Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
____________ А.В. Замятин
«_____»____________2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии,
направленность (профиль) «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Кошкарова Нина Анатольевна

Руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук, профессор
__________С.П.Моисеева
«29» мая 2023 г.

Автор работы
студент группы № 931901
__________Н.А.Кошкарова
«29» мая 2023 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
______________ А.В. Замятин
подпись
«____»______________ 20___ г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра обучающемуся
Кошкарова Нина Анатольевна
Фамилия Имя Отчество обучающегося

по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, направленность (профиль) «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

1 Тема выпускной квалификационной работы
Исследование моделей систем параллельного обслуживания

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:
а) в учебный офис / деканат – 06.06.2023 б) в ГЭК – ______

3 Исходные данные к работе:
Объект исследования – одно и двухфазная системы обслуживания с расщеплениями заявок вида $M/M/\infty \to M^2/M_2/\infty$.
Предмет исследования – вероятностные характеристики числа заявок на каждой фазе.
Цель исследования – построение и исследование математических моделей параллельного обслуживания.

Задачи:
Разработка и построение математических моделей параллельного обслуживания в виде одно- и двухфазных систем обслуживания с расщеплениями заявок вида $M/M/\infty \to M^2/M_2/\infty$.
Исследование методом производящих функций процессов, характеризующих число занятых приборов в каждом блоке и число обслуженных заявок в марковских системах параллельного обслуживания.
Реализация численных алгоритмов для нахождения стационарных вероятностей числа и вероятностных характеристики.

Методы исследования:
Теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений. Метод производящих функций. Численный анализ проводился с помощью пакета прикладных программ Mathcad.
Полученные результаты могут быть использованы для расчета вероятностных характеристик моделей, существующих систем утилизации отходов и их хранения с целью повышения эффективности их функционирования и выработки рекомендаций при проектировании новых систем.

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –
кафедра теории вероятностей и математической статистики НИ ТГУ.

4 Краткое содержание работы

Исследование системы параллельного обслуживания вида $M^{(2)} / M_{1,2} / \infty$. (срок исполнения 10.03.2023);

Разработка и построение математических моделей параллельного обслуживания в виде одно- и двухфазных систем обслуживания с расщеплениями заявок вида $M / M / \infty \rightarrow M^2 / M_2 / \infty$. (срок исполнения 10.04.2023)

Исследование методом производящих функций процессов, характеризующих число занятых приборов в каждом блоке и число обслуженных заявок в марковских системах параллельного обслуживания. (срок исполнения 25.04.2023)

Реализация численных алгоритмов для нахождения стационарных вероятностей числа и вероятностных характеристики. (срок исполнения 20.05.2023)

Руководитель выпускной
квалификационной работы
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ТВиМС
должность, место работы

_____________ / С. П. Моисеева
подпись *И.О. Фамилия*

Задание принял к исполнению
Студентка группы №931901
должность, место работы

_____________ / Н. А. Кошкарова
подпись *И.О. Фамилия*

АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа состоит из 2 параграфов, введения, заключения, списка литературы, 51 страницы, включает 7 рисунков, 2 таблиц, 26 источников.

Ключевые слова: система параллельного обслуживания, распределение вероятностей, вероятностные характеристики.

Объект исследования: одно и двухфазная системы обслуживания с расщеплениями заявок вида $M / M / \infty \to M^2 / M_2 / \infty$.

Целью данной работы является построение и исследование математических моделей параллельного обслуживания.

Во введении описана актуальность работы, цели и задачи исследования выпускной квалификационной работы.
В первом параграфе строится математическая модель однофазной системы параллельного обслуживания заявок. Второй параграф содержит исследование двухфазной бесконечно линейной системы параллельного обслуживания заявок с расщеплением на второй фазе.

Теория массового обслуживания имеет в настоящее время широкую область применения не только в экономике, но и в других не менее значимых отраслях: в военном деле, в социальной сфере, а также в области обслуживания. ТМО рассматривает математические модели систем, призванных обслуживать случайно возникающие требования. Также теория массового обслуживания нашла применение при решении множества различных задач, что является следствием существования многих типов систем обслуживания случайно приходящих требований. На данный момент математические методы решения задач теории массового обслуживания являются теоретически наиболее разработанными и удобными в практических приложениях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В период высоких технологий телекоммуникационная отрасль переживает существенные изменения: модернизация сетей связи, стремительное увеличение числа пользователей, а также увеличение ассортимента услуг, предоставляемых потребителям. Важнейшей задачей операторов сетей связи становится улучшение качества создаваемого ими продукта. Некоторыми из задач для улучшения качества являются: обработка информации с высокой скоростью, встраивание беспроводной связи, обеспечение безопасности, а также минимизация потерь при передаче данных. Однако, требования пользователей растут даже быстрее, чем возможности сети. Следовательно, сетевые операторы нуждаются в эффективных инструментах оценки производительности, которые учитывают важнейшие особенности современных сотовых сетей.

Математическим методам моделирования информационных систем, основанным на теории массового обслуживания и теории телетрафика, посвящено большое количество статей, опубликованных за последние десять лет.

Исследование характеристик качества обслуживания, надежности, энергоэффективности систем параллельной обработки наиболее целесообразно проводить методами теории массового обслуживания (ТМО). Современное изложение основных методов прикладного вероятностного анализа многосерверных систем обслуживания представлено, например, в фундаментальных работах С. Асмуссена [12], П. П. Бочарова и др. [14], Х. Арталехо и А. Гомес-Коррала [**Error! Reference source not found.**], М. Харколь-Бал [21], П. Брилля [15].

Теория массового обслуживания имеет в настоящее время широкую область применения не только в экономике, но и в других не менее значимых отраслях: в военном деле, в социальной сфере, а также в области обслуживания. ТМО рассматривает математические модели систем, призванных обслуживать случайно возникающие требования. Также теория массового обслуживания нашла применение при решении множества различных задач, что является следствием существования многих типов систем обслуживания случайно приходящих требований. На данный момент математические методы решения задач теории массового обслуживания являются теоретически наиболее разработанными и удобными в практических приложениях.

Объектом исследования данной работы является одно и двухфазная системы обслуживания с расщеплениями заявок вида $M/M/\infty \to M^2/M_2/\infty$.

Предметом исследования являются вероятностные характеристики числа заявок на каждой фазе.

Целью данной работы является построение и исследование математических моделей параллельного обслуживания.

В рамках указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработка и построение математических моделей параллельного обслуживания в виде одно- и двухфазных систем обслуживания с расщеплениями заявок вида $M/M/\infty \to M^2/M_2/\infty$.

2. Исследование методом производящих функций процессов, характеризующих число занятых приборов в каждом блоке и число обслуженных заявок в марковских системах параллельного обслуживания.

3. Реализация численных алгоритмов для нахождения стационарных вероятностей числа занятых приборов и вероятностных характеристики.

Работа состоит из введения, 2 параграфа, заключения и списка литературы. Общий объем работы – 52 страницы. Список литературы включает в себя 26 наименований.

Во введение отражена актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования.

В первом параграфе рассматривается система параллельного обслуживания, найден аналитический вид двумерного распределения вероятностей функции, и вероятностные характеристики системы. Второй параграф содержит исследование двухфазной системы массового обслуживания (СМО) с расщеплением заявок на второй фазе. Заключение включает в себя основные выводы по данной работе.

1 Система параллельного обслуживания вида $M^{(2)}/M_{1,2}/\infty$

1.1 Постановка задачи

Система рассматривается для нахождения вероятностных характеристик, распределения вероятностей числа заявок в системе в связи с высокой производительностью системы массового обслуживания[17].

Говоря о параллельной обработке заявок [1], стоит отметить, тот факт, что системы могут решать задачи в различных областях, таких как физика[25], повышение пропускной способности каналов связи [24;16], снижение задержек в облачных системах доставки контента [23] и центрах обработки данных [19], обеспечение надежности распределенных вычислительных систем [22] и систем хранения [26]

Анализ и оценивание показателей эффективности (в том числе производительности) систем параллельной обработки должно проводиться на основе предварительного анализа и моделирования, поскольку проведение экспериментов на системе в режиме эксплуатации сложно, либо невозможно.

Система может решить следующую техническую задачу. Например, представим полигон ядерных отходов, куда партиями поставляется различные отходы на переработку, либо на хранение, у каждого вида отходов свои условия обработки и свои сроки переработки, либо утилизации. В связи с этим мы имеем систему, в которую приходит партии с отходами различных типов и на их переработку (хранение) уходит случайное время. В таком случае ставится задача определения объема необходимого полигона для хранения и сводится к нахождению математического ожидания числа партий, находящихся в соответствующих блоках. Предполагается, что партии содержат 2 типа отходов – для утилизации и/или для переработки. Для исследования предполагается, что ограничений на объем нет, поэтому рассматриваются системы с неограниченным числом приборов.

1.2 Математическая модель

Рассматривается система с двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход поступает простейший поток интенсивностью λ. Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка входящего потока копируется, далее обе заявки поступают в независимые блоки, занимают любой из свободных приборов, на котором выполняется их параллельное обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1, μ_2. Изобразим рассматриваемую СМО в виде рисунка 1.

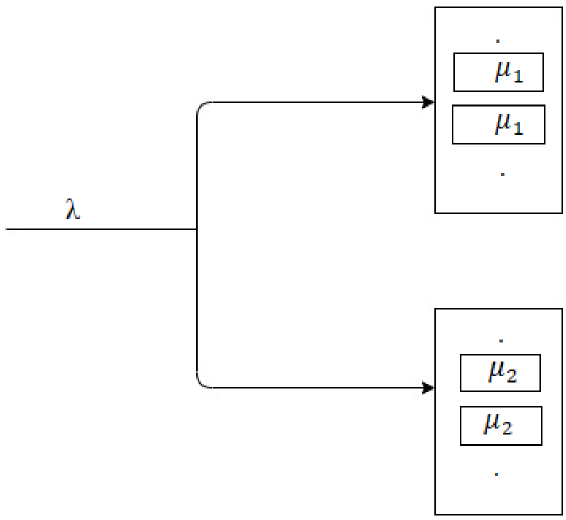


Рисунок 1 – Система массового обслуживания с параллельным обслуживанием простейшего потока сдвоенных заявок

Следующий этап построения модели состоит в определении компонент случайного процесса, который будет использоваться для оценки показателей обслуживания заявок. Для решения поставленных задач оценки качества обслуживания необходимо знать среднее число занятых единиц канального ресурса в каждом блоке.

Обозначим $i_1(t)$ – число занятых единиц канального ресурса первого , блока в момент времени *t*, $i_2(t)$ – число занятых единиц канального ресурса второго блока в момент времени *t*.

Введём двумерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$.

Ставится задача исследования двухмерного марковского процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$, то есть нахождение распределения вероятностей.

1.3 Граф состояний системы

Определим $P(i, j, t) = P\{i_1(t) = i,\ i_2(t) = j\}$ – вероятность того, что в первом блоке занято i линий, во втором j линий, где $i = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{0,\infty}$.

Двухмерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$ является марковским. Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей $\Pi_{i,j}$.

Графическая иллюстрация интенсивностей и направлений переходов из произвольного состояния для рассматриваемого двумерного процесса показана на рисунке 2.

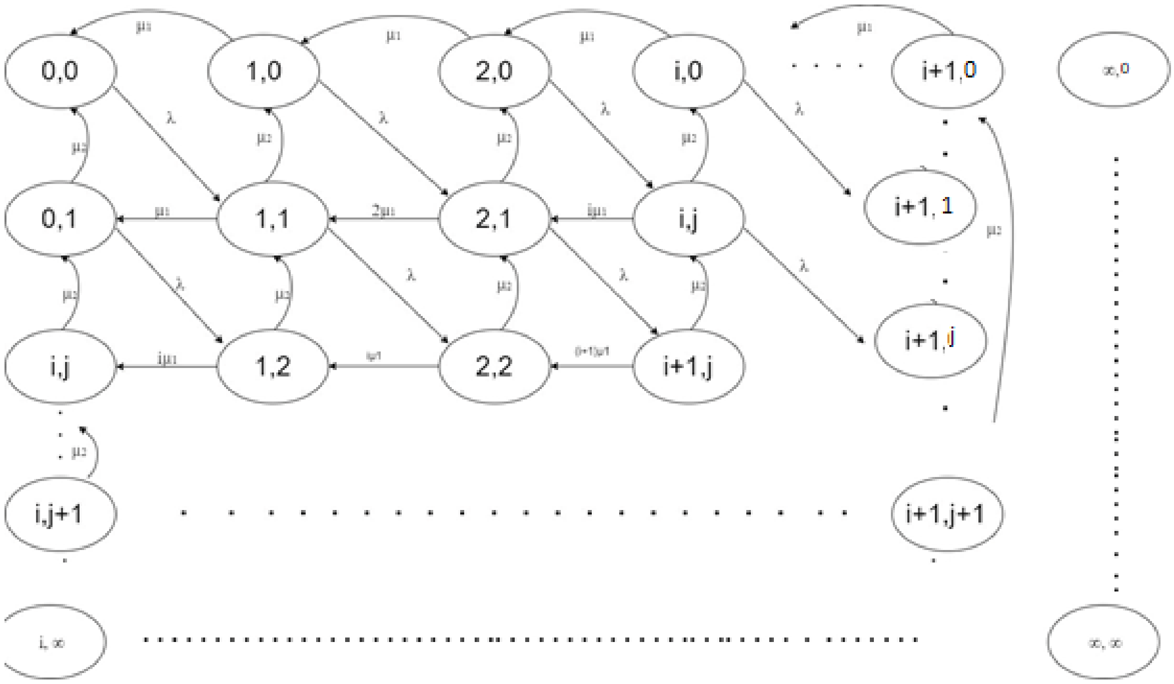


Рисунок 2 – Диаграмма переходов двумерного марковского процесса.

1.4 Вывод уравнений Колмогорова для системы

Обозначим $P(i_1, i_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}$ – распределение вероятностей состояний двухмерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке в момент времени t.

Составим прямое дифференциальное уравнение Колмогорова, используя диаграмму переходов марковского процесса. Рассмотрим интервал времени $[t, t + \Delta t]$. За это время в системе произойдут следующие изменения:

Для составления СДУК воспользуемся Δt-методом. Очевидно, что:

- с вероятностью $(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)+o(\Delta t)$ состояние системы остаётся прежним, новая заявка не поступит и не обслужится;
- с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ поступит заявка входящего потока, и число занятых приборов увеличится на единицу;
- с вероятностью $(i_1+1)\mu_1\Delta t + o(\Delta t)$ одна из заявок первого блока закончит своё обслуживание;
- с вероятностью $(i_2+1)\mu_2\Delta t + o(\Delta t)$ одна из заявок второго блока закончит своё обслуживание;
- переходы в другие состояний возможны, вероятность перехода в них равна $o(\Delta t)$.

В результате получим уравнения:

$$P(0,0, t+\Delta t) = P(0,0,t)(1-\lambda\Delta t) + \mu_1\Delta t P(1,0,t) + \mu_2\Delta t P(0,1,t) + o(\Delta t),$$

$$P(1,0,t+\Delta t) = P(1,0,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t) + 2\mu_1\Delta t P(2,0,\mathrm{t}) +$$
$$+\mu_2\Delta t P(1,1,\mathrm{t}) + \mathrm{o(t)},$$

$$P(0,1,t+\Delta t) = P(0,1,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) + 2\mu_2\Delta t P(0,2,\mathrm{t}) +$$
$$+\mu_1\Delta t P(1,1,\mathrm{t}) + \mathrm{o(t)}.$$

Для любых $i_1, i_2 \ge 1$,:

$$P(i_1,i_2,t+\Delta t) = P(i_1,i_2,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t) +$$
$$+\lambda\Delta t P(i_1-1, i_2-1, t) + (i_1+1)\mu_1\Delta t P(i_1+1, i_2, t) +$$

$$+(i_2+1)\mu_2 \Delta t P(i_1,i_2+1,t)+o(\Delta t).$$

Поделим обе части уравнения на Δt:

$$\frac{P(i_1,i_2,t+\Delta t)-P(i_1,i_2,t)}{\Delta t}=\frac{-\Delta t(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2)P(i_1,i_2,t)}{\Delta t}+$$

$$+\frac{\lambda \Delta t P(i_1-1,i_2-1,t)}{\Delta t}+\frac{(i_1+1)\mu_1 \Delta t P(i_1,i_2,t)}{\Delta t}$$

$$+\frac{(i_2+1)\mu_2 \Delta t P(i_1,i_2,t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Преобразуем далее:

$$\frac{P(i_1,i_2,t+\Delta t)-P(i_1,i_2.t)}{\Delta t}=-(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2)P(i_1,i_2,t)+$$

$$+\lambda P(i_1-1,i_2-1,t)+(i_1+1)\mu_1 P(i_1,i_2,t)+(i_2+1)\mu_2 P(i_1,i_2,t)+o(\Delta t).$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$ и получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2)P(i_1,i_2,t)+\lambda P(i_1-1,i_2-1,t)+$$

$$+(i_1+1)\mu_1 P(i_1+1,i_2,t)+(i_2+1)\mu_2 P(i_1,i_2+1,t)). \qquad (1)$$

Для однозначного решения системы надо задать начальные условия. Рассмотрим случай, когда в момент времени $t=0$ система пуста, то есть все приборы свободны. Тогда начальные условия имеют вид:

$$P(i_1,i_2,0)=\begin{cases}1, \textit{если}\; i_1=i_2=0\\ 0, \textit{если иначе}\end{cases}. \quad (2)$$

1.5 Метод производящей функции

Для решения системы дифференциальных уравнений применим метод производящих функций [7].

Определим производящую функцию двухмерного распределения $P(i_1,i_2,t)$ в виде:

$$F(x_1,x_2,t)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}P(i_1,i_2,t). \quad (3)$$

Тогда домножим уравнение (1) на $x_1^{i_1}x_2^{i_2}$ и просуммируем.

$$\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\frac{\partial P(i_1,i_2,t)}{\partial t}=-\lambda\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdot P(i_1,i_2,t)$$

$$-\mu_1\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdot P(i_1,i_2,t)+$$

$$-\mu_2\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdot P(i_1,i_2,t)+\lambda\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdot P(i_1-1,i_2-1,t)+$$

$$+\mu_1\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}(i_1+1)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdot P(i_1+1,i_2,t)+$$

$$+\mu_2\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}(i_2+1)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdot P(i_1,i_2+1,t).$$

Учитывая, свойства производящей функции :

$$\frac{\partial F(x_1, x_2 t)}{\partial x_1} = x_1 \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 x_1{}^{i_1-1_1} x_2{}^{i_2} \cdot P(i_1+1, i_2, t),$$

$$\frac{\partial F(x_1, x_2 t)}{\partial x_2} = x_2 \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_2 x_1{}^{i_{1_1}} x_2{}^{i_2-1} \cdot P(i_1+1, i_2, t),$$

получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial t} = -\lambda F(x_1, x_2, t) - \mu_1 \frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - \mu_2 \frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} +$$

$$+ \lambda x_1, x_2 F(x_1, x_2, t) + \mu_1 \frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}.$$

Приведем подобные слагаемые и получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка [12]:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \mu_1 (x_1 - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \mu_2 (x_2 - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} =$$

$$= \lambda (x_1, x_2 - 1) F(x_1, x_2, t).$$

Учитывая (2), начальное условие для производящей функции имеет вид:

$$F(x_1, x_2, 0) = 1$$

Для полученного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик имеет вид:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\mu_1(x_1 - 1)} = \frac{dx_2}{\mu_2(x_2 - 1)} = \frac{dF(x_1, x_2, t)}{\lambda(x_1 x_2 - 1)F(x_1, x_2, t)}.$$

Для этой системы найдем два первых интеграла. Рассмотрим первое уравнение:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\mu_1(x_1 - 1)}.$$

Откуда имеем:

$$t = \frac{1}{\mu_1}\ln(x_1 - 1) - \frac{1}{\mu_1}\ln(C_1),$$

$$t\mu_1 = \ln(x_1 - 1) - \ln(C_1),$$

$$e^{t\mu_1} = \frac{(x_1 - 1)}{C_1},$$

$$C_1 = e^{t\mu_1}(x_1 - 1) \text{ или } (x_1 - 1) = C_1 e^{-t\mu_1}. \quad (5)$$

Аналогично:

$$\int \frac{dt}{1} = \int \frac{dx_2}{\mu_2(x_2 - 1)}.$$

Откуда:

$$t = \frac{1}{\mu_2}\ln(x_2 - 1) - \frac{1}{\mu_2}\ln(C_2),$$

$$t\mu_2 = \ln(x_2 - 1) - \ln(C_2),$$

$$e^{t\mu_2} = \frac{(x_2 - 1)}{C_2},$$

$$C_2 = e^{-t\mu_2}(x_2 - 1). \qquad (6)$$

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dF(x_1, x_2, t)}{\lambda(x_1 x_2 - 1)F(x_1, x_2, t)}.$$

Получим:

$$\int \lambda(x_1 x_2 - 1)dt = \int \frac{dF(x_1, x_2, t)}{\lambda F(x_1, x_2, t)}.$$

Так как $x_1 \, u \; x_2$ являются функциями, то непосредственно интегрировать от t нельзя (5) и (6).

Учитывая, что:

$$x_1 x_2 - 1 = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_1 - 1)(x_2 - 1).$$

И сделать замены (5), (6).

В первом интеграле, получим:

$$\lambda \int \left[(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_1 - 1)(x_2 - 1)\right]dt =$$

$$= \lambda \int \left(C_1 e^{t\mu_1}\right)dt + \lambda \int C_2 e^{t\mu_2} + \lambda \int \left(C_1 e^{t\mu_1} C_2 e^{t\mu_2}\right)dt =$$

$$= \lambda C_1 C_2 \int e^{t(\mu_1 + \mu_2)}dt + \lambda \int \left(C_1 e^{t\mu_1} + C_2 e^{t\mu_2}\right)dt =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} C_1 C_2 e^{t(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda}{\mu_1} C_1 e^{t\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} C_2 e^{t\mu_2}.$$

Аналогично, для второго интеграла:

$$\int \frac{dF(x_1, x_2, t)}{F(x_1, x_2, t)} = \ln[F(x_1, x_2, t)] - \ln(C).$$

Общее решение дифференциального уравнения можно записать в виде:

Определим $C_3 = \varphi(C_1, C_2)$ как некоторую функцию от констант C_1, C_2:

$$F(x_1, x_2, t) = C_3 \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\}.$$

Тогда:

$$F(x_1, x_2, t) = \varphi\left((x_1 - 1)e^{-\mu_1 t}, (x_2 - 1)e^{-\mu_2 t}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\}. \quad (7)$$

Для того, чтобы найти произвольную дифференцируемую функцию $\varphi(x_1, x_2)$, воспользуемся начальным условием:

$$F(x_1, x_2, 0) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} P(i_1, i_2, 0) = 1.$$

Тогда подставили t=0 в (7):

$$F(x_1, x_2, 0) = \varphi\left((x_1 - 1), (x_2 - 1)\right) \times$$

$$\exp\left\{\frac{\lambda(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} = 1,$$

следовательно,

$$\varphi(x_1-1),(x_2-1)=\exp\left\{-\left(\frac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1+\mu_2}+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\right)\right\}.$$

Тогда

$$\varphi\left((x_1-1)e^{-\mu_1 t},(x_2-1)e^{-\mu_2 t}\right)=$$

$$=\exp\left\{-\left(\frac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)t}+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)e^{-\mu_1 t}+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)e^{-\mu_2 t}\right)\right\}.$$

Подставим выражение в (7), окончательно получаем выражение для производящей функции числа занятых приборов в каждом блоке в нестационарном режиме:

$$F(x_1,x_2,t)=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}. \qquad (8)$$

1.6 Вероятностные характеристики для нестационарного режима

Учитывая свойства производящей функции, а именно:

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_2=1}=\left.\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}i_1 x_1^{i_1-1}x_2^{i_2}P(i_1,i_2,t)\right|_{x_1=x_2=1}=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}i_1 P(i_1,i_2,t)=\sum_{i_1=1}^{\infty}i_1 P(i_1,t)=M\{i_1(t)\},$$

где $M\{i_1(t)\}$-среднее число занятых приборов в момент времени t.

Аналогично:

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right|_{x_1=x_2=1} = M\{i_2(t)\}.$$

Для вторых производных имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1{}^2}\right|_{x_1=x_2=1} = \left.\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} i_1(i_1-1)x_1{}^{i_1-1}x_2{}^{i_2}P(i_1,i_2,t)\right|_{x_1=x_2=1} =$$

$$= \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1(i_1-1)P(i_1,t) = \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1{}^2 P(i_1,t) - \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 P(i_1,t) =$$

$$= M\{i_1{}^2(t)\} - M\{i_1(t)\}.$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial x_2{}^2}\right|_{x_1=x_2=1} == M\{i_2{}^2(t)\} - M\{i_2(t)\},$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_1=x_2=1} = \left.\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 x_1{}^{i_1-1}x_2{}^{i_2}P(i_1,i_2,t)\right|_{x_1=x_2=1} =$$

$$= \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 i_2 P(i_1,i_2,t) = M\{i_1(t)\times i_2(t)\},$$

где $M\{i_1(t)\times i_2(t)\}$ – корреляционный момент.

Возьмем производные:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]' =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)\right].$$

Возьмем вторую производную:

$$\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial {x_1}^2}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+.\right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)\right]^2.$$

Найдем производную по x2:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+.\right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]'=$$

$$=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right].$$

Возьмем вторую производную по x_2 :

$$\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial {x_2}^2}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right..$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]^2.$$

Найдем смешанную производную, для этого продифференцируем первую производную по x_1 по x_2:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1 x_2}=\left[\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\right]+$$

$$+\left[\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)\right].$$

Далее везде подставляем $x_1=x_2=1$, тогда получим:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(1-1)(1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right..$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(1-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right).$$

Аналогично:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}=\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right).$$

Для второй производной по x1:

$$\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial {x_1}^2}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(1-1)(1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\right..$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(1-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(1-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)\right]^2=$$

$$=\left[\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-(\mu_1)t}\right)\right]^2.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t)}{\partial {x_2}^2}=\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]^2$$

Для смешанной производной:

$$x_1=x_2=1$$

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,t)}{\partial x_1 x_2}=\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию. Учитывая свойства производящей функции имеем:

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=x2=1}=M\{i_2\}=\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right),$$

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=x2=1}=M\{i_1\}=\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right),$$

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=x2=1}=M\{i_1\}-M\{i_2\}=\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]^2,$$

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=x2=1}=M\{i_2{}^2\}-M\{i_2\}=\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]^2,$$

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=x2=1}=M\{i_1{}^2\}-M\{i_1\}=\left[\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\right]^2,$$

Отсюда,

$$D\{i_2\}=M\{i_2{}^2\}-M\{i_2\}=\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\mu_2}\right]^2+\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\mu_2}\right]-\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\mu_2}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\mu_2}\right].$$

Найдем корреляционный момент:

$$M\{i_1\times i_2\}=\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\mu_2}\right]\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\mu_2}\right]+\left[\frac{\lambda\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)}{\mu_1+\mu_2}\right].$$

Тогда коэффициент корреляции принимает вид:

$$r\{i_1(t)\times i_2(t)\}=\frac{\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)}{\sqrt{\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\right]}}-$$

$$-\frac{\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)}{\sqrt{\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\right]}}.$$

Окончательно получаем:

$$r\left(i_1(t),i_2(t)\right)=\frac{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)}{\sqrt{\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)\right]}}.$$

На рисунке 3 представлено влияние параметров обслуживания на значение коэффициента корреляции по интенсивности обслуживания.

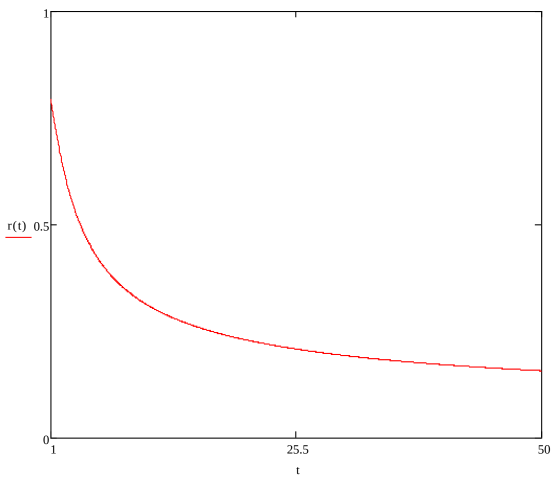
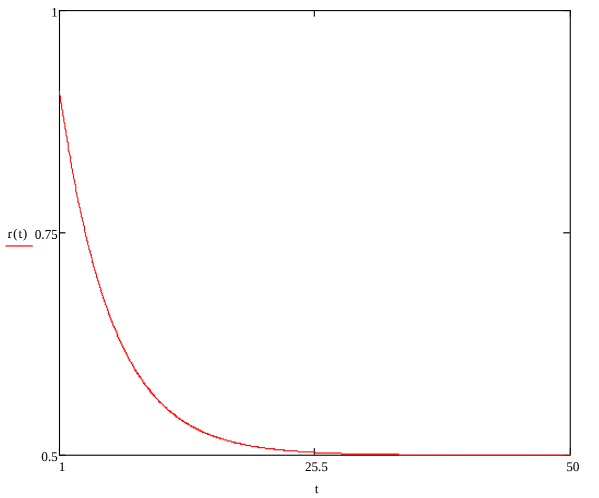
$\mu_1=0{,}2,\quad \mu_2=0{,}2,\quad \lambda=1$	$\mu_1=1,\quad \mu_2=0{,}01,\quad \lambda=1$
	

Рисунок 3 – График корреляционной зависимости компонент для нестационарного режима

1.7 Допредельное двумерное распределение вероятностей числа заявок в блоках

Выражение для производящей функции $F(x_1, x_2)$ позволяет получить основные стационарные характеристики двухмерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме).

Если в (8) устремить $t \to \infty$, то получим вид производящей функции стационарного распределения вероятностей

$$F(x_1, x_2) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\}. \quad (9)$$

Из этого равенства, очевидно, следует, что одномерные маргинальные производящие функции числа занятых приборов в каждом блоке обслуживания являются пуассоновскими и имеют вид

$$f(x_1) = \sum_{i_1} x_1^{i_1} P\{i_1(t) = i_1\} = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1)\right\},$$

$$f(x_2) = \sum_{i_2} x_2^{i_2} P\{i_2(t) = i_2\} = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\}. \quad (10)$$

Двумерное распределение вероятностей $P(i, j)$, определяемое производящей функцией $F(x_1, x_2)$ из (9) будем называть двумерным пуассоновским распределением вероятностей зависимых случайных величин.

Поставим задачу нахождения его явного вида.

$$F(x_1, x_2) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}x_1x_2 + \left(\frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)x_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)x_2 - \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}x_1x_2 + \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}x_1 + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}x_2 - \frac{\lambda\left[(\mu_1+\mu_2)^2 - \mu_1\mu_2\right]}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}\right\}.$$

Обозначим

$$a = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)},\ b = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)},\ c = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2},\ d = \frac{\lambda\left[(\mu_1+\mu_2)^2 - \mu_1\mu_2\right]}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}.$$

Тогда функция $F(x_1, x_2)$ будет иметь вид

$$F(x_1, x_2) = \exp\{cx_1x_2 + ax_1 + bx_2 - d\}.$$

Разложим экспоненту в ряд

$$e^{dx_1x_2}e^{ax_1}e^{bx_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}(x_1x_2)^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}{x_1}^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m}{m!}{x_2}^m\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\frac{a^k}{k!}\frac{b^m}{m!}{x_1}^{n+k}{x_2}^{n+m}.$$

Введем обозначение $n+k=i,\ \ n+m=j,\ \ (i \ge n,\, j \ge n)$, тогда

$$e^{dx_1x_2}e^{ax_1}e^{bx_2}=\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\min(i,j)}\frac{c^n}{n!}\frac{a^{i-n}}{(i-n)!}\frac{b^{j-n}}{(j-n)!}\right)x_1{}^i x_2{}^j .$$

Учитывая равенство (1.3) получим вид двумерного пуассоновского распределения для зависимых компонент

$$P(i,j)=\sum_{n=0}^{\min(i,j)}\frac{c^n}{n!}\frac{a^{i-n}}{(i-n)!}\frac{b^{j-n}}{(j-n)!}e^{-d}, \qquad (11)$$

где компоненты a, b, c, d определены выше.

1.8 Вероятностные характеристики в стационарном режиме

Математическое ожидание числа заявок в каждом блоке (подсистеме) определяется равенством:

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1=1\\x_2=1}}=M\{i_1\}=\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\right\}=\frac{\lambda}{\mu_1},$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1{}^2}\right|_{\substack{x_1=1\\x_2=1}}=M\{i_1^2\}-M\{i_1\}=\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}\right]\times\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\right\}=\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_1}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2.$$

$$M\{i_1^2\}=\frac{\lambda}{\mu_1}+\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2.$$

$$D\{i_1\} = M\{i_1^2\} - \left(M\{i_1\}\right)^2 = \frac{\lambda}{\mu_1} + \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2 = \frac{\lambda}{\mu_1}.$$

Для нахождения ковариационной матрицы определим выражение для корреляционных моментов компонентов вектора (i_1, i_2) в частном случае при $n = 2$:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\}$$

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\right] \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\}.$$

Тогда

$$M\{i_1 i_2\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = 1 \\ x_2 = 1}} = \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}\right] \times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\right\}=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}+\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2}.$$

Тогда матрица ковариаций принимает вид:

$$K=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda}{\mu_1} & \dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\\ \dfrac{\lambda}{\mu_2+\mu_1} & \dfrac{\lambda}{\mu_1}\end{bmatrix}.$$

Коэффициент корреляции между любой парой компонентов случайного вектора (i_1, i_2) имеет вид:

$$r(i_{1_2}, i_2)=\frac{\operatorname{cov}(i_{1_2}, i_2)}{\sqrt{Di_1Di_2}}=\frac{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2}+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}-\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2}}}=\frac{\lambda\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\lambda(\mu_1+\mu_2)}=\frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(\mu_1+\mu_2)}.$$

1.9 Исследование суммарного числа занятых приборов

Подставим в выражение (8) $x_1 = x_2 = y$, тогда производящая функция примет вид:

$$F(x_1, x_2)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}P(i_1, i_2)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}y^{i_1}y^{i_2}P(i_1, i_2)=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}y^{i_1+i_2}P(i_1, i_2)=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(y-1)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda}{\mu_2}\right)(y-1)\right\}.$$

Введем характеристическую функцию

$$h(u) = M\left\{e^{ju(i_1+i_2)}\right\} = F(e^{ju}) =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\left(e^{ju}-1\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(e^{ju}-1\right)\right\}.$$

Тогда распределение вероятностей суммарного числа занятых приборов можно определить через обратное преобразование Фурье:

$$P(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jun} h(u)du.$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Очевидно, что $F(x_1, x_2)$-производящая функция, определяющая число занимаемых ресурсов.

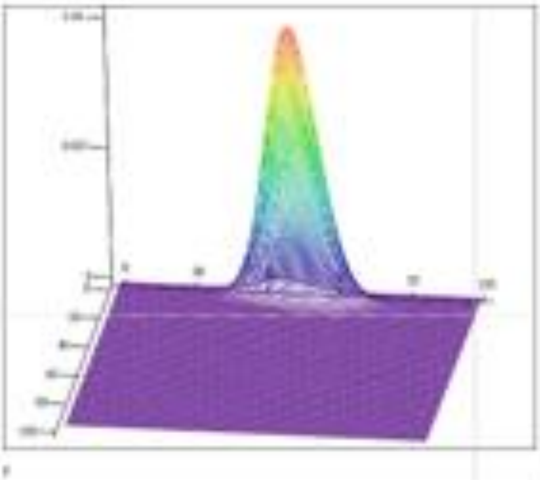
1.10 Численный анализ

Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок на базе представленной математической модели реализовано с помощью программного обеспечения Mathcad (Таблица 1).

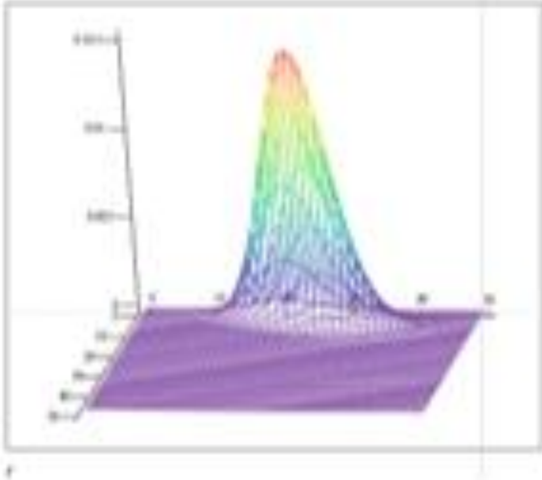
Таблица 1 – Блок вычисления распределения вероятностей числа заявок для двухмерного процесса

Параметры потока	
$\lambda := 5$	– интенсивность входного потока;
$\mu1 := 0.05\ \mu2 := 0.2$	– интенсивность обслуживания;
$a := \frac{\lambda\cdot\mu2}{\mu1\cdot(\mu1+\mu2)}$ $b := \frac{\lambda\cdot\mu1}{\mu2\cdot(\mu1+\mu2)}$ $c := \frac{\lambda}{\mu1+\mu2}$ $d := \lambda\cdot\frac{\left[(\mu1+\mu2)^2-\mu1\cdot\mu2\right]}{(\mu1\cdot\mu2)\cdot(\mu1+\mu2)}$	– коэффициенты для нахождения вероятности
$i := 0..100$ $j := 0..100$	-пределы разброса значений
Нахождение распределения числа заявок в системе	
$P(i,j) := \sum_{n=0}^{\min(i,j)} \left[\frac{c^n}{n!}\cdot\frac{a^{i-n}}{(i-n)!}\cdot\frac{b^{j-n}}{(j-n)!}\cdot e^{-d}\right]$	– Распределение вероятностей

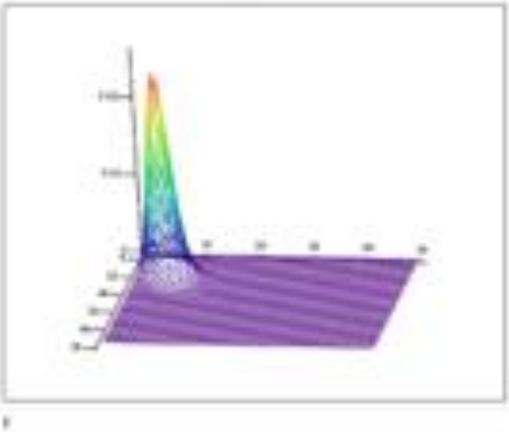
На рисунке 4 представлен результат работы программы для нахождения распределения вероятностей числа заявок в системе в нестационарном режиме, построенного по формуле (11), в таблице 1 представлен текст программы, по которой задавался график на рисунке 4:



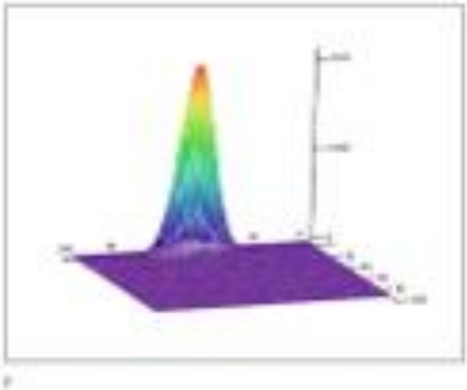
$\lambda = 5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0{,}1$



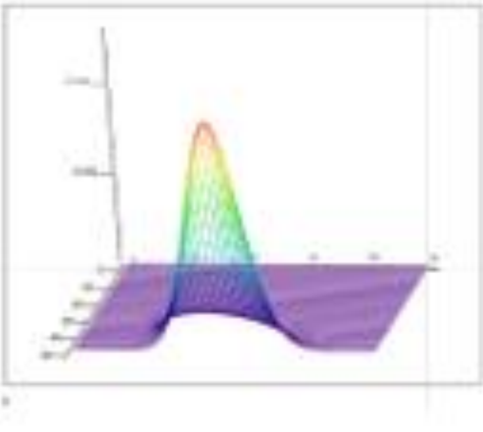
$\lambda = 5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0{,}2$



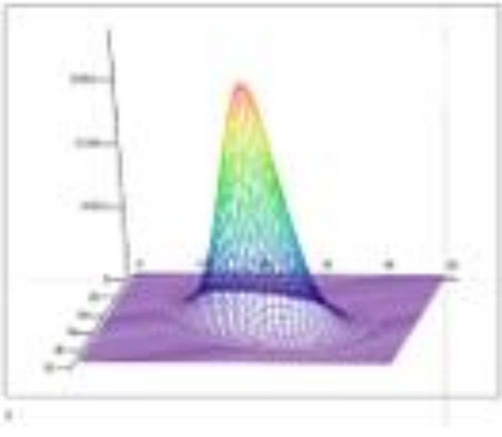
$\lambda = 5, \mu_1 = 0{,}1, \mu_2 = 0{,}2$



$\lambda = 5, \mu_1 = 0{,}2, \mu_2 = 0{,}2$



$\lambda = 5, \mu_1 = 0{,}5, \mu_2 = 1$



$\lambda = 5, \mu_1 = 0{,}9, \mu_2 = 0{,}1$

Рисунок 4 – График распределения вероятностей для двухмерного процесса.

На рисунке 5 представлена таблица значений, для вероятностей числа заявок в системе для двухмерного процесса:

F =

	69	70	71	72	73
0	$7.627\cdot10^{-7}$	$4.903\cdot10^{-7}$	$3.108\cdot10^{-7}$	$1.942\cdot10^{-7}$	$1.197\cdot10^{-7}$
1	$6.271\cdot10^{-6}$	$4.086\cdot10^{-6}$	$2.624\cdot10^{-6}$	$1.662\cdot10^{-6}$	$1.038\cdot10^{-6}$
2	$2.546\cdot10^{-5}$	$1.681\cdot10^{-5}$	$1.094\cdot10^{-5}$	$7.022\cdot10^{-6}$	$4.443\cdot10^{-6}$
3	$6.801\cdot10^{-5}$	$4.554\cdot10^{-5}$	$3.005\cdot10^{-5}$	$1.954\cdot10^{-5}$	$1.253\cdot10^{-5}$
4	$1.345\cdot10^{-4}$	$9.134\cdot10^{-5}$	$6.11\cdot10^{-5}$	$4.027\cdot10^{-5}$	$2.616\cdot10^{-5}$
5	$2.101\cdot10^{-4}$	$1.447\cdot10^{-4}$	$9.813\cdot10^{-5}$	$6.557\cdot10^{-5}$	$4.318\cdot10^{-5}$
6	$2.699\cdot10^{-4}$	$1.885\cdot10^{-4}$	$1.297\cdot10^{-4}$	$8.785\cdot10^{-5}$	$5.864\cdot10^{-5}$
7	$2.931\cdot10^{-4}$	$2.077\cdot10^{-4}$	$1.449\cdot10^{-4}$	$9.958\cdot10^{-5}$	$6.74\cdot10^{-5}$
8	$2.749\cdot10^{-4}$	$1.976\cdot10^{-4}$	$1.399\cdot10^{-4}$	$9.749\cdot10^{-5}$	$6.692\cdot10^{-5}$
9	$2.26\cdot10^{-4}$	$1.649\cdot10^{-4}$	$1.184\cdot10^{-4}$	$8.373\cdot10^{-5}$	$5.829\cdot10^{-5}$
10	$1.649\cdot10^{-4}$	$1.221\cdot10^{-4}$	$8.903\cdot10^{-5}$	$6.387\cdot10^{-5}$	$4.51\cdot10^{-5}$
11	$1.079\cdot10^{-4}$	$8.112\cdot10^{-5}$	$6.002\cdot10^{-5}$	$4.369\cdot10^{-5}$	$3.131\cdot10^{-5}$
12	$6.377\cdot10^{-5}$	$4.87\cdot10^{-5}$	$3.658\cdot10^{-5}$	$2.703\cdot10^{-5}$	$1.965\cdot10^{-5}$
13	$3.43\cdot10^{-5}$	$2.661\cdot10^{-5}$	$2.029\cdot10^{-5}$	$1.522\cdot10^{-5}$	$1.124\cdot10^{-5}$
14	$1.689\cdot10^{-5}$	$1.331\cdot10^{-5}$	$1.031\cdot10^{-5}$	$7.852\cdot10^{-6}$	$5.883\cdot10^{-6}$
15	$7.647\cdot10^{-6}$	$6.123\cdot10^{-6}$	$4.818\cdot10^{-6}$	$3.727\cdot10^{-6}$	...

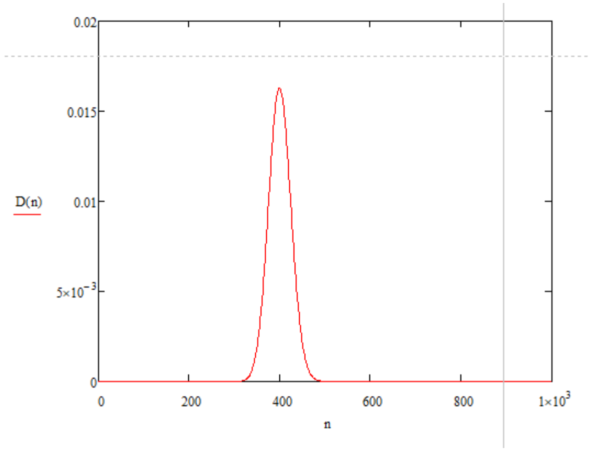
Рисунок 5 – численное представление распределение вероятностей числа заявок в системе

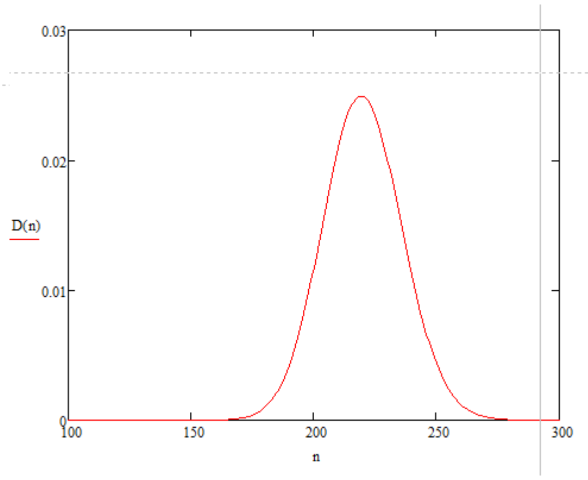
Из вышеизложенного можно сделать вывод, что чем больше загрузка системы, тем графики ближе к двумерному нормальному распределению, поэтому для немарковских систем можно использовать гауссовскую аппроксимацию.

Таблица 2 – Блок вычисления распределения вероятностей суммарного числа заявок в системе

Параметры потока	
$\lambda := 1$	– интенсивность входного потока;
$\mu 1 := 0.05$ $\mu 2 := 0.2$	– интенсивность обслуживания;
$H(u) := e^{\left[\left[\left(\frac{\lambda}{\mu 1}+\frac{\lambda}{\mu 1}\right)\cdot\left(e^{j\cdot u}-1\right)+\frac{\lambda}{\mu 1+\mu 2}\cdot\left(e^{j\cdot u}-1\right)^{2}\right]\right]}$	– характеристическая функция суммарного числа заявок в стационарном режиме;
Нахождение распределения числа заявок в системе	
$P_n := \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\cdot u\cdot n}\cdot H(u)\,du$	– обратное преобразование Фурье;
$D_n := \frac{1}{4}\cdot\left(P_n + \overline{P_n} + \left\lvert P_n + \overline{P_n}\right\rvert\right)$	–– проверка условия нормировки.

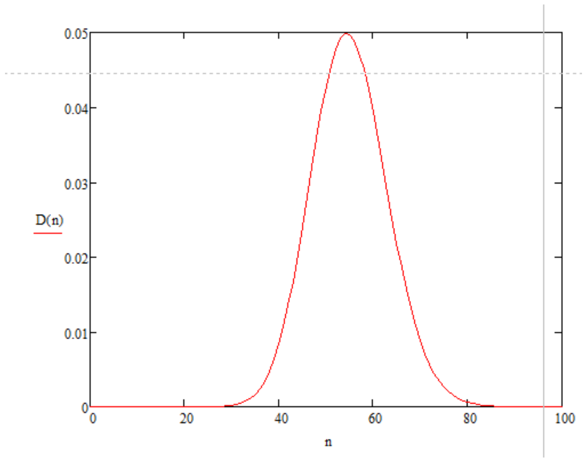
На рисунке 6 представлены графики распределения вероятностей суммарного числа заявок в системе, построенные в среде MathCad:

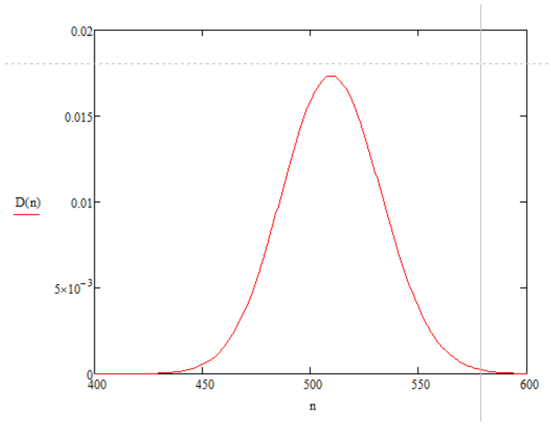




λ := 2 μ1 := 0.01 μ2 := 0.01

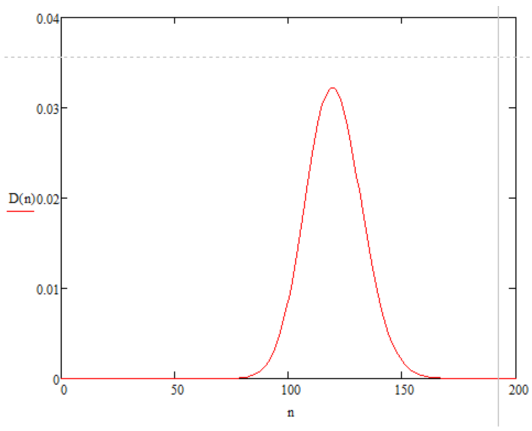
λ := 2 μ2 := 0.1 μ1 := 0.01

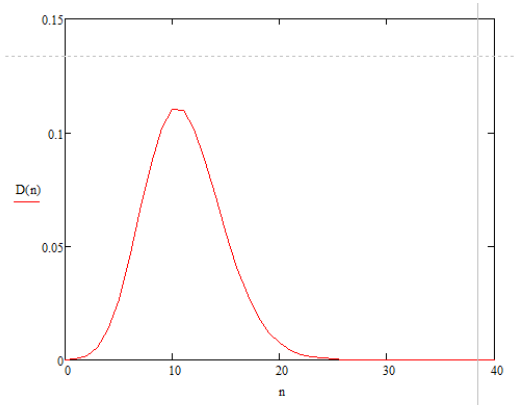




λ := 5 μ1 := 1 μ2 := 0.1

λ := 5 μ1 := 0.01 μ2 := 0.5





$\lambda = 1, \mu_1 = 0{,}05, \mu_2 = 0{,}01$ $\lambda = 1, \mu_1 = 0{,}9, \mu_2 = 0{,}1$

Рисунок 6 – Распределение вероятностей числа заявок с различными параметрами

Рассмотрим изменение значений влияние параметров обслуживания на значение коэффициента корреляции по интенсивности обслуживания. Пусть $\mu_2 = \gamma\mu_1$, где γ -неотрицательное число, тогда

$$r(i_1, i_2) = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2\gamma}}{\mu_1(1+\gamma)} = \frac{\sqrt{\gamma}}{1+\gamma}.$$

Рассмотрим на графике различные значения для коэффициента, γ задана от 0 с шагом 0.01 до 10, результаты предоставлены на рисунке 7.

1. Найдем первую производную:

$$r(\gamma)' = \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{1+\gamma}\right)' = \frac{\sqrt{\gamma}'(1+\gamma)-(1+\gamma)'\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)^2} = \frac{\frac{1+\gamma}{2\sqrt{\gamma}} - \frac{\sqrt{\gamma}}{1}}{(1+\gamma)^2} = \frac{1-\gamma}{2\sqrt{\gamma}}.$$

2. Найдем критические точки:

$$r(\gamma)' = 0,$$

$$\frac{1-\gamma}{2\sqrt{\gamma}} = 0,$$

$$1-\gamma = 0 \quad 2\sqrt{\gamma} \neq 0$$

$$\gamma = 1 \quad \gamma \neq 0$$

3. Исследуем знак функции на числовой прямой:

$$r'(\gamma) < 0 \quad \textit{при} \ \gamma > 1$$

$$r'(\gamma) > 0 \quad \textit{при} \ \gamma < 1$$

$r'(1) = \frac{1-1}{2\sqrt{1}} = 0$, следовательно, $\gamma = 1$ – максимум функции $r(\gamma)$.

Отсюда следует, что максимально значение коэффициента корреляции принимает при одинаковом обслуживании и это значение равняется 0,5.

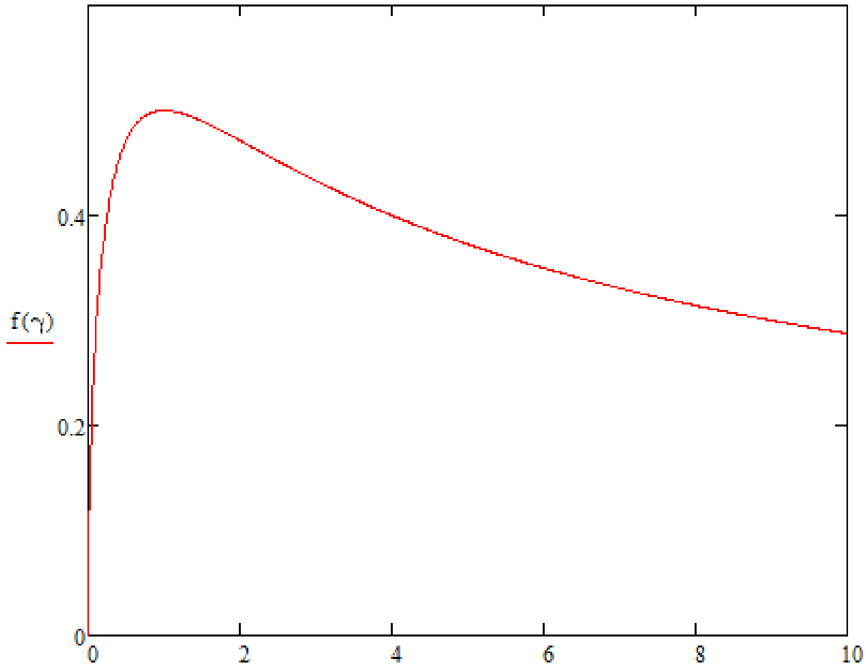


Рисунок 7 – График корреляционной зависимости компонент

Наибольшая зависимость наблюдается при одинаковой интенсивности обслуживания.

2 Система параллельного обслуживания вида $M/M/\infty \to M^2/M_2/\infty$

2.1 Постановка задачи

Практическое значение работы может быть приведено в примере переработки отходов. Представим ситуацию, при которой на первой фазе обработки отходов их сортируют, допустим мы возьмем стекло и пластик.

Поскольку в нашей работе рассматривается Марковская система [2], то существует ряд допущений, первое из которых-это то, что в систему поступают партии, имеющие одинаковый размер, второе допущение-количество партий не ограничено, что невозможно в реальности, но при исследовании системы мы можем оценить верхнюю границу превышения объема заявок.

После сортировки, происходящей на 1 фазе, отходы поступают на 2 фазу в соответствующий блок, коих два-для переработки стекла и для переработки пластика. Таким образом мы получаем рабочий пример СМО с копированием заявок на 2 фазе. Наша задача сводиться нахождению характеристик этой системы и подробного ее исследования.

Высокая стоимость такого специализированного оборудования [20] приводит к необходимости оценивания характеристик системы (производительности, эффективности) как на стадии создания, так и на стадии эксплуатации.

2.2 Математическая модель

Рассматривается двухфазная система массового обслуживания.

В первой фазе на вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Дисциплина обслуживания определяется тем, что количество заявок данного потока поступают в блок и занимают любой из свободных приборов, на котором выполняется их обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром $\mu 1$. Далее заявки переходят на обработку во 2 фазе.

Во второй фазе заявки расщепляются и обрабатываются параллельно в двух блоках. Дисциплина обслуживания определяется тем, что количество заявок данного потока поступают в блоки и занимают любой из свободных приборов, на которых выполняется их обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ2 и μ3 соответственно.

Изобразим рассматриваемую СМО в виде рисунка 8.

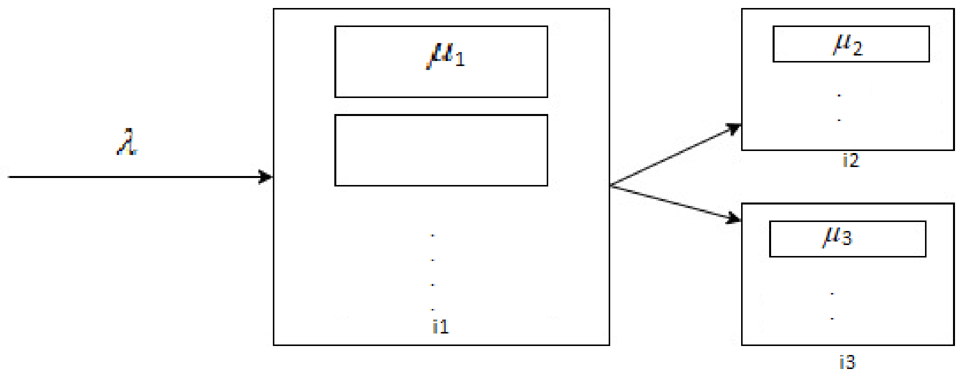


Рисунок 8 – Двухфазная система массового обслуживания

Введём трехмерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$ – число занятых приборов в соответствующих блоках.

Ставится задача исследования трехмерного марковского процесса $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$, то есть нахождение распределения вероятностей.

2.3 Вывод уравнений Колмогорова для системы

Обозначим $\mathrm{P}(i_1, i_2, i_3, t) = \mathrm{P}\ \{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, i_3(t) = i_3\}$- распределение вероятностей состояний трехмерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке в момент времени t.

Для составления СДУК воспользуемся Δt-методом. Очевидно, что:

- с вероятностью $(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)(1-i_3\mu_3\Delta t)+o(\Delta t)$ состояние системы остаётся прежним, новая заявка не поступит и не обслужится;
- с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ поступит заявка входящего потока, и число занятых приборов на первой фазе увеличится на единицу;
- с вероятностью $(i_1+1)\mu_1\Delta t+o(\Delta t)$ одна из заявок закончит своё обслуживание в 1 фазе и перейдет на вторую фазу, добавив по одному занятому прибору в каждый блок;
- с вероятностью $(i_2+1)\mu_2\Delta t+o(\Delta t)$ одна из заявок закончит своё обслуживание в 1 блоке на второй фазе
- с вероятностью $(i_3+1)\mu_3\Delta t+o(\Delta t)$ одна из заявок закончит своё обслуживание в 2 блоке на второй фазе
- переходы в другие состояний возможны, вероятность перехода в них равна $o(\Delta t)$.

Составим прямое дифференциальное уравнение Колмогорова (далее СДУ), используя диаграмму переходов марковского процесса. Рассмотрим интервал времени [t , $t + \Delta t$]. За это время в системе произойдут следующие изменения:

$$i_1=i_2=i_3=0$$

$$P(0,0,0,t+\Delta t)=P(0,0,0,t)(1-\lambda\Delta t)$$

$$+\mu_1\Delta tP(1,0,0,t)+\mu_2\Delta tP(0,1,0,t)+\mu_3\Delta tP(0,0,1,t)+o(t). \qquad (12)$$

Для любых $i_1,i_2,i_3\geq 1$:

$$P(i_1,i_2,i_3,t+\Delta t)=P(i_1,i_2,i_3,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)(1-i_3\mu_3\Delta t)+$$

$$+\lambda\Delta tP(i_1-1,i_2,i_3,t)+(i_1+1)\mu_1\Delta tP(i_1+1,i_2-1,i_3-1,t)+$$

$$+(i_2+1)\mu_2\Delta tP(i_1,i_2+1,i_3,t)+(i_3+1)\mu_3\Delta tP(i_1,i_2,i_3+1,t)+o(\Delta t) \qquad (13)$$

2.4 Решение СДУ Колмогорова для системы

Преобразуем (13).

Поделим обе части уравнения на Δt:

$$\frac{P(i_1,i_2,i_3,t+\Delta t)-P(i_1,i_2,i_3,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)(1-i_3\mu_3\Delta t)}{\Delta t}=$$

$$+\frac{\lambda\Delta tP(i_1-1,i_2,i_3,t)}{\Delta t}+\frac{(i_1+1)\mu_1\Delta tP(i_1+1,i_2-1,i_3-1,t)}{\Delta t}+$$

$$+\frac{(i_2+1)\mu_2\Delta tP(i_1,i_2+1,i_3,t)}{\Delta t}+\frac{(i_3+1)\mu_3\Delta tP(i_1,i_2,i_3+1,t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Преобразуем далее:

$$\frac{P(i_1,i_2,i_3,t+\Delta t)-P(i_1,i_2,i_3,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)(1-i_3\mu_3\Delta t)}{\Delta t}=$$

$$=\lambda P(i_1-1,i_2,i_3,t)+(i_1+1)\mu_1 P(i_1+1,i_2-1,i_3-1,t)+$$

$$+(i_2+1)\mu_2 P(i_1,i_2+1,i_3,t)+(i_3+1)\mu_3 P(i_1,i_2,i_3+1,t)+o(\Delta t)\,. \quad (14)$$

Преобразуем (14) и перейдем к пределу Δt→0 и получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(i_1,i_2,i_3,t)}{\partial t}=-(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2+i_3\mu_3)P(i_1,i_2,i_3,t)+\lambda P(i_1-1,i_2,i_3,t)+$$

$$+(i_1+1)\mu_1 P(i_1+1,i_2-1,i_3-1,t)+(i_2+1)\mu_2 P(i_1,i_2+1,i_3,t)+(i_3+1)\mu_3 P(i_1,i_2,i_3+1,t)))\,.$$

Для однозначного решения системы надо задать начальные условия. Рассмотрим случай, когда в момент времени $t=0$ система пуста, то есть все приборы свободны. Тогда начальные условия имеют вид:

$$P(i_1,i_2,i_3,0)=\begin{cases}1,\textit{если}\; i_1=i_2=i_3=0\\ 0,\textit{если иначе}\end{cases}. \quad (15)$$

2.5 Метод производящей функции

Определим производящую функцию трехмерного распределения $P(i_1, i_2, i_3, t)$ в виде:

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} P(i_1, i_2, i_3, t). \tag{16}$$

Тогда получим:

$$\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} {x_3}^{i_3} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} \frac{\partial P(i_1, i_2, i_3, t)}{\partial t} = -\lambda \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1, i_2, i_3 t) -$$

$$-\mu_1 \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1, i_2, i_3 t) +$$

$$-\mu_2 \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1, i_2, i_3 t) +$$

$$+\lambda \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, t) +$$

$$+\mu_1 \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} (i_1 + 1) {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1 + 1, i_2, i_3 t) + \mu_2 i_1 +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} (i_2 + 1) {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1, i_2 + 1, i_3 t).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} = x_1 \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} i_1 {x_1}^{i_1 - 1} {x_2}^{i_2} {x_3}^{i_3} \cdot P(i_1 + 1, i_2, i_3 t),$$

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_2}=x_2\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty} i_2 x_1^{i_1} x_2^{i_2-1} x_3^{i_3}\cdot P(i_1,i_2+1,i_3,t),$$

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_2}=x_3\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=1}^{\infty} i_3 x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3-1}\cdot P(i_1,i_2,i_3+1,t).$$

Получаем:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t}=-\lambda F(x_1,x_2,x_3,t)-\mu_1\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_1}-$$

$$-\mu_2\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_2}-\mu_3\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_3}+$$

$$+\lambda x_1,x_2,x_3 F(x_1,x_2,x_3,t)+\mu_1\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_1}+$$

$$+\mu_2\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_2}+\mu_3\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_3}.$$

Приведем подобные слагаемые и получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t}+\mu_1(x_1-1)\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_1}+\mu_2(x_2-1)\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_2}+$$

$$+\mu_3(x_3-1)\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_3}=\lambda(x_1x_2-1,x_3,)F(x_1,x_2,x_3,t)$$

Для полученного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик имеет вид:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-x_2x_3)}=\frac{dx_2}{\mu_2(x_2-1)}=\frac{dx_3}{\mu_3(x_3-1)}=\frac{dF(x_1,x_2,x_3,t)}{\lambda(x_1-1)F(x_1,x_2,x_3,t)}$$

Для этой системы найдем два первых интеграла. Рассмотрим первое равенство:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-x_2x_3)}$$

$$\int\frac{dt}{1}=\int\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-x_2x_3)}$$

$$t=\frac{1}{\mu_1}\ln(x_1-x_2x_3)-\frac{1}{\mu_1}\ln(C_1),$$

$$t\mu_1=\ln(x_1-x_2x_3)-\ln(C_1),$$

$$e^{t\mu_1}=\frac{(x_1-x_2x_3)}{C_1},$$

$$C_1=e^{-t\mu_1}(x_1-x_2x_3).$$

Аналогично C2:

$$\int\frac{dt}{1}=\int\frac{dx_2}{\mu_2(x_2-1)}$$

Откуда:

$$t=\frac{1}{\mu_2}\ln(x_2-1)-\frac{1}{\mu_2}\ln(C_2),$$

$$t\mu_2=\ln(x_2-1)-\ln(C_2),$$

$$e^{t\mu_2}=\frac{(x_2-1)}{C_2},$$

$$C_2 = e^{-t\mu_2}(x_2 - 1)$$

Аналогично C3:

$$\int \frac{dt}{1} = \int \frac{dx_3}{\mu_3(x_3 - 1)}$$

Откуда:

$$t = \frac{1}{\mu_3}\ln(x_3 - 1) - \frac{1}{\mu_3}\ln(C_3),$$

$$t\mu_3 = \ln(x_3 - 1) - \ln(C_3),$$

$$e^{t\mu_3} = \frac{(x_3 - 1)}{C_3},$$

$$C_3 = e^{-t\mu_3}(x_3 - 1)$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dF(x_1, x_2, x_3, t)}{\lambda(x_1 - 1)F(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Получим:

$$\lambda(x_1 - 1)\frac{dt}{1} = \frac{dF(x_1, x_2, x_3, t)}{F(x_1, x_2, x_3, t)}$$

$(x_1 - 1)$ можно представить в виде:

$$x_1 - x_2 x_3 = C_1 e^{t\mu_1}$$

$$x_1 - 1 - (x_2 x_3 - 1) = C_1 e^{-t\mu_1}$$

$$(x_2 x_3 - 1) = (x_2 - 1)(x_3 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)$$

$$(x_1 - 1) = (x_2 x_3 - 1) + C_1 e^{-t\mu_1}$$

$$(x_1 - 1) = \big((x_2 - 1)(x_3 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)\big) + C_1 e^{-t\mu_1}$$

Подставим:

$$\lambda\Big[\big((x_2 - 1)(x_3 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)\big) + C_1 e^{-t\mu_1}\Big]\frac{dt}{1} = \frac{dF(x_1, x_2, x_3, t)}{F(x_1, x_2, x_3, t)}$$

$$\lambda\Big[\Big(C_2 e^{-t\mu_2} C_3 e^{-t\mu_3} + C_2 e^{-t\mu_2} + C_3 e^{-t\mu_3}\Big) + C_1 e^{-t\mu_1}\Big]\frac{dt}{1} = \frac{dF(x_1, x_2, x_3, t)}{F(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Возьмем интеграл:

$$\ln F(x_1, x_2, x_3, t) - \ln C_4 = \int \lambda\Big[\Big(C_2 e^{-t\mu_2} C_3 e^{-t\mu_3} + C_2 e^{-t\mu_2} + C_3 e^{-t\mu_3}\Big) + C_1 e^{-t\mu_1}\Big] dt$$

$$\ln F(x_1, x_2, x_3, t) - \ln C_4 = -C_2 C_3 \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} e^{-\mu_2 t} e^{-\mu_3 t} -$$

$$- C_3 \frac{\lambda}{\mu_3} e^{-\mu_3 t} - C_2 \frac{\lambda}{\mu_2} e^{-\mu_2 t} - C_1 \frac{\lambda}{\mu_1} e^{-\mu_1 t},$$

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = C_4 \exp\Bigg\{- C_2 C_3 \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} e^{-\mu_2 t} e^{-\mu_3 t} -$$

$$- C_3 \frac{\lambda}{\mu_3} e^{-\mu_3 t} - C_2 \frac{\lambda}{\mu_2} e^{-\mu_2 t} - C_1 \frac{\lambda}{\mu_1} e^{-\mu_1 t}\Bigg\}$$

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = C_4 \exp\Bigg\{- (x_2 - 1)(x_3 - 1) \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} +$$

$$(x_3 - 1)\frac{\lambda}{\mu_3} + (x_2 - 1)\frac{\lambda}{\mu_2} + (x_1 - 1)\frac{\lambda}{\mu_1}\Bigg\},$$

$$C_4 = \Phi(C_1, C_2, C_3)\ ,$$

где $\Phi(C_1, C_2, C_3)$ – произвольная дифференцируемая функция. Для того чтобы найти $\Phi(C_1, C_2, C_3)$, воспользуемся начальным условиями в предположении, что система была пустой:

$$F(x_1, x_2, x_3, 0) = 1.$$

Тогда имеем:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3)\exp\left\{-\left[y_1\frac{\lambda}{\mu_1} + y_2 y_3\frac{\lambda}{\mu_2+\mu_3} + y_3\frac{\lambda}{\mu_3} + y_2\frac{\lambda}{\mu 2}\right]\right\}.$$

Окончательно получаем

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = \exp\{(x_2 - 1)(x_3 - 1)\frac{\lambda}{\mu_2+\mu_3}(1 - e^{-t(\mu_2+\mu_3)}) + (x_1 - 1)\frac{\lambda}{\mu_1}(1 - e^{-\mu_1 t}) +$$
$$+ (x_3 - 1)\frac{\lambda}{\mu_3}(1 - e^{-\mu_3 t}) + (x_2 - 1)\frac{\lambda}{\mu_2}(1 - e^{-\mu_2 t})\}. \qquad (17)$$

2.6 Вероятностные характеристики

Выражение для производящей функции $F(x_1, x_2)$ позволяет получить основные стационарные характеристики двухмерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме).

Если рассмотреть случай (17) при $t \to \infty$, то получим вид производящей функции для финального распределения вероятностей числа заявок в каждом блоке системы:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \exp\left\{(x_2 - 1)(x_3 - 1)\frac{\lambda}{\mu_2+\mu_3} + (x_1 - 1)\frac{\lambda}{\mu_1} + \right.$$

$$+(x_3-1)\frac{\lambda}{\mu_3}+(x_2-1)\frac{\lambda}{\mu_2}\Bigg\} \tag{18}$$

Математическое ожидание числа заявок в каждом блоке (подсистеме) определяется равенством:

$$\left.\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1=1\\x_2=1\\x_3=1}}=M\{i_1\}=\left[\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu 3}(x_3-1)\right\}=\frac{\lambda}{\mu_1}$$

Используя свойства производящей функции нетрудно показать, что математическое ожидание и дисперсия числа заявок в первом и втором блоках системы определяются выражениями:

$$M\{i_k(t)\}=\frac{\lambda}{\mu_k},\quad D\{i_k(t)\}=\frac{\lambda}{\mu_k}(k=1.2,3).$$

Для второй фазы производящая функции двумерного процесса $\{i_2(t),i_3(t)\}$ примет вид:

$$F(x_1,x_2,x_3)=\exp\left\{(x_2-1)(x_3-1)\frac{\lambda}{\mu_2+\mu_3}+(x_3-1)\frac{\lambda}{\mu_3}+(x_2-1)\frac{\lambda}{\mu_2}\right\}.$$

Двумерное распределение вероятностей, определяемое данной производящей функцией, является двумерным пуассоновским распределением вероятностей зависимых случайных величин [7].

Нетрудно показать, коэффициент корреляции между компонентами определяется:

$$r(i_1, i_2) = \frac{M\{i_1, i_2\} - M\{i_3\} \cdot M\{i_2\}}{\sqrt{Di_2 Di_3}} = \frac{\sqrt{\mu_2 \mu_3}}{\mu_2 + \mu_3} \ .$$

Рассмотрим изменение значений корреляции по интенсивности обслуживания. Пусть $\mu_3 = \gamma\mu_2$, где γ -неотрицательное число, тогда

$$r(i_2, i_3) = \frac{\sqrt{\mu_2{}^2 \gamma}}{\mu_2 + \mu_2 \gamma} = \frac{\mu_2 \sqrt{\gamma}}{\mu_2 (1+\gamma)} = \frac{\sqrt{\gamma}}{1+\gamma} \quad (19)$$

Как видно из выражения (19) получили результат аналогичный разделу 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была построена и исследована математическая модель системы массового обслуживания с параллельным обслуживанием простейшего потока кратных заявок. Был найден вид производящей функции для числа занятых приборов в указанной системе, а также основные вероятностные характеристики числа занятых приборов (математическое ожидание, дисперсия и коэффициент корреляции).

Также была построена и исследована математическая модель двухфазной системы массового обслуживания с копированием заявок на второй фазе, получен вид многомерной характеристической функции для всех модели двухэтапной обработки данных в виде двухфазной СМО типа $M/M/\infty/\rightarrow M^2/M_2/\infty/$ с разделением (копированием) данных на второй фазе, что позволило определить вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсию) занимаемых каналов, а также коэффициент корреляции, который отражает зависимость между компонентами многомерного процесса.

По материалам исследования был сделан доклады Всероссийской с международным участием научно-практической конференции студентов, аспирантов, работников образования и промышленности «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование» (СУИТиММ-2021). Омск, 24-25 мая 2023 г.

Подготовлен материал для публикации статьи:

1. Кошкарова Н. А. Двухфазная бесконечнолинейная марковская система обслуживания с копированием заявок на второй фазе / Н. А. Кошкарова, С. П. Моисеева // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование: материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Омск, 24-25 апреля 2023 г. Омск: Омский государственный технический университет, 2023 – (в печати).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галилейская А. А. Моделирование процесса последовательной обработки данных, реализующей хранение резервной копии / //Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование». – 2019. – Т. 15. – №. 3. – С. 579–587.
2. Гефан. Г.Д. Марковские процессы и системы массового обслуживания– учебное пособие–75 с. 2009 г. Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2009.
3. Кошкарова Н. А. Двухфазная бесконечнолинейная марковская система обслуживания с копированием заявок на второй фазе / Н. А. Кошкарова, С. П. Моисеева // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование: материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Омск, 24-25 апреля 2023 г. Омск: Омский государственный технический университет, 2023 – (в печати).
4. Лисовская Е. Ю. [и др.]. Об одном подходе к исследованию ресурсных СМО/ Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2019. – Т. 26. – №. 4. – С. 368-370.
5. Моисеев А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Томск: Изд-во НТЛ. – 2015. – 240 с.
6. Моисеева С.П., Жидкова Л.А. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока//Вестник ТГУ. – 2011 – №4 (17) – 5-9 с.
7. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процес сов: учебное пособие – 2010 – 204 с.
8. Романенко В.А. Системы и сети массового обслуживания 2021.стр 8

9. Румянцев А.С. Методы моделирования, анализа стационарности и оценивания производительности систем параллельной обработки: диссертация кандидата физ.мат наук: Петрозаводск — 2022.
10. Самаров. К.Л. Элементы Теории массового обслуживания: Учебно-методическое пособие, 2009-11 с.
11. Чернышова Е. Н. Суммарный объем занятого ресурса в системе обработки информации с реализацией хранения резервной копии сообщений / Е. Н. Чернышова, А. А Галилейская, Е. Ю. Лисовская // Материалы Всероссийской конференции с международным участием, РУДН, Москва, 13–17 апреля 2020 г. – М., 2020. – С. 59– 61.
12. Эльгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления: учебник– 1969. –424 с.
13. Asmussen, S. Applied probability and queues [Текст] / S. Asmussen. — New York : Springer, 2003.
14. Bocharov, P. P. Queueing Theory [Текст] /P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin. — DE GRUYTER, 12.2003. — (Modern Probability and Statistics). — URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110936025/html (дата обр. 24.01.2022). 243
15. Brill, P. H. Level crossing methods in stochastic models [Текст] / P. H. Brill. — New York, NY : Springer Berlin Heidelberg, 2017. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-50332-5.
16. Daoud, S. Spread Spectrum-Based Underlay Cognitive Radio Wireless Networks [Текст] / S. Daoud, D. Haccoun, C. Cardinal // COCORA 2017 : The Seventh International Conference on Advances in Cognitive Radio. — 2017. — P. 20—24.
17. Feitelson, D. G. Workload Modeling for Computer Systems Performance Evaluation [Текст] / D. G. Feitelson. — Cambridge : Cambridge University Press, 2015. — URL: http : / / ebooks . cambridge . org / ref / id / CBO9781139939690 (дата обр. 13.04.2022).

18. Galileyskaya A. A. Resource QS with the requirements copying / E. Y. Lisovskaya, E. A. Fedorova // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019). – 2019. – С. 140–147.
19. Ganesh, A. A Model of Job Parallelism for Latency Reduction in Large-Scale Systems [Текст] / A. Ganesh, A. Mukhopadhyay // arXiv e-prints. — 2022. — Март. — arXiv:2203.08614. — arXiv: 2203.08614 [math.PR].
20. Gigler, B.-S. Financing the future of supercomputing: How to increase investments in high performance computing in Europe [Текст] : tech. rep. / B.-S. Gigler, A. Casorati, A. Verbeek ; Innovation Finance Advisory. — 2018. — P. 154. — URL: https://www.eib.org/attachments/pj/financing_the_future_of_supercomputing_en.pdf.
21. Harchol-Balter, M. Performance modeling and design of computer systems: queueing theory in action [Текст] / M. Harchol-Balter. — Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
22. Heien, E. M. Computing Low Latency Batches with Unreliable Workers in Volunteer Computing Environments [Текст] / E. M. Heien, D. P. Anderson, K. Hagihara // Journal of Grid Computing. — 2009. — Dec. — Vol. 7, no. 4. — P. 501—518. — URL: http://link.springer.com/10.1007/s10723- 009-9131-6 (visited on 09/13/2015). 241
23. Joshi, G. Efficient Redundancy Techniques for Latency Reduction in Cloud Systems [Текст] / G. Joshi, E. Soljanin, G. Wornell // ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems. — 2017. — Apr. — Vol. 2, no. 2. — P. 1—30. — URL: http://dl.acm.org/citation.cfm?doid=3051083.3055281 (visited on 11/15/2018).
24. Queueing Models for Cognitive Radio Networks: A Survey [Текст] / F. Paluncic [et al.] // IEEE Access. — 2018. — Vol. 6. — P. 50801—50823. — URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/8445574/ (visited on 02/25/2019).

25. Sutter, H. The Free Lunch Is Over: A Fundamental Turn Toward Concurrency in Software [Текст] / H. Sutter // Dr. Dobb’s Journal. — 2005. — T. 30, № 3. — C. 202—210..

26. Thomasian, A. Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems [Текст] / A. Thomasian // ACM Computing Surveys. — 2014. — Vol. 47, no. 2. — P. 1—71.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

С результатом ознакомлена
С.П. Моисеева

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Кошкарова Нина Анатольевна
Проверяющий: Моисеева Светлана Владимировна
Организация: Томский Государственный Университет

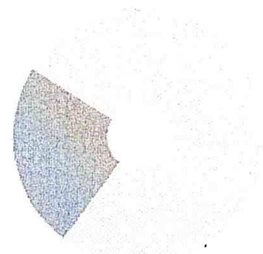
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://tsu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 355
Начало загрузки: 04.06.2023 14:51:51
Длительность загрузки: 00:00:16
Имя исходного файла: Koshkarova_Diplom_2.pdf
Название документа: Koshkarova_Diplom_2
Размер текста: 44 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 45089
Слов в тексте: 5952
Число предложений: 287

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 04.06.2023 14:52:08
Длительность проверки: 00:00:22
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 3-48
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Сводная коллекция РГБ, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по Интернету (EN), Перефразирования по коллекции издательства Wiley , Шаблонные фразы, Модуль поиска "tsu", Кольцо вузов



СОВПАДЕНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
24,01%	0%	1,34%	74,65%

ПОДОЗРИТЕЛЬНЫЙ ДОКУМЕНТ

Есть подозрения на следующие группы маскировки заимствований: СВЯЗНОСТЬ ТЕКСТА

Совпадения — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.

Самоцитирования — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.

Цитирования — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальный текст — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует полному тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в тексте	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	11,06%	Моисеева, Светлана Петровна Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками : диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.18 То... http://dlib.rsl.ru	12 Окт 2017	Сводная коллекция РГБ	
[02]	8,62%	ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК СМЕШАННОГО ТИПА. http://elibrary.ru	12 Мая 2010	eLIBRARY.RU	
[03]	6,8%	Синякова, Ирина Анатольевна диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2013 http://dlib.rsl.ru	29 Ноя 2014	Сводная коллекция РГБ	
[04]	6,76%	ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ. http://elibrary.ru	раньше 2011	eLIBRARY.RU	
[05]	5,75%	Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока. http://elibrary.ru	31 Авг 2011	eLIBRARY.RU	

О Т З Ы В

на выпускную квалификационную работу бакалавра по теме
«Исследование моделей систем параллельного обслуживания»
обучающегося Института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ
направления подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии
Кошкаровой Нины Анатольевны

В настоящее время круг задач, требующих для своего решения применения мощных вычислительных ресурсов, все время расширяется. Это связано с тем, что произошли фундаментальные изменения в самой организации научных исследований. Сюда можно отнести эксперименты на коллайдерах со встречными пучками, расшифровка генома человека. Полностью не решена задача безопасного хранения ядерного оружия, а из-за запрета на ядерные испытания состояние накопленных зарядов можно определить только путем компьютерного моделирования. Очевидно, что решение таких масштабных задач требует значительных вычислительных ресурсов.

Высокопроизводительные вычисления в настоящее время не мыслятся без распараллеливания, ибо наиболее мощные вычислительные системы имеют сотни и тысячи процессоров, работающих одновременно и в тесном взаимодействии.

Особенности моделей систем параллельной обработки приводят к необходимости создания новых моделей и развития методов из анализа.

Работа Кошкаровой Нины посвящена исследованию однофазных и двухфазных систем параллельного обслуживания с расщеплением (разделением или копированием) заявок входящего потока и обслуживанием в разных блоках.

Результаты, полученные в работе, могут быть применены для анализа характеристик реальных объектов, в частности, для структурной и параметрической оптимизации реальных вычислительных и телекоммуникационных системах.

За время обучения студентка зарекомендовала себя как грамотный специалист в области теории массового обслуживания, хочется отметить высокий уровень математической теоретической подготовки автора и ее умение самостоятельно проводить исследования и использовать метод производящих функций для исследования многомерных марковских процессов для решения поставленных задач.

Считаю, что выпускная квалификационная работа бакалавра «Исследование потоков заявок в системе параллельного обслуживания с обратной связью» полностью соответствует требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам по направлению 02.03.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии (уровень бакалавриата), заслуживает оценки «отлично», а Кошкарова Нина Анатольевна заслуживает присвоения степени бакалавра.

Руководитель ВКР
Профессор кафедры теории вероятностей
и математической статистики НИ ТГУ,
д-р физ.-мат.наук , профессор

_______________ С. П. Моисеева