

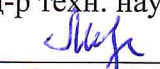
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ОПОП

д-р техн. наук, профессор

 К.И. Лившиц

« 5 »  2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

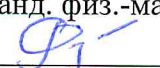
ИССЛЕДОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ RQ-СИСТЕМ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Прикладная математика и информатика»

Савченко Кристина Станиславовна

Руководитель ВКР

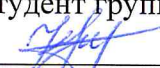
канд. физ.-мат. наук, доцент

 Е.А. Фёдорова

« 29 »  2023 г.

Автор работы

студент группы № _____

 К.С. Савченко

« 29 »  2023 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОПОП

д-р техн. наук, профессор



К. И. Лившиц

подпись

« 21 » ноября 20 23 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра обучающегося

Савченко Кристине Станиславовне

Фамилия Имя Отчество обучающегося

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Прикладная математика и информатика»

1 Тема выпускной квалификационной работы

Исследование гибридных RQ – систем

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:

а) в учебный офис / деканат – _____ б) в ГЭК – _____

3 Исходные данные к работе:

Объект исследования – RQ-система с очередью.

Предмет исследования – Стационарные распределение вероятностей числа заявок в системе (в очереди и на орбите).

Цель исследования – Построение математической модели гибридной RQ-системы и исследование её методом асимптотического анализа.

Задачи:

Построить математическую модель гибридной RQ-системы (с очередью);

Реализовать метод асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите;

Разработать численный алгоритм нахождения стационарных вероятностей и реализовать его в среде MathCad;

Найти основные вероятностные характеристики модели и оценить область применимости асимптотических результатов.

Методы исследования:

Методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений, метод асимптотического анализа, численные методы.

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра теории вероятностей и математической статистики.

4 Краткое содержание работы

Построить математическую модель гибридной RQ-системы (с очередью), описать исследуемый процесс, составить систему уравнений Колмогорова.

Применить метод асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите, получить асимптотику первого и второго порядков.

Разработать численный алгоритм для нахождения стационарных вероятностей двумерного случайного процесса. Реализовать его в среде MathCad.

Оценить область применимости асимптотического метода в ходе сравнения асимптотических результатов и численного алгоритма.

Руководитель выпускной
квалификационной работы

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

должность, место работы



подпись

/ Е. А. Фёдорова

И.О. Фамилия

Задание принял к исполнению

Студентка, группа №931923

должность, место работы



подпись

/ К. С. Савченко

И.О. Фамилия

АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения и списка используемой литературы. Общий объем работы составляет 44 страниц. Представлено 28 рисунков, 2 таблицы и 32 использованных источников и литературы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, RQ-система с очередью, метод асимптотического анализа, большая задержка, характеристическая функция, простейший поток, орбита.

Объект исследования: гибридная RQ-система (с очередью).

Цель работы: провести исследование RQ-системы вида $M|M|1|N$ методом асимптотического анализа первого и второго порядков. Получить стационарное распределение числа заявок на орбите для RQ-системы. Сравнить результаты с численным анализом.

Во введении описана и обоснована актуальность работы, поставлена цель, сформулированы задачи исследования. В разделе 1 рассматривается RQ-система вида $M|M|1|N$, для которой построена математическая модель и составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова для числа заявок в очереди и на орбите. Раздел 2 содержит метод асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите, получен вид асимптотики первого и второго порядков. В разделе 3 представлено описание программы для нахождения стационарных вероятностей двумерного случайного процесса и сравнение численного алгоритма с асимптотическими результатами. Заключение включает в себя основные выводы по данной работе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Математическая модель гибридной RQ-системы	7
1.1 Система уравнений Колмогорова	9
1.2 Система уравнений характеристических функций.....	11
2 Метод асимптотического анализа в условии большой задержки.....	13
2.1 Асимптотика первого порядка.....	14
2.2 Асимптотика второго порядка.....	17
3 Численный анализ	23
3.1 Алгоритм нахождения стационарных вероятностей	23
3.2 Сравнение результатов асимптотических и численных методов	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	39
ЛИТЕРАТУРА.....	40
ПРИЛОЖЕНИЕ А Алгоритм вычисления матрицы А	43

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сложно представить жизнь без использования средств связи и систем передачи данных. Еще двадцать лет назад люди и представить себе не могли, что мир может стать настолько информационным. Современные технологии с каждым годом охватывают все больше сфер человеческой деятельности. Однако необходимо понимать, что с увеличением объема информации, дальности и качества связи, требования к технологиям возрастают, а это в свою очередь создает необходимость их оптимизировать.

Для того чтобы оптимизировать столь масштабные информационные и технические сети, на каждый тип реальной системы строится своя индивидуальная математическая модель. В качестве математических моделей реальных экономических, технических, информационных систем часто используются различные модели теории массового обслуживания (ТМО) [1, 2].

Теория массового обслуживания – раздел теории вероятностей, целью исследований которого является рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания на основе изучения потоков требований на обслуживание, поступающих в систему и выходящих из неё, длительности ожидания и длины очередей. Она базируется на теории вероятностей и математической статистики.

Основоположником теории массового обслуживания считается датский учёный Агнер Краруп Эрланг. А. К. Эрланг, решая практические задачи совершенствования работы систем связи, вывел ряд формулировок и формул, являющихся базовыми в теории массового обслуживания.

В теории массового обслуживания (ТМО) различают системы с очередью, потерями, смешанные, но особый интерес представляют системы с повторными вызовами или RQ–системы (Retrial Queueing System).

В настоящее время изучению RQ-систем, которые являются математическими моделям реальных систем call–центров [3-5],

телекоммуникационных сетей связи [6], компьютерных сетей, систем в экономике уделяется большое внимание. Это обусловлено их широким практическим применением. Системы с повторными вызовами используют для анализа и исследования процессов функционирования телекоммуникационных и компьютерных систем, проектирования телефонных сетей, мобильных сотовых радиосетей и во многих других областях [7-9].

Такие системы характеризуются тем, что клиенты (заявки, звонки, сообщения и т.д.) не могут быть обслужены и вынуждены ждать, после чего, они вновь обращаются к прибору с целью обслужиться. Как правило, рассматриваются RQ–системы, в которых входящие вызовы либо сразу обслуживаются прибором, либо из-за его занятости уходят в зону ожидания, называемую орбитой, и уже обращаются за обслуживанием к прибору после случайной задержки.

Исследованиям RQ–систем посвящено большое количество работ. Первые системы такого рода были рассмотрены Р.И. Вилкинсоном [10] и Дж. Коэном [11]. Наиболее подробное их описание, сравнение с классическими системами массового обслуживания, основные методы и подходы исследования таких моделей отражены в работах Г.И. Фалина [12-14] и Дж. Арталехо [15,16]. Только в монографии Д.Р. Арталехо приведено более семисот ссылок на издания различного уровня. Также в числе таких исследователей были А. Айссани [17], А.Н. Дудин [18], Т. Фунг-Дук, А.З. Меликов, С.Н. Степанов, А.А. Назаров и другие ученые.

Многие из поставленных задач в моделях систем массового обслуживания решаются численно [19] либо аналитически. Чаще всего эти способы решения применимы, когда случайные процессы, протекающие в моделях СМО описываются при помощи экспоненциального распределения, или же когда СМО имеют более простую структуру, например являются одноканальными, имеют только один источник повторных вызовов и др., поскольку в целом данные методы более применимы к менее трудоемким

задачам и задачам более простой структуры. Иногда становится затруднительно или же вовсе невозможно применение численных и аналитических методов и тогда используются альтернативные методы решения поставленных задач, например метод асимптотического анализа.

Метод асимптотического анализа RQ–систем заключается в получении каких-либо характеристик исследуемого процесса при выполнении некоторого предельного условия, вид которого конкретизируется, исходя из поставленных задач. Асимптотические методы применялись такими математиками, как Д. И. Бурман и Д. Р. Смит [20], А.А. Назаров [21-23], В.В. Анисимов [25], А.А. Боровков [26] и др.

RQ-системы с очередью исследовались такими учеными как: Арталехо [27,28], Г.И. Фалин [12], А. Эконому [29], Ю. Кернер [30], М. Хавив [31] и другие. Также данная система рассматривалась в работе Назарова А.А. и Анисимовой А.А [32].

Приведём пример. Предположим, что на телефон некоторого call–центра в случайном порядке поступают вызовы. Это может быть регистратура в больнице или, к примеру, справочное бюро. Если в момент поступления вызова телефон свободен, то абонент обслуживается (происходит запись к врачу, предоставляется какая-либо информация), при этом в общем случае разговор длится случайное время. Если же телефон занят, то образуется очередь, где клиенты будут ожидать некоторое время и по очереди получать обслуживание. В многих call–центрах очередь ограничена и вызовы, превышающие определенное число, сбрасываются. Тогда клиенты повторно пытаются дозвониться в фирму.

Такие задачи могут быть описаны в виде математических моделей гибридных RQ-систем, где элементами системы являются и очередь, и орбита.

Изучению и анализу таких моделей посвящена данная выпускная квалификационная работа.

Цель работы – исследование гибридной RQ-системы с очередью $M|M|1|N$ методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите.

В соответствии с целью были поставлены и решены следующие задачи:

1. Построить математическую модель RQ-системы вида $M|M|1|N$ с очередью.
2. Предложить модификацию метода асимптотического анализа в условии большой задержки для нахождения стационарного распределения числа заявок на орбите.
3. Разработать программу, реализующую алгоритм вычисления распределения вероятностей числа заявок в системе (на орбите и в очереди) с помощью численных методов.

1 Математическая модель гибридной RQ-системы

Гибридная RQ-система – система массового обслуживания с повторными вызовами, в которой присутствует и классическая очередь, и орбита.

В данной работе рассматривается гибридная RQ-система с одним обслуживающим прибором (рисунок 1). В систему поступает простейший поток заявок с параметром λ . Если прибор свободен, то заявка встаёт на обслуживание. Обслуживание происходит в течение случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром μ . Если прибор занят, то заявка с вероятностью p идёт в очередь конечной длины N . Либо заявка переходит на орбиту с вероятностью $1 - p$, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Когда обслуживающий прибор освобождается и имеются заявки в очереди, то первая заявка из очереди мгновенно занимает его для обслуживания, после чего покидает систему. С орбиты после случайного времени задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой захватить его.

Таким образом, рассматривается RQ-система $M|M|1|N$.

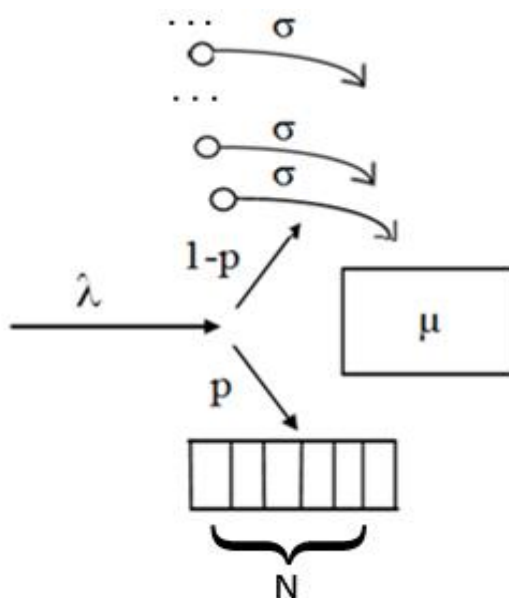


Рисунок 1 – RQ-система $M|M|1|N$

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите, в очереди и на приборе.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите, а $n(t)$ – число заявок в очереди и на приборе, так что:

$$\begin{cases} n(t) = 0 - \text{прибор свободен, в очереди нет заявок,} \\ n(t) = 1 - \text{прибор занят, в очереди нет заявок,} \\ n(t) = n - \text{прибор занят, в очереди } n - 1 \text{ заявка,} \\ n(t) = N + 1 - \text{прибор и очередь заняты.} \end{cases}$$

Обозначим $P\{n(t) = n, i(t) = i\} = P(n, i, t)$ – вероятность того, что в момент времени t в очереди и на приборе n заявок, на орбите находится i заявок. Процесс $\{n(t), i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским.

1.1 Система уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P(n, i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Используя Δt -метод и формулу полной вероятности, были записаны следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial P(0, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - i \sigma \Delta t)P(0, i, t) + \mu \Delta t P(1, i, t) + o(\Delta t), \\ \partial P(1, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t)P(1, i, t) + \mu \Delta t P(2, i, t) + \\ \quad + (i + 1) \sigma \Delta t P(0, i + 1, t) + \lambda \Delta t P(0, i, t) + \lambda(1 - p) \Delta t P(1, i - 1, t) + o(\Delta t), \\ \partial P(n, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t)P(n, i, t) + \lambda(1 - p) \Delta t P(n, i - 1, t) + \\ \quad + \lambda p \Delta t P(n - 1, i, t) + \mu \Delta t P(n + 1, i, t) + o(\Delta t), \quad 2 \leq n \leq N, \\ \partial P(N + 1, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t)P(N + 1, i, t) + \lambda \Delta t P(N + 1, i - 1, t) + \\ \quad + \lambda p \Delta t P(N, i, t) + o(\Delta t). \end{array} \right.$$

Делим на Δt , выполняя переход при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i \sigma)P(0, i, t) + \mu P(1, i, t), \\ \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)P(1, i, t) + \mu P(2, i, t) + (i + 1) \sigma P(0, i + 1, t) + \lambda P(0, i, t) + \\ \quad + \lambda(1 - p)P(1, i - 1, t), \\ \frac{\partial P(n, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)P(n, i, t) + \lambda(1 - p)P(n, i - 1, t) + \lambda p P(n - 1, i, t) + \\ \quad \mu P(n + 1, i, t), \quad 2 \leq n \leq N, \\ \frac{\partial P(N + 1, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)P(N + 1, i, t) + \lambda P(N + 1, i - 1, t) + \lambda p P(N, i, t). \end{array} \right.$$

В стационарном режиме система примет вид:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P(0,i) + \mu P(1,i) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(1,i) + \mu P(2,i) + (i+1)\sigma P(0,i+1) + \lambda P(0,i) + \lambda(1-p)P(1,i-1) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(n,i) + \lambda(1-p)P(n,i-1) + \lambda pP(n-1,i) + \mu P(n+1,i) = 0, \\ \hspace{25em} 2 \leq n \leq N, \\ -(\lambda + \mu)P(N+1,i) + \lambda P(N+1,i-1) + \lambda pP(N,i) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для нахождения вероятностей $P(n,i)$ к системе уравнений (1) необходимо также добавить условие нормировки:

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{i=0}^{\infty} P(n,i) = 1.$$

1.2 Система уравнений для характеристических функций

Составим систему уравнений, определяющую частичные характеристические функции

$$H(n, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P(n, i) = M \{ e^{ju i(t)} | l(t) = l \}.$$

Тогда система (1) перепишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} -j\sigma \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} = -\lambda H(0, u) + \mu H(1, u), \\ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} = -(\lambda + \mu) H(1, u) + \mu H(2, u) + \lambda H(0, u) + \lambda(1 - p) e^{ju} H(1, u), \\ -(\lambda + \mu) H(n, u) + \lambda(1 - p) e^{ju} H(n, u) + \lambda p H(n - 1, u) + \mu H(n + 1, u) = 0, \\ \hspace{25em} 2 \leq n \leq N, \\ -(\lambda + \mu) H(N + 1, u) + \lambda e^{ju} H(N + 1, u) + \lambda p H(N, u) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Представим систему в матричном виде. Введём вектор

$$H(u) = \{ H(0, u), H(1, u), \dots, H(N, u) \}.$$

Матрица коэффициентов А:

$$A(ju) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) + \lambda(1 - p)e^{ju} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -(\lambda + \mu) + \lambda(1 - p)e^{ju} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -(\lambda + \mu) + \lambda e^{ju} \end{bmatrix} \text{ и}$$

$A(ju) = A_0 + e^{ju}A_1$, где

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -(\lambda + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(\lambda + \mu) \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-p) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda(1-p) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Матрица В:

$$B(ju) = \begin{bmatrix} -j\sigma & j\sigma e^{-ju} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = j\sigma(B_0 + e^{-ju}B_1), \text{ где}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из вида матриц следует равенство

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)\mathbf{e} = 0, \\ (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)\mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Запишем систему (3) в матричную форму

$$\mathbf{H}(u)(\mathbf{A}_0 + e^{ju}\mathbf{A}_1) = j\sigma \frac{d\mathbf{H}(u)}{du}(\mathbf{B}_0 + e^{-ju}\mathbf{B}_1), \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(0)\mathbf{e} = 1. \quad (5)$$

где (5) условие нормировки.

2 Метод асимптотического анализа

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки на орбите, то есть при $\sigma \rightarrow 0$.

Была доказана следующая теорема.

Теорема: Асимптотическая характеристическая функция $h(u)$ числа заявок $i(t)$ на орбите RQ-системы $M|M|1|N$ в условии большой задержки на орбите ($\sigma \rightarrow 0$) имеет вид характеристической функции гауссовского распределения

$$h(u) = e^{\left\{ ju \frac{k_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{k_2}{\sigma} \right\}},$$

где k_1 определяется уравнением:

$$R(k_1 \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1) \mathbf{e} = 0,$$

k_2 вычисляется по формуле:

$$k_2 = \frac{-\{ \mathbf{g}_1(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} \}}{\mathbf{g}_2(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + \mathbf{R} \mathbf{B}_1 \mathbf{e}},$$

где $\mathbf{e}$ -единичный вектор, вектор $\mathbf{R} = R(k_1)$ определяется системой

$$\begin{cases} \mathbf{R}((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{R} \mathbf{e} = 1. \end{cases}$$

$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ определяется системой

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) - k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_2((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) - k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы проведем в 2 этапа.

2.1 Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим

$$\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon).$$

Тогда уравнение (4) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (\mathbf{A}_0 + e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}_1) = j \frac{d\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{dw} (\mathbf{B}_0 + e^{-j\varepsilon w} \mathbf{B}_1), \quad (6)$$

а равенство (5) можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_1(0) \mathbf{e} = 1. \quad (7)$$

Выполним в (6)–(7) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(w) (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) = j \frac{d\mathbf{F}_1(w)}{dw} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1), \\ \mathbf{F}_1(0) \mathbf{e} = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Решение $\mathbf{F}_1(w)$ будем искать в виде

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} \mathbf{f}_1(w). \quad (9)$$

Из уравнения (6) очевидно, что функция $\mathbf{f}_1(w)$ может быть записана как:

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R} e^{jwk_1}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (6)–(7) получим систему, определяющую вектор $\mathbf{R}$

$$\begin{cases} \mathbf{R}((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}\mathbf{e} = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) определяет стационарное распределение вероятностей процесса $n(t)$.

Для нахождения величины k_1 сложим все уравнения системы (4), умножив матричное равенство справа на единичный вектор–столбец $\mathbf{e}$

$$\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(\mathbf{A}_0 + e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}_1)\mathbf{e} = j \frac{d\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{dw} (\mathbf{B}_0 + e^{-j\varepsilon w} \mathbf{B}_1)\mathbf{e}. \quad (12)$$

Разложим в ряд Тейлора $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$, получим

$$\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(\mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + j\varepsilon w \mathbf{A}_1))\mathbf{e} + O(\varepsilon^2) = j \frac{d\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{dw} (\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_1 - j\varepsilon w \mathbf{B}_1))\mathbf{e}.$$

Учитывая (3), получим

$$-j \frac{d\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{dw} j\varepsilon w \mathbf{B}_1\mathbf{e} = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) j\varepsilon w \mathbf{A}_1\mathbf{e} + O(\varepsilon^2).$$

Выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$-\frac{d\mathbf{F}_1(w)}{dw} \mathbf{B}_1\mathbf{e} = \mathbf{F}_1(w) \mathbf{A}_1\mathbf{e}.$$

С учетом выражения (10) получим:

$$-\frac{d(\mathbf{R}e^{\{jwk_1\}})}{dw} \mathbf{B}_1\mathbf{e} = \mathbf{R}e^{\{jwk_1\}} \mathbf{B}_1\mathbf{e},$$

сократим на общий множитель и выполним предельный переход и получим скалярное уравнение относительно величины k_1

$$R(k_1 \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1) \mathbf{e} = 0, \quad (13)$$

где вектор $\mathbf{R} = \mathbf{R}(k_1)$ определяется системой (9).

Найденные функции $\mathbf{F}_1(w)$ служат основой построения асимптотики первого порядка.

Функцию

$$h_1(u) = e^{\{ju \frac{k_1}{\sigma}\}}$$

будем называть асимптотической характеристической функцией первого порядка числа заявок $i(t)$ на орбите, а величину $\frac{k_1}{\sigma}$ – асимптотическим математическим ожиданием.

2.2 Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (4) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = e^{ju \frac{u}{\sigma} k_1} \mathbf{H}_2(u),$$

тогда для вектор-функции $\mathbf{H}_2(u)$ получим уравнение

$$j\sigma \frac{d\mathbf{H}_2(u)}{du} (\mathbf{B}_0 + e^{-ju} \mathbf{B}_1) = \mathbf{H}_2(u) \{k_1(\mathbf{B}_0 + e^{-ju} \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_0 + e^{ju} \mathbf{A}_1)\}, \quad (14)$$

решение $\mathbf{H}_2(u)$ которого удовлетворяет условию нормировки

$$\mathbf{H}_2(0)\mathbf{e} = 1. \quad (15)$$

В системе (14)–(15) обозначим $\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)$.

Получим следующую систему уравнений для асимптотической функции:

$$j\varepsilon \frac{d\mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{dw} (\mathbf{B}_0 + e^{-j\varepsilon w} \mathbf{B}_1) = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \{k_1(\mathbf{B}_0 + e^{-j\varepsilon w} \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_0 + e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}_1)\}, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_2(0, \varepsilon)\mathbf{e} = 1. \quad (17)$$

В задаче (16)–(17) выполнив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим систему

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(w)(k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_2(0)\mathbf{e} = 1. \end{cases}$$

Решение $\mathbf{F}_2(w)$ которой запишем в виде произведения

$$\mathbf{F}_2(w) = \mathbf{R}f_2(w), \quad (18)$$

где вектор $\mathbf{R}$ определен системой (11).

Подставляя разложение в ряд Тейлора $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ в уравнение (16), получим

$$\begin{aligned} j\varepsilon \frac{d\mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{dw}(\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_1 - j\varepsilon w\mathbf{B}_1)) = \\ = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)\{k_1(\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_1 - j\varepsilon w\mathbf{B}_1)) + (\mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + j\varepsilon w\mathbf{A}_1))\}. \end{aligned}$$

Решение $\mathbf{F}_2(w, \varepsilon)$ запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, \varepsilon) = \{\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}(w)\}f_2(w) + O(\varepsilon^2),$$

получим равенство

$$\begin{aligned} j\varepsilon f_2'(w)\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_1 - j\varepsilon w\mathbf{B}_1)) = \\ \{\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}(w)\}f_2(w)\{k_1(\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_1 - j\varepsilon w\mathbf{B}_1)) + (\mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + j\varepsilon w\mathbf{A}_1))\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} j\varepsilon f_2'(w)(\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) - (j\varepsilon w)\mathbf{R}\mathbf{B}_1) \\ = f_2(w)\mathbf{R}\{k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 - (j\varepsilon w)\mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + (j\varepsilon w)\mathbf{A}_1)\} + \\ + j\varepsilon w\mathbf{f}(w)((k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)) + O(\varepsilon^2)). \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (11) получим

$$j\varepsilon f_2'(w)(\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) - (j\varepsilon w)\mathbf{R}\mathbf{B}_1) = f_2(w)\mathbf{R}\{-k_1(j\varepsilon w)\mathbf{B}_1 + (j\varepsilon w)\mathbf{A}_1\} + \\ + j\varepsilon w\mathbf{f}(w)((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + O(\varepsilon^2).$$

Сократим на ε и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$jf_2'(w)(\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) - (jw)\mathbf{R}\mathbf{B}_1) = f_2(w)\mathbf{R}\{-k_1(jw)\mathbf{B}_1 + (jw)\mathbf{A}_1\} + \quad (19) \\ + jw\mathbf{f}(w)((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)).$$

откуда очевидно, что

$$f_2(w) = e^{\{\frac{(jw)^2}{2}k_2\}}. \quad (20)$$

Таким образом, $\mathbf{F}_2(w, \varepsilon)$ будет иметь вид:

$$\mathbf{F}_2(w, \varepsilon) = \{\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}(w)\}e^{\{\frac{(jw)^2}{2}k_2\}} + O(\varepsilon^2). \quad (21)$$

Подставляя (20) в (19), имеем

$$(-j\varepsilon w)k_2\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) = j\varepsilon w\mathbf{f}(w)((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) \\ + \mathbf{R}j\varepsilon w(\mathbf{A}_1 - k_1\mathbf{B}_1) + O(\varepsilon^2),$$

из которого получим систему уравнений

$$\mathbf{f}(w)((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 - k_1\mathbf{B}_1) + k_2\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) = 0,$$

относительно вектора $\mathbf{f}(w)$.

Очевидно, решение $\mathbf{f}(w)$ этой системы, не зависит от w и запишем как

$$\mathbf{f}(w) = \mathbf{f}.$$

Вектор $\mathbf{f}$ является решением системы уравнений

$$\mathbf{f}((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) + k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 - k_1\mathbf{B}_1) + k_2\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Решение $\mathbf{f}$ этой системы запишем в виде суммы

$$\mathbf{f} = \mathbf{g}_1 + k_2\mathbf{g}_2, \quad (23)$$

где векторы $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ являются решениями систем

$$\mathbf{g}_1((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) - k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 - k_1\mathbf{B}_1) = \mathbf{0}, \quad (24)$$

$$\mathbf{g}_2((\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) - k_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) = \mathbf{0}. \quad (25)$$

В силу (3) системы (24)-(25) имеет множество решений, поэтому добавим дополнительные условия для получения частных решений

$$\mathbf{g}_1\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{g}_2\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Для нахождения значения величины k_2 сложим все уравнения системы (16) и, домножив полученное равенство справа на единичный вектор $\mathbf{e}$, получим

$$j\varepsilon \frac{d\mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{dw} (\mathbf{B}_0 + e^{-j\varepsilon w}\mathbf{B}_1)\mathbf{e} = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)\{k_1(\mathbf{B}_0 + e^{-j\varepsilon w}\mathbf{B}_1)\mathbf{e} + (\mathbf{A}_0 + e^{j\varepsilon w}\mathbf{A}_1)\mathbf{e}\}, \quad (26)$$

Подставляя сюда разложение в ряд Тейлора $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$, а также равенство (21) и (11), получим

$$f(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + k_2 \mathbf{R} \mathbf{B}_1 \mathbf{e} = 0. \quad (27)$$

Тогда, в силу равенств (22) и (13), равенство (27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + k_2 \mathbf{R} \mathbf{B}_1 \mathbf{e} = \\ & = f((\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e}) + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + k_2 \mathbf{R} \mathbf{B}_1 \mathbf{e} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда формулу (23), получим

$$(\mathbf{g}_1 + k_2 \mathbf{g}_2)(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + k_2 \mathbf{R} \mathbf{B}_1 \mathbf{e} = 0.$$

откуда найдем значение величины k_2 :

$$k_2 = \frac{-\{\mathbf{g}_1(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e}\}}{\mathbf{g}_2(\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1) \mathbf{e} + \mathbf{R} \mathbf{B}_1 \mathbf{e}}$$

Таким образом, асимптотическая функция имеет вид:

$$\mathbf{F}_2(w, \varepsilon) = \{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}_1\} e^{\left\{\frac{(jw)^2}{2} k_2\right\}} + O(\varepsilon^2).$$

Найденные функции служат основой построения асимптотики второго порядка.

Функцию

$$h_2(u) = e^{\{ju\frac{k_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{k_2}{\sigma}\}}$$

будем называть асимптотической характеристической функцией второго порядка числа заявок $i(t)$ на орбите, а величину $\frac{k_2}{\sigma}$ – асимптотической дисперсией.

Таким образом, в результате метода асимптотического анализа распределение вероятностей числа заявок на орбите может быть аппроксимировано нормальным распределением с параметрами $m = \frac{k_1}{\sigma}$ и

$d = \frac{k_2}{\sigma}$ следующим образом

$$P_a(i) = \frac{P_h(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} P_h(i)},$$

где $P_h(i)$ – значение плотности гауссовского распределения в точке $x = i$.

3 Численный анализ

3.1 Алгоритм нахождения стационарных вероятностей

Так как асимптотический анализ даёт приближённое решение, в работе также предлагается численный алгоритм решения системы (1).

В стационарном режиме система имеет вид:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P(0,i) + \mu P(1,i) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(1,i) + \mu P(2,i) + (i+1)\sigma P(0,i+1) + \lambda P(0,i) + \lambda(1-p)P(1,i-1) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(n,i) + \lambda(1-p)P(n,i-1) + \lambda pP(n-1,i) + \mu P(n+1,i) = 0, \quad 2 \leq n \leq N, \\ -(\lambda + \mu)P(N+1,i) + \lambda P(N+1,i-1) + \lambda pP(N,i) = 0. \end{cases}$$

Далее была записана система для различных $i = 0, \dots, I$. В силу того, что система (1) имеет бесконечное число уравнений, то для реализации численного алгоритма необходимо ограничить переменную i некоторой границей I . Будем выбирать I таким, что $P(I) \leq 10^{-8}$.

При $i = 0$ имеем:

$$\begin{cases} -\lambda P(0,0) + \mu P(1,0) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(1,0) + \mu P(2,0) + \sigma P(0,1) + \lambda P(0,0) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(n,0) + \lambda pP(n-1,0) + \mu P(n+1,0) = 0, \quad 2 \leq n \leq N, \\ -(\lambda + \mu)P(N+1,0) + \lambda pP(N,0) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Для $i = 1, \dots, I-1$ система уравнений будет принимать вид (1).

При $i = I$:

$$\begin{cases} -(\lambda + I\sigma)P(0, I) + \mu P(1, I) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(1, I) + \mu P(2, I) + \lambda P(0, I) + \lambda(1 - p)P(1, I - 1) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P(n, I) + \lambda(1 - p)P(n, I - 1) + \lambda p P(n - 1, I) + \mu P(n + 1, I) = 0, \quad 2 \leq n \leq N, \\ -\mu P(N + 1, I) + \lambda P(N + 1, I - 1) + \lambda p P(N, I) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Представим совокупность систем линейных уравнений (1) в матричном виде

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (30)$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов системы, $\mathbf{P}$ — вектор неизвестных

$$\mathbf{P} = [P(0, 0), P(0, 1), \dots, P(N, 0), \dots, P(n, i), \dots, P(N, I)],$$

и $\mathbf{B}$ — вектор столбец

$$\mathbf{B} = (0, 0, 0, 0, 0, \dots, 1)^T.$$

Численный метод заключается в нахождении вектора $\mathbf{P}$ с помощью обратной матрицы.

Данный алгоритм реализуется в виде программы в среде Mathcad. Алгоритм программы для нахождения матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ представлен в ПРИЛОЖЕНИИ А и вектора $\mathbf{B}$ в общем виде представлен на рисунке 2.

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..[(n+1) \cdot (N+1)] \\ \quad Bb_i \leftarrow 0 \\ \quad Bb_{(n+1) \cdot (N+1)} \leftarrow 1 \\ \quad Bb \end{cases}$$

Рисунок 2 – Алгоритм для вычисления вектора $\mathbf{B}$

Особенность алгоритма заключается в том, что пользователь может сам задавать любые N и I , а также любые параметры.

Продemonстрируем численный алгоритм решения системы (1) на примере, когда количество мест в очереди $N = 5$, а количество мест на орбите $I = 50$. Также возьмём следующие значения параметров системы:

$\lambda = 1$ – интенсивность входящего потока;

$\mu = 2$ – продолжительность обслуживания;

$\sigma = 0.05$ – интенсивность задержки;

$p = 0.5$ – вероятность выбора ожидания в очереди первичной заявки.

На рисунке 3 представлена посчитанная матрица коэффициентов A размера 306x306.

$A^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	-3	2	0	0	0	0.05	0	0	0	0	0
2	0	0.5	-3	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.5	-3	2	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.5	-3	2	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.5	-3	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	-1.05	2	0	0	0	0
7	0	0.5	0	0	0	0	1	-3	2	0	0	0
8	0	0	0.5	0	0	0	0	0.5	-3	2	0	0
9	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0.5	-3	2	0
10	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0.5	-3	2
11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.5	-3
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Рисунок 3 – Матрица коэффициентов A

Вектор P был найден по формуле

$$P = B^T A^T (A^T A)^{-1},$$

которая получена путем умножения исходного уравнения $\mathbf{PA}=\mathbf{B}$ на транспонированную матрицу: $\mathbf{PAA}^T=\mathbf{BA}^T$, а затем умножения на обратную матрицу (рисунки 4–5).

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	64.507	29.807	8.215	3.32	1.694	0.742	91.791
1	29.807	13.929	3.923	1.627	0.842	0.371	43.711
2	8.215	3.923	1.286	0.611	0.333	0.147	12.295
3	3.32	1.627	0.611	0.446	0.273	0.126	5.417
4	1.694	0.842	0.333	0.278	0.29	0.146	3.097
5	0.742	0.371	0.147	0.126	0.145	0.151	1.522
6	91.791	43.711	12.295	5.417	3.097	1.522	207.612
7	47.77	22.737	6.416	2.838	1.625	0.799	106.248
8	11.932	5.708	1.658	0.777	0.465	0.236	27.185
9	3.621	1.755	0.537	0.3	0.21	0.117	9.252
10	1.388	0.684	0.217	0.141	0.129	0.086	4.157
11	0.569	0.283	0.093	0.066	0.07	0.064	1.858
12	120.63	57.741	16.134	7.211	4.283	2.213	303.513
13	66.222	31.695	8.863	3.966	2.355	1.218	166.016
14	15.818	7.582	2.134	0.973	0.591	0.312	40.111
15	4.105	1.98	0.564	0.274	0.182	0.105	11.201
16	1.231	0.6	0.173	0.093	0.074	0.051	3.893
17	0.419	0.207	0.061	0.037	0.035	0.029	...

Рисунок 4 – Обратная матрица $\mathbf{A}$

$$\mathbf{P} =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.023	0.011	$2.098 \cdot 10^{-3}$	0.047	0.025	$4.818 \cdot 10^{-3}$	0.064	0.038	...

Рисунок 5 – Вектор $\mathbf{P}$

Далее представлен алгоритм для вычисления двумерного распределения (рисунок 6).

```

P0(N,I) :=
  for k ∈ 0..I
    for n ∈ 0..N
      P0k,n ← P10,(N+1)·k+n
      tk ← k
  return P0

```

Рисунок 6 – Алгоритм вычисления двумерного распределения

Посчитано одномерное распределение числа заявок на орбите (рисунок 7).

$$p1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..I \\ \quad p1_k \leftarrow \sum_{i=0}^N P0(N,D)_{k,i} \\ \text{return } p1 \end{array} \right.$$

Рисунок 7 – Алгоритм вычисления одномерного распределения числа заявок на орбите

Также посчитано одномерное распределение процесса $n(t)$ (рисунок 8).

$$pK := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..N \\ \quad p1_k \leftarrow \sum_{i=0}^I P0(N,D)_{i,k} \\ \text{return } p1 \end{array} \right.$$

Рисунок 8 – Алгоритм вычисления одномерного распределения процесса $n(t)$

Продemonстрируем численный алгоритм решения системы и покажем результаты его работы на рисунках 9–16.

- двумерное распределение состояний случайного процесса $\{i(t), n(t)\}$

$P_0(N, I) =$

	0	1	2	3	4
0	$2.144 \cdot 10^{-4}$	$1.072 \cdot 10^{-4}$	$2.046 \cdot 10^{-5}$	$3.898 \cdot 10^{-6}$	$7.308 \cdot 10^{-7}$
1	$1.325 \cdot 10^{-3}$	$6.957 \cdot 10^{-4}$	$1.374 \cdot 10^{-4}$	$2.704 \cdot 10^{-5}$	$5.237 \cdot 10^{-6}$
2	$4.336 \cdot 10^{-3}$	$2.385 \cdot 10^{-3}$	$4.862 \cdot 10^{-4}$	$9.868 \cdot 10^{-5}$	$1.971 \cdot 10^{-5}$
3	$9.989 \cdot 10^{-3}$	$5.744 \cdot 10^{-3}$	$1.206 \cdot 10^{-3}$	$2.521 \cdot 10^{-4}$	$5.186 \cdot 10^{-5}$
4	0.018	0.011	$2.357 \cdot 10^{-3}$	$5.062 \cdot 10^{-4}$	$1.071 \cdot 10^{-4}$
5	0.028	0.017	$3.861 \cdot 10^{-3}$	$8.511 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$
6	0.037	0.024	$5.514 \cdot 10^{-3}$	$1.246 \cdot 10^{-3}$	$2.778 \cdot 10^{-4}$
7	0.045	0.03	$7.053 \cdot 10^{-3}$	$1.632 \cdot 10^{-3}$	$3.727 \cdot 10^{-4}$
8	0.049	0.035	$8.234 \cdot 10^{-3}$	$1.948 \cdot 10^{-3}$	$4.556 \cdot 10^{-4}$
9	0.05	0.037	$8.902 \cdot 10^{-3}$	$2.151 \cdot 10^{-3}$	$5.146 \cdot 10^{-4}$
10	0.048	0.036	$9.014 \cdot 10^{-3}$	$2.223 \cdot 10^{-3}$	$5.434 \cdot 10^{-4}$
11	0.044	0.034	$8.623 \cdot 10^{-3}$	$2.168 \cdot 10^{-3}$	$5.411 \cdot 10^{-4}$
12	0.038	0.03	$7.85 \cdot 10^{-3}$	$2.011 \cdot 10^{-3}$	$5.12 \cdot 10^{-4}$
13	0.032	0.026	$6.841 \cdot 10^{-3}$	$1.784 \cdot 10^{-3}$	$4.63 \cdot 10^{-4}$
14	0.025	0.021	$5.736 \cdot 10^{-3}$	$1.521 \cdot 10^{-3}$	$4.022 \cdot 10^{-4}$
15	0.02	0.017	$4.645 \cdot 10^{-3}$	$1.253 \cdot 10^{-3}$	...

Рисунок 9 – Двумерное распределение вероятностей состояний случайного процесса $\{i(t), n(t)\}$

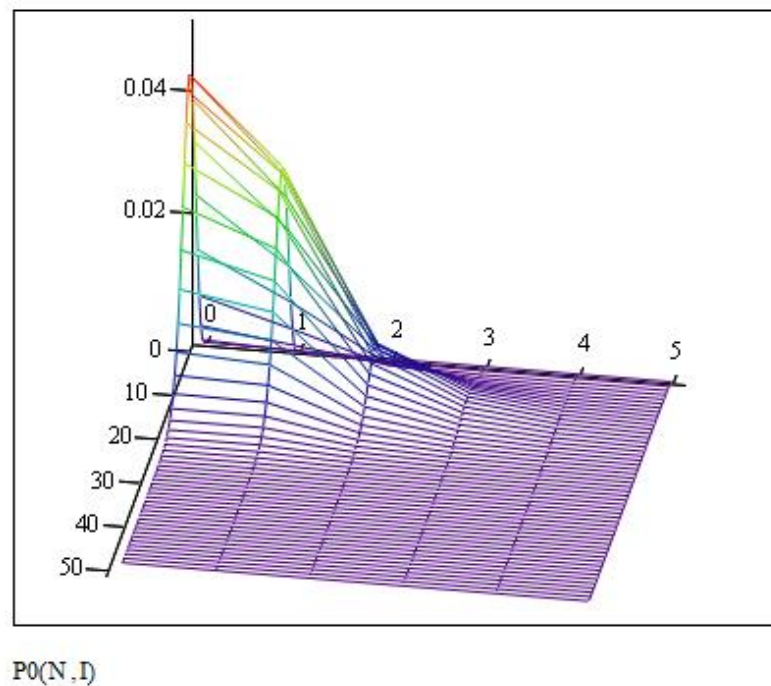


Рисунок 10 – Двумерное распределение состояний случайного процесса $\{i(t), n(t)\}$

- одномерное распределение числа заявок на орбите

	0
0	$3.468 \cdot 10^{-4}$
1	$2.192 \cdot 10^{-3}$
2	$7.329 \cdot 10^{-3}$
3	0.017
4	0.032
5	0.05
6	0.069
$p^1 =$ 7	0.084
8	0.095
9	0.099
10	0.097
11	0.089
12	0.079
13	0.067
14	0.055
15	...

Рисунок 11 – Вектор стационарных вероятностей процесса $i(t)$

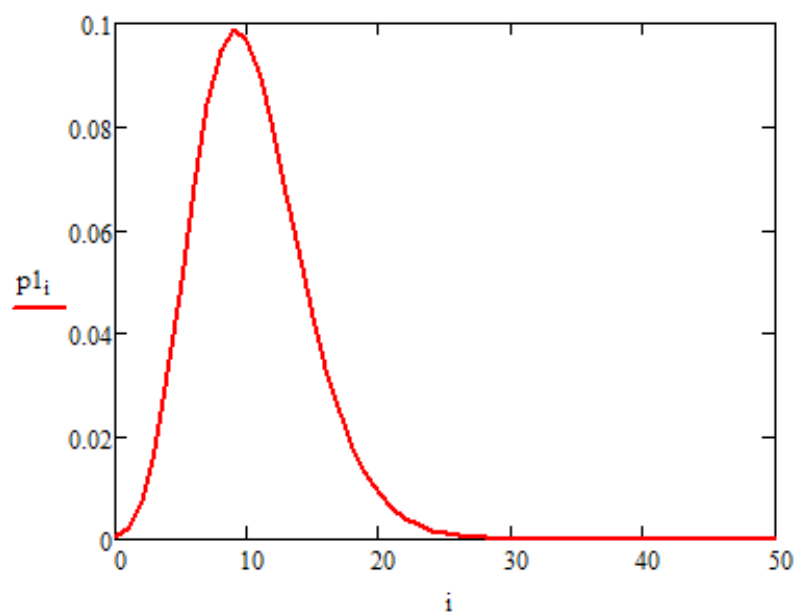


Рисунок 12 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите

Также возьмём другие значения параметров системы

$$N = 15, I = 50, \lambda = 0.7, \mu = 1, \sigma = 0.05, p = 0.5$$

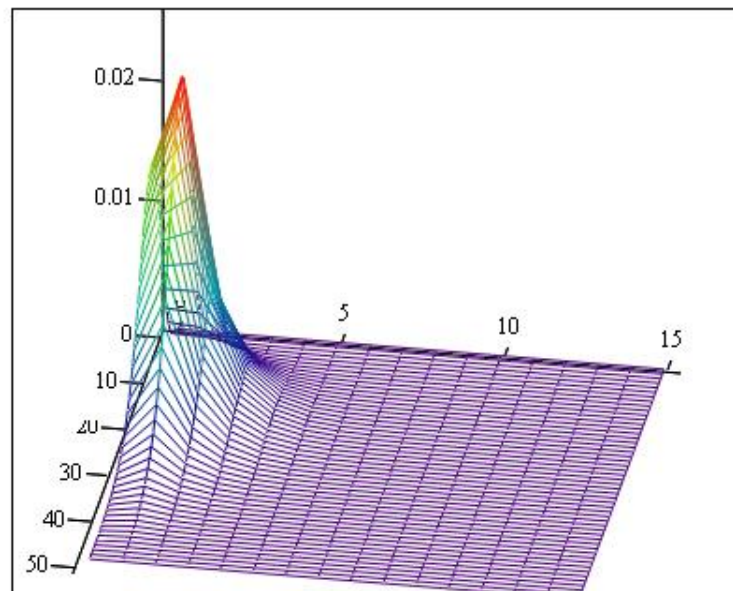
и получим:

- двумерное распределение состояний случайного процесса $\{i(t), n(t)\}$

$P_0(N, I) =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	$1.861 \cdot 10^{-5}$	$1.301 \cdot 10^{-5}$	$3.153 \cdot 10^{-6}$	$7.908 \cdot 10^{-7}$	$2.245 \cdot 10^{-7}$	$8.858 \cdot 10^{-8}$	$5.572 \cdot 10^{-8}$
1	$1.184 \cdot 10^{-4}$	$8.88 \cdot 10^{-5}$	$2.224 \cdot 10^{-5}$	$5.614 \cdot 10^{-6}$	$1.465 \cdot 10^{-6}$	$4.312 \cdot 10^{-7}$	$1.729 \cdot 10^{-7}$
2	$4.125 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$8.559 \cdot 10^{-5}$	$2.221 \cdot 10^{-5}$	$5.82 \cdot 10^{-6}$	$1.591 \cdot 10^{-6}$	$5.008 \cdot 10^{-7}$
3	$1.037 \cdot 10^{-3}$	$8.814 \cdot 10^{-4}$	$2.363 \cdot 10^{-4}$	$6.318 \cdot 10^{-5}$	$1.692 \cdot 10^{-5}$	$4.605 \cdot 10^{-6}$	$1.331 \cdot 10^{-6}$
4	$2.104 \cdot 10^{-3}$	$1.893 \cdot 10^{-3}$	$5.231 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$	$3.957 \cdot 10^{-5}$	$1.093 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$
5	$3.657 \cdot 10^{-3}$	$3.474 \cdot 10^{-3}$	$9.873 \cdot 10^{-4}$	$2.792 \cdot 10^{-4}$	$7.869 \cdot 10^{-5}$	$2.218 \cdot 10^{-5}$	$6.327 \cdot 10^{-6}$
6	$5.655 \cdot 10^{-3}$	$5.655 \cdot 10^{-3}$	$1.649 \cdot 10^{-3}$	$4.781 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$	$3.977 \cdot 10^{-5}$	$1.151 \cdot 10^{-5}$
7	$7.972 \cdot 10^{-3}$	$8.37 \cdot 10^{-3}$	$2.499 \cdot 10^{-3}$	$7.418 \cdot 10^{-4}$	$2.191 \cdot 10^{-4}$	$6.447 \cdot 10^{-5}$	$1.898 \cdot 10^{-5}$
8	0.01	0.011	$3.501 \cdot 10^{-3}$	$1.062 \cdot 10^{-3}$	$3.203 \cdot 10^{-4}$	$9.62 \cdot 10^{-5}$	$2.884 \cdot 10^{-5}$
9	0.013	0.015	$4.592 \cdot 10^{-3}$	$1.421 \cdot 10^{-3}$	$4.374 \cdot 10^{-4}$	$1.339 \cdot 10^{-4}$	$4.088 \cdot 10^{-5}$
10	0.015	0.018	$5.701 \cdot 10^{-3}$	$1.798 \cdot 10^{-3}$	$5.636 \cdot 10^{-4}$	$1.757 \cdot 10^{-4}$	$5.457 \cdot 10^{-5}$
11	0.017	0.021	$6.75 \cdot 10^{-3}$	$2.166 \cdot 10^{-3}$	$6.91 \cdot 10^{-4}$	$2.191 \cdot 10^{-4}$	$6.921 \cdot 10^{-5}$
12	0.018	0.023	$7.673 \cdot 10^{-3}$	$2.503 \cdot 10^{-3}$	$8.115 \cdot 10^{-4}$	$2.616 \cdot 10^{-4}$	$8.391 \cdot 10^{-5}$
13	0.019	0.025	$8.418 \cdot 10^{-3}$	$2.788 \cdot 10^{-3}$	$9.179 \cdot 10^{-4}$	$3.004 \cdot 10^{-4}$	$9.781 \cdot 10^{-5}$
14	0.019	0.026	$8.951 \cdot 10^{-3}$	$3.008 \cdot 10^{-3}$	$1.004 \cdot 10^{-3}$	$3.334 \cdot 10^{-4}$	$1.101 \cdot 10^{-4}$
15	0.019	0.027	$9.259 \cdot 10^{-3}$	$3.153 \cdot 10^{-3}$	$1.067 \cdot 10^{-3}$	$3.591 \cdot 10^{-4}$	...

Рисунок 13 – Двумерное распределение вероятностей состояний случайного процесса $\{i(t), n(t)\}$



$P_0(N, I)$

Рисунок 14 – Двумерное распределение состояний случайного процесса $\{i(t), n(t)\}$

- одномерное распределение и распределение вероятностей числа заявок на орбите

	0
0	$3.626 \cdot 10^{-5}$
1	$2.377 \cdot 10^{-4}$
2	$8.591 \cdot 10^{-4}$
3	$2.242 \cdot 10^{-3}$
4	$4.72 \cdot 10^{-3}$
5	$8.509 \cdot 10^{-3}$
6	0.014
7	0.02
8	0.027
9	0.034
10	0.041
11	0.048
12	0.053
13	0.057
14	0.059
15	...

$p^1 =$

Рисунок 15 – Вектор стационарных вероятностей процесса $i(t)$

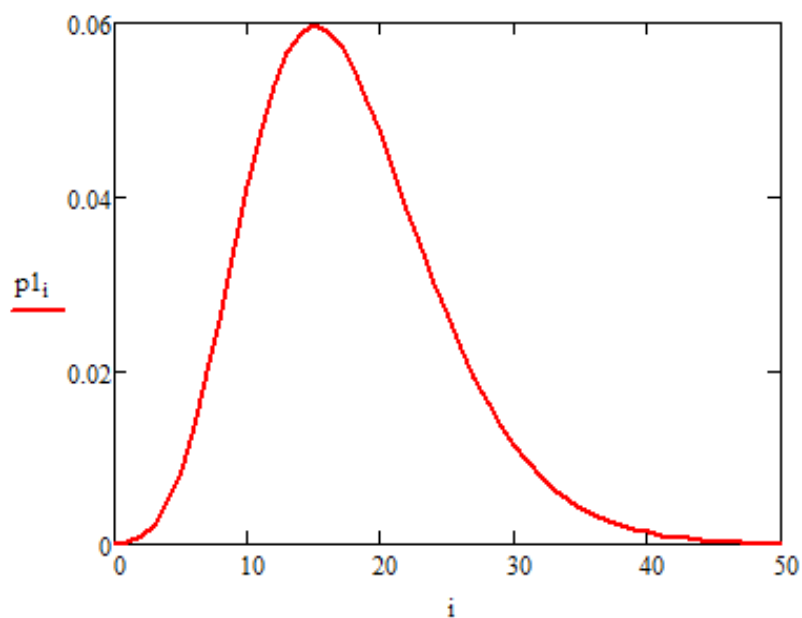


Рисунок 16 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите

3.2 Сравнение результатов асимптотических и численных методов

Для анализа области применимости предложенного асимптотического метода проведем численное сравнение полученного асимптотического распределения $h(i)$ и распределения $P(i)$, найденного с помощью численного алгоритма, для различных параметров системы.

Результаты сравнения распределений для разных значений параметров системы представлены под рисунками 17–19, 21 и 23, где

- $h(i)$ – асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите,
- $P(i)$ – численное распределение вероятностей.

Рассмотрим два примера для $\sigma = 0.1$ и для $\sigma = 0.01$ (рисунки 17–18).
Параметры системы для данных примеров, следующие:

$$N = 5, I = 50, \lambda = 0.5, \mu = 1, \sigma = 0.01, p = 0.5$$

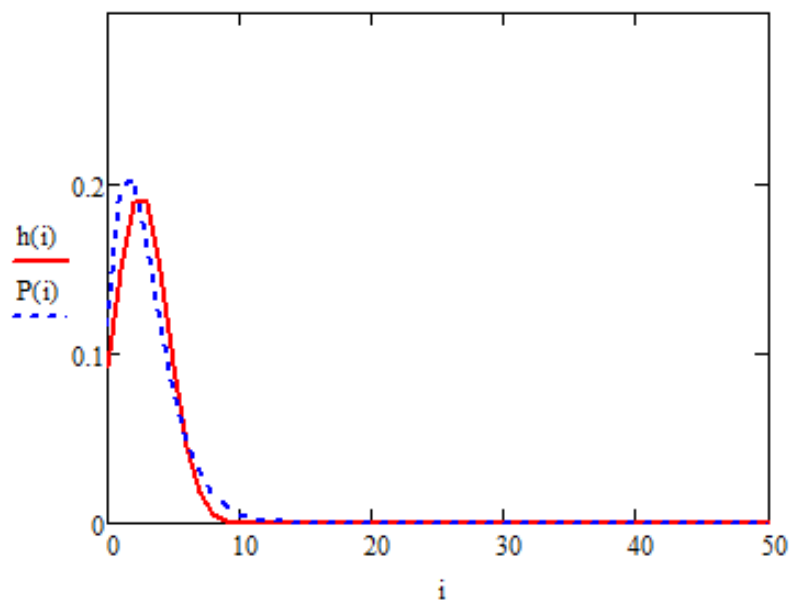


Рисунок 17 – График асимптотического и численного распределений вероятностей при $N = 5, I = 50, \lambda = 0.5, \mu = 1, \sigma = 0.1, p = 0.5$

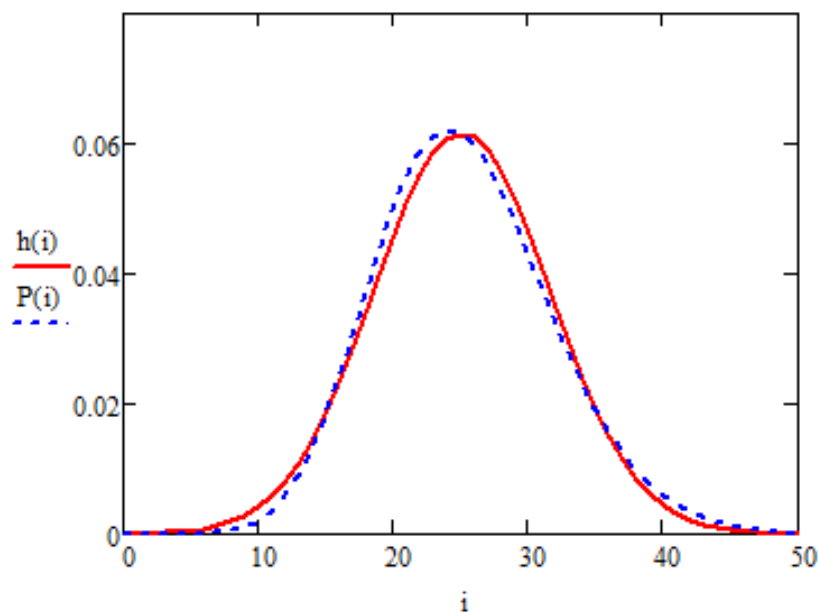


Рисунок 18 – График асимптотического и численного распределений вероятностей при $N = 5$, $I = 50$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.01$, $p = 0.5$

Как видно на рисунках при уменьшении σ точность асимптотического анализа растет. Рассмотрим зависимость результатов от длины очереди N . На следующих рисунках 19, 21, 23 изображены распределения вероятностей для $N = 5$, $N = 10$, $N = 15$ при $p = 0.3$, $p = 0.7$, $p = 0.9$ соответственно, а также посчитаны значения вектора R (рисунки 20,22,24).

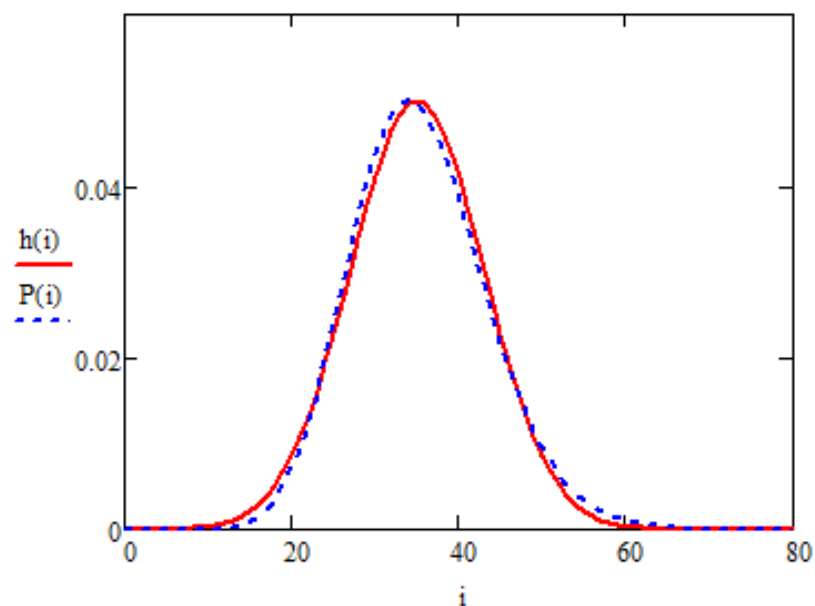


Рисунок 19 – График асимптотического и численного распределений вероятностей при $N = 5$, $I = 80$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.01$, $p = 0.3$

Также посчитаем значения вектора R :

	0
0	0.5
1	0.425
2	0.064
3	$9.563 \cdot 10^{-3}$
4	$1.434 \cdot 10^{-3}$
5	$2.152 \cdot 10^{-4}$

Рисунок 20 – Значение вероятностей вектора R

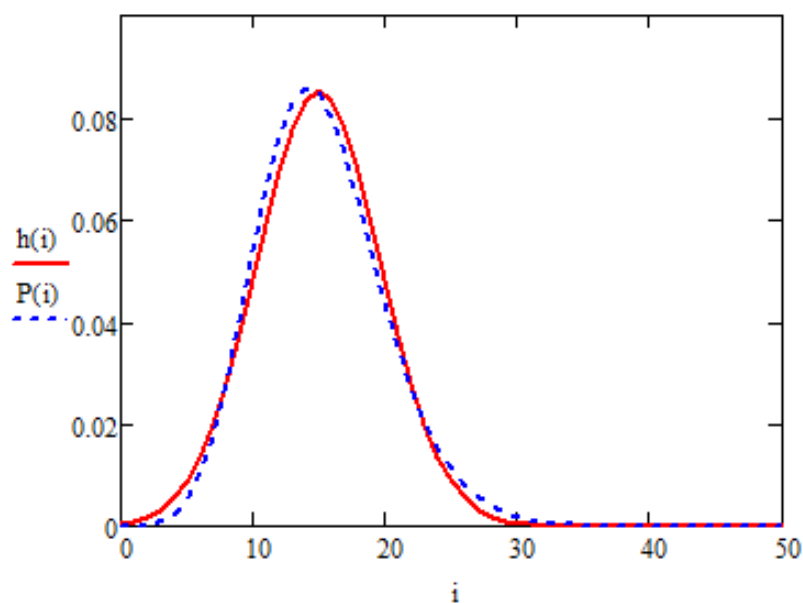


Рисунок 21 – График асимптотического и численного распределений вероятностей при $N = 10$, $I = 50$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.01$, $p = 0.7$

	0
0	0.5
1	0.325
2	0.114
3	0.04
4	0.014
5	$4.877 \cdot 10^{-3}$
6	$1.707 \cdot 10^{-3}$
7	$5.975 \cdot 10^{-4}$
8	$2.091 \cdot 10^{-4}$
9	$7.319 \cdot 10^{-5}$
10	$2.562 \cdot 10^{-5}$

Рисунок 22 – Значение вероятностей вектора R

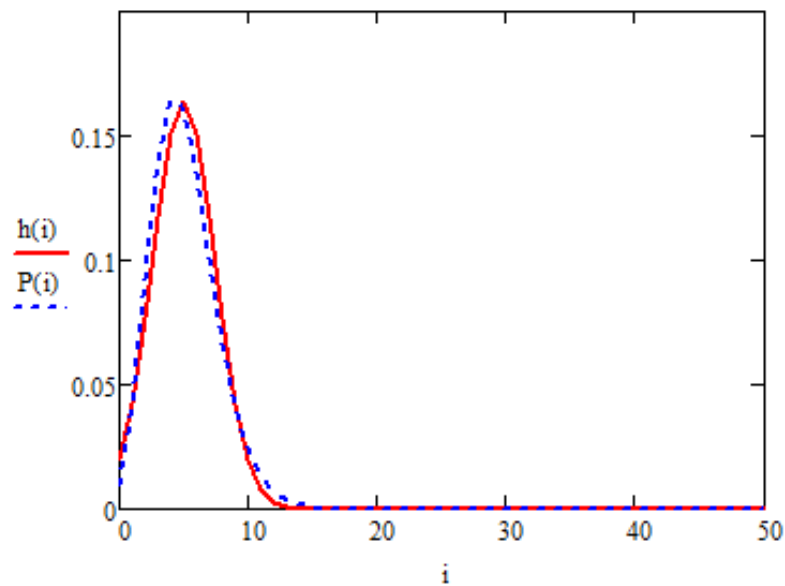


Рисунок 23 – График асимптотического и численного распределений вероятностей при $N = 20$, $I = 50$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.01$, $p = 0.9$

	0
0	0.5
1	0.275
2	0.124
3	0.056
4	0.025
5	0.011
6	$5.075 \cdot 10^{-3}$
7	$2.284 \cdot 10^{-3}$
8	$1.028 \cdot 10^{-3}$
9	$4.624 \cdot 10^{-4}$
10	$2.081 \cdot 10^{-4}$
11	$9.364 \cdot 10^{-5}$
12	$4.214 \cdot 10^{-5}$
13	$1.896 \cdot 10^{-5}$
14	$8.533 \cdot 10^{-6}$
15	...

$R =$

Рисунок 24 – Значение вероятностей вектора R

В качестве меры расхождения между асимптотическим и численным распределениями будем использовать расстояние Колмогорова, полученного по следующей формуле:

$$\Delta = \left| \sum_{n=0}^i (h(n) - P(n)) \right|$$

В качестве примера, было рассмотрено расстояние Колмогорова при $N = 5$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$ для различных значений σ . Значения Δ приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Расстояние Колмогорова

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.005$
Δ	0,086	0,038	0,018	0,012

Из таблицы 1 можно сделать вывод, что при уменьшении параметра σ , расстояние Колмогорова между распределениями вероятностей уменьшается, следовательно точность асимптотического анализа растёт.

Также была рассмотрена зависимость значений математических ожиданий от параметров σ и p (таблица 2). Параметры системы, следующие: $N = 5$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$,

Таблица 2 – Математическое ожидание числа заявок на орбите в зависимости от σ и p

	$p = 0.1$	$p = 0.3$	$p = 0.5$	$p = 0.7$	$p = 1$
$\sigma = 0.1$	4,974	3,913	2,843	1,778	0,242
$\sigma = 0.01$	34,174	32,353	25,297	15,587	1,694

Можем сказать, что среднее число заявок уменьшается с увеличением p .

Сравним распределения вероятностей (асимптотическое и численное) процесса $n(t)$ (числа заявок в очереди и на приборе) (рисунки 25, 27). Возьмём

$$N = 10, I = 50, \lambda = 0.5, \mu = 1, \sigma = 0.01, p = 0.5$$

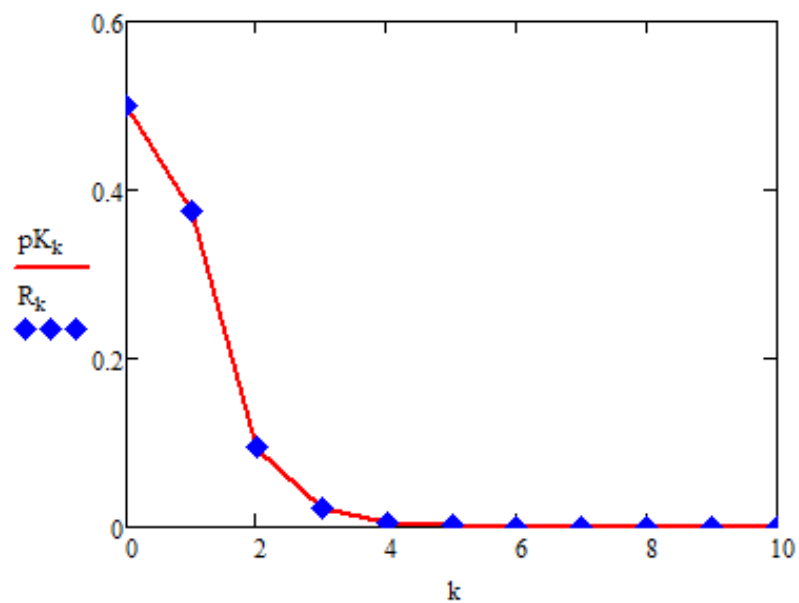


Рисунок 25 – Стационарное распределение вероятностей числа заявок в очереди и на приборе при $N = 10$, $I = 50$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.01$, $p = 0.5$

Вектор R принимает следующие значения (рисунок 26).

	0
0	0.5
1	0.375
2	0.094
3	0.023
4	$5.859 \cdot 10^{-3}$
5	$1.465 \cdot 10^{-3}$
6	$3.662 \cdot 10^{-4}$
7	$9.155 \cdot 10^{-5}$
8	$2.289 \cdot 10^{-5}$
9	$5.722 \cdot 10^{-6}$
10	$1.431 \cdot 10^{-6}$

Рисунок 26 – Значение вероятностей вектора R

Изменим параметры:

$$N = 10, I = 50, \lambda = 1, \mu = 2, \sigma = 0.1, p = 1$$

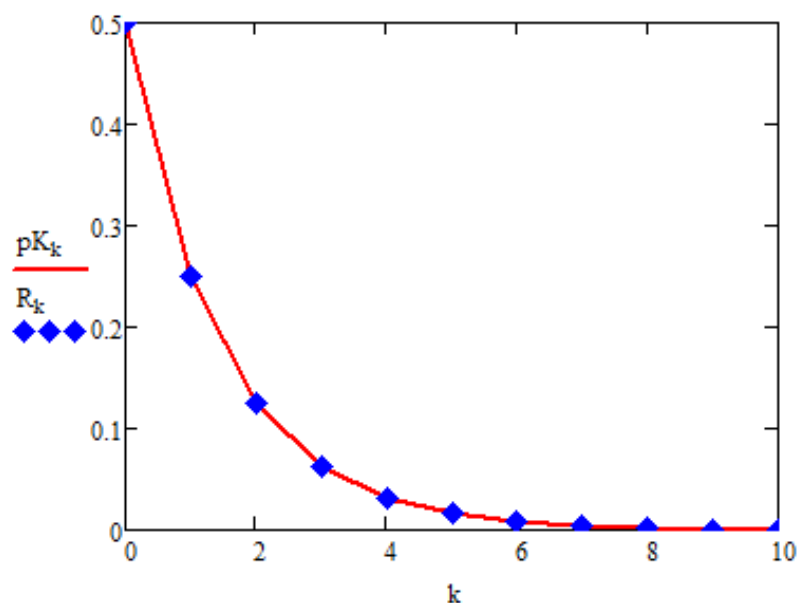


Рисунок 27 – Стационарное распределение вероятностей числа заявок в очереди и на приборе при $N = 5$, $I = 50$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\sigma = 0.1$, $p = 0.5$

И вектор R (рисунок 28).

	0
0	0.5
1	0.25
2	0.125
3	0.063
4	0.031
5	0.016
6	$7.82 \cdot 10^{-3}$
7	$3.91 \cdot 10^{-3}$
8	$1.955 \cdot 10^{-3}$
9	$9.775 \cdot 10^{-4}$
10	$4.888 \cdot 10^{-4}$

Рисунок 28 – Значение вероятностей вектора R

Отметим, что распределение вероятностей процесса $n(t)$, полученного в ходе асимптотического анализа совпадает с точным распределением, полученным в ходе численного анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была исследована гибридная RQ-система с очередью $M|M|1|N$ методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите.

Выполнены следующие задачи:

1. Построена математическая модель RQ-системы вида $M|M|1|N$ с очередью.
2. Предложена модификация метода асимптотического анализа в условии большой задержки для нахождения стационарного распределения числа заявок на орбите.
3. Разработана программа, реализующая алгоритм вычисления распределения вероятностей числа заявок в системе (на орбите и в очереди) с помощью численных методов.

По результатам работы был успешно представлен доклад на Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» 26–28 мая 2022 г. (сертификат).

ЛИТЕРАТУРА

1. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания/Пер. с англ, под ред. И. Н. Коваленко и Р. Д. Когана.— М.: Сов. радио, 1965.—510 с.
2. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. 1972. 368 с.
3. Stollez, R. Performance analysis and optimization of Inbound Call Centers. / Stollez R. – Berlin: Springer. – 2003.
4. Gans, N. Telephone call centers: Tutorial, review and research prospects / Gans N., Koole G., Mandelbaum A. // Manufacturing and Service Operations Management 2003. – V.5. – P. 79–141.
5. Alexandre Deslauriers. Markov chain models of a telephone call center with call blending / Deslauriers Alexandre, L'Ecuyer Pierre, Pichitlamken Jutta. // Computers & operations research. – 2007. – Vol. 34, № 6. – P. 1616–1645.
6. Roszik, J. Retrial queues in the performance modeling of cellular mobile networks using MOSEL / Roszik J., Sztrik J., Kim C.S. // International Journal of Simulation. – 2005. – V.6. – P.38–47.
7. Vlajic, N. Performance aspects of data broadcast in wireless networks with user retrials / Vlajic N., Charalambous C.D. and Makrakis D. // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 2004. – V. 12. – P. 620–633.
8. Alfa, A. S. PCS networks with correlated arrival process and retrial phenomenon / Alfa A. S., Li W. // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2002. – V. 1, – P. 630–637.
9. Choi, B.D., Shin, Y.W. & Ahn, W.C. Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. Queueing System 11, 335–356 (1992).
10. Wilkinson R. I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. – 1956. – V. 35. – №2. – P. 421-507.
11. Коэн Дж., Бонсма О. Граничные задачи в теории массового обслуживания / Пер. с англ. А.Д. Вайнштейна. – М. : Мир, 1987. – 272 с

12. Falin G. I., Templeton J.G.C. Retrial Queues. London, Chapman and Hall, 1997, 338 pp.
13. Falin G. I. A survey of retrial queues, Queueing Syst., 1990, vol. 7, pp. 127–168.
14. Falin G.I. Asymptotic investigation of fully available switching systems with high repetition intensity of blocked calls. Moscow University Mathematics Bulletin, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 72–77.
15. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach // Berlin: Springer. 2008. 267 p.
16. Artalejo J.R., Joshua V.C., Krashnamoorthy A. An M/G/1 retrial queue with orbital search by the server. Advances in Stochastic Modeling. New Jersey, Notable publications, 2002. pp. 41–54.
17. Aissani A. On the single server retrial queue subject to breakdowns / A. Aissani, J. R. Artalejo // Queueing Systems. – 1998. – Vol. 30, № 3. – P. 309–321.
18. Dudin A. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates / A. Dudin, A. Nazarov // International Journal of Operational Research. – 2017. – Vol. 29, is. 2. – P. 170–182.
19. Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленец Ю.В. Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания. Учебное пособие – Мн.: «Электронная книга БГУ», 2003. – 166 с.
20. Burman D.Y., Smith D.R. An asymptotic analysis of a queueing system with Markov modulated arrivals // Operations Research. – 1986. –V. 34. – P. 105–119.
21. Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // А.А. Назаров, Е.А Моисеева. – Томск: ТПУ, 2013. – С. 19-24.
22. Назаров А.А., Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // А.А. Назаров, И.А. Семенова. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – С. 85-97.
23. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с. 11.

- Анисимов В.В., Закусилко О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: Вишща школа, 1987. – 247 с. 12. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1980. – 381 с.
24. А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра. Асимптотический анализ RQсистемы с n типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите. // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019.
25. Анисимов В.В., Закусилко О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: Вишща школа, 1987. – 247 с.
26. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1980. – 381 с.
27. Artalejo, J., Gomez-Corral, A.: Performance analysis of a single-server queue with repeated attempts. Math. Comput. Model. **30**(3–4), 79–88, 1999.
28. Artalejo, J.R.: A classified bibliography of research on retrial queues: progress in 1990–1999. TOP **7**(2), 187–211, 1999.
29. Economou, A., Kanta, S.: Equilibrium customer strategies and social-profit maximization in the single-server constant retrial queue. Naval Res. Logist. **58**(2), 107–122, 2011.
30. Kerner, Y., Shmuel-Bittner, O. Strategic behavior and optimization in a hybrid M/M/1 queue with retrials. Queueing Syst **96**, 285–302, 2020.
31. Haviv, M.: Queues. Springer, New York, 2013.
32. Назаров А.А., Анисимова А.А. Исследование двухфазной гибридной СМО методом асимптотического анализа //Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018): материалы XXI Междунар. науч. конф., Москва, 17-21 сент. 2018 г. М.: Изд-во РУДН, 2018. С. 135-142.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Алгоритм вычисления матрицы А

```

A :=
  for i ∈ 0..[(n + 1)·(N + 1)]
    for k ∈ 0..[(n + 1)·(N + 1) - 1]
      Pk,i ← 0
    for k ∈ 0..N
      | P0,0 ← -λ
      | P1,0 ← μ
    for k ∈ 1
      | P(k+1)-2,k ← λ
      | Pk,k ← -(λ + μ)
      | Pk+1,k ← μ
      | P(N+1)+(k-1),k ← σ
    for k ∈ 2..(N - 1)
      | P(k+1)-2,k ← λ·p
      | Pk,k ← -(λ + μ)
      | Pk+1,k ← μ
    for k ∈ N
      | P(N-1),N ← λ·p
      | PN,N ← -(λ + μ)
    for i ∈ 1..n - 1
      | Pi·(N+1),i·(N+1) ← -(λ + i·σ)
      | Pi·(N+1)+1,i·(N+1) ← μ

  for i ∈ 1..n - 1
    for k ∈ 0..N - 2
      Pi·(N+1)+k-N,i·(N+1)+k+1 ← λ·(1 - p)
    for i ∈ 1..n - 1
      | for k ∈ 0
      |   Pi·(N+1)+k,i·(N+1)+k+1 ← λ
      | for k ∈ 1
      |   P(i+1)·(N+1)+(k-1),i·(N+1)+k ← (i + 1)·σ
    for i ∈ 1..n - 1
      for k ∈ 1..N - 1
        Pi·(N+1)+k,i·(N+1)+k+1 ← λ·p

```

```

for i ∈ 1..n - 1
  for k ∈ 1..N - 1
     $P_{i \cdot (N+1)+k, i \cdot (N+1)+k} \leftarrow -(\lambda + \mu)$ 
  for i ∈ 1..n - 1
    for k ∈ 1..N - 1
       $P_{i \cdot (N+1)+k+1, i \cdot (N+1)+k} \leftarrow \mu$ 
  for i ∈ 1..n - 1
    
$$\begin{cases} P_{(i+1) \cdot N+(i-1), N \cdot (i+1)+i} \leftarrow \lambda \cdot p \\ P_{(i+1) \cdot N+(i-1)-N, N \cdot (i+1)+i} \leftarrow \lambda \\ P_{(i+1) \cdot N+i, N \cdot (i+1)+i} \leftarrow -(\lambda + \mu) \end{cases}$$

  for i ∈ n
    
$$\begin{cases} P_{i \cdot (N+1), i \cdot (N+1)} \leftarrow -(\lambda + i \cdot \sigma) \\ P_{i \cdot (N+1)+1, i \cdot (N+1)} \leftarrow \mu \end{cases}$$

  for i ∈ n
    for k ∈ 0..N - 2
       $P_{i \cdot (N+1)+k-N, i \cdot (N+1)+k+1} \leftarrow \lambda \cdot (1 - p)$ 
  for i ∈ n
    for k ∈ 0
       $P_{i \cdot (N+1)+k, i \cdot (N+1)+k+1} \leftarrow \lambda$ 
  for i ∈ n
    for k ∈ 1..N - 1
       $P_{i \cdot (N+1)+k, i \cdot (N+1)+k+1} \leftarrow \lambda \cdot p$ 

for i ∈ n
  for k ∈ 1..N - 1
    
$$\begin{cases} P_{i \cdot (N+1)+k, i \cdot (N+1)+k} \leftarrow -(\lambda + \mu) \\ P_{i \cdot (N+1)+k+1, i \cdot (N+1)+k} \leftarrow \mu \end{cases}$$

  for i ∈ n
    
$$\begin{cases} P_{(i+1) \cdot N+(i-1), N \cdot (i+1)+i} \leftarrow \lambda \\ P_{(i+1) \cdot N+(i-1)-N, N \cdot (i+1)+i} \leftarrow \lambda \\ P_{(i+1) \cdot N+i, N \cdot (i+1)+i} \leftarrow -\mu \end{cases}$$

  for i ∈ 0..[(n + 1) · (N + 1) - 1]
     $P_{i, (n+1) \cdot (N+1)} \leftarrow 1$ 
P

```

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Савченко Кристина Станиславовна
Проверяющий: Моисеева Светлана Владимировна
Организация: Томский Государственный Университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://tsu.antiplagiat.ru>

С результатами

Означена

05.06.2023

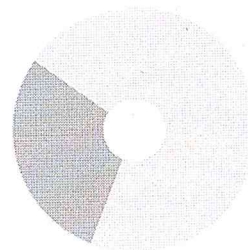
Ф.И.О. (Федорова Е.А.)

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 358
Начало загрузки: 04.06.2023 16:36:38
Длительность загрузки: 00:00:12
Имя исходного файла: Savchenko_VKR.pdf
Название документа: Savchenko_VKR
Размер текста: 34 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 34569
Слов в тексте: 4439
Число предложений: 353

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 04.06.2023 16:36:51
Длительность проверки: 00:00:19
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 3-39,44
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Сводная коллекция РГБ, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по коллекциям издательства Wiley, Шаблонные фразы, Модуль поиска "tsu", Кольцо вузов



СОВПАДЕНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
29,38%	0%	0%	70,62%

Совпадения — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.

Самоцитирование — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.

Цитирование — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы: библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальный текст — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует полному тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в тексте	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	10,92%	АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОЛИНЕЙНОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАДЕРЖКИ. https://elibrary.ru	20 Дек 2022	eLIBRARY.RU	
[02]	10,26%	Семенова, Инна Анатольевна диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2012 http://dlib.rsl.ru	07 Мар 2013	Сводная коллекция РГБ	
[03]	7,94%	ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕМИИНВАРИАНТОВ. http://elibrary.ru	раньше 2011	eLIBRARY.RU	
[04]	6%	ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕМИИНВАРИАНТОВ - тема научной статьи по кибернетике, читать бесплатно текст научно-исследовательской работы в электронной библиотеке КиберЛенинка http://cyberleninka.ru	28 Янв 2017	Перефразирования по Интернету	
[05]	4,97%	ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP M 1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ. http://elibrary.ru	02 Янв 2013	eLIBRARY.RU	
[06]	4,58%	Исследование RQ-систем методом асимптотических семинвариантов http://sun.tsu.ru	08 Янв 2017	Перефразирования по Интернету	
[07]	4,5%	ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP M 1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ. http://elibrary.ru	02 Янв 2013	Перефразирования по eLIBRARY.RU	