\Phi_0\bigtriangledown\Phi_1 = -2k^2n'(\vec{r}),\\
&\triangle\,\Phi_1 + 2\bigtriangledown\Phi_0\bigtriangledown\Phi_2 = -(\bigtriangledown\Phi_1)^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Первое из уравнений (6) соответствует волне, распространяющейся в среде без флуктуаций. Остальные уравнения имеют одинаковый вид и различаются правыми частями. Второе уравнение упрощается заменой $\Phi_1 = e^{-\Phi_0}w$

$$\triangle w + k^2 w = -2k^2 e^{\Phi_0} n'.$$

Здесь, как и в методе геометрической оптики, представление (3) обеспечивает учет многократного рассеяния на неоднородностях среды.

1.3 Борновское приближение

Другое название метода приближение Релея. Данное приближение используется для приближенного решения интегральных уравнений. В работе будет использоваться следующее интегральное уравнение

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + [k^2 + \mathrm{grad\,div}]\int_V dr'(\delta\varepsilon(\vec{r'})\vec{E}(\vec{r'})G(\vec{r},\vec{r'}). \tag{7}$$

Решением уравнения (7) в борновском приближении является

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + [k^2 + \mathrm{grad\,div}]\int_V dr'\delta\varepsilon(\vec{r'})\vec{E}_0(\vec{r'})G(\vec{r},\vec{r'}),$$

т.е. вместо неизвестной функции под интеграл подставляется падающее поле $\vec{E}_0$. Условиями применимости метода, исходя из [17], являются

$$\begin{aligned}
|\delta\varepsilon(\vec{r})| &\ll 1,\\
kd|\delta\varepsilon(\vec{r})| &\ll 1.
\end{aligned}$$

Это значит, что рассматриваемая среда должна быть с диэлектрической проницаемостью примерно равной диэлектрической проницаемости фоновой среды, а также волновой фронт пересекая неоднородную среду, имеющую максимальный размер d, не должен быть существенно разрушен фазовым сдвигом(т.е. $d \ll \lambda$).

Также есть другие условия [15]: для малых трасс распространения $k|\vec{r'} - \vec{r}| \ll 1$

$$\frac{|\delta\varepsilon(\vec{r})|}{4\pi k|\vec{r'} - \vec{r}|}$$

и для больших трасс распространения и мелкомасштабных неоднородностей $|\nabla\varepsilon(\vec{r})|R \ll 2|\delta\varepsilon(\vec{r})|$

$$|\delta\varepsilon(\vec{r})|^2 \ll 1$$

и для больших трасс распространения и крупномасштабных неоднородностей

$$\frac{|\delta\varepsilon(\vec{r})||\nabla\varepsilon(\vec{r})||\vec{r'} - \vec{r}|}{16\pi} \ll 1.$$

Преимуществом этого метода является применимость к произвольному профилю диэлектрической проницаемости среды и падающему полю.

1.4 Метод ВКБ

Также данный метод имеет название приближение эйконала. Был предложен Релеем в 1912 году [18]. Данный метод является также приближенным решением уравнения (7). Его суть заключается в учете изменения фазы волны по мере прохождения волны в среде, т.е. теперь в качестве приближенного поля в объеме берется

$$\vec{E_0} e^{i[\sqrt{\varepsilon(\vec{r'})}-1]\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})},$$

где $\vec{r}$ -точка интегрирования, $\vec{r'}$- точка приема. Таким образом учитывается, что волновой фронт изменяется по мере прохождения среды.

Условием применимости метода, исходя из [17], является

$$|\delta\varepsilon(\vec{r})| \ll 1.$$

2 Вывод интегрального уравнения

2.1 Фундаментальное решение волнового уравнения

Для вывода интегральных представлений необходимо построить фундаментальное решение уравнений Максвелла. Поскольку в нашем случае заполняющая пространство среда является магнитооднородной, поэтому удобно исходить из фундаментального решения для волнового уравнения, которому удовлетворяет вектор $\vec{E}$. Повторим построение фундаментального решения, пользуясь [19].

Для произвольной магнитооднородной среды вектор $\vec{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} - \omega^2\varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0\mu\mu_0\vec{E} = i\omega\mu\mu_0\vec{j}(\vec{r}), \tag{8}$$

где $\varepsilon(\vec{r})$– кусочно–дифференцируемая функция координат $\vec{r} = (x, y, z)$. Фундаментальное решение векторного уравнения (8) будет представлять собой матрицу фундаментальных решений. Проведем построение фундаментального решения уравнения (8) для однородной среды. Введем матрицу-функцию декартовых координат двух точек $\vec{r}, \vec{r}_0$

$$\hat{G}(\vec{r}_0, \vec{r}) = \sum_{m=1}^{3} \vec{e}_m \otimes \vec{G}_m(\vec{r}_0, \vec{r}) = \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n G_{mn},$$

где $\vec{e}_i$ – единичные орты декартовой системы, $\otimes$ - произведение Кронекера. Вектор $\vec{G}_m = \{G_{m1}, G_{m2}, G_{m3}\}(m = 1, 2, 3)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{G}_m(\vec{r}_0, \vec{r}) - k^2\vec{G}_m(\vec{r}_0, \vec{r}) = \vec{e}_m\delta(\vec{r}_0, \vec{r}), \tag{9}$$

где $k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu\mu_0$. Из уравнения (9) видно, что компоненты векторов $\vec{G}_m$ – компоненты поля элементарного диполя, расположенного в точке $\vec{r}_0$, ориентированного вдоль одной из координатных осей. Далее, для решения (9) вводят электрический векторный потенциал Герца $\vec{\Gamma}$ [20] равенством

$$\vec{G}_m = \vec{\Gamma}_m + \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Gamma}_m. \tag{10}$$

Он определяется с точностью до градиента произвольного скалярного поля u

$$\vec{\Gamma}' = \vec{\Gamma} + \operatorname{grad} u.$$

Для вычисления же электромагнитного поля важна вихревая часть вектора Герца.

Далее, подставив (10) в уравнение (9), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Gamma}_m - \omega^2\varepsilon\mu\vec{\Gamma}_m - \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Gamma}_m = \vec{e}_m\delta(\vec{r}_0, \vec{r}).$$

Учитывая, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} - \operatorname{grad}\operatorname{div} = -\triangle,$$

получим векторное уравнение для компонент вектора $\vec{\Gamma}_m$

$$(\triangle + k^2)\vec{\Gamma}_m = -\vec{e}_m\delta(\vec{r}_0, \vec{r}).$$

Решение: $\vec{\Gamma}_m = G(\vec{r}_0, \vec{r})\{\delta_{1m}, \delta_{2m}, \delta_{3m}\}$, $G(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$, $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$. Либо $\hat{\Gamma}(\vec{r}_0, \vec{r}) = G(\vec{r}_0, \vec{r})\hat{I}$, где $\hat{I} = \delta_{ij}$ –символ Кронекера. Далее вычисляются матричные элементы G_{mn} по формуле (10)

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G(\vec{r}_0,\vec{r})+k^{-2}G_{xx}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{xy}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{xz}(\vec{r}_0,\vec{r}) \\ k^{-2}G_{xy}(\vec{r}_0,\vec{r}) & G(\vec{r}_0,\vec{r})+k^{-2}G_{yy}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{yz}(\vec{r}_0,\vec{r}) \\ k^{-2}G_{xz}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{yz}(\vec{r}_0,\vec{r}) & G(\vec{r}_0,\vec{r}) +k^{-2}G_{zz}(\vec{r}_0,\vec{r}) \end{bmatrix}$$

Как видно, матрица фундаментальных решений представляет собой матрицу-функцию 3-го порядка, все девять матричных элементов отличны от нуля.

2.2 Вывод объемного интегрального уравнения

Перейдем к выводу интегрального представления для вектора $\vec{E}$, удовлетворяющего уравнению (8). Для этого воспользуемся векторным аналогом формулы Грина. Пусть $\vec{Q}(\vec{r})$ и $\vec{P}(\vec{r})$ –регулярные вектор-функции, а $V-$ некоторый объем, ограниченный регулярной поверхностью S. Тогда имеет место формула

$$\int_V (\vec{Q}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{P} - \vec{P}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Q})\,dV = \int_S (\vec{P}\times\operatorname{rot}\vec{Q} - \vec{Q}\times\operatorname{rot}\vec{P})\vec{n}\,dS, \tag{11}$$

где $\vec{n}$ –нормаль, внешняя к S.

Чтобы применить тождество (11) для получения интегрального представления, умножим уравнение (8) скалярно на вектор $\vec{G}_m$, а уравнение (9) на вектор $\vec{E}$ и затем вычтем полученные соотношения. Имеем

$$\vec{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{G}_m - \vec{G}_m\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{e}_m\vec{E}\delta(\vec{r}_0, \vec{r}) - \vec{j}\vec{G}_m. \tag{12}$$

Пусть далее функция $\vec{j}(\vec{r})$ определена и отлична от нуля внутри некоторого объема V, а вне этого объема равна нулю. Проинтегрируем (12) по объему V и применим тождество (11) к векторам $\vec{P} = \vec{E}$ и $\vec{Q} = \vec{G}_m$

$$\int_V \vec{e}_m\vec{E}(\vec{r})\delta(\vec{r}_0, \vec{r})\,dV - \int_V \vec{j}(\vec{r})\vec{G}_m(\vec{r}_0, \vec{r})\,dV = \int_S (\vec{E}\times\operatorname{rot}\vec{G}_m - \vec{G}_m\times\operatorname{rot}\vec{E})\vec{n}\,dS. \tag{13}$$

Чтобы применить тождество (11) вне V, введем сферу S_R радиуса R с центром в начале координат таким образом, чтобы поверхность S находилась внутри сферы, и

применим тождество (11) в области V_R ограниченной поверхностями S и S_R. Так как в этой области

$$\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{G}_m - \vec{G}_m\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{e}_m\vec{E}\delta(\vec{r}_0,\vec{r}),$$

то получим

$$\int_{V_R}\vec{e}_m\vec{E}\delta(\vec{r}_0,\vec{r})\,dV_R = -\int_S(\vec{E}\times\mathrm{rot}\,\vec{G}_m - \vec{G}_m\times\mathrm{rot}\,\vec{E})\vec{n}\,dS + \int_{S_R}(\vec{E}\times\mathrm{rot}\,\vec{G}_m - \\ - \vec{G}_m\times\mathrm{rot}\,\vec{E})\vec{n}_R\,dS. \quad (14)$$

Сложим соотношения (13) и (14) и перейдем к пределу при $R\to\infty$. Учитывая, что на поверхности S непрерывны касательные к этой поверхности компоненты вектора $\vec{E}$, а на бесконечности декартовы компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{G}_m$ удовлетворяют условию излучения вида

$$|\vec{E}|\sim O(1/R);\ |\vec{G}_m|\sim O(1/R);\ \frac{\partial|\vec{E}|}{\partial R}+ik|\vec{E}|\sim o(1/R);\ \frac{\partial|\vec{G_m}|}{\partial R}+ik|\vec{G}_m|\sim o(1/R).$$

Получим после сложения и предельного перехода

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \int_V\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{j}(\vec{r})\,d\vec{r}.$$

Далее представим $\vec{j}$ как сумму объемной плотности сторонних $\vec{j}_{\text{ст}}$ и поляризацинных токов $\vec{j_{\text{п}}} = \omega^2\mu(\varepsilon(\vec{r})-\varepsilon)\vec{E}\equiv\omega^2\mu\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}$, где $\delta\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})-\varepsilon$. Тогда получим систему объемных интегральных уравнений

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \int_V\delta\varepsilon(\vec{r})\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r}, \quad (15)$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}_0) = i\omega\mu\mu_0\int_V\vec{j}_{\text{ст}}\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r}$– падающее поле. Данное уравнение справедливо и когда $V=\mathbb{R}^3$. Вектор $\vec{H}$ определяется из второго уравнения Максвелла и равен(учли что $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\equiv 0$)

$$\vec{H}(\vec{r}_0) = -i\omega\mu\,\mathrm{rot}\int_V G(\vec{r}_0,\vec{r})\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r},$$

где $\vec{E}$ – решение (15).

2.3 Альтернативная система интегральных уравнений

В литературе, например [6], можно встретить несколько отличающуюся систему от (15). Повторим их рассуждения.

Пусть в конечной области Q среда характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\vec{r})$, причем вне области Q имеем $\varepsilon=\varepsilon_0=const$ и везде $\mu=\mu_0=const$.

Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$. В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_0,$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}.$$

и условию излучения на бесконечности.

Рассматриваемая задача может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению относительно поля $\vec{E}$ в области неоднородности Q, имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_Q \delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})G(R)\,d\vec{r}+$$
$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q \delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})G(R)\,d\vec{r}. \tag{16}$$

Здесь $\vec{E}_0$–электрическое поле, создаваемое сторонним током $\vec{J}_0$ в однородном пространстве с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_0, μ_0. $G(R) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, R = |\vec{r} - \vec{r}_0|, \delta\varepsilon(\vec{r}) = [\varepsilon(\vec{r}) - \varepsilon_0]$ Авторы замечают, что при внесении оператора $\operatorname{grad}\operatorname{div}$ под знак интеграла возникает слагаемое пропорциональное $1/R^3$ и интеграл в смысле Римана потеряет смысл, и его рассматривают как интеграл в смысле главного значения по Коши, т.е.

$$v.p.\int_Q u(y)\frac{f(x,\theta,\phi)}{R^3}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q(r<\varepsilon)} u(y)\frac{f(x,\theta,\phi)}{R^3}\,dy. \tag{17}$$

Здесь r, θ, ϕ задаются формулами

$$y_l - x_l = r\alpha_l(\theta,\phi), \quad l = 1,2,3,$$

$\alpha_1(\theta,\phi) = \sin\theta\cos\phi$, $\alpha_2(\theta,\phi) = \sin\theta\sin\phi$, $\alpha_3(\theta,\phi) = \cos\theta$, а $y_l, x_l, l = 1,2,3$ – декартовы координаты точек x, y.

Доказано [21], что при выполнении условий

$$\int_S f(x,\theta,\phi)\,dS = 0, \quad \int_S |f(x,\theta,\phi)|^2\,dS = const,$$

где f из (17), а S–единичная сфера, сингулярный интегральный оператор существует и ограничен в $L_2(Q)$ (Q может совпадать с $\mathbb{R}^3$). Во всех сингулярных интегралах, встречающихся ниже, данные условия выполнены.

Рассмотрим интегральный оператор

$$\omega(x) = \int_Q \frac{\psi(x,\theta,\phi)}{R^2}u(y)\,dy. \tag{18}$$

Тогда если функция ψ имеет в Q непрерывные первые производные своих аргументов, а $u \in L_2(Q)$, то (18) имеет производные $\partial\omega/\partial x_i \in L_2(Q), i = 1, 2, 3$. Эти производные определяются формулами [4]

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_l} = v.p. \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l}[\frac{\psi(x,\theta,\phi)}{R^2}]u(y)\,dy - u(x)\int_S \psi(x,\theta,\phi)\alpha_l(\theta,\phi)\,dS. \tag{19}$$

Записывая (16) в декартовой системе координат и используя (19), можно показать, что (16) представима в виде векторного сингулярного интегрального уравнения

$$\vec{E}(\vec{r_0}) = \vec{E}_0(\vec{r_0}) - \frac{1}{3}\delta\varepsilon(\vec{r_0})\vec{E}(\vec{r_0}) + k^2\int_Q \delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})G_0(R)\,d\vec{r}+$$
$$+v.p.\int_Q (\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}), \mathrm{grad})\,\mathrm{grad}\,G_1(R)\,d\vec{r}.$$

Здесь $G_0(R) = [\exp(ikR)-1]/(4\pi R)$, $G_1(R) = [1/(4\pi R)]$, $(\delta\varepsilon(\vec{r_0})\vec{E}(\vec{r}), \mathrm{grad})\,\mathrm{grad}\,G_1(R) = \sum_{i,j=1}^3 \delta\varepsilon(\vec{r_0})E_{x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}[\frac{1}{4\pi R}], R = |\vec{r} - \vec{r_0}|$. Разложение G на G_1 и G_0 связано с возникающими особенностями при дифференцировании этих функций. Функция G_0 является гладкой функцией и ее можно дважды дифференцировать по декартовым координатам, причем $G_0(0) = (ik)/(4\pi)$.

Магнитное поле $\vec{H}(\vec{r})$ выражается через электрическое поле интегральной формулой

$$\vec{H}(\vec{r_0}) = \vec{H}_0(\vec{r_0}) - i\omega\varepsilon_0\int_Q [\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}), \mathrm{grad}]G(R)\,d\vec{r},$$

где $\vec{H}_0-$ магнитное поле, создаваемое сторонними токами $\vec{J_0}$ в однородном пространстве с параметрами ε_0, μ_0. Вопрос существования и единственности решения в пространстве функций L_2 данной системы обсуждается, например в [22].

Сравнивая данную системы с предыдущей, можно заметить следующую разницу: во втором случае есть слагаемое $\frac{1}{3}\delta\varepsilon\vec{E}(\vec{r_0})$, которое возникло при выделении малого сферического объема и уточнения смысла интеграла.

2.4 Проверка эквивалентности рассматриваемой системы интегральных уравнений и волнового уравнения

Рассматриваемая система интегральных уравнений имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r_0}) = \vec{E}_0(\vec{r_0}) + k^2\int_V \delta\varepsilon(\vec{r})\hat{G}(\vec{r_0},\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r},$$

где $\vec{E}_0(\vec{r_0}) = i\omega\mu\mu_0\int_V \hat{G}(\vec{r_0},\vec{r})\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r})\,d\vec{r}$. Подставим $\vec{E}(\vec{r})$ в левую часть волнового уравнения

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \omega^2\varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0\mu\mu_0\vec{E} = i\omega\mu\mu_0\vec{j}(\vec{r}),$$

сделав двойную замену $\vec{r}_0 \leftrightarrow \vec{r}$, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Big\{\vec{E}_0(\vec{r}) + k^2\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0\Big\} - \\ - k^2\varepsilon(\vec{r})\Big\{\vec{E}_0(\vec{r}) + k^2\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0\Big\}.$$

Вычислим отдельно

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}_0(\vec{r}) - k^2\varepsilon(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r}) = i\omega\mu\mu_0\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_V \hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 - \\ - ik^2\omega\delta\varepsilon(\vec{r})\mu\mu_0\int_V \hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 = i\omega\mu\mu_0\int_V \hat{I}\delta(\vec{r},\vec{r}_0)\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0 - \\ - ik^2\omega\delta\varepsilon(\vec{r})\mu\mu_0\int_V \hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 = \\ = i\omega\mu\mu_0\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}) - ik^2\omega\delta\varepsilon(\vec{r})\mu\mu_0\int_V \hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 = i\omega\mu\mu_0\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}) - k^2\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r}).$$

Остается вычислить

$$k^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 - k^4\varepsilon(\vec{r})\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 = \\ = \int_V k^2\delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\Big\{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r}) - k^2\varepsilon(\vec{r})\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0\Big\} = \\ = \int_V k^2\delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\Big\{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r}) - k^2\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0\Big\} - \\ - k^4\delta\varepsilon(\vec{r})\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0 = \int_V k^2\delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\hat{I}\delta(\vec{r},\vec{r}_0)d\vec{r}_0 - \\ - k^4\delta\varepsilon(\vec{r})\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0 = k^2\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) - \\ - k^4\delta\varepsilon(\vec{r})\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0.$$

Тогда

$$i\omega\mu\mu_0\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}) - k^2\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r}) + k^2\delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) - k^4\delta\varepsilon(\vec{r})\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0 = \\ = i\omega\mu\mu_0\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r}) - k^2\delta\varepsilon(\vec{r})\Big\{\vec{E}_0(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) + k^2\int_V \delta\varepsilon(\vec{r}_0)\vec{E}(\vec{r}_0)\hat{G}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0\Big\}$$

распишем $\vec{E}(\vec{r})$, пользуясь системой интегральных уравнений. После подстановки получим, что выражение в скобках есть тождественный 0. В результате правая часть получается такой же, как и у волнового уравнения. Таким образом, показана эквивалентость в том смысле, что решение рассматриваемой системы интегральных уравнений является также решением соответсвующего волнового уравнения.

3 Векторное обобщение метода итерированных ядер

3.1 Применение метода итерированных ядер

Рассматриваем случай непроводящей неоднородной среды с зависимостью диэлектрической проницаемости от пространственных координат, но не от частоты. При этом магнитная проницаемость постоянна, для определенности положим $\mu = 1$. Исходим из уравнений Максвелла в спектральном представлении

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}_{\text{ст}},$$
$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0\mu\vec{H}(\vec{r}).$$

Граничное условие - условие Зоммерфельда

$$|\vec{E}| \sim O(1/R); \quad \frac{\partial|\vec{E}|}{\partial R} + ik|\vec{E}| \sim o(1/R), R = |\vec{r} - \vec{r}_0|.$$

Перейдем к системе объемных интегральных уравнений (15), которая эквивалентна данной системе.

Решение будем искать методом последовательных приближений в предположении плавно-неоднородной среды, у которой мал модуль градиента контраста диэлектрической проницаемости $|\operatorname{grad}\delta\varepsilon(\vec{r})| \ll 1$. Данное решение является векторным обобщением метода итерированных ядер, который разрабатывался в работах [23]-[24].

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r})\hat{G}(\vec{r}_0, \vec{r})\vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r},$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}_0) = i\omega\mu\mu_0 \int_V \hat{G}(\vec{r}_0, \vec{r})\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{r})\, d\vec{r}$. Распишем произведение

$$\hat{G}(\vec{r}_0, \vec{r})\vec{E}(\vec{r}) = G(\vec{r}_0, \vec{r})\vec{E}(\vec{r}_0) + k^{-2} \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{x_j}(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G(\vec{r}_0, \vec{r}).$$

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r})G(\vec{r}_0, \vec{r})\vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} + \int_V \delta\varepsilon(\vec{r})G(\vec{r}_0, \vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{x_j}(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r}$$

или так

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2 \int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]\vec{E}(\vec{r})G(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r} +$$
$$+ \int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})] \Big[E_x(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial_{x1}} \operatorname{grad} G(\vec{r}_0, \vec{r}) + E_{x2}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial_{x2}} \operatorname{grad} G(\vec{r}_0, \vec{r}) + E_{x3}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial_{x3}} \operatorname{grad} G(\vec{r}_0, \vec{r}) \Big]\, d\vec{r}.$$

Пользуясь приближением плавно-неоднородной среды, будем раскладывать $\delta\varepsilon(\vec{r'})$ в ряд Тейлора

$$\delta\varepsilon(\vec{r'}) \approx \delta\varepsilon(\vec{r}) + \varepsilon_x(x'-x) + \varepsilon_y(y-y') + \varepsilon_z(z'-z) + \dots$$

и ограничиваться нулевым членом разложения $\delta\varepsilon(\vec{r'}) \approx \delta\varepsilon(\vec{r})$. Тем самым данная функция будет вынесена во внешний интеграл. А для внутренних интегралов будем использовать обозначение

$$I_{n+1}(\vec{r},\vec{r_0}) = \int_{V_1} G(\vec{r},\vec{r}_1)\,d\vec{r}_1 \int_{V_2} G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,d\vec{r}_2 \dots \int_{V_{n-1}} G(\vec{r}_{n-2},\vec{r}_{n-1})G(\vec{r}_0,\vec{r}_{n-1})\,d\vec{r}_{n-1},\ n>1,$$

Данные интегралы вычислены в [15].

$$I_{n+1}(\vec{r},\vec{r_0}) = G(\vec{r},\vec{r}_0)\frac{R_0}{2s^{2n-1}}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{a_{m,n}\tau^m}{(m+1)!},\ \tau = sR_0,\ s=-2ik,\ n>0, \quad I_1(\vec{r},\vec{r}_0) = G(\vec{r},\vec{r}_0),$$

где a_{mn} - постоянные коэффициенты, которые вычисляются через рекуррентные соотношения [15].

Далее будем использовать следующее свойство функции Грина.

$$\frac{\partial^{|\alpha|}G(R)}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\partial^{\alpha_3}x_3} = (-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}G(R)}{\partial^{\alpha_1}x_{0_1}\partial^{\alpha_2}x_{0_2}\partial^{\alpha_3}x_{0_3}},$$

где $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, R = |\vec{r}-\vec{r}_0|$. Проще это заметить после вычисления производной $\frac{\partial^{|\alpha|}G(R)}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\partial^{\alpha_3}x_3}$ и заменой $x_i \leftrightarrow x_{0i}$, для всех i .

Дважды интегрируя по частям и учитывая условия убывания поля на бесконечности, записываем следующее равенство

$$\int_{V'} G''(\vec{r},\vec{r'})_{x'_ix'_j}G(\vec{r'},\vec{r}_0)\,d\vec{r'} = \int_{V'} G(\vec{r},\vec{r'})G''(\vec{r'},\vec{r}_0)_{x'_ix'_j}\,d\vec{r'} =$$
$$= \int_{V'} G(\vec{r}_0,\vec{r'})G''(\vec{r'},\vec{r}_0)_{x_{0i}x_{0j}}\,d\vec{r'} = \frac{\partial^2}{\partial x_{0i}\partial x_{0j}}\int_{V'} G(\vec{r},\vec{r'})G(\vec{r'},\vec{r}_0)\,d\vec{r'}.$$

Пользуясь всем этим, мы выносили все производные за интегралы $I_l(\vec{r}_0,\vec{r})$ и образовывали лапласианы.

Теперь запишем первое приближение, приняв за нулевое приближение $\vec{E}_0(\vec{r})$.

$$\vec{E}_1(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]\vec{E}_0(\vec{r})G(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} +$$
$$+\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]\Big[E_{0x_1}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\operatorname{grad}G(\vec{r}_0,\vec{r}) + E_{0x_2}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\operatorname{grad}G(\vec{r}_0,\vec{r}) + E_{0x_3}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_3}}\operatorname{grad}G(\vec{r}_0,\vec{r})\Big]d\vec{r}.$$

Второе приближение

$$\vec{E}_2(\vec{r}_0) = \vec{E}_1(\vec{r}_0)+\frac{k^4}{s}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^2\vec{E}_0(\vec{r})R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r}+\frac{2k^2}{s}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^2\Big[E_{0x_1}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\operatorname{grad}[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0]+$$
$$+E_{0x_2}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\operatorname{grad}[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0]+E_{0x_3}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_3}}\operatorname{grad}[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0]\Big]\,d\vec{r}+$$
$$+\frac{1}{s}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^2\Big[E_{0x_1}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x1}}\operatorname{grad}\triangle[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0]+E_{0_x2}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\operatorname{grad}\triangle[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0]+$$
$$+E_{0x_3}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_3}}\operatorname{grad}\triangle[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0]\Big]\,d\vec{r}=\vec{E}_1(\vec{r}_0)+k^4\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^2\vec{E}_0(\vec{r})I_2(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r}+$$
$$+2k^2\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}E_{0x_i}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial_{x_j}}I_2(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r}+$$
$$+\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^2\Big[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}E_{0x_i}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\triangle I_2(\vec{r}_0,\vec{r})\Big]\,d\vec{r}.$$

$$\vec{E}_3(\vec{r}_0) = \vec{E}_2(\vec{r}_0)+\frac{k^6}{s^3}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\vec{E}_0(\vec{r})R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]\,d\vec{r}+\frac{3k^4}{s^3}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\times$$
$$\times\Big[E_{0x_1}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\operatorname{grad}[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]+$$
$$+E_{0x_2}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\operatorname{grad}[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]+E_{0x_3}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_3}}\operatorname{grad}[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]\Big]\,d\vec{r}+$$
$$+\frac{3k^2}{s^3}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\Big[E_{0x_1}\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\operatorname{grad}\triangle[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]+E_{0x_2}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\operatorname{grad}\triangle[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]+$$
$$+E_{0x_3}\frac{\partial}{\partial_{x_3}}\operatorname{grad}\triangle[G(\vec{r}_0,\vec{r})R_0[1+\frac{\tau}{2}]]\Big]d\vec{r}+\frac{1}{s^3}\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\Big[E_{0x_1}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\operatorname{grad}\triangle^2[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]+$$
$$+E_{0x2}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\operatorname{grad}\triangle^2[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]+E_{0x_3}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_3}}\operatorname{grad}\triangle^2[R_0G(\vec{r}_0,\vec{r})[1+\frac{\tau}{2}]]\Big]\,d\vec{r}=$$
$$=\vec{E}_2(\vec{r}_0)+k^6\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\vec{E}_0(\vec{r})I_3(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r}+3k^4\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}E_{0x_i}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial_{x_j}}I_3(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r}+$$
$$+3k^2\int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}E_{0x_i}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\triangle I_3(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r}+\int_V\sum_{i,j=1}^{3}[\delta\varepsilon(\vec{r})]^3E_{0x_i}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial_{x_j}}\triangle^2 I_3(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r}.$$

Чтобы заметить закономерность будем выделять 1-ые слагаемые в приближениях $\vec{E}_i, i = 1, 2, \ldots n$, у которых множитель k^{2i}. Эти слагаемые будут образовывать сумму векторов, у которой любая проекция аналогична сумме в скалярном случае [15]. В

результате выделится $\vec{E}^c_{n+1}(\vec{r}_0)$ и $\vec{E}_{n+1}(\vec{r}_0)$ можно записать так:

$$\vec{E}_{n+1} = \vec{E}_n(\vec{r}_0) + k^{2(n+1)} \int_V [\delta\varepsilon(\vec{r})]^{n+1} \vec{E}_0(\vec{r}) I_{n+1}(\vec{r},\vec{r}_0)\, d\vec{r} +$$
$$+ \int_V d\vec{r} [\delta\varepsilon(\vec{r})]^{n+1} \sum_{i,j=1}^{3} E_{0x_j} \vec{e}_i \sum_{m=1}^{n+1} k^{2(n-m)} C^m_{n+1} \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \bigtriangledown^{2(m-1)} I_{n+1}(\vec{r},\vec{r}_0) =$$
$$= \vec{E}^c_{n+1}(\vec{r}_0) + \int_V d\vec{r} \sum_{i,j=1}^{3} E_{0x_j} \vec{e}_i \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{l} [\delta\varepsilon(\vec{r})]^l k^{2(l-m)} C^m_l \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \bigtriangledown^{2(m-1)} I_l(\vec{r},\vec{r}_0),$$

где

$$\vec{E}^c_{n+1} = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G(\vec{r}_0,\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}_0) d\vec{r} + k^4 \int_{V_1} d\vec{r}_1 \delta\varepsilon(\vec{r}_1)^2 \vec{E}_0(\vec{r}_1) \int_{V_2} G(\vec{r}_1,\vec{r}_2) G(\vec{r}_2,\vec{r}_0)\, d\vec{r}_2 + ... +$$
$$+ k^{2(n+1)} \int_{V_1} [\delta\varepsilon(\vec{r}_1)]^{n+1} \vec{E}_0(\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1 \int_{V_2} G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\, d\vec{r}_2 \ldots \int_{V_{n+1}} G(\vec{r_n},\vec{r}_{n+1}) G(\vec{r}_{n+1},\vec{r}_0)\, d\vec{r}_{n+1} =$$
$$= \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \sum_{l=1}^{n+1} k^2 \int_V \vec{E}(\vec{r}) [\delta\varepsilon(\vec{r})]^l k^{2(l-1)} I_l(\vec{r}_0,\vec{r}) d\vec{r}.$$

Если считать, что $\triangle G(\vec{r}_0,\vec{r}) = -k^2 G(\vec{r}_0,\vec{r})$, то можно записать

$$\triangle_r I_{n+1}(\vec{r},\vec{r}_0) = \triangle_r \int_{V_1} G(\vec{r},\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1 \int_{V_2} G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\, d\vec{r}_2 \ldots \int_{V_{n+1}} G(\vec{r_n},\vec{r}_{n+1}) G(\vec{r}_0,\vec{r}_{n+1})\, d\vec{r}_{n+1} =$$
$$= \int_{V_1} \triangle_r G(\vec{r},\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1 \int_{V_2} G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\, d\vec{r}_2 \ldots \int_{V_{n+1}} G(\vec{r_n},\vec{r}_{n+1}) G(\vec{r}_0,\vec{r}_{n+1})\, d\vec{r}_{n+1} =$$
$$= -k^2 \int_{V_1} G(\vec{r},\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \int_{V_2} G(\vec{r}_1,\vec{r}_2) d\vec{r}_2 \ldots \int_{V_{n+1}} G(\vec{r}_n,\vec{r}_{n+1}) G(\vec{r}_0,\vec{r}_{n+1}) d\vec{r}_{n+1} = -k^2 I_{n+1}(\vec{r}_0,\vec{r}).$$

Таким образом $\bigtriangledown^{2(m-1)} I_{n+1}(\vec{r}_0,\vec{r}) = (-k^2)^{m-1} I_{n+1}(\vec{r}_0,\vec{r})$.

$$\vec{E}_{n+1} = \vec{E}^c_{n+1}(\vec{r}_0) + \int_V d\vec{r} \sum_{i,j=1}^{3} E_{0x_j} \vec{e}_i \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{l} [\delta\varepsilon(\vec{r})]^l k^{2(l-m)} C^m_l \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} (-k^2)^{m-1} I_l(\vec{r},\vec{r}_0) =$$
$$= \vec{E}^c_{n+1}(\vec{r}_0) + \int_V d\vec{r} \sum_{i,j=1}^{3} E_{0x_j} \vec{e}_i \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{l} [\delta\varepsilon(\vec{r})]^l k^{2(l-1)} \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} I_l(\vec{r}_0,\vec{r}).$$

мы учли, что $\sum_{m=1}^{l} (-1)^{m-1} C^m_l = (-1) \sum_{m=0}^{l} (-1)^m C^m_l + 1 = (1-1)^l + 1 = 1$.

В пределе $n \to \infty$ получаются два одинаковых ряда, что уже были вычислены в [15].

$$\Gamma(\vec{r}_0,\vec{r}) = \delta\varepsilon(\vec{r}) G(\vec{r}_0,\vec{r}) \Big(1 - ikR \sum_{n=1}^{\infty} \big[-\frac{\delta\varepsilon(\vec{r})}{4} \big]^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_{m,n} \tau^m}{(m+1)!} \Big)$$

Итоговый результат

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0)+k^2\int_V \vec{E}_0(\vec{r})\delta\varepsilon(\vec{r})G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r}+\int_V d\vec{r}\delta\varepsilon(\vec{r})\sum_{i,j=1}^{3}E_{0x_j}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial_{x_{0_i}}}\frac{\partial}{\partial_{x_{0_j}}}G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) =$$

$$= \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_V \vec{E}_0(\vec{r})[\delta\varepsilon(\vec{r})]G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r}+$$

$$+\int_V \delta\varepsilon(\vec{r})\sum_{i,j=1}^{3}E_{0x_j}\vec{e}_iG_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})[\frac{1}{R_0^2}(x_i-x_{0_i})(x_j-x_{0_j})(-\varepsilon(\vec{r})k^2-\frac{3ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}}{R_0}+\frac{3}{R_0^2})+$$

$$+\delta_{ij}(ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}-\frac{1}{R_0})\frac{1}{R_0}]\,d\vec{r} =$$

$$= \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_V \vec{E}_0(\vec{r})[\delta\varepsilon(\vec{r})]G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r},\vec{r}_0)\,d\vec{r}-$$

$$-\int_V \delta\varepsilon(\vec{r})(\vec{E}_0\cdot[\vec{r}-\vec{r}_0])[\vec{r}-\vec{r}_0]G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})[\frac{1}{R_0^2}(\varepsilon(\vec{r})k^2+\frac{3ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}}{R_0}-\frac{3}{R_0^2})]\,d\vec{r}+$$

$$+\int_V \delta\varepsilon(\vec{r})G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r},\vec{r}_0)\frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{R_0}(ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}-\frac{1}{R_0})\,d\vec{r}$$

$R_0 = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,,\quad G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}R_0}}{4\pi R_0}\,.$
Или в тензорной форме

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_V \delta\varepsilon(\vec{r})\hat{G}_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r})\,d\vec{r},$$

где $\vec{G}_m(\vec{r}_0,\vec{r}) = \vec{A}_m^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) + \frac{1}{k^2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}_m^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}),\ m=1,2,3.$
$\vec{A}_1^{\varepsilon(\vec{r})} = (G_{\varepsilon(\vec{r})},0,0),\ \vec{A}_2^{\varepsilon(\vec{r})} = (0,G_{\varepsilon(\vec{r})},0),\ \vec{A}_3^{\varepsilon(\vec{r})} = (0,0,G_{\varepsilon(\vec{r})}).$

$$\hat{G}_{\varepsilon(\vec{r})} = \begin{bmatrix} G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})+k^{-2}G_{xx}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{xy}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{xz}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) \\ k^{-2}G_{xy}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) & G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})+k^{-2}G_{yy}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{yz}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) \\ k^{-2}G_{xz}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) & k^{-2}G_{yz}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) & G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})+k^{-2}G_{zz}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) \end{bmatrix},$$

где $G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}R_0}}{4\pi R_0}\,,\ G_{x_ix_j}^{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_ix_j}\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}R_0}}{4\pi R_0}\,.$

Единственное сделанное в процессе преобразований приближение состоит в учете лишь нулевого члена разложения Тейлора зависимости от координат. Это позволило точно вычислить необходимые интегралы всех последовательных приближений. В ходе суммирования ряда Неймана не использовалось никаких дополнительных допущений. В результате был осуществлен переход от описания многократного рассеяния падающего поля к описанию изменения поляризационных и амплитудно-фазовых характеристик полного поля, формируемых неоднородной средой в целом. Второе слагаемое полученного решения соответствует скалярному приближению для вторичного поля, третье слагаемое связано с векторным характером электромагнитного поля и оказывает влияние на результирующую поляризацию.

3.2 Оценка границ применимости решения по следующему приближению

Чтобы оценить границы применимости полученного решения (21), подставим его в исходную систему уравнений (20) в качестве первого приближения. Далее, вычитая из второго приближения первое, оценим когда модуль разницы будет мал.

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G_{x_i x_j}(R_0) E_{x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} \quad (20)$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}_0) \;=\; \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G^{\varepsilon}_{x_i x_j}(R_0) E_{0x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G^{\varepsilon}(R_0) \vec{E}_0(\vec{r})\, d\vec{r} \quad (21)$$

Тогда второе приближение будет равно

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G_{x_i x_j}(R_0) E_{1x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} + k^2 \int_V d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \vec{E}_1(\vec{r})\, d\vec{r} = \\
= \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G_{x_i x_j}(R_0) E_{0x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \vec{E}_0(\vec{r})\, d\vec{r} + \\
+ \int_V d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j,m=1}^{3} \vec{e}_i G_{x_i x_j}(R_0) \int_{V'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) G^{\varepsilon}_{x_j x_m}(R') E_{0x_m}(\vec{r'})\, d\vec{r'} + \\
+ k^2 \int_V d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G(R_0) \int_{V'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) G^{\varepsilon}(R') E_{0x_j}(\vec{r'}) d\vec{r'} + \\
+ k^2 \int_V d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \int_{V'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G^{\varepsilon}_{x_i x_j}(R') E_{0x_j}(\vec{r'})\, d\vec{r'} + \\
+ k^4 \int_V d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \int_{V'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) G^{\varepsilon}(R') \vec{E}_0(\vec{r'})\, d\vec{r'}
\end{aligned}$$

Меняя порядки интегрирования, раскладываем $\delta\varepsilon(\vec{r'})$ в ряд в точке $\vec{r}$ и ограничиваемся линейным членом

$$\delta\varepsilon(\vec{r}) = \delta\varepsilon(\vec{r'}) + \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'}).$$

Далее применяем дважды интегрирование по частям, переносим все производные на одну функцию Грина, после переносим производные с переменной интегрирования на оставшуюся переменную и пользуемся П. 18 [15]

$$k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G^{\varepsilon}(R_0) G^{\varepsilon}(R')\, d\vec{r'} = [G^{\varepsilon}(R'_0) - G(R'_0)].$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G_{x_i x_j}(R_0) E_{0x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \vec{E}_0(\vec{r})\, d\vec{r} +$$

$$+ \sum_{i,m=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) E_{0x_m}(\vec{r'}) [G^\varepsilon(R_0') - G(R_0')]$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \vec{E}_0(\vec{r'}) [G^\varepsilon(R_0') - G(R_0')] +$$

$$+ \int_{V'} d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j,m=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_m}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G_{x_i x_j}(R_0) G^\varepsilon_{x_j x_m}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G_{x_i x_j}(R_0) G^\varepsilon(R') d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G(R_0) G^\varepsilon_{x_i x_j}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^4 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \vec{E}_0(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G(R_0) G^\varepsilon(R')\, d\vec{r}$$

$\alpha-$ угол между $\vec{r'}$ и $\vec{r}$.

Тогда, оценивать погрешность полученного решения будем из условия малости разности

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}_0) = |\vec{E}_2(\vec{r}_0) - \vec{E}_1(\vec{r}_0)| = \Big| \Big\{ \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G_{x_i x_j}(R_0) E_{0x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G(R_0) \vec{E}_0(\vec{r})\, d\vec{r} + \sum_{i,m=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) E_{0x_m}(\vec{r'}) [G^\varepsilon(R_0') - G(R_0')]$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \vec{E}_0(\vec{r'}) [G^\varepsilon(R_0') - G(R_0')] +$$

$$+ \int_{V'} d\vec{r} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j,m=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_m}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G_{x_i x_j}(R_0) G^\varepsilon_{x_j x_m}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G_{x_i x_j}(R_0) G^\varepsilon(R') d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G(R_0) G^\varepsilon_{x_i x_j}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^4 \int_{V'} d\vec{r'} \delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad} \varepsilon(\vec{r'}) \vec{E}_0(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G(R_0) G^\varepsilon(R')\, d\vec{r} \Big\} -$$

$$- \Big\{ \vec{E}_0(\vec{r}_0) + \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i G^\varepsilon_{x_i x_j}(R_0) E_{0x_j}(\vec{r})\, d\vec{r} + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G^\varepsilon(R_0) \vec{E}_0(\vec{r})\, d\vec{r} \Big\} \Big| =$$

$$= \Big| \int_{V'} d\vec{r}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j,m=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_m}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G_{x_i x_j}(R_0) G^{\varepsilon}_{x_j x_m}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G_{x_i x_j}(R_0) G^{\varepsilon}(R') d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G(R_0) G^{\varepsilon}_{x_i x_j}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^4 \int_{V'} d\vec{r'}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \vec{E}_0(\vec{r'}) \int_V R' \cos\alpha G(R_0) G^{\varepsilon}(R')\, d\vec{r} \Big|.$$

Учитывая, что $|\cos\alpha| \le 1$, получим оценку

$$|\vec{E}_2(\vec{r_0}) - \vec{E}_1(\vec{r_0})| \le \Big| \int_{V'} d\vec{r}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j,m=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_m}(\vec{r'}) \int_V R' G_{x_i x_j}(R_0) G^{\varepsilon}_{x_j x_m}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' G_{x_i x_j}(R_0) G^{\varepsilon}(R') d\vec{r} +$$

$$+ k^2 \int_{V'} d\vec{r'}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i E_{0x_j}(\vec{r'}) \int_V R' G(R_0) G^{\varepsilon}_{x_i x_j}(R')\, d\vec{r} +$$

$$+ k^4 \int_{V'} d\vec{r'}\delta\varepsilon(\vec{r'}) \operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'}) \vec{E}_0(\vec{r'}) \int_V R' G(R_0) G^{\varepsilon}(R')\, d\vec{r} \Big|$$

Из всех внутренних интегралов удается вычислить только последний, что был для скалярного случая. Тем не менее видно, что при малых значениях $\delta\varepsilon(\vec{r'})$ или $\operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r'})$ разница стремится к 0. Таким образом, получены два необходимых условия применимости метода: 1) малость контраста диэлектрической проницаемости неоднородностей среды, или 2) малость модуля градиента диэлектрической проницаемости, определяющая плавность изменения профиля среды, или 3) малость длины трассы распространения, выраженная в длинах волн, что было показано для скалярного случая в [25].

Как и все подобные оценки, данная является весьма грубой и ориентировочной, т. е. метод может оказаться достаточно точным для большего числа задач. Так, например, как будет показано в следующей главе, в скалярном случае для задачи о центрированном источнике в среде с границей в виде сферической полости полученное решение совпадает с точным.

4 Скалярный случай, центрированный источник в сферической полости

Для понимания задач, к которым применим разработанный метод, рассмотрим две задачи в скалярном приближении: сферическая волна в однородной среде и центрированный источник в сферической полости.

$$E(\vec{r}_1) = E_0(\vec{r}_1) + k^2 \int_V \delta\varepsilon(\vec{r}) G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_1, \vec{r}) E(\vec{r})\, d\vec{r} \tag{22}$$

Пусть в качестве падающего поля будет $\vec{E}_0(\vec{r}_1) = G_0(R_2) = \frac{e^{ik\varepsilon_0 R_2}}{4\pi R_2}, R_2 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, точечный источник которого расположен в точке r_2 с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\vec{0}) = \varepsilon_0$, а все остальное пространство с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon, \delta\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon - \varepsilon_0, \vec{r} \neq \vec{r}_0$. Тогда выражение (22) примет вид

$$E(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G_0(R_{12}) + k^2 \delta\varepsilon \int_V G_\varepsilon(R_1) G_0(R_2)\, d\vec{r}.$$

Используя (П. 18) из [15], а именно

$$\int_V G_{\varepsilon(\vec{r}_1)}(R_1) G_0(R_2) d\vec{r} = \frac{1}{k^2 \delta\varepsilon(\vec{r}_1)} \Big(G_{\varepsilon(\vec{r}_1)}(R_{12}) - G_0(R_{12}) \Big), \tag{23}$$

получаем

$$E(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G_0(R_{12}) + k^2 \delta\varepsilon \frac{1}{k^2 \delta\varepsilon} \Big(G_\varepsilon(R_{12}) - G_0(R_{12}) \Big) = G_\varepsilon(R_{12}). \tag{24}$$

Данный результат совпадает с ожидаемым. Оказывается не важным какое ε_0 брать в точке источника.

Далее рассмотрим центрированный источник в сферической полости, геометрия задачи изображена на Рисунке 1.

4.1 Приближение дальней зоны

Сферическая волна с источником в центре координат имеет вид $G_0(\vec{r}) = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|}$. Среда состоит из сферической границы раздела двух однородных сред, т.е. $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + (\varepsilon - \varepsilon_0)\chi(r - H)$, χ - функция Хевисайда. Решение методом итерированных ядер имеет вид

$$E(\vec{r}) = G_0(\vec{r}) + k^2 \delta\varepsilon \int_{V/V_H} G_\varepsilon(R_0) G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0,$$

где V_H- объем сферы с центром в начале координат и с радиусом H. Чтобы упростить вычисление интеграла - воспользоваться приближением дальней зоны, нужно чтобы

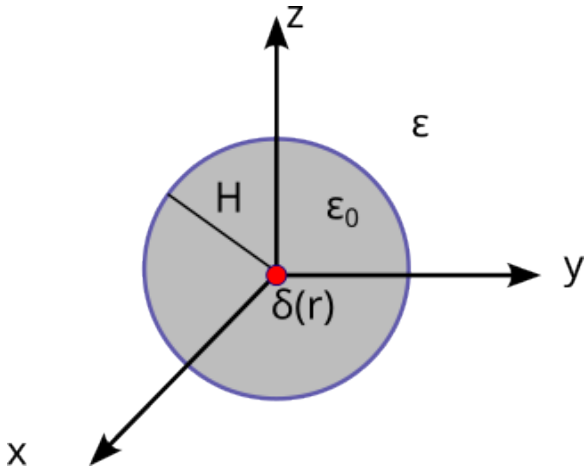


Рисунок 1 – Центрированный источник сферической волны в сферической полости

точки интегрирования должным образом сопоставлялись с точками приема. Для выделения прошедшей волны необходимо чтобы объем был конечным, поэтому пользуемся (23) и аддитивностью интеграла. Тогда можно записать

$$E(\vec{r}) = G_0(\vec{r}) + k^2\delta\varepsilon \int_{V/V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 + k^2\delta\varepsilon \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 -$$

$$-k^2\delta\varepsilon \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 = G_0(\vec{r}) + \frac{k^2\delta\varepsilon}{k^2\delta\varepsilon}\Big(G_\varepsilon(\vec{r}) - G_0(\vec{r})\Big) - k^2\delta\varepsilon \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 =$$

$$= G_\varepsilon(\vec{r}) - k^2\delta\varepsilon \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0.$$

Т.е. осталось вычислить интеграл

$$16\pi^2 \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 = \int_{V_H} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}|\vec{r}_0|}}{|\vec{r}_0|} d\vec{r}_0 =$$

$$= \int_0^H dr_0 \int_0^\pi d\theta_0 \int_0^{2\pi} d\phi_0 \sin\theta_0 r_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0}}.$$

$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\,,\ \vec{r}_0 = (r_0\sin\theta_0\cos\phi_0, r_0\sin\theta_0\sin\phi_0, r_0\cos\theta_0)$
$\vec{r}-\vec{r}_0 = (r\sin\theta\cos\phi - r_0\sin\theta_0\cos\phi_0, r\sin\theta\sin\phi - r_0\sin\theta_0\sin\phi_0, r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)$
$|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(r\sin\theta\cos\phi - r_0\sin\theta_0\cos\phi_0)^2 + (r\sin\theta\sin\phi - r_0\sin\theta_0\sin\phi_0)^2 + (r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2} =$
$\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0} = r\sqrt{1+\frac{r_0^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}_0\vec{r}}{r^2}}$. Прошедшая

волна соответствует $r > H$, отраженная $0 < r < H$. В дальней зоне имеем

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|_{r \gg r_0} \approx r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r},$$
$$G_\varepsilon(R) = \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r})]}{r}.$$

$$16\pi^2 \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0) G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 = \int_{V_H} \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r})]}{r} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}|\vec{r}_0|}}{|\vec{r}_0|} d\vec{r}_0 =$$
$$= \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{r} \int_0^H dr_0 r_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 \exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0 \cos\theta \cos\theta_0] \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\phi_0 \exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0 \sin\theta \sin\theta_0 (\cos\phi \cos\phi_0 + \sin\phi \sin\phi_0)].$$

1-ая и 2-ая интегральная формула для функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-ix \sin\phi] d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ix \cos\phi] d\phi,$$
$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-ix \cos\phi] d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ix \cos\phi] d\phi.$$

Тогда

$$\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{r} \int_0^H dr_0 r_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 \exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0 \cos\theta \cos\theta_0] \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\phi_0 \exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0 \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\phi - \phi_0)] =$$
$$= \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{r} \int_0^H dr_0 r_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 \exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0 \cos\theta \cos\theta_0] J_0(k\sqrt{\varepsilon}r_0 \sin\theta \sin\theta_0).$$

Знаем, что

$$\int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 \exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0 \cos\theta \cos\theta_0] J_0(k\sqrt{\varepsilon}r_0 \sin\theta \sin\theta_0) = \frac{2\sin(k\sqrt{\varepsilon}r_0)}{k\sqrt{\varepsilon}r_0}.$$

В результате последний интеграл имеет вид

$$\int_0^H dr_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0}\frac{2\sin(k\sqrt{\varepsilon}r_0)}{k\sqrt{\varepsilon}} = \int_0^H dr_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0}\frac{[\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r_0)-\exp(-ik\sqrt{\varepsilon}r_0)]}{ik\sqrt{\varepsilon}} =$$

$$= \Big[\frac{\exp(ik[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]r_0)}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]} - \frac{\exp(ik[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]r_0)}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]}\Big]\Big|_0^H =$$

$$= \Big[\frac{\exp(ik[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]H)}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]} - \frac{\exp(ik[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]H)}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]}\Big] - \Big[\frac{1}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]} - \frac{1}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]}\Big] =$$

$$= \Big[\frac{\exp(ik[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]H)}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]} - \frac{\exp(ik[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]H)}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]}\Big] - \Big[\frac{2}{(ik)^2[\varepsilon-\varepsilon_0]}\Big] =$$

$$= -\Big[\frac{2\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)[i\sqrt{\varepsilon_0}\sin(k\sqrt{\varepsilon}H)-\sqrt{\varepsilon}\cos(k\sqrt{\varepsilon}H)]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}[\varepsilon-\varepsilon_0]}\Big] - \Big[\frac{2}{(ik)^2[\varepsilon-\varepsilon_0]}\Big].$$

В результате решение имеет вид

$$E(r) = G_\varepsilon(\vec{r}) - k^2\delta\varepsilon\int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 =$$

$$= \frac{G_\varepsilon(\vec{r})}{2}\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big] =$$

$$= G_\varepsilon(\vec{r})\Big[\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)[\sqrt{\varepsilon}\cos(k\sqrt{\varepsilon}H)-i\sqrt{\varepsilon_0}\sin(k\sqrt{\varepsilon}H)]}{\sqrt{\varepsilon}}\Big]. \quad (25)$$

При $H=0$ переходит в ранее рассмотренный случай $E(r)=G_\varepsilon(\vec{r})$. А при $\varepsilon_0=\varepsilon=\varepsilon'$ (границы нет) будет тоже правильно $E(r)=G_{\varepsilon'}(\vec{r})$. Это был случай прошедшей волны.

Отраженная волна выделяется следующим образом: интегрируем в исходных пределах от H до ∞, пользуемся приближением, что точка приема находится далеко от границы.

$$|\vec{r}-\vec{r}_0|_{r_0\gg r} \approx r_0 - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r_0},$$

$$G_\varepsilon(R) = \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r_0-\frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r_0})]}{r_0}.$$

$$16\pi^2\int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 = \int_{V/V_H}\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r_0-\frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r_0})]}{r_0}\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}|\vec{r}_0|}}{|\vec{r}_0|}d\vec{r}_0 =$$

$$= \int_H^\infty dr_0 e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]r_0}\int_0^\pi d\theta_0\sin\theta_0\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r\cos\theta\cos\theta_0]\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\phi_0\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r\sin\theta\sin\theta_0(\cos\phi\cos\phi_0+\sin\phi\sin\phi_0)].$$

$$\frac{2\sin(k\sqrt{\varepsilon}r)}{kr\sqrt{\varepsilon}}\int_H^\infty dr_0 e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]r_0} = \frac{[\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r)-\exp(-ik\sqrt{\varepsilon}r)]}{ikr\sqrt{\varepsilon}}\int_H^\infty dr_0 e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]r_0} =$$

$$= -\frac{[\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r)-\exp(-ik\sqrt{\varepsilon}r)]}{(ik)^2 r\sqrt{\varepsilon}[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]}e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]H}.$$

В результате решение имеет вид

$$E(r) = G_{\varepsilon_0}(\vec{r}) + k^2\delta\varepsilon \int_{V/V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 =$$
$$= G_{\varepsilon_0}(\vec{r}) + \frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}][\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r) - \exp(-ik\sqrt{\varepsilon}r)]}{8\pi r\sqrt{\varepsilon}} e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]H} =$$
$$= G_{\varepsilon_0}(\vec{r}) + i\frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}]\sin(k\sqrt{\varepsilon}r)}{4\pi r\sqrt{\varepsilon}} e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]H}. \qquad (26)$$

Два предельных случая $\delta\varepsilon = 0$ и $H \to \infty$ верны - обнуляется второе слагаемое.

4.2 Вычисление без приближения дальней зоны, при $\theta = 0$

$$16\pi^2 \int_{V/V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 = \int_{V/V_H} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}|\vec{r}_0|}}{|\vec{r}_0|} d\vec{r}_0 =$$
$$= \int_H^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dr_0 d\theta_0 d\phi_0 \sin\theta_0 r_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0}} =$$
$$= 2\pi \int_H^\infty r_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} dr_0 \int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta_0}}.$$

Вычислим интеграл по θ_0 вида

$$\int_0^\pi \sin x \frac{\exp[a\sqrt{b+c\cos x}]}{\sqrt{b+c\cos x}}\, dx = \{t = a\sqrt{b+c\cos x}, dt = \frac{-ac\sin x dx}{2\sqrt{b+c\cos x}}, 0 \to a\sqrt{b+c},$$
$$\pi \to a\sqrt{b-c}\} = \int_{a\sqrt{b+c}}^{a\sqrt{b-c}} \frac{2e^t}{-ac} dt = \frac{2}{-ac}\Big[\exp[a\sqrt{b-c}] - \exp[a\sqrt{b+c}]\Big].$$

В нашем случае $a = ik\sqrt{\varepsilon}, b = r^2 + r_0^2, c = -2rr_0$. Тогда осталось вычислить

$$\frac{2\pi}{ik\sqrt{\varepsilon}r} \int_H^\infty e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \Big[\exp[ik\sqrt{\varepsilon}|r-r_0|] - \exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r+r_0)]\Big].$$

Вычислим второй интеграл

$$-2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{ik\sqrt{\varepsilon}r} \int_H^\infty \exp[ik(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})r_0] dr_0 = 2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})H]\Big].$$

И оставшийся в предположении, что $r > H$ (прошедшая волна). Для этого делим интервал интегрирования

$$\frac{2\pi}{ik\sqrt{\varepsilon}r} \int_H^\infty e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \Big[\exp[ik\sqrt{\varepsilon}|r-r_0|]\Big] = \frac{2\pi}{ik\sqrt{\varepsilon}r} \int_H^r e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \Big[\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r-r_0)]\Big] +$$
$$+ \frac{2\pi}{ik\sqrt{\varepsilon}r} \int_r^\infty e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0} \Big[\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}(r-r_0)]\Big].$$

$$2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{ik\sqrt{\varepsilon}r}\int_H^r \exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r_0] =$$

$$= 2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r]-\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})H]\Big] =$$

$$= 2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon_0}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r} - 2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r}\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})H].$$

$$2\pi\frac{\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r]}{ik\sqrt{\varepsilon}r}\int_r^\infty \exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r_0] =$$

$$= -2\pi\frac{\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r]\Big] = -2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon_0}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r}.$$

Складывая, получим

$$2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})H]\Big] - 2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r}\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})H]+$$

$$+2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon_0}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon})r} - 2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon_0}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r}.$$

Итого для прошедшей волны

$$E(r) = G_{\varepsilon_0}(\vec{r}) + k^2\delta\varepsilon\int_{V/V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\,d\vec{r}_0 =$$

$$= G_\varepsilon(\vec{r})\Big[\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)[\sqrt{\varepsilon}\cos(k\sqrt{\varepsilon}H) - i\sqrt{\varepsilon_0}\sin(k\sqrt{\varepsilon}H)]}{\sqrt{\varepsilon}}\Big].$$

Совпадает с решением (25), вычисленным в приближении дальней зоны.

Для отраженной волны случай $r < r_0$, получим

$$2\pi\frac{\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r]}{ik\sqrt{\varepsilon}r}\int_H^\infty \exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r_0] = -2\pi\frac{\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})H]\Big].$$

Складывая, получим

$$-2\pi\frac{\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon})H]\Big]+$$

$$+2\pi\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})H]\Big] =$$

$$= 4i\pi\frac{\sin[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{(ik)^2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0})H]\Big].$$

Итого для отраженной волны

$$E(r) = G_{\varepsilon_0}(\vec{r}) + k^2\delta\varepsilon \int_{V/V_H} G_\varepsilon(R_0)G_0(\vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 =$$
$$= G_{\varepsilon_0}(\vec{r}) + i\frac{(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0})\sin[k\sqrt{\varepsilon}r]}{4\pi\sqrt{\varepsilon}r}\Big[\exp[ik(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0})H]\Big],$$

что полностью совпало с решением (26) , вычисленным в приближении дальней зоны.

4.3 Проверка условия сшивания на границе

Проверим условия, которое должно выполняться на границе раздела, равенства самих функций точке раздела и их первых производных.

Для прошедшей волны в точке H имеем

$$\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi H}\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon}]H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big] =$$
$$= \frac{1}{8\pi H}\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big].$$

Для отраженной волны в точке H имеем

$$\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{4\pi H} + \frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}][\exp(ik\sqrt{\varepsilon}H) - \exp(-ik\sqrt{\varepsilon}H)]}{8\pi H\sqrt{\varepsilon}}e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]H} =$$
$$= \frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{4\pi H} + \frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}][\exp(ik[2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]H) - \exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)]}{8\pi H\sqrt{\varepsilon}} =$$
$$= \frac{1}{8\pi H}\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big].$$

Что полностью совпадает. Проверим тоже самое для производной. Для прошедшей волны

$$[\frac{ik\sqrt{\varepsilon}\exp(ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi H} - \frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi H^2}]\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}} +$$
$$+ \frac{[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon}]H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big] = [\frac{ik\sqrt{\varepsilon}}{8\pi H} - \frac{1}{8\pi H^2}]\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}} +$$
$$+ \frac{[\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big].$$

Для отржаенной волны

$$[\frac{ik\sqrt{\varepsilon_0}\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{4\pi H}-\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{4\pi H^2}]+[\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}][\frac{ik\sqrt{\varepsilon}\exp(ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H}-\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H^2}]\times$$

$$\times e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}]H}-[\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}][\frac{-ik\sqrt{\varepsilon}\exp(-ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H}-\frac{\exp(-ik\sqrt{\varepsilon}H)}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H^2}]e^{ik[\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}]H}=$$

$$=[\frac{ik\sqrt{\varepsilon_0}}{4\pi H}-\frac{1}{4\pi H^2}]\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)+[\frac{ik\sqrt{\varepsilon}}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H}-\frac{1}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H^2}][\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[2\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]H)+$$

$$+[\frac{ik\sqrt{\varepsilon}}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H}+\frac{1}{8\pi\sqrt{\varepsilon}H^2}][\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)=$$

$$=[\frac{ik\sqrt{\varepsilon}}{8\pi H}-\frac{1}{8\pi H^2}]\Big[\frac{[\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik[2\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]H)}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{[\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}]\exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}H)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big].$$

Таким образом, условие сшивание двух решений выполняется.

4.4 Точное решение при сшивании на границе

Будем искать решение, которое удовлетворяет уравнению Гельмгольца, в виде

$$E_{0<r<H}=\frac{e^{ik_0r}}{4\pi r}+A(\frac{e^{ik_1r}}{4\pi r}-\frac{e^{-ik_1r}}{4\pi r})$$

$$E_{r>H}=B\frac{e^{ik_1r}}{4\pi r}.$$

Условие равенства самих функций при $r=H$

$$\frac{e^{ik_0H}}{4\pi H}+A(\frac{e^{ik_1H}}{4\pi H}-\frac{e^{-ik_1H}}{4\pi H})=B\frac{e^{ik_1H}}{4\pi H}.$$

Откуда получаем первое уравнение

$$e^{i(k_0-k_1)H}+A(1-e^{-2ik_1H})=B.$$

Условие равенства первых производных по r при $r=H$

$$[\frac{ik_0}{H}-\frac{1}{H^2}]e^{ik_0H}+A[(\frac{ik_1}{H}-\frac{1}{H^2})e^{ik_1H}+(\frac{ik_1}{H}+\frac{1}{H^2})e^{-ik_1H}]=B[\frac{ik_1}{H}-\frac{1}{H^2}]e^{ik_1H}$$

Делим обе части на $[\frac{ik_1}{H}-\frac{1}{H^2}]e^{ik_1H}=\frac{ik_1H-1}{H^2}e^{ik_1H}$, получим

$$\frac{ik_0H-1}{ik_1H-1}e^{i(k_0-k_1)H}+A[1+\frac{ik_1H+1}{ik_1H-1}e^{-2ik_1H}]=B=e^{i(k_0-k_1)H}+A(1-e^{-2ik_1H})$$

Отсюда,

$$A=\frac{ik_1H-1}{2ik_1H}\frac{i(k_1-k_0)H}{ik_1H-1}e^{i(k_1+k_0)H}=\frac{k_1-k_0}{2k_1}e^{i(k_1+k_0)H},$$

$$B=e^{i(k_0-k_1)H}+(1-e^{-2ik_1H})\frac{k_1-k_0}{2k_1}e^{i(k_1+k_0)H}=\frac{k_1-k_0}{2k_1}e^{i(k_1+k_0)H}+\frac{k_1+k_0}{2k_1}e^{i(k_1-k_0)H}.$$

Итого решение

$$E_{0<r<H} = \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} + \frac{k_1 - k_0}{2k_1} e^{i(k_1+k_0)H} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r} - \frac{e^{-ik_1 r}}{4\pi r}\right)$$
$$E_{r>H} = \left[\frac{k_1 - k_0}{2k_1} e^{i(k_1+k_0)H} + \frac{k_1 + k_0}{2k_1} e^{i(k_1-k_0)H}\right] \frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r}. \quad (27)$$

Что тоже самое, что и было получено приближенным методом итерированных ядер.

4.5 Моделироване

Решение (27) было смоделировано для случая, когда внутренняя среда - вакуум $\varepsilon_0 = 1$, радиус сферы равен половины длины волны $H = \lambda/2$, $\lambda = 3$ мкм. Результаты представлены на Рисунках 2, 3, 4. До границы изображена интерференция падающей волны и отраженной волны, после границы прошедшая волны.

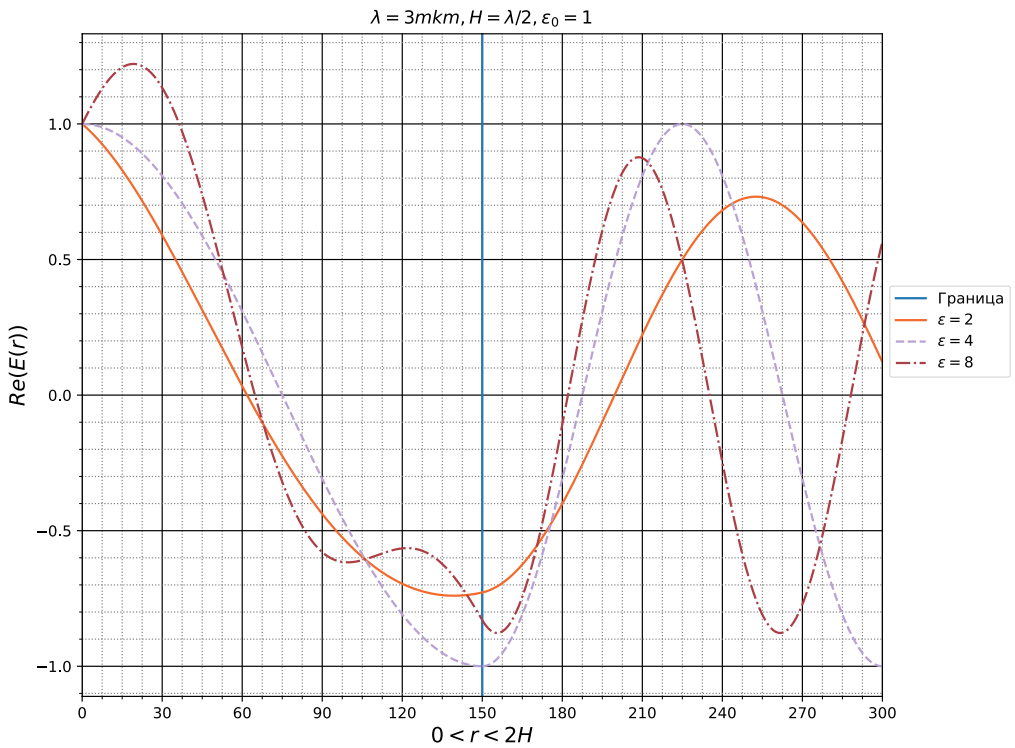


Рисунок 2 – Реальная часть решения для трех случаев $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 4$, $\varepsilon = 8$

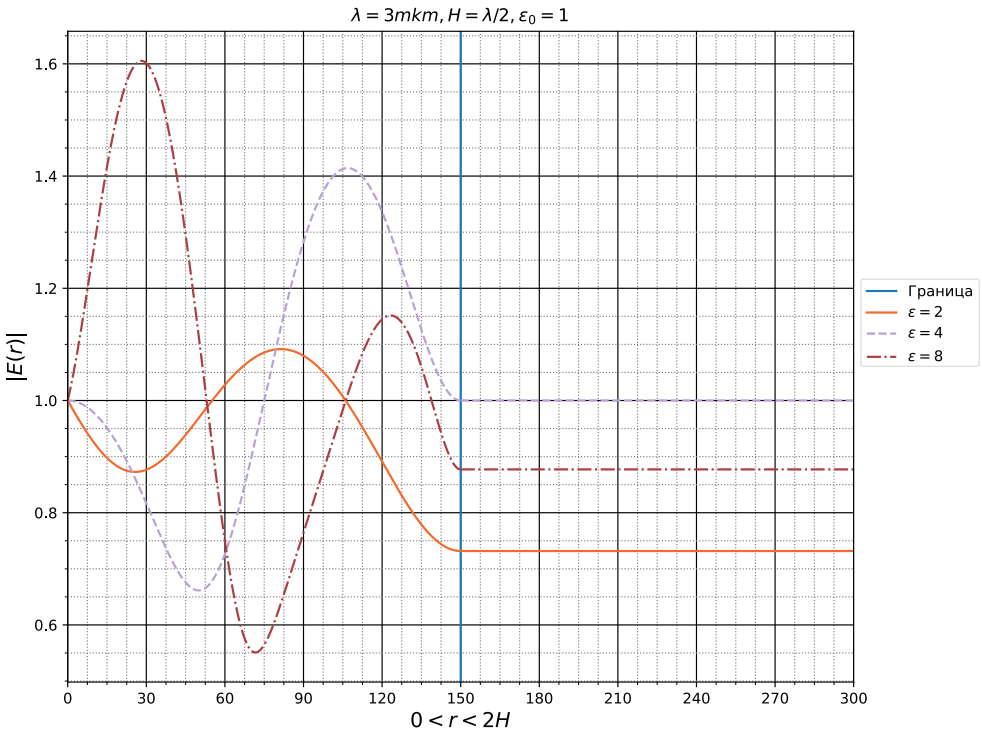


Рисунок 3 – Модуль решения для трех случаев $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 4$, $\varepsilon = 8$

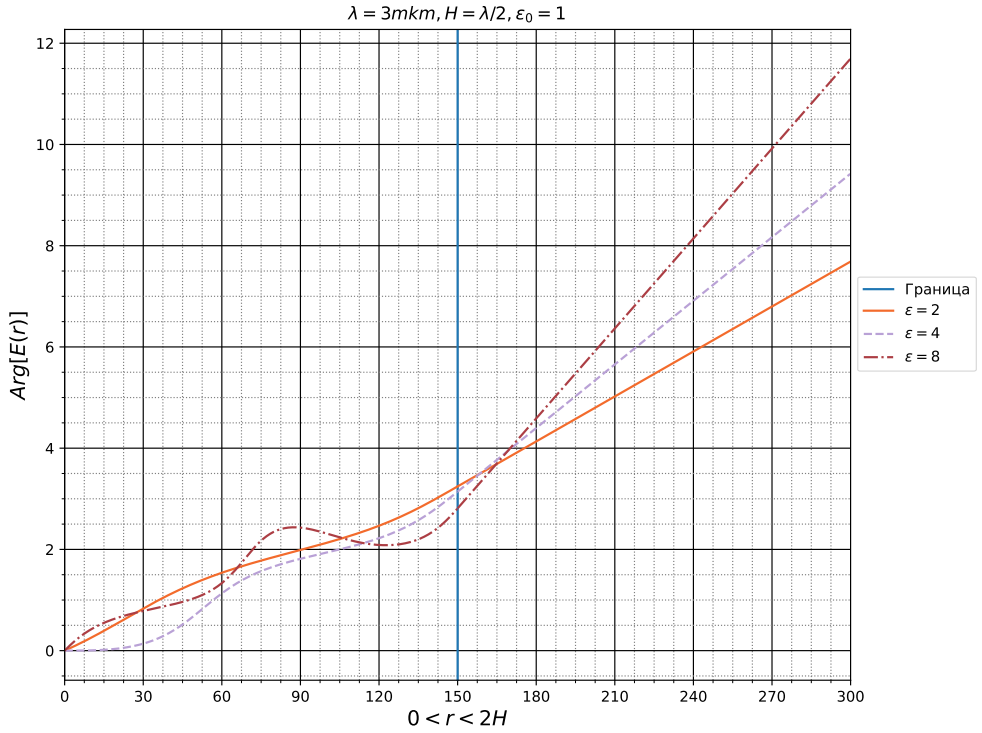


Рисунок 4 – Фаза решения для трех случаев $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 4$, $\varepsilon = 8$

5 Векторный случай

В этой главе будем сравнивать решения, полученные векторным обобщением метода итерированных ядер, с решениями, полученными другими методами, для задачи Ми, рассеяния на линзе Люненберга а также на экспоненциальном профиле. Также рассмотрим обобщение ранее рассмотренной скалярной задачи о центрированном точечном источнике в сферической полости.

5.1 Центрированный диполь в сферической полости

Ориентируем диполь вдоль оси z. Падающее поле в декартовых координатах будет иметь вид $\vec{E}_0(\vec{r}_0) = \{k^{-2}\left[\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\right]''_{zx}, k^{-2}\left[\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\right]''_{zy}, k^{-2}\left[\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\right]''_{zz} + \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\}$. Точку приема $\vec{r}_0$ будем брать вдоль оси z, т.е. $\theta_0 = 0$. Точка источника $\vec{r}_s$ расположена в центре сферы и в начале координат.

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \delta\varepsilon k^{-2}\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_i\int_V G_{zx_j}(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_ix_j}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} + \delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\int_V G(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_iz}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r}+$$
$$+\delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\int_V G_{zx_i}(\vec{r})G^{\varepsilon}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} + k^2\delta\varepsilon\vec{e}_z\int_V G(\vec{r})G^{\varepsilon}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} + \vec{E}_0(\vec{r}_0) =$$

Интегрируя по частям и перенося производные на функцию Грина от двух аргументов, получим

$$= k^{-2}\delta\varepsilon\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_i\int_V G(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_ix_jzx_j}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} + \delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\int_V G(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_iz}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r}+$$
$$+\delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\int_V G(\vec{r})G^{\varepsilon}_{zx_i}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} + k^2\delta\varepsilon\vec{e}_z\int_V G(\vec{r})G^{\varepsilon}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} + \vec{E}_0(\vec{r}_0)+$$
$$+k^{-2}\delta\varepsilon\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_i\int_S \cos(\vec{e}_j,\vec{n})G'_z(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_ix_j}(\vec{r}_0,\vec{r}) - \cos(\vec{e}_z,\vec{n})G(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_ix_jx_j}(\vec{r}_0,\vec{r})\,dS+$$
$$+\delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\int_S \cos(\vec{e}_i,\vec{n})G'_z(\vec{r})G^{\varepsilon}(\vec{r}_0,\vec{r}) - \cos(\vec{e}_z,\vec{n})G(\vec{r})G^{\varepsilon}_{x_i}(\vec{r}_0,\vec{r})\,dS + \vec{E}_0(\vec{r}_0)$$

V$=\mathbb{R}^3/S_H$ $\vec{n}-$ единичный орт внешней нормали к поверхности. Для нашего случая сферы, $\cos(\vec{e}_x,\vec{n}) = -\sin\theta\cos\phi$, $\cos(\vec{e}_y,\vec{n}) = -\sin\theta\sin\phi$, $\cos(\vec{e}_z,\vec{n}) = -\cos\theta$. Интегрирование по бесконечно удаленной сфере дает 0. Два поверхностных интеграла со знаком минус взаимно сократятся, если расписать лапласиан $\triangle G = -k^2G$. Поверхностные интегралы с множителями $\cos(\vec{e}_x,\vec{n})$, $\cos(\vec{e}_y,\vec{n})$ после интегрирования по φ

дают 0, посколько при $\theta_0 = 0^\circ$ от ϕ ничего не зависит. И останется

$$= k^{-2}\delta\varepsilon \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \int_V G(\vec{r}) G^{\varepsilon}_{x_i x_j z x_j}(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r} + 2\delta\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \int_V G(\vec{r}) G^{\varepsilon}_{x_i z}(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r} +$$
$$+ k^2 \delta\varepsilon \vec{e}_z \int_V G(\vec{r}) G^{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r} - k^{-2}\delta\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G^{\varepsilon}_{x_i x_j}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS -$$
$$- \delta\varepsilon \vec{e}_z \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G^{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS + \vec{E}_0(\vec{r}_0).$$

Все производные от G^{ε} можно вынести за знак интеграла. Рассмотрим случай прошедшей волны.

Интеграл $k^2\delta\varepsilon \int_V G(\vec{r}) G^{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r} = \Big(G_{\varepsilon}(\vec{r})T - G(\vec{r})\Big)$ был посчитан в скалярном случае, где $T = \left[\frac{\exp(ikH)[\sqrt{\varepsilon}\cos(k\sqrt{\varepsilon}H) - i\sin(k\sqrt{\varepsilon}H)]}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$.

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \Big[\frac{1}{k^4} \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial x_{0_i}} \frac{\partial^2}{\partial x_{0_j}^2} + \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial x_{0_i}}\Big] \Big(G_{\varepsilon}(\vec{r})T - G(\vec{r})\Big) +$$
$$+ k^2 \delta\varepsilon \vec{e}_z \int_V G(\vec{r}) G^{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, d\vec{r} + k^{-2} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_{0_i}} \frac{\partial}{\partial z} G(\vec{r}) + \vec{e}_z G(\vec{r}) -$$
$$- k^{-2}\delta\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G^{\varepsilon}_{x_i x_j}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS - \delta\varepsilon \vec{e}_z \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G^{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS.$$

Раскрывая лапласиан, получим

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = k^{-2} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \Big[- \delta\varepsilon + 1\Big] \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial x_{0_i}} \Big(G_{\varepsilon}(\vec{r})T\Big) + \vec{e}_z T G_{\varepsilon}(\vec{r}) -$$
$$- k^{-2}\delta\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial^2}{\partial x_{0_j} \partial x_{0_i}} \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G_{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS - \delta\varepsilon \vec{e}_z \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G_{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS.$$

Объединив в поле диполя $\vec{E}^{\varepsilon}_d = \{k^{-2}\left[\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r)}{4\pi r}\right]''_{zx}, k^{-2}\left[\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r)}{4\pi r}\right]''_{zy}, k^{-2}\left[\frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r)}{4\pi r}\right]''_{zz} + \frac{\exp(ik\sqrt{\varepsilon}r)}{4\pi r}\}$, получим

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = T\vec{E}^{\varepsilon}_d - Tk^{-2}\delta\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial x_{0_i}} G_{\varepsilon}(\vec{r}) -$$
$$- k^{-2}\delta\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial^2}{\partial x_{0_j} \partial x_{0_i}} \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G_{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS - \delta\varepsilon \vec{e}_z \int_S \cos\theta G'_z(\vec{r}) G_{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r})\, dS$$

Осталось вычислить

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_S \cos\theta G'_z(\vec{r})G^{\varepsilon}(\vec{r}_0,\vec{r})\,dS = \frac{1}{16\pi^2}\int_S dS\cos\theta_0 \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\Big(\frac{e^{ik|\vec{r}_0|}}{|\vec{r}_0|}\Big)'_{z_0} d\vec{r}_0 =$$

$$= \frac{He^{ikH}}{16\pi^2}[ik-\frac{1}{H}]\int_0^{\pi} d\theta_0 \int_0^{2\pi} d\phi_0 \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+H^2-2rH\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rH\cos\theta\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+H^2-2rH\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rH\cos\theta\cos\theta_0}}\sin\theta_0 =$$

$$= [\theta=0] = \frac{1}{8\pi}[ikH-1]e^{ikH}\int_0^{\pi} d\theta_0 \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+H^2-2rH\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+H^2-2rH\cos\theta_0}}\sin\theta_0\cos^2\theta_0$$

$$\int_0^{\pi} d\theta_0 sin\theta_0 \cos^2\theta_0 \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+H^2-2rH\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+H^2-2rH\cos\theta_0}} =$$

$$= \{x=\sqrt{r^2+H^2-2rH\cos\theta_0}, dx = \frac{rH\sin\theta_0}{\sqrt{r^2+H^2-2rH\cos\theta_0}}d\theta_0, \cos^2\theta_0 = \frac{[x^2-(r^2+H^2)]^2}{4r^2H^2}\} =$$

$$= \frac{1}{4r^3H^3}\int_{|r-H|}^{r+H} dx[x^2-(r^2+H^2)]^2 e^{ik\sqrt{\varepsilon}x} = \frac{1}{4r^3H^3}\int_{|r-H|}^{r+H} dx[x^4+(r^2+H^2)^2-2x^2(r^2+H^2)]e^{ik\sqrt{\varepsilon}x} =$$

$$= \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}x}}{4r^3H^3}\Big[\frac{(ik\sqrt{\varepsilon})^4x^4-4(ik\sqrt{\varepsilon})^3x^3+12(ik\sqrt{\varepsilon})^2x^2-24ik\sqrt{\varepsilon}x+24}{(ik\sqrt{\varepsilon})^5}+$$

$$+\frac{(r^2+H^2)^2}{ik\sqrt{\varepsilon}}-2(r^2+H^2)\frac{(ik\sqrt{\varepsilon})^2x^2-2ik\sqrt{\varepsilon}x+2}{(ik\sqrt{\varepsilon})^3}\Big]\Big|_{|r-H|}^{r+H} = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}x}}{4r^3H^3}\times$$

$$\times\Big[\frac{(r^2+H^2)^2+x^4-2(r^2+H^2)x^2}{ik\sqrt{\varepsilon}}+\frac{4(r^2+H^2)x-4x^3}{(ik\sqrt{\varepsilon})^2}+\frac{12x^2-4(r^2+H^2)}{(ik\sqrt{\varepsilon})^3}-\frac{24x}{(ik\sqrt{\varepsilon})^4}+$$

$$+\frac{24}{(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big]_{|r-H|}^{r+H} = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}x}}{4r^3H^3}\Big[\frac{(r^2+H^2-x^2)^2}{ik\sqrt{\varepsilon}}+\frac{4(r^2+H^2-x^2)x}{(ik\sqrt{\varepsilon})^2}-\frac{4(r^2+H^2-x^2)-8x^2}{(ik\sqrt{\varepsilon})^3}-\frac{24x}{(ik\sqrt{\varepsilon})^4}+$$

$$+\frac{24}{(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big]\Big|_{|r-H|}^{r+H} =$$

$$= \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)}}{4r^3H^3}\Big[\frac{4r^2H^2}{ik\sqrt{\varepsilon}}-\frac{8rH(r+H)}{(ik\sqrt{\varepsilon})^2}+\frac{8rH+8(r+H)^2}{(ik\sqrt{\varepsilon})^3}-\frac{24(r+H)}{(ik\sqrt{\varepsilon})^4}+\frac{24}{(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big]-$$

$$-\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)}}{4r^3H^3}\Big[\frac{4r^2H^2}{ik\sqrt{\varepsilon}}+\frac{8rH|r-H|}{(ik\sqrt{\varepsilon})^2}-\frac{8rH-8|r-H|^2}{(ik\sqrt{\varepsilon})^3}-\frac{24|r-H|}{(ik\sqrt{\varepsilon})^4}+\frac{24}{(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big] =$$

$$= \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)}}{r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[r^2H^2(ik\sqrt{\varepsilon})^4-2rH(r+H)(ik\sqrt{\varepsilon})^3+2(ik\sqrt{\varepsilon})^2\Big(rH+(r+H)^2\Big)-6(ik\sqrt{\varepsilon})(r+H)+6\Big]-$$

$$-\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|r-H|}}{r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[r^2H^2(ik\sqrt{\varepsilon})^4+2rH|r-H|(ik\sqrt{\varepsilon})^3-2(ik\sqrt{\varepsilon})^2(rH-|r-H|^2)-6(ik\sqrt{\varepsilon})|r-H|+6\Big] =$$

$$= \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)}}{r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[\Big((ik\sqrt{\varepsilon})^2rH-(r+H)(ik\sqrt{\varepsilon})\Big)^2+2rH(ik\sqrt{\varepsilon})^2+\Big(ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)-3\Big)^2-3\Big]-$$

$$-\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|r-H|}}{r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[\Big((ik\sqrt{\varepsilon})^2rH+|r-H|(ik\sqrt{\varepsilon})\Big)^2-2rH(ik\sqrt{\varepsilon})^2+\Big(ik\sqrt{\varepsilon}|r-H|-3\Big)^2-3\Big]$$

Итого

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = T\vec{E}_d^{\varepsilon} - Tk^{-2}\delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})\frac{1}{R_0^2}(z-z_0)(x_i-x0_i)(-\varepsilon(\vec{r})k^2 - \frac{3ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}}{R_0} + \frac{3}{R_0^2}) -$$

$$-\Big[k^{-2}\delta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\frac{\partial^2}{\partial x_{0_j}\partial x_{0_i}} + \delta\varepsilon\vec{e}_z\Big][ikH-1]e^{ikH}\Big\{\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)}}{8\pi r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[\Big((ik\sqrt{\varepsilon})^2rH-(r+H)(ik\sqrt{\varepsilon})\Big)^2 +$$

$$+2rH(ik\sqrt{\varepsilon})^2 + \Big(ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)-3\Big)^2 - 3\Big] - \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|r-H|}}{8\pi r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[\Big((ik\sqrt{\varepsilon})^2rH+|r-H|(ik\sqrt{\varepsilon})\Big)^2 -$$

$$-2rH(ik\sqrt{\varepsilon})^2 + \Big(ik\sqrt{\varepsilon}|r-H|-3\Big)^2 - 3\Big]\Big\} + \vec{e}_z Tk^{-2}\delta\varepsilon G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})(ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})} - \frac{1}{R_0})\frac{1}{R_0}$$

где $T = \Big[\frac{\exp(ikH)[\sqrt{\varepsilon}\cos(k\sqrt{\varepsilon}H) - i\sin(k\sqrt{\varepsilon}H)]}{\sqrt{\varepsilon}}\Big]$

В дальней зоне сферическая волна, поляризованная вдоль оси z

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = T\vec{e}_z G_\varepsilon - \delta\varepsilon\vec{e}_z[ikH-1]e^{ikH}\Big\{\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}(r+H)}}{8\pi r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[r^2H^2(ik\sqrt{\varepsilon})^4 - 2r^2H(ik\sqrt{\varepsilon})^3 + 2(ik\sqrt{\varepsilon})^2r^2\Big] -$$

$$-\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|r-H|}}{8\pi r^3H^3(ik\sqrt{\varepsilon})^5}\Big[r^2H^2(ik\sqrt{\varepsilon})^4 + 2r^2H(ik\sqrt{\varepsilon})^3 + 2(ik\sqrt{\varepsilon})^2r^2\Big]\Big\}.$$

5.2 Рассеяние Ми

Рассмотрим задачу рассеяния плоской электромагнитной волны на диэлектрической однородной сфере. Геометрия задачи изображена на Рисунке 5.

Известно, что для малых размеров по сравнению с длиной волны и "мягких сред"($\delta\varepsilon \ll 1$) решение находится методом Борновского приближения(рассеяние Релея). Для этой задачи полученный метод переходит в метод Борновского приближения. Это видно из формул

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_V \vec{E}_0(\vec{r})[\delta\varepsilon(\vec{r})]G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})d\vec{r} + \int_V d\vec{r}\delta\varepsilon(\vec{r})\sum_{i,j=1}^{3}E_{0x_j}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial_{x0_i}}\frac{\partial}{\partial_{x0_j}}G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) \approx$$

$$\{\delta\varepsilon \ll 1\} \approx \vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{E}_0(\vec{r}_0) + k^2\int_V \vec{E}_0(\vec{r})[\delta\varepsilon(\vec{r})]G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r})\,d\vec{r} +$$

$$+\int_V d\vec{r}\delta\varepsilon(\vec{r})\sum_{i,j=1}^{3}E_{0x_j}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial_{x0_i}}\frac{\partial}{\partial_{x0_j}}G(\vec{r}_0,\vec{r}),$$

где $G_{\varepsilon(\vec{r})}(\vec{r}_0,\vec{r}) = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}R_0}}{4\pi R_0}$, $G(\vec{r}_0,\vec{r}) = \frac{e^{ikR_0}}{4\pi R_0}$, $R_0 = |\vec{r}-\vec{r}_0|$. Рассмотрим векторный случай. В качестве направления падения волны возьмем положительное направление вдоль оси z, т.е. $\vec{k} = k\{0,0,1\}$. Направление вектора $\vec{E}$ возьмем вдоль оси y. В дальней зоне векторная формула примет вид [13]

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{4\pi r}(\hat{I} - \vec{r}\otimes\vec{r})\int_V \delta\varepsilon(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r'})\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}\vec{r}\vec{r'}]\,d\vec{r'},$$

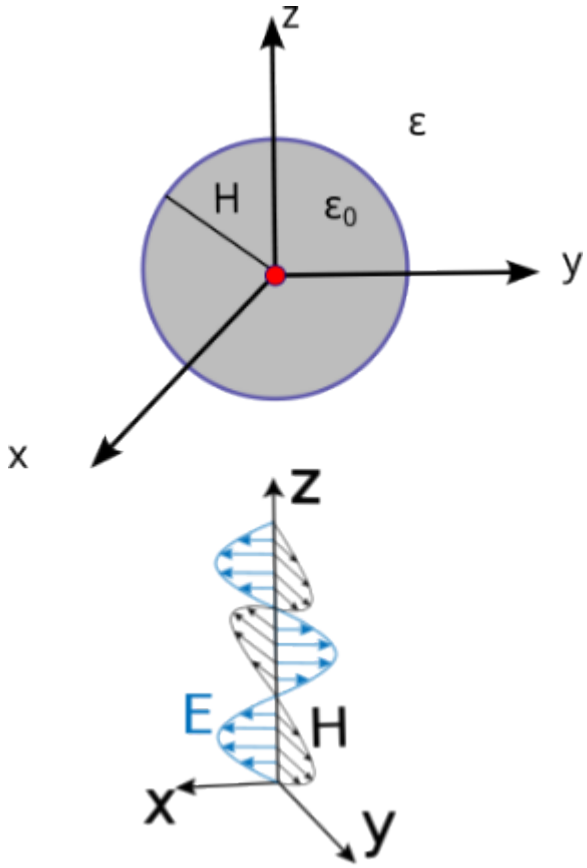


Рисунок 5 – Рассеяние плоской электромагнитной волны на диэлектрической однородной сфере

где $\otimes$ - произведение Кронекера, $(\hat{I} - \vec{r} \otimes \vec{r})\vec{e_i} = \cos(\phi - \nu)\cos(\theta)\vec{e_\theta} - \sin(\phi - \nu)\vec{e_\phi}$, формула (6) в статье [17]. Для полязирозованного света в интенсивность от этого выражения будет вклад вида $\cos^2(\phi - \nu)\cos^2\theta + \sin^2(\phi - \nu)$, для неполяризованного $(1 + \cos^2\theta)/2$ (выражения в статье [17] под формулой (6)). $\vec{r}-$ единичный вектор в направлении точки приема, $\vec{e_i}-$ единичный вектор в направлении вектора $\vec{E}$, $\nu-$ угол между вектором $\vec{e_i}$ и осью x. Решение, полученное для этой задачи, будет использоваться для сравнения с точным решением Ми [28], 1908 г., а также приближенными методами ВКБ(приближение эйконала)[17] и Борновским приближением [10]. Вычислим необходимые интегралы

$$4\pi \int_{V_H} G_\varepsilon(R_0) e^{ik\sqrt{\varepsilon_0} z_0}\, d\vec{r_0} = \int_{V_H} \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r_0}|}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|} e^{ik\sqrt{\varepsilon_0} z_0} d\vec{r_0} =$$
$$= \int_0^H dr_0 r_0^2 \int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0} r_0 \cos\theta_0} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\phi_0 \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0}}}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)-2rr_0\cos\theta\cos\theta_0}}.$$

$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$, $\vec{r_0} = (r_0\sin\theta_0\cos\phi_0, r_0\sin\theta_0\sin\phi_0, r_0\cos\theta_0)$

$\vec{r}-\vec{r}_0 = (r\sin\theta\cos\phi - r_0\sin\theta_0\cos\phi_0, r\sin\theta\sin\phi - r_0\sin\theta_0\sin\phi_0, r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)$
$|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(r\sin\theta\cos\phi - r_0\sin\theta_0\cos\phi_0)^2 + (r\sin\theta\sin\phi - r_0\sin\theta_0\sin\phi_0)^2 + (r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2} =$
$\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0) - 2rr_0\cos\theta\cos\theta_0} = r\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2\vec{r}_0\vec{r}}{r^2}}$.
В дальней зоне имеем

$$|\vec{r}-\vec{r}_0|_{r\gg r_0} \approx r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r},$$
$$G_\varepsilon(R) = \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r})]}{r}.$$

Используя это приближение, интеграл запишем

$$16\pi^2\int_{V_H} G_\varepsilon(R_0)e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}z_0}\,d\vec{r}_0 \approx \int_{V_H}\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}(r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r})]}{r}e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}z_0}d\vec{r}_0 =$$
$$= \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{r}\int_0^H dr_0 r_0^2\int_0^\pi d\theta_0\sin\theta_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0\cos\theta_0}\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0\cos\theta\cos\theta_0]\times$$
$$\times\int_0^{2\pi} d\phi_0\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0\sin\theta\sin\theta_0(\cos\phi\cos\phi_0 + \sin\phi\sin\phi_0)].$$

1-ая и 2-ая интегральная формула для функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[-ix\sin\phi]d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[ix\cos\phi]d\phi,$$
$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[-ix\cos\phi]d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[ix\cos\phi]d\phi.$$

Поскольку интегрируем периодическую функцию по периоду, то сдвиг фазы в косинусе не вносит вклад в результат интегрирования. Тогда

$$\frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{r}\int_0^H dr_0 r_0^2\int_0^\pi d\theta_0\sin\theta_0 e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}r_0\cos\theta_0}\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0\cos\theta\cos\theta_0]\times$$
$$\times\int_0^{2\pi} d\phi_0\exp[-ik\sqrt{\varepsilon}r_0\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)] =$$
$$= \frac{\exp[ik\sqrt{\varepsilon}r]}{r}\int_0^H dr_0 r_0^2\int_0^\pi d\theta_0\sin\theta_0\exp[-ik[\sqrt{\varepsilon}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_0}]r_0\cos\theta_0]J_0(k\sqrt{\varepsilon}r_0\sin\theta\sin\theta_0).$$

Используем, что

$$\int_0^\pi d\theta_0 \sin\theta_0 \exp[-iC\cos\theta_0] J_0(S\sin\theta_0) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(S^2+C^2)^n =$$

$$= \{C = kr_0[\sqrt{\varepsilon}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_0}], S = k\sqrt{\varepsilon} r_0 \sin\theta, S^2 + C^2 = \left(kr_0\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0 - 2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}\right)^2\} =$$

$$= \frac{2\sin(kr_0\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta})}{kr_0\sqrt{1+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}}.$$

В результате последний интеграл имеет вид

$$\int_0^H dr_0 r_0 \frac{2\sin(kr_0\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta})}{k\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}} = -\frac{2H\cos(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta})}{k^2(\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta)} +$$

$$+\frac{2\sin(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta})}{k^3(\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta)^{3/2}}.$$

Итого решение имеет вид

$$E_y(\vec{r}) = e^{ik\sqrt{\varepsilon_0}z} + \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}r}}{4\pi r}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{k(\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta)^{3/2}}\times$$

$$\times\left[\sin(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}) - Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}\cos(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta})\right]$$

$$E_x = E_z = 0.$$

Интенсивность рассеянной волны для случая рассеяния естественного света, имеет вид

$$I(\theta) = \frac{(1+\cos^2\theta)}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{k^2(\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta)^3}\times$$

$$\times\left[\sin(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}) - Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta}\cos(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cos\theta})\right]^2.$$

Решение для борновского приближения имеет вид

$$I_B(\theta) = \frac{(1+\cos^2\theta)}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{k^2(1+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta)^3}\times$$

$$\times\left[\sin(Hk\sqrt{\varepsilon+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}) - Hk\sqrt{1+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}\cos(Hk\sqrt{1+\varepsilon_0-2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta})\right]^2.$$

Сравнение результата с решениями, полученными в борновском приближении и программой $ADDA$, реализующей метод ВКБ, приведено на Рисунке 6.

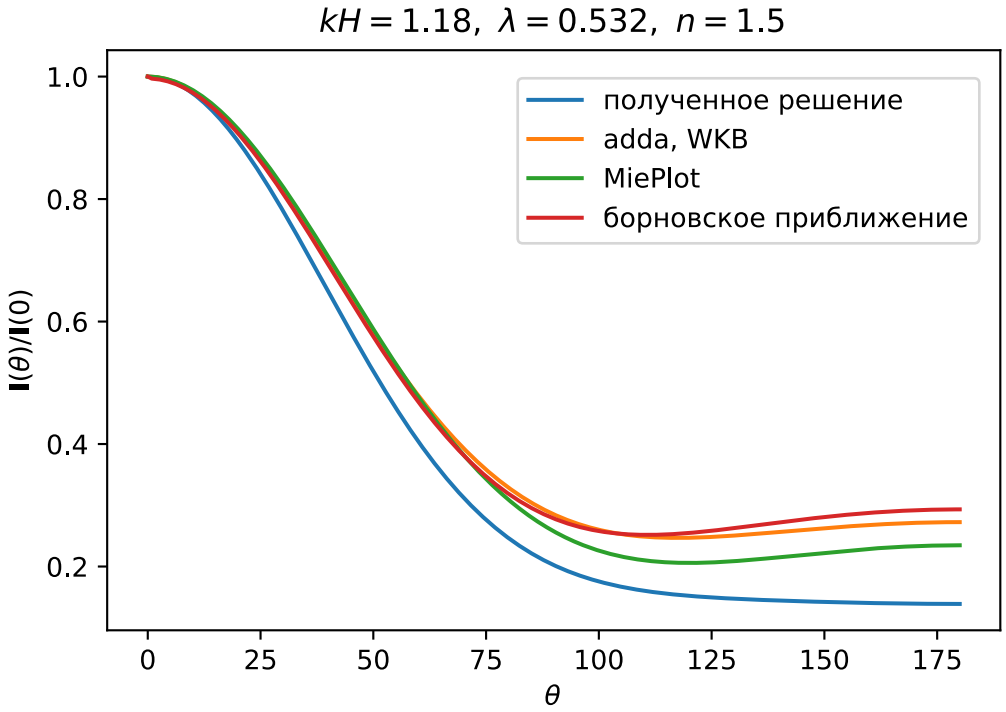


Рисунок 6 – Угловая зависимость интенсивности рассеянной волны в задаче Ми

На Рисунке 7 изображена интеснивность рассеянной волны в направлении назад $\theta = \pi$ в зависимости от параметра размера kH в задаче Ми. Что вместе с Рисунком 8 говорит о плохом совпадении для больших размеров - это связано с резкостью границы.

Далее будут рассмотрены плавные границы, а данная часть была необходима для проверки правильности вычисления двух внутренних итнегралов и переходу к плавно-неоднородным средам, диэлектрическая проницаемость которых есть непрерывная функция от расстояния $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(r) \in C^1$. Для этого случая останется лишь вычислить внешний интеграл, который будет иметь вид

$$\int_0^H dr_0 r_0 \delta\varepsilon(r_0) \frac{2\sin(kr_0\sqrt{\varepsilon(r_0) + \varepsilon_0 - 2\sqrt{\varepsilon(r_0)\varepsilon_0}\cos\theta})}{k\sqrt{\varepsilon(r_0) + \varepsilon_0 - 2\sqrt{\varepsilon(r_0)\varepsilon_0}\cos\theta}},$$

где $\delta\varepsilon(r_0) = \varepsilon(r_0) - 1$.

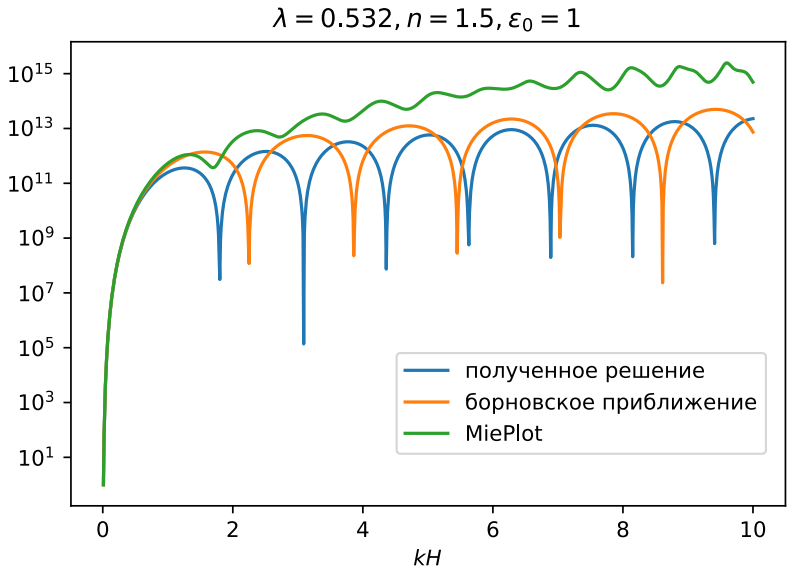


Рисунок 7 – Интенсивность рассеянной волны в направлении назад $\theta = \pi$ в зависимости от параметра размера kH в задаче Ми

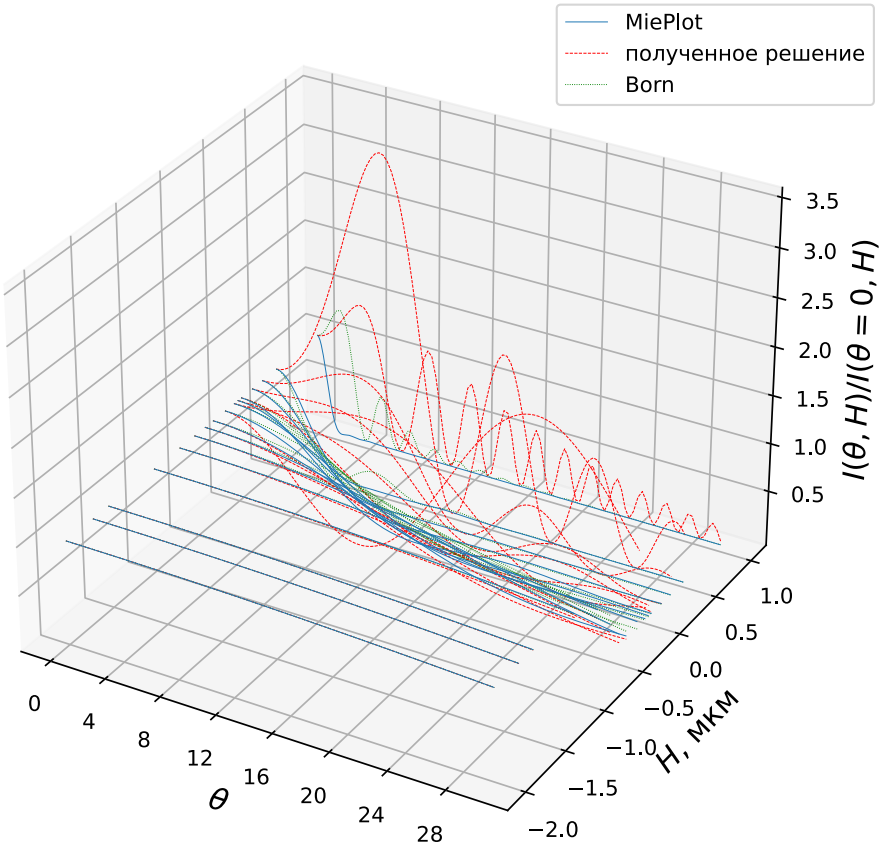


Рисунок 8 – Интенсивность рассеянной волны в зависимости от зенитного угла и размера H в задаче Ми

5.3 Линза Люнеберга

Для случая линзы Люнеберга есть две модели $\varepsilon_{L1}(r) = (1 + F - F(r/H)^2)^2$. Профиль диэлектрической проницаемости для $H = 1$ изображен на Рисунке 9. Сравнивать будем с программой MiePlot, которая делит неоднородную среду на слои и ищет решение суммируя ряд, как в задаче Ми, подробнее о методе можно узнать в [29]. Результат сравнения представлен на Рисунке 10. Можно видеть, что полученный метод сходится лучше, чем борновское приближение, с численным решением.

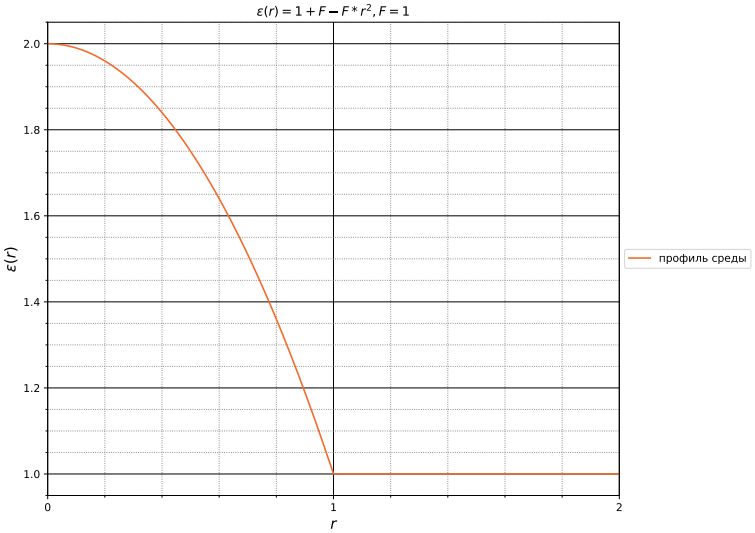


Рисунок 9 – Профиль диэлектрической проницаемости линзы Люнеберга, $H = 1$ мкм

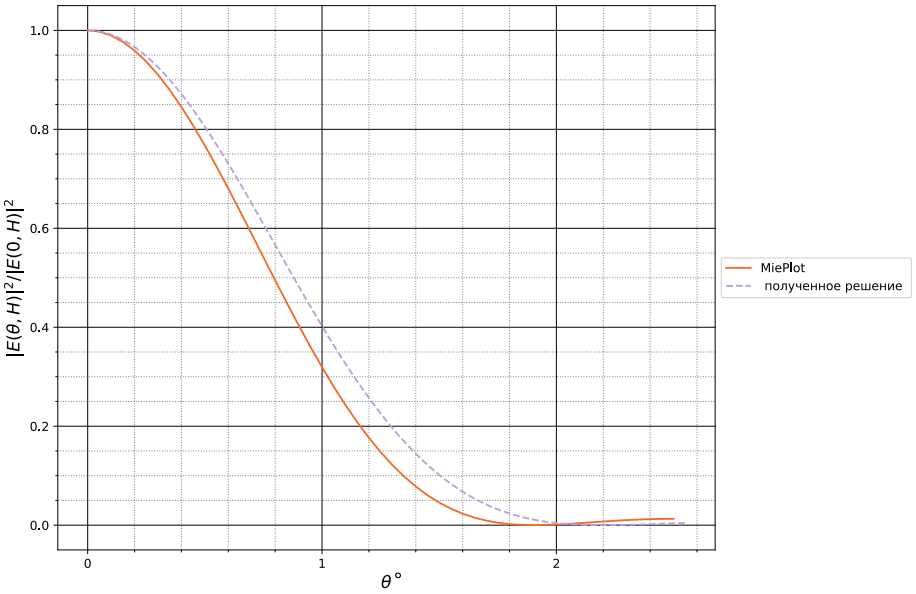


Рисунок 10 – Сравнение решений в задаче рассеяния плоской волны на линзе Люнеберга, $H = 10$ мкм

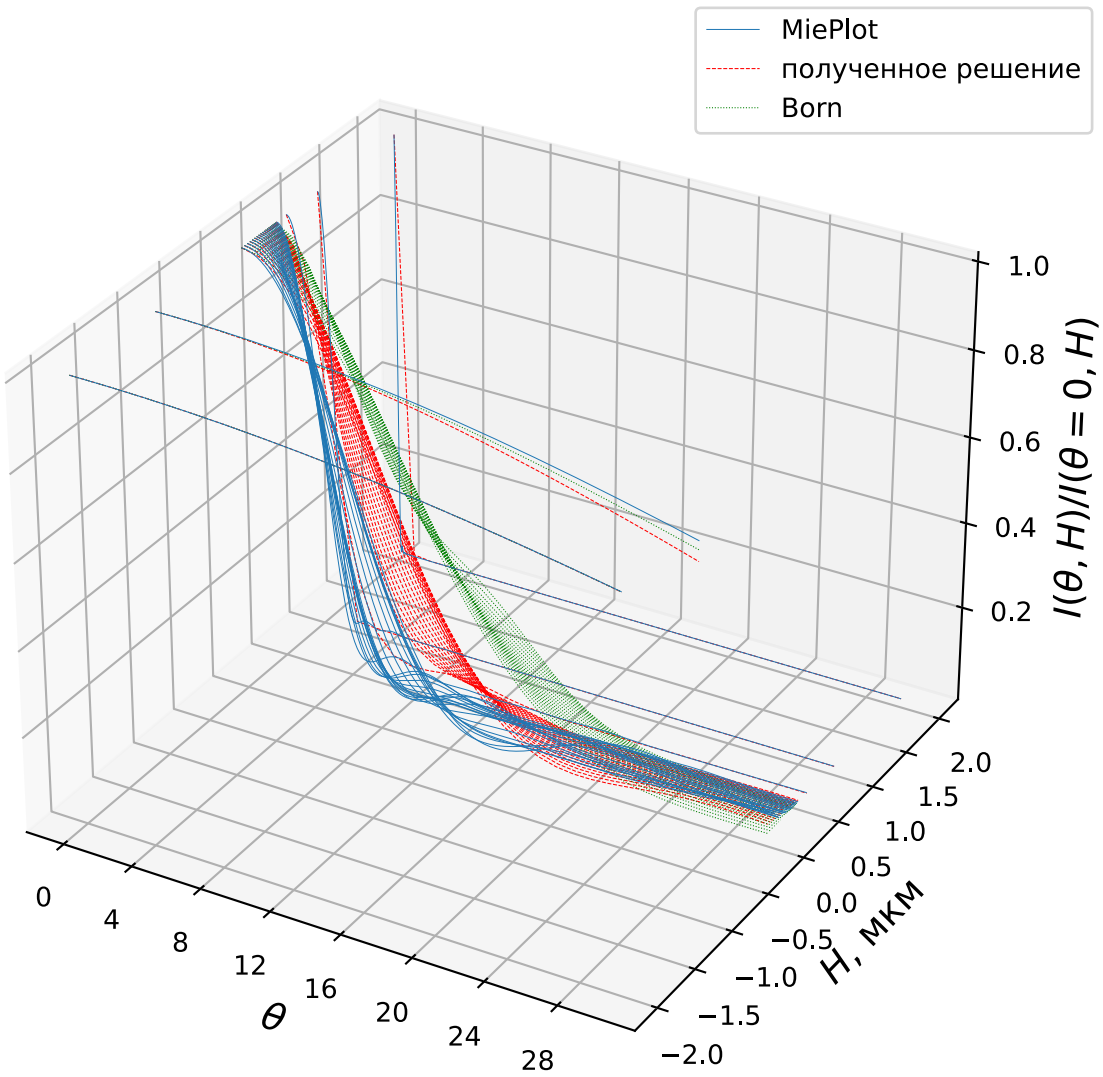


Рисунок 11 – Интенсивность, рассеянной на линзе Люнеберга, волны в зависимости от зенитного угла и размера H

5.4 Экспоненциальный профиль

Далее расмотрим экспоненциальный профиль(данное название используется в программе MiePlot) вида $\varepsilon(r) = (J + K(r/H)^L)^2$, для сравнения возьмем $J = 0, K = 1, L = -0.57$, $\varepsilon_{max} = 4$, профиль при $H = 1$ изображен на Рисунке 12. Результаты сравнения, для разных размеров и в диапазоне $30°$ углов рассеяния, представлены на Рисунке 15 для $\varepsilon_{max} = 1.5$ и на Рисунке 14 для $\varepsilon_{max} = 1.5$. Результат сравнения представлен на Рисунке 13. Как и в случае с линзой Люнеберга, когда показатель преломления был близок к единице борновское приближение и полученный метод совпадают с точным решением MiePlot для размеров $H \ll 1$. Для больших размеров дифракционные минимумы полученного решения и точного решения совпадают в пределах нескольких градусов(Рисунок 13). Т.е. данные сравнения показывают, что для

применимости метода важна плавность профиля диэлектрической проницаемости. Также наибольшую эффективность метод показывает для больших размеров и для малых размеров с диэлектрической проницаемостью близкой в единице.

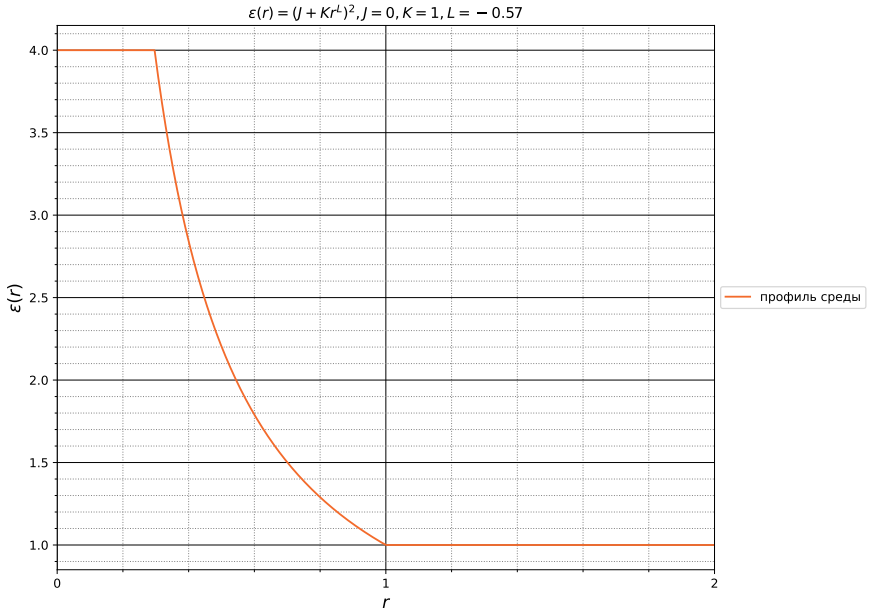


Рисунок 12 – Экспоненциальный профиль диэлектрической проницаемости

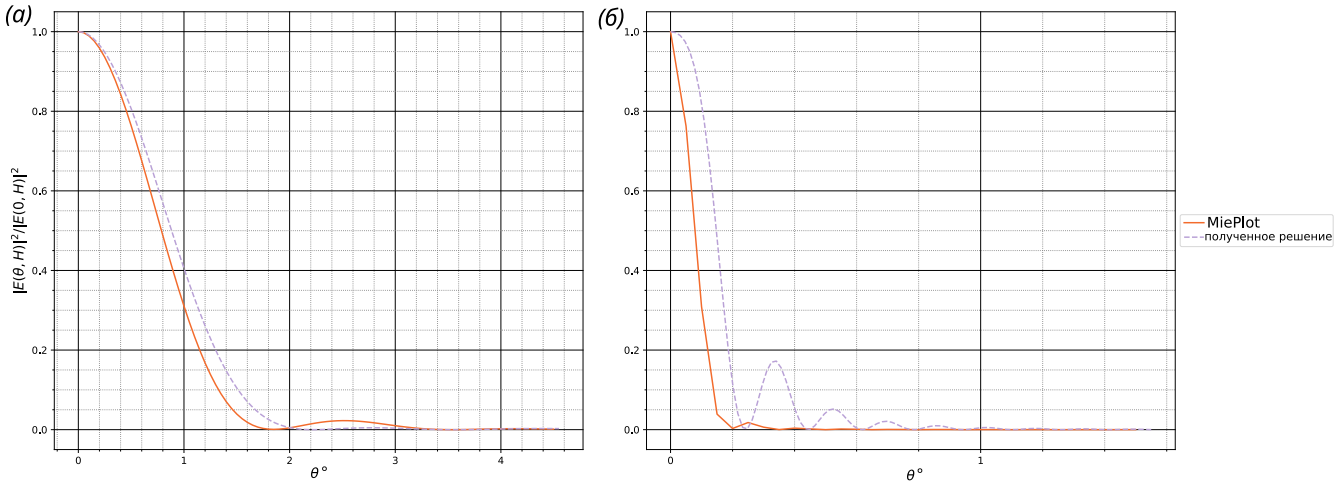


Рисунок 13 – Сравнение решений в задаче рассеяния плоской волны на экспоненциальном профиле при $H = 10$ мкм(a) и $H = 100$ мкм(b)

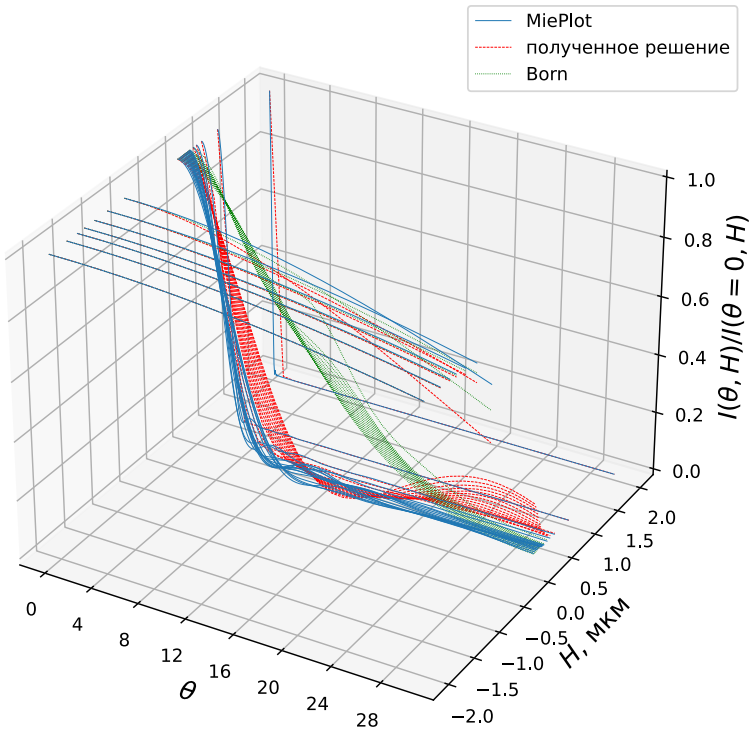


Рисунок 14 – Зависимость интенсивности рассеянной волны на экспоненциальном профиле от зенитного угла и размера H, $n_{max} = 1.5$

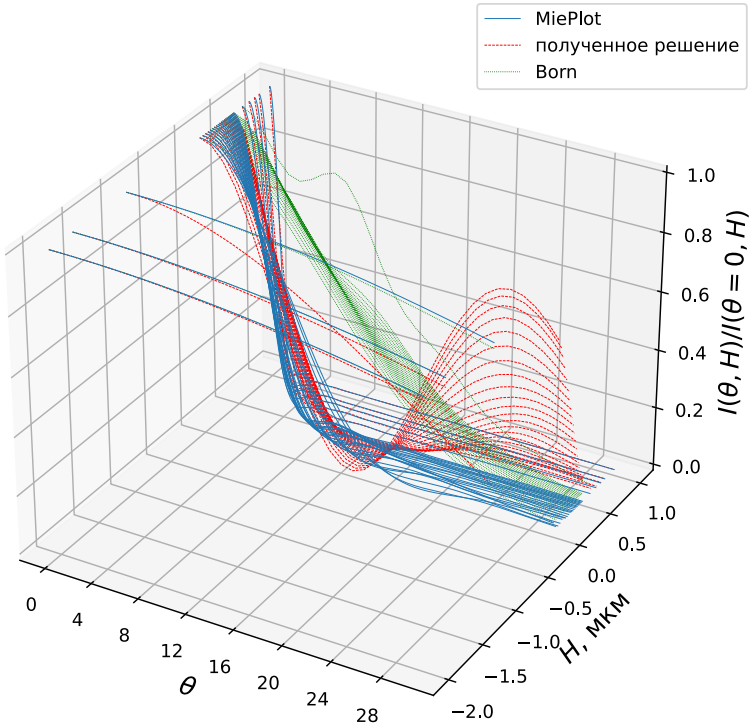


Рисунок 15 – Зависимость интенсивности рассеянной волны на экспоненциальном профиле от зенитного угла и размера H, $n_{max} = 4$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, была рассмотрена задача теории распространения волн и решена система объемных интегральных уравнений, эквивалентная системе уравнений Максвелла, в приближении плавно-неоднородной среды. Полученное решение записано в квадратурах и позволяет при заданных функций стороннего тока и диэлектрической проницаемости определить результирующие электромагнитное поле. Единственное сделанное в процессе преобразований приближение состоит в неточном учете зависимости от координат, которое в дальнейшем можно уточнять большим числом слагаемых в ряде Тейлора. Предложенное решение объединяет в себе достоинства методов борновского рассеяния и геометрической оптики. Достоинством предложенного решения является его применимость для любого вида падающей электромагнитной волны и профиля неоднородности, а также учет явления деполяризации. Было проведено сравнение полученного метода для случая рассеяния плоской электромагнитной волны на однородной сфере и двух неоднородных сферах: Люнеберга и с экспоненциальным профилем. Результат сравнения показал, что при рассеянии плоской электромагнитной волны на рассматриваемых неоднородных сферах полученное приближение согласуется с решениями MiePlot, в условиях применимости борновского приближения или приближения геометрической оптики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Степаненко В.Д., Радиолокация в метеорологии. - Л.: Гидрометеоиздат, 1978.

[2] Минервин В. Е., Шупяцкий А. Б. Радиолокационный метод определния фазовогосостояния облаков и осадков. Тр. ЦАО, вып. 17, 1963.

[3] Dinevich, L., Improving the accuracy of selection of bird radar echoes against a background of atomized clouds and atmospheric inhomogeneities, 2015. URL:https://www.researchgate.net/publication/290648868.

[4] Liou K.N. Influence of cirrus clouds on weather and climate processes: A global perspective // Mon. Weather Rev.1986. V. 114, N 6. P. 1167–1199.

[5] Kalnay E. Atmospheric modeling, data assimilation andpredictability// Cambridge University Press, 2002. 364 p.

[6] Okamoto, H., Sato, K., Borovoi, A., Ishimoto, H., Masuda, K., Konoshonkin, A., Kustova, N.. Wavelength dependence of ice cloud backscatter properties for spaceborne polarization lidar applications. // Optics Express. 2020. V. 28, p. 2917.

[7] Okamoto, H., Sato, K., Borovoi, A., Ishimoto, H., Masuda, K., Konoshonkin, A., Kustova, N.. Interpretation of lidar ratio and depolarization ratio of ice clouds using spaceborne high-spectral-resolution polarization lidar. // Optics Express. 2019. V. 27. p. 36587.

[8] Кауль Б.В., Волков С.Н., Самохвалов И.В. Результаты исследований кристаллических облаков посредством лидарных измерений матриц обратного рассеяния света // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т.16 № 4. С. 354-361.

[9] Кравцов Ю.А. Приближение геометрической оптики и примыкающие к нему асимптотические методы. - М.: Изд-во радиотехнического ин-та АН СССР, 1972, 108 с.

[10] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука, 1973, 720 с.

[11] Konoshonkin A.V., Kustova N.V., Borovoi A.G., Grynko Y., Förstner J. Light scattering by ice crystals of cirrus clouds: Comparison of the physical optics methods // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2016. V. 182. P. 12–23.

[12] The discrete dipole approximation: An overiew and recent developments, M.A. Yurkin, A.G. Hoekstra // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2007. V. 106. P. 558-589.

[13] Mishchenko M.I. Electromagnetic scattering by particles and particle groups. - P.: Cambridge University Press, 2014, 435 p.

[14] Konstantin G. Inzhevatkina,, Maxim A. Yurkin. Uniform-over-size approximation of the internal fields for scattererswith low refractive-index contrast // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, V. 277, 2022.

[15] Лосев Д. В., Бардашов Д. С. Метод итерированных ядер при распространении-волн в неоднородных средах. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.

[16] Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М.,Татарский В.И., Состояние теории распространнеия волн в случайно-неоднородной среде // УФН. - 1970. – Т.102.

[17] James D. Klett and Robert A. Sutherland. Approximate methods for modeling the scatteringproperties of nonspherical particles: evaluationof the Wentzel-Kramers-Brillouin method // J. of Applied Optics V. 31, No. 3, 1992.

[18] Rayleigh J. W. S. On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection, // Proc. R. Soc. London Ser. A86, 207-223(1912).

[19] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики, –М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 167с.

[20] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики.–М.:Высш. шк., 1991.– 224с.

[21] Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения–М.: Наука, 1968. –448с.

[22] Самохин А.Б., Ю.Г. Смирнов, Теоремы единственности и существования решениязадач рассеяния электромагнитных волнна трехмерных анизотропных телахв дифференциальной и интегральной постановке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Т. 61 № 1, 2021, с. 85–94.

[23] Бардашов Д.С., Лосев Д.В. Метод итерированных ядер при распространении волн в плавно-неоднородных средах // Известия вузов. Физика. 2013. № 8/2. С. 32-34.

[24] Бардашов Д.С., Лосев Д.В. Метод резольвенты в теории распространения волн в неоднородных средах // Известия Вузов. Физика. 2006. № S9. С. 19-22.

[25] Бардашов Д.С., Лосев Д.В., Якубов В.П. Метод итерированных ядер в задаче о переходном слое Эпштейна // Известия Вузов. Физика. 2008. № 9/2. С. 19-20.

[26] Losev D.V., Bardashov D.S. Method of iterated kernels in problem of wave propagation in heterogeneous media: calculation of higher orders terms // International Journal of Open Information Technologies. V. 8. № 4. 2020. P. 1-4.

[27] Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Метод итерированных ядер в задачах распространения волн в неоднородных средах // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2014. № 12. http://jre.cplire.ru/jre/dec14/index.html.

[28] G. Mie, «Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen», Leipzig, Ann. Phys. 330, 377—445 (1908).

[29] Lock J. A. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. III. Finely stratified sphere model // J. Opt. Soc. Am. A 25, 2991–3000 (2008).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Отчет о патентных исследованиях

УТВЕРЖДАЮ

_____/Д.Я. Суханов/
должность, личная подпись и расшифровка подписи
руководителя ООП

"15" сентября 2021г.

ЗАДАНИЕ
на проведение патентных исследований

Наименование работы (темы): Методики восстановления изображения неоднородностей в радиотомографии и ультразвуковой томографии.

Шифр работы (темы)БИМ

Этап работы первый, сроки его выполнения 16.09.2021- 14.12.2021

Задачи патентных исследований:исследовать методы восстановления изображения неоднородностей по измеренным акустическим и электромагнитным полям в ультразвуковой томографии и радиотомографии, оответственно. Исследование используемых технических средств в радиотомографии и ультразвуковой томографии. Исследование способов получения изображений в радиолокации.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

Виды патентных исследований	Подразделения-исполнители (соисполнители)	Ответственные исполнители (Ф.И.О.)	Сроки выполнения патентных исследований. Начало. Окончание	Отчетные документы
1. Поиск методик в радиолокации	Кафедра радиофизики ТГУ	Сальников К.С.	16.09.2021-14.10. 2021	отчет о поиске
2. Поиск методик в ультразвуковой томографии	Кафедра радиофизики ТГУ	Сальников К.С.	15.10.2021-14.11. 2021	отчет о поиске
3. Поиск методик в радиотомографии	Кафедра радиофизики ТГУ	Сальников К.С. .	15.11.2021-14.12. 2021	отчет о поиске

Руководитель патентного подразделения	_____ личная подпись	В.П. Беличенко расшифровка подписи	12.09.21 дата
Руководитель ВКР магистра	_____ личная подпись	Д.В. Лосев расшифровка подписи	12.09.21 дата

Регламент поиска

20.09.2021
дата составления регламента

Наименование работы (темы): Методики восстановления изображения неоднородностей в радиотомографии и ультразвуковой томографии.

Шифр работы (темы) БИМ
Номер и дата утверждения задания от 15.09.2021Этап работы первый
Цель поиска информации (в зависимости от задач патентных исследований, указанных в задании)
Получить представление о существующих методах восстановления изображения неоднородностей по измеренным акустическим и электромагнитным полям в ультразвуковой томографии и радиотомографии соответственно. Оценить оптимальность используемых технических средств в радиотомографии и ультразвуковой томографии. Исследовать способы получения изображений в радиолокации.

Обоснование регламента поиска поиск провести в базах ФИПС и USPTO
Начало поиска 16.09.2021 Окончание поиска 14.12.2021

Предмет поиска (объект исследования, его составные части, товар)	Страна поиска	Источники информации, по которым будет проводиться поиск		Ретроспективность	Наименование информационной базы
		патентные	НТИ		

		Наименование	Классификационные рубрики МПК	Наименование	Рубрики УДК		
1	2	3	4	5	6	7	8
Методы радиотомографии Методы ультразвуковой томографии Методы восстановления изображений в радиолокации	Россия, США	База данных ФИПС (Россия) База данных USPTO (США)	H01Q 21/00 (2006.01) A61B 6/03 (2006.01) G01N 29/06 (2006.01) G01S 13/89 (2006.01) G01S 13/89 (2006.01) A61B 8/00 (2006.01)	Акустический журнал Журнал технической физики Журнал радиоэлектроники LAP LAMBERT Academic Publishing Журнал Радиотехника и электроника.	621.396.962.21	1997-2021 (Россия) 2001-2021 (США)	База данных ФИПС (Россия) База данных USPTO (США)

Руководитель ВКР магистра _____ Д.В. Лосев 20.09.21

личная подпись расшифровка подписи дата

Руководитель патентного подразделения _____ В. П. Беличенко 20.09.21

личная подпись расшифровка подписи дата

ОТЧЕТ О ПОИСКЕ

В.1 Поиск проведен в соответствии с заданием

от 15.09.2021 и Регламентом поиска № от 20.09.2021

В.2 Этап работы первый

В.3 Начало поиска 16.09.2021 Окончание поиска 14.12.2021

В.4 Сведения о выполнении регламента поиска (указывают степень выполнения регламента поиска,

отступления от требований регламента, причины этих отступлений) – регламент поиска выполнен полностью.

В.5 Предложения по дальнейшему проведению поиска и патентных исследований –Более детально проанализировать направления исследований научных групп в области радиотомографии. Расширить поиск текущей научной и патентной информации в смежных областях.

В.6 Материалы, отобранные для последующего анализа

Таблица В.6.1 – Патентная документация

Предмет поиска (объект исследования, его составные части)	Страна выдачи, вид и номер охранного документа. Классификационный индекс.	Заявитель (патентообладатель), страна. Номер заявки, дата приоритета.	Название изобретения	Сведения о действииохранного документа
1	2	3	4	5

Радиотомография Ультразвуковая томография Борновское приближение Зондирование	Патент РФ № 167526, МПК H01Q 21/00 (2006.01) A61B 6/03 (2006.01)	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский Томский государственный университет" (ТГУ, НИ ТГУ) (RU), 2014147873, 27.11.2014	Тактированная антенная решетка с фокусирующим рефлектором для радиотомографии	Действует
	Патент РФ № 2 355 313, A61B 8/00 (2006.01)	Осипов Лев Васильевич (RU), Кульберг Николай Сергеевич (RU), 2007110328/14, 21.03.2007	Способ частотно-динамической фокусировки на излучение и прием в медицинских ультразвуковых диагностических сканерах	Не действует
	Патент РФ 2 422 851, МПК G01S 13/89 (2006.01)	Ковалев Сергей Владимирович (RU), Нестеров Сергей Михайлович (RU), Скородумов Иван Алексеевич (RU), 2010117277/09, 04.05.2010	Способ получения двумерного радиолокационного изображения объекта при многочастотном импульсном зондировании	Не действует
	Патент РФ № 2 372 627, МПК G01S 13/89 (2006.01)	ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ "ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени академика А.И. БЕРГА" (RU), 2008111289/09, 24.03.2008	Способ определения жизнеспособности тканей биологических объектов и устройство для его осуществления	Действует

	Патент РФ № 144 100, МПК G01N 29/06 (2006.01)	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский Томский государственный университет" (ТГУ) (RU), 2014105770/28, 17.02.2014	Ультразвуковой томограф	Не действует
	Патент РФ № 2 458 342, МПК G01N 29/06 (2006.01)	Общество с ограниченной ответственностью "Акустические Контрольные Системы" (RU), 2011120842/28, 25.05.2011	Способ ультразвуковой томографии и устройство для его осуществления	Действует
	Патент США № 61948169, МПК G01V 99/00	CARBO Ceramics Inc. SANDIA CORPORATION, (TX, US) Houston Albuquerque, (NM, US) Заявлено –3.07.2014 Опубликовано – 10.09.2015	Systems and methods for locating and imaging proppant in an induced fracture	Действует

Таблица В.6.2 – Научно техническая, конъюнктурная, нормативная документация и материалы государственной регистрации (отчеты о научно-исследовательских работах)

Предметпоиска	Наименование источника информации с указанием страницы источника	Автор, фирма (держатель) технической документации	Год место и орган издания (утверждения, депонирования источника)
1	2	3	4
Системы интегральных уравнений эквивалентные уравнениям Максвелла Ультразвуковая томография Радиотомография	1. Суханов Д.Я., Барышева К.В. Трансмиссионное некогерентное ультразвуковое видение плоских объектов		Акустический журнал 2010. Т. 56. № 4. С. 491-496.
	2. Суханов Д.Я., Завьялова К.В., Трехмерная радиотомография объектов, скрытых за диэлектрически неоднородными преградами		Журнал технической физики, 2015. Т. 85. № 10. С. 115-120.
	3. Суханов Д.Я., Якубов В.П. Многоракурсное зондирование в подповерхностной радиотомографии и определение показателя преломления фоновой среды		Журнал радиоэлектроники., 2006. № 1. С. 1
	4. Илюшин Я.А., Методы дифракционной радиотомографии ионосферы		автореферат диссертации, год 1996
	5. Балзовский Е.В., Брезгулевский Д.С., Буянов Ю.И., Еремеев А.И., Каменев А.В., Клоков А.В., Сатаров Р.Н., Шипилов С.Э., Якубов В.П. Сверхширокополосные антенны и антенные решетки для радиотомографии		сборник докладов Всероссийской научно-технической конференции. Год 2018.
	6 Лосев Д. В., Бардашов Д. С.		LAP LAMBERT Academic Publishing,

	Метод итерированных ядер при распространении волн в неоднородных средах.		2014
	7. Еремин Ю.А., Ивахненко В. И., Рязанов М.В. Математические модели дифракционной томографии		Радиотехника и электроника. -1998. - Т. 43, № 2. - С. 133-143
	8. Краснов М.Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения		М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1968.
	9. Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М. Татарских В.И., Состояние теории распространнеия волн в случайно-неоднородной среде		УФН. - 1970. - Т. 102. -С. 3-42.
	10. Теория дифракции, Малюжинц Г.Д.		Изд-во “Мир”, 1964

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с целью и задачами проекта был проведен поиск патентной и научно-технической документации, относящейся к следующим вопросам: радиотомография, ультразвуковая томография, радиолокация.

Поиск патентной документации произведен в базах данных патентной информации патентных ведомств России (ФИПС) и США (USPTO). Глубина осуществленного поиска (24 года в ФИПС и 38 лет в USPTO) позволила сформировать полноценную картину проведения научных исследований и патентования в сфере радио и ультразвуковой томографии в России и США. Причем поиск в базе данных USPTO показал наличии патентов из ряда других стран (Япония, Китай), поскольку, как правило, за патентованием значимых изобретений в национальных ведомствах, следует их патентование и в USPTO.

Отмечена следующая информация:

- Используется метод пространственной согласованной фильтрации в двух патентах(“ультразвуковой томограф” и “Тактированная антенная решетка с фокусирующим рефлектором для радиотомографии”);

- Используется следующая техническая база - СШП антенны в радиотомографии и решетки ультразвуковых приемников и излучателей ;

Далее планируется более детально проанализировать направления исследований научных групп в области радиотомографии. Расширить поиск текущей научной и патентной информации в смежных областях, в том числе рассмотреть СШП антенны и векторные антенны.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

СПРАВКА

Томский Государственный Университет

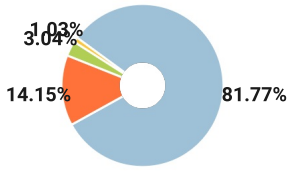
о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

Автор работы: Сальников Кирилл Сергеевич
Самоцитирование рассчитано для: Сальников Кирилл Сергеевич
Название работы: Сальников-К_С
Тип работы: Магистерская диссертация
Подразделение:

РЕЗУЛЬТАТЫ

СОВПАДЕНИЯ	14.15%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ	81.77%
ЦИТИРОВАНИЯ	3.04%
САМОЦИТИРОВАНИЯ	1.03%



ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 21.06.2023

Структура документа: Проверенные разделы: основная часть с.2, 4-50, приложение с.54-63

Модули поиска: ИПС Адилет; Библиография; Сводная коллекция ЭБС; Интернет Плюс*; Сводная коллекция РГБ; Цитирование; Переводные заимствования (RuEn); Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu); Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика; Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Переводные заимствования по Интернету (EnRu); Переводные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Переводные заимствования издательства Wiley ; eLIBRARY.RU; СПС ГАРАНТ: аналитика; СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация; Медицина; Диссертации НББ; Коллекция НБУ; Перефразирования по eLIBRARY.RU; Перефразирования по СПС ГАРАНТ: аналитика; Перефразирования по Интернету; Перефразирования по Интернету (EN); Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Перефразирования по коллекции

Работу проверил: Лапутенко Андрей Владимирович

ФИО проверяющего

Дата подписи: 21-06-2023

Подпись проверяющего

Чтобы убедиться
в подлинности справки, используйте QR-код,
который содержит ссылку на отчет.

Ответ на вопрос, является ли обнаруженное заимствование корректным, система оставляет на усмотрение проверяющего. Предоставленная информация не подлежит использованию в коммерческих целях.