Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, доцент

_____ О.Н. Чайковская
подпись
« 10 » июня 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

ВЕРОЯТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ФОТОНОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЗКОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ С ЗАКРУЧЕННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

по направлению подготовки 03.04.02 Физика
направленность (профиль) «Фундаментальная и прикладная физика»

Рякин Владислав Александрович

Руководитель ВКР
д-р. физ. - мат. наук, доцент

_____ П.О. Казинский
подпись
« 10 » июня 2022 г.

Автор работы
студент группы № 052041

_____ В.А. Рякин
подпись
« 10 » июня 2022 г.

Томск – 2022

АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа магистра «ВЕРОЯТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ФОТОНОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЗКОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ С ЗАКРУЧЕННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ» состоит из 40 страниц. При написании работы были использованы 46 литературных источника.

Ключевые слова: ЗАКРУЧЕННЫЕ ФОТОНЫ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ, УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ОНДУЛЯТОР, ГАУССОВ ПУЧОК, ПРАВИЛО ОТБОРА, ВЕРОЯТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ.

Цель работы: нахождение вероятности излучения закрученных фотонов при взаимодействии узкого гауссова пучка электронов с закрученным излучением.

Работа состоит из трех глав. В первой главе рассматривается излучение закрученных фотонов в эллиптическом ондуляторе. Во второй главе изложен вывод одночастичной амплитуды вероятности излучения закрученных фотонов при взаимодействии электрона с закрученным излучением. Третья глава посвящена исследованию вероятности излучения закрученных фотонов узким гауссовым пучком электронов.

В данной работе рассматривается процесс генерации закрученных фотонов ультрарелятивистскими электронами в поле закрученной электромагнитной волны. Также рассмотрено излучение закрученных фотонов в эллиптических ондуляторах. Получена амплитуда вероятности для излучения закрученных фотонов одним электроном в поле закрученного излучения. Показано, что для такого случая, как и для заряженной частицы в эллиптическом ондуляторе, верно правило отбора, обобщающее известные ранее для плоского и кругового ондуляторов. Определена средняя вероятность излучения закрученных фотонов узким гауссовым пучком электронов при лобовом столкновении с закрученным излучением. В результате анализа, полученных выражений, доказаны правила отбора для когерентного и некогерентного вкладов в излучение.

Оглавление

Введение 3

1 Излучение закрученных фотонов в эллиптических ондуляторах 6
1.1 Общие формулы 6
1.2 Излучение закрученных фотонов без отдачи 8
1.3 Класс траекторий, для которого верно правило отбора 12
1.4 Излучение закрученных фотонов с учетом квантовой отдачи 13

2 Излучение закрученных фотонов электроном взаимодействующим с закрученным излучением 17
2.1 Траектория электрона 18
2.2 Амплитуда вероятности излучения закрученных фотонов классическим током 22

3 Излучение закрученных фотонов пучком электронов 27
3.1 Общие выражения для излучения гауссовым пучком электронов 27
3.2 Излучение закрученных фотонов узким пучком электронов 29

Заключение 34

Список использованной литературы 36

Введение

Закрученные фотоны – это кванты электромагнитного поля, обладающие определенной спиральностью s, проекцией m полного углового момента на ось, вдоль которой распространяется фотон, проекцией k_3 импульса на эту ось и модулем перпендикулярной составляющей импульса $k_\perp$ [11, 12]. Эти стационарные состояния образуют полный набор, являются собственными для оператора проекции полного углового момента на ось 3 и в параксиальном режиме, $k_\perp/|k_3| \ll 1$, обладают проекцией орбитального углового момента на эту ось, $l = m - s$. Такие состояния электромагнитного поля используются для создания оптических пинцетов; в микроскопии – для увеличения контрастности изображения; в телекоммуникации и квантовой криптографии, где проекция углового момента играет роль дополнительного квантового числа, несущего информацию; при изучении вращательных степеней свободы квантовых объектов за счет возбуждения закрученными фотонами недипольных переходов (см. обзоры [13–17]). Кроме того, изучение свойств излучения в базисе закрученных фотонов позволяет увидеть такие его свойства, которые сложно обнаружить в плосковолновом базисе фотонов, обычно используемом при описании излучения. На данный момент разработаны различные типы детекторов, позволяющие регистрировать закрученные фотоны и находить количество и квантовые числа закрученных фотонов, из которых состоит приходящее в детектор электромагнитное излучение [18–27]. Поэтому полученные в данной работе выражения для среднего числа закрученных фотонов могут непосредственно наблюдаться в эксперименте.

В данной работе рассматривается вопрос о вероятности излучения закрученных фотонов в результате взаимодействия узкого пучка электронов с излучением с ненулевой проекцией полного углового момента. Эта тема представляет интерес в силу того, что полученные выражения будут описывать процесс, который можно воспроизвести в реальном эксперименте. Кроме того, рассматриваемый процесс может быть использован для генерации закрученных фотонов, имеющих энергию во много раз превосходящую энергию падающего пучка [12]. Явное выражение для вероятности этого излучения даст информации о характеристиках самого излучении. Поми-

мо этого, в работе рассмотрена связанная задач – излучение закрученных фотонов в эллиптических ондуляторах. Эта задача так же интересна, поскольку ондуляторы являются стандартным устройством для генерации мощного электромагнитного излучения с заданными свойствами в различных диапазонах частот. Известно, что круговые и плоские ондуляторы могут быть использованы в качестве ярких источников закрученных фотонов [1–7]. Свойства закрученных фотонов, излучаемых такими ондуляторами, подробно изучены в [1, 8–10]. Таким образом, целью этой работы является нахождение вероятности излучения закрученных фотонов при взаимодействии узкого гауссова пучка электронов с закрученным излучением.

В связи с поставленной целью выделено несколько задач. Во-первых, рассматривается более простая конфигурация для излучения. Конкретно, исследуется излучение закрученных фотонов эллиптическими ондуляторами. Это конфигурация похожа с математической точки зрения на основную модель, рассматриваемую в данной работе. Кроме того, базовая формула для вероятности излучения закрученных фотонов классическим током одна и та же в двух случаях. Во-вторых, для того, чтобы воспользоваться озвученной формулой для излучения закрученных фотонов электроном, взаимодействующим с закрученным светом, требуется получить траекторию электрона, которая затем используется для вычисления вероятности. В-третьих, рассматривается непосредственно излучение закрученных фотонов пучком электронов после рассеяния на закрученном свете. Сперва будут представлены выражения общего вида, из которых затем находится асимптотическое выражение для узкого пучка.

Работа структурирована следующим образом. В первом разделе рассматривается модель эллиптического ондулятора. Исследуется вопрос об излучении заряженной частицей, движущейся в ондуляторе, закрученных фотонов. Рассматривается два случая, с учетом и без учета квантовой отдачи. Определяется правило отбора для такой конфигурации, а также приводится класс траекторий, для которого это правило отбора сохраняется. Во втором разделе представлен вывод траектории электрона в результате взаимодействия с закрученным светом, и вычисление вероятности излучения закрученных фотонов. В третьем разделе рассмотрено излучение пучка электронов общего вида. Рассматривается конкретный профиль пучка

– гауссов. Получаются явные формулы для излучения закрученных фотонов узким гауссовым пучком электронов в результате взаимодействия с закрученным светом. В данной работе используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$ и $e^2 = 4\pi\alpha$, где α - постоянная тонкой структуры. Греческие индексы принимают значения $\overline{0,3}$, а латинские $\overline{1,3}$. Метрика: $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$

1 Излучение закрученных фотонов в эллиптических ондуляторах

1.1 Общие формулы

Приведем некоторые общие формулы, необходимые для вычисления среднего числа закрученных фотонов, излученных заряженными частицами в эллиптическом ондуляторе. Траектория частицы с зарядом e в эллиптическом ондуляторе с длиной одной секции λ_0 имеет вид (см., например, [28], гл. 5)

$$x = x_0 + b_x \cos\varphi, \qquad y = y_0 + b_y \sin\varphi, \qquad z = z_0 + \beta_3 t + b_3 \sin(2\varphi), \quad (1)$$

где t – лабораторное время, $\varphi = \omega t - \chi$, параметры x_0, y_0, z_0, χ – некоторые постоянные, β_3 – средняя скорость частицы вдоль оси z и $\omega = 2\pi\beta_3/\lambda_0 > 0$. Амплитуды колебаний частицы вдоль осей выражаются через компоненты напряженности магнитного поля в ондуляторе

$$b_x = \frac{\lambda_0^2 H_y}{4\pi^2\gamma}, \qquad b_y = -\frac{\lambda_0^2 H_x}{4\pi^2\gamma}, \qquad b_3 = \frac{\lambda_0^3(H_y^2 - H_x^2)}{64\pi^3\gamma^2}, \quad (2)$$

где γ – Лоренц-фактор частицы, напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ измеряется в единицах критического поля

$$H_0 = m_e^2/|e| \approx 4.41 \times 10^{13}\ \mathrm{G}, \quad (3)$$

и длины измеряются в комптоновских длинах волн, $1/m_e \approx 3.86 \times 10^{-11}$ см. Параметр дипольности для траектории (1) запишется как

$$K := \gamma\langle\beta_\perp^2\rangle^{1/2} = \lambda_0 \frac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{2\sqrt{2}\pi}. \quad (4)$$

Для амплитуд колебаний имеют место оценки

$$b_{x,y}^2 \approx \frac{K^2}{\omega^2\gamma^2}, \qquad |b_3| \approx \frac{K^2}{2\pi\omega\gamma^2}. \quad (5)$$

Выражение (1) верно в предположении, что $\gamma \gg 1$ и $K/\gamma \ll 1$. Если $K \ll 1$, то реализуется дипольный режим излучения, подробно рассмотренный в [8, 9]. Поэтому в дальнейшем считаем, что $K \gtrsim 1$, т.е. дипольное приближение не применимо для описания излучения.

Заряженная частица движется вдоль траектории (1) при $t \in [-TN/2, TN/2]$, где $T := 2\pi/\omega$ и $N \gg 1$ – число секций ондулятора. При t, не принадлежащем указанному интервалу, будем считать, что частица движется параллельно оси z со скоростью $\beta_\parallel = \sqrt{1-1/\gamma^2}$. Нас будет интересовать излучение с участка траектории $t \in [-TN/2, TN/2]$, которое доминирует при $N \gg 1$ для энергий фотонов, соответствующих гармоникам ондуляторного излучения.

Среднее число закрученных фотонов, излученных классической точечной заряженной частицей, имеет вид [8]

$$dP(s,m,k_3,k_\perp) = e^2 \Bigg| \int d\tau e^{-i[k_0 x^0(\tau) - k_3 x_3(\tau)]} \Big\{ \frac{1}{2} \big[\dot{x}_+(\tau) a_-(s,m,k_3,k_\perp;\mathbf{x}(\tau)) + \\ + \dot{x}_-(\tau) a_+(s,m,k_3,k_\perp;\mathbf{x}(\tau)) \big] + \dot{x}_3(\tau) a_3(m,k_\perp;\mathbf{x}(\tau)) \Big\} \Bigg|^2 n_\perp^3 \frac{dk_3 dk_\perp}{16\pi^2}, \quad (6)$$

где s – спиральность закрученного фотона, m – проекция полного углового момента закрученного фотона на ось z, $k_\perp$ и k_3 – соответствующие проекции импульса закрученного фотона, $k_0 = \sqrt{k_3^2 + k_\perp^2}$ – энергия фотона, $n_\perp := k_\perp/k_0$ (подробно см. [8–12]). Также были введены обозначения для компонент траектории частицы

$$x_\pm := x \pm iy. \quad (7)$$

Вклады $a_\pm$, a_3 представляют собой модовые функции закрученных фотонов без общего множителя $e^{ik_3 x_3}$. Явные выражения для модовых функций закрученных фотонов(см., например, формулу (2.5) работы [10])

$$\begin{aligned} \psi_3(m,k_3,k_\perp) &= C J_m(k_\perp r) e^{im\varphi + ik_3 z}, \\ \psi_\sigma(s,m,k_3,k_\perp) &= \frac{i^\sigma k_\perp}{\sigma s k_0 + k_3} \psi_3(m+\sigma,k_3,k_\perp). \end{aligned} \quad (8)$$

Параметр τ в (6) – произвольный параметр на мировой линии частицы. В

нашем случае его удобно выбрать равным $\tau = t \equiv x^0(t)$.

1.2 Излучение закрученных фотонов без отдачи

Чтобы найти среднее число излученных закрученных фотонов, необходимо вычислить интегралы, входящие в (6). Пусть

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{-TN/2}^{TN/2} dt e^{-ik_0[t-n_3(z_0+\beta_3 t+b_3\sin(2\varphi))]}\dot{x}_3 a_3(m,k_\perp;\mathbf{x}(t)), \\ I_\pm &:= \int_{-TN/2}^{TN/2} dt e^{-ik_0[t-n_3(z_0+\beta_3 t+b_3\sin(2\varphi))]}\dot{x}_\pm a_\mp(s,m,k_3,k_\perp;\mathbf{x}(t)), \end{aligned} \tag{9}$$

где $n_3 := k_3/k_0$. Как мы увидим, при $N \gg 1$ эти интегралы дают основной вклад в (6), т.е. вкладом краевого излучения в (6) можно пренебречь. Тогда

$$dP(s,m,k_3,k_\perp) \approx e^2\left|I_3 + (I_+ + I_-)/2\right|^2 n_\perp^3 \frac{dk_3 dk_\perp}{16\pi^2}. \tag{10}$$

Компоненты траектории частицы (1) имеют вид

$$x_\pm = x_\pm^0 + Re^{\pm i\varphi} + De^{\mp i\varphi}, \tag{11}$$

где

$$R := (b_x + b_y)/2, \qquad D := (b_x - b_y)/2, \qquad x_\pm^0 := x_0 \pm iy_0. \tag{12}$$

Компоненты скорости запишутся как

$$\dot{x}_\pm = \pm i\omega(Re^{\pm i\varphi} - De^{\mp i\varphi}), \qquad \dot{x}_3 = \beta_3 + 2\omega b_3\cos(2\varphi). \tag{13}$$

Второе слагаемое в последнем выражении дает малый вклад в области параметров, где сосредоточена основная часть излучения, т.е. при $n_\perp\gamma \lesssim \max(1,K)$, и мы будем им пренебрегать.

Начнем с интеграла I_3. Его вычисление удобно проводить, используя теорему сложения для функций Бесселя (см. (A6) в [8]) в виде

$$j_\nu(x_+ + y_+, x_- + y_-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{\nu-n}(x_+,x_-)j_n(y_+,y_-), \tag{14}$$

и свойство

$$j_m(ap, q/a) = a^m j_m(p, q), \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Определение функций $j_\nu(p, q)$ и их свойства см. в Приложении А работы [8]. Применяя эти соотношения, получаем

$$j_m(k_\perp x_+, k_\perp x_-)e^{ik_3 b_3 \sin(2\varphi)} = \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} j^0_{m-n-2k+2r} J_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) J_r(\varkappa) e^{in\varphi}, \tag{16}$$

где экспонента в левой части этого равенства была разложена стандартным образом в ряд Фурье с коэффициентами в виде функций Бесселя, и для краткости были введены обозначения

$$j^0_m := j_m(k_\perp x^0_+, k_\perp x^0_-), \qquad \rho := k_\perp R, \qquad \delta := k_\perp D, \qquad \varkappa = k_3 b_3. \tag{17}$$

Вся зависимость от t выражения (16) содержится в экспоненте в правой части (16). В результате, интеграл по t легко вычисляется

$$\begin{aligned} I_3 = 2\pi\beta_3 \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} & \delta_N\big(k_0(1 - n_3\beta_3) - n\omega\big) e^{ik_3 z_0 - in\chi} j^0_{m-n-2k+2r} \times \\ & \times J_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) J_r(\varkappa), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\delta_N(x) := \frac{\sin(TNx/2)}{\pi x}. \tag{19}$$

Схожим образом вычисляются интегралы $I_\pm$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} I_\pm = -2\pi\omega \frac{n_3 \pm s}{n_\perp} \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} & \delta_N\big(k_0(1 - n_3\beta_3) - n\omega\big) e^{ik_3 z_0 - in\chi} j^0_{m-n-2k+2r} \times \\ & \times \big[R J_{n+k-2r\mp1}(\rho) J_k(\delta) - D J_{n+k-2r}(\rho) J_{k\mp1}(\delta)\big] J_r(\varkappa). \end{aligned} \tag{20}$$

Два слагаемых в квадратных скобках идут от двух слагаемых в выражении для $\dot{x}_\pm$ в (13). Выражения (18), (20) при больших N имеют резкие максимумы при

$$k_0 = \frac{n\omega}{1 - n_3\beta_3}, \qquad n = \overline{1, \infty}, \tag{21}$$

соответствующие гармоникам ондуляторного излучения. Число n нумерует гармоники.

Таким образом, одночастичная амплитуда излучения закрученного фотона пропорциональна

$$I_3 + (I_+ + I_-)/2 = -2\pi \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} \delta_N\big(k_0(1-n_3\beta_3) - n\omega\big) e^{ik_3 z_0 - in\chi} \times \\ \times j^0_{m-n-2k+2r} J_r(\varkappa) \Big\{ \Big(\frac{\omega(n-2r)n_3}{k_\perp n_\perp} - \beta_3 \Big) J_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) + \\ + \frac{s\omega}{n_\perp} \big[R J'_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) - D J_{n+k-2r}(\rho) J'_k(\delta) \big] \Big\}. \tag{22}$$

Данное выражение для амплитуды излучения может быть использовано для описания как когерентного, так и некогерентного излучения закрученных фотонов пучками частиц (см. [29–31]). Теперь легко видеть, учитывая оценки (5), что после подстановки в (10) учет второго слагаемого в $\dot{x}_3$ в (13) приводит к поправке порядка, или меньше, $n_\perp^2$ по сравнению с остальными слагаемыми. Поэтому данным вкладом можно пренебречь при $n_\perp^2 \ll 1$.

Пренебрегая интерференционными вкладами между различными гармониками, для среднего числа закрученных фотонов (6), излученных заряженной частицей в эллиптическом ондуляторе, получаем

$$dP(s,m,k_3,k_\perp) \approx \frac{e^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_N^2\big(k_0(1-n_3\beta_3) - n\omega\big) \Big| \sum_{k,r=-\infty}^{\infty} j^0_{m-n-2k+2r} J_r(\varkappa) \times \\ \times \Big\{ \Big(\frac{\omega(n-2r)n_3}{k_\perp n_\perp} - \beta_3 \Big) J_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) + \\ + \frac{s\omega}{n_\perp} \big[R J'_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) - D J_{n+k-2r}(\rho) J'_k(\delta) \big] \Big\} \Big|^2 n_\perp^3 \, dk_3 dk_\perp. \tag{23}$$

В случае, когда $k_\perp |x^0_+| \ll 1$, т.е. когда центр эллипса спирали, вдоль которой движется частица, близок к оси, относительно которой определяется угловой момент закрученных фотонов, имеет место соотношение

$$j^0_{m-n-2k+2r} \approx \delta_{m,n+2k-2r}. \tag{24}$$

Тогда для излучения закрученных фотонов получаем правило отбора: $m+n$ – четное число. Такое же правило отбора возникало для излучения заряженной частицы, движущейся в плоском ондуляторе [8–10]. Для кругового ондулятора выполнено правило отбора $m = \pm n$, где знак определяется киральностью спирали [1, 8, 9, 32–34]. Ясно, что и в этом случае $m + n$ – четное число. Отметим, что учет второго слагаемого в выражении для $\dot{x}_3$ в (13) не нарушает данного правила отбора.

Считая соотношение (24) выполненным, выражение (23) можно несколько упростить

$$\frac{dP(s,m,k_3,k_\perp)}{n_\perp^3\,dk_3dk_\perp} \approx \frac{e^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_N^2\big(k_0(1-n_3\beta_3)-n\omega\big)\Bigg[\sum_{r=-\infty}^{\infty}J_r(\varkappa)\times \\ \times\Bigg\{\Big(\frac{\omega(n-2r)n_3}{k_\perp n_\perp}-\beta_3\Big)J_{(m+n)/2-r}(\rho)J_{(m-n)/2+r}(\delta)+ \\ +\frac{s\omega}{n_\perp}\big[RJ'_{(m+n)/2-r}(\rho)J_{(m-n)/2+r}(\delta)-DJ_{(m+n)/2-r}(\rho)\times \\ \times J'_{(m-n)/2+r}(\delta)\big]\Bigg\}\Bigg]^2. \tag{25}$$

Помимо правила отбора, $m+n$ – четное число, для данного выражения верно соотношение, что при замене знака киральности эллиптической спирали среднее число закрученных фотонов преобразуется как

$$dP(s,m,k_\perp,k_3)\to dP(-s,-m,k_\perp,k_3). \tag{26}$$

Для плоского ондулятора – это преобразование симметрии [8–10, 35]. В частных случаях плоского и кругового ондуляторов формула (25) переходит в соответствующие выражения для среднего числа излученных закрученных фотонов, полученных в [8].

1.3 Класс траекторий, для которого верно правило отбора

Полученное выше правило отбора верно для излучения закрученных фотонов заряженной частицей, движущейся вдоль траектории

$$x_+ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(2k+1)\varphi}, \qquad x_- = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-i(2k+1)\varphi}, \qquad z = \beta_3 t + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{2ik\varphi}, \tag{27}$$

где $d_k^* = d_{-k}$. Докажем это утверждение.

Рассмотрим излучение закрученных фотонов заряженной частицей, движущейся вдоль траектории (27). Верны соотношения

$$\exp\left(i\sum_{k=-\infty}^{\infty} k_3 d_k e^{2ik\varphi}\right) = e^{ik_3 d_0}\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left[i(k_3 d_k e^{2ik\varphi} + k_3 d_k^* e^{-2ik\varphi})\right] =$$
$$= e^{ik_3 d_0}\sum_{\{k_r\}}\exp\left(i\sum_{r=1}^{\infty} 2rk_r\varphi\right)\prod_{r=1}^{\infty} i^{k_r} j_{k_r}(2k_3 d_r, 2k_3 d_r^*), \tag{28}$$

где в последнем выражении сумма идет по всем целочисленным последовательностям $\{k_r\}$, $r = \overline{1,\infty}$, с конечным числом отличных от нуля членов. Аналогично, многократно применяя теорему сложения (14) и свойство (15), имеем

$$j_m(k_\perp x_+, k_\perp x_-) = \sum_{\{l_q\}}\delta_{m,\sum_q l_q}\exp\left(im\varphi + i\sum_{q=-\infty}^{\infty} 2ql_q\varphi\right)\prod_{q=-\infty}^{\infty} j_{l_q}(k_\perp c_q, k_\perp c_q^*), \tag{29}$$

где сумма идет по всем целочисленным последовательностям $\{l_q\}$, $q = \overline{-\infty,\infty}$, с конечным числом отличных от нуля членов. В результате, подынтегральное выражение I_3 запишется как

$$\dot{x}_3 j_m(k_\perp x_+, k_\perp x_-)\exp\left(i\sum_{k=-\infty}^{\infty} k_3 d_k e^{2ik\varphi}\right) = e^{ik_3 d_0}\sum_{\{k_r\},\{l_q\},r'} 2i\omega r' d_{r'}\delta_{m,\sum_q l_q} e^{in\varphi}\times$$
$$\times\left[\prod_{r=1}^{\infty} i^{k_r} j_{k_r}(2k_3 d_r, 2k_3 d_r^*)\right]\prod_{q=-\infty}^{\infty} j_{l_q}(k_\perp c_q, k_\perp c_q^*), \tag{30}$$

где $2i\omega r' d_{r'}$ нужно заменить на β_3 при $r' = 0$, и номер гармоники

$$n = m + \sum_{r=1}^{\infty} 2rk_r + \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2ql_q + 2r'. \tag{31}$$

Очевидно, что $m+n$ – четное число. Таким же образом разлагаются подынтегральные выражения в $I_\pm$. Для них также выполнено соотношение: $m+n$ – четное число.

1.4 Излучение закрученных фотонов с учетом квантовой отдачи

Учтем теперь влияние квантовой отдачи на излучение закрученных фотонов, используя подход, развитый в [9, 10]. Данный подход является адаптацией метода Байера-Каткова [36, 37] для описания квантового излучения, создаваемого ультрарелятивистскими заряженными скалярными и дираковскими частицами в области параметров, где сосредоточена основная часть излучения. Поскольку в ондуляторе $P_0 := m_e\gamma$ является интегралом движения заряженной частицы, для описания излучения можем воспользоваться формулой (2.13) работы [10]. Пусть

$$q := P_0/(P_0 - k_0), \tag{32}$$

и

$$k_0' := q[k_0 - k_\perp^2/(2P_0)], \qquad k_3' = qk_3, \qquad \varkappa' := qk_3b_3. \tag{33}$$

При вычислении вероятности излучения закрученного фотона согласно формуле (2.13) работы [10], возникают интегралы вида (9) с очевидными заменами. Обозначим эти интегралы как I_3' и $I_\pm'$. Тогда с точностью до несущественной общей фазы имеем

$$
\begin{aligned}
I_3' &= 2\pi \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} \delta_N\big(k_0' - k_3'\beta_3 - n\omega\big) e^{-in\chi} j^0_{m-n-2k+2r} J_{n+k-2r}(\rho) J_k(\delta) J_r(\varkappa'), \\
I_s' &= -\frac{4\pi\omega}{n_\perp} \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} \delta_N\big(k_0' - k_3'\beta_3 - n\omega\big) e^{-in\chi} j^0_{m-n-2k+2r} \times \\
&\quad \times \big[R J_{n+k-2r-s}(\rho) J_k(\delta) - D J_{n+k-2r}(\rho) J_{k-s}(\delta)\big] J_r(\varkappa'),
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где мы учли, что в рассматриваемом приближении $n_3 \approx 1$.

Равенство нулю аргумента $\delta_N(x)$ дает энергию фотонов, излучаемых на гармонике n с учетом квантовой отдачи. Если пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках в выражении для k_0' в (33), которое в рассматриваемом приближении мало, то спектр ондуляторного излучения запишется как

$$
k_0 = \frac{n\omega}{1 - n_3\beta_3 + n\omega/P_0}, \qquad n = \overline{1,\infty}. \tag{35}
$$

В результате, пренебрегая интерференцией различных гармоник, получаем инклюзивную вероятность излучения одного закрученного фотона заряженной дираковской частицей в эллиптическом ондуляторе в ведущем порядке теории возмущений

$$
\begin{aligned}
\frac{dP(s,m,k_3,k_\perp)}{n_\perp^3 dk_3 dk_\perp} \approx \frac{e^2}{4}\frac{1+q^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_N^2\big(k_0' - k_3'\beta_3 - n\omega\big) \Bigg| \sum_{k,r=-\infty}^{\infty} j^0_{m-n-2k+2r} J_r(\varkappa') \times \\
\times \Bigg\{ \big[J_{n+k-2r}(\rho) - \frac{\omega R}{n_\perp} J_{n+k-2r-s}(\rho)\big] J_k(\delta) + \frac{\omega D}{n_\perp} \times \\
\times J_{n+k-2r}(\rho) J_{k-s}(\delta) \Bigg\} \Bigg|^2 .
\end{aligned}
\tag{36}
$$

При $k_\perp |x_+^0| \ll 1$ верно соотношение (24) и, следовательно, выполнено правило отбора: $m+n$ – четное число, т.е. это правило отбора не нарушается при учете квантовой отдачи.

В области параметров $k_\perp |x_+^0| \ll 1$ выражение (36) можно упростить.

Введем функции

$$g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta) := \frac{1+(-1)^{n+m}}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(\varkappa)J_{(m+n)/2-r}(\rho)J_{(m-n)/2+r}(\delta). \qquad (37)$$

Фактически, эти функции являются коэффициентами ряда Фурье (16) при $x_{\pm}^0 = 0$.

Приведем некоторые важные свойства функций (37).

Свойства симметрии:

$$g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta) = (-1)^m g_{n,-m}(\varkappa,\delta,\rho), \qquad g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta) = g_{-n,m}(-\varkappa,\rho,\delta). \quad (38)$$

Рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
2mg_{nm} &= \rho(g_{n+1,m+1} + g_{n-1,m-1}) + \delta(g_{n+1,m-1} + g_{n-1,m+1}),\\
2\frac{\partial g_{nm}}{\partial \varkappa} &= g_{n-2,m} - g_{n+2,m},\\
2\frac{\partial g_{nm}}{\partial \rho} &= g_{n-1,m-1} - g_{n+1,m+1},\\
2\frac{\partial g_{nm}}{\partial \delta} &= g_{n+1,m-1} - g_{n-1,m+1},
\end{aligned} \qquad (39)$$

где $g_{nm} \equiv g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta)$. Производящая функция:

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} g_{nm}s^n t^m = \exp\Big[\frac{\varkappa}{2}\Big(s^2 - \frac{1}{s^2}\Big) + \frac{\rho}{2}\Big(st - \frac{1}{st}\Big) + \frac{\delta}{2}\Big(\frac{t}{s} - \frac{s}{t}\Big)\Big],$$

$$g_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi d\psi}{(2\pi)^2} \exp\Big\{i\big[\varkappa\sin(2\psi) + \rho\sin(\varphi+\psi) + \delta\sin(\varphi-\psi) - n\psi - m\varphi\big]\Big\}. \qquad (40)$$

Используя производящую функцию, несложно получить правила сумм

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta) = J_n(\rho-\delta,\varkappa), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta) = J_m(\rho+\delta),$$
$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta) = 1, \qquad (41)$$

где $J_n(x,y)$ – обобщенная функция Бесселя двух аргументов [28, 41–44].

Для вероятности (36) получаем

$$\frac{dP(s,m,k_3,k_\perp)}{n_\perp^3 dk_3 dk_\perp} = \frac{e^2}{4}\frac{1+q^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_N^2\big(k_0' - k_3'\beta_3 - n\omega\big)\times \\ \times\left(g_{nm} - \frac{\omega R}{n_\perp}g_{n-s,m-s} + \frac{\omega D}{n_\perp}g_{n+s,m-s}\right)^2, \tag{42}$$

где $g_{nm} \equiv g_{nm}(\varkappa', \rho, \delta)$. Для вероятности излучения закрученных фотонов, создаваемых скалярными частицами, общий множитель $(1+q^2)/2$ нужно заменить на q (см. (2.10) в [10]). В частных случаях кругового и плоского ондуляторов выражение (42) переходит в формулы (54) работы [9] и (3.7) работы [10]. Кроме того, в пределе малой отдачи в параксиальном режиме, $n_\perp^2 \ll 1$, формула (42) переходит в (25). Используя свойства симметрии (38), несложно видеть, что при замене знака киральности эллиптической спирали траектории частицы в ондуляторе вероятность излучения закрученного фотона (42) преобразуется согласно (26). Кроме того, несложно проверить, что учет квантовой отдачи, не нарушает правила отбора для всего класса траекторий указанных ранее, по крайней мере в случае, когда $P_0 = const$.

2 Излучение закрученных фотонов электроном взаимодействующим с закрученным излучением

Требуется найти амплитуду вероятности излучения закрученных фотонов в обратном комптоновском рассеянии электрона на закрученных фотонах. Для этого сперва необходимо найти траекторию электрона в результате рассеяния. Траектория является решением уравнений Лоренца, тензор напряженности электромагнитного поля в котором соответствует решению уравнений Максвелла для закрученных фотонов.

С помощью волновых функций закрученных фотонов (8) построим векторный потенциал электромагнитного поля в кулоновской калибровке. Для этого сперва нужно перейти от базиса (e_+, e_-, e_3) в собственном подпространстве состояний к базису (e_1, e_2, e_3). Тогда

$$A_0 = 0, \quad A_i(r, \varphi, z, t) = C\,\mathrm{Re}(\psi_{\alpha i}(r, \varphi, z)e^{-ik_{0\alpha}t}). \tag{43}$$

Компоненты потенциала в явном виде

$$\begin{gathered} A_1 = A\frac{k_\perp}{2}\big[\sin(k_0t - (m+1)\varphi - k_3z)\frac{J_{m+1}(k_\perp r)}{sk_0 + k_3} + \sin(k_0t - (m-1)\varphi - k_3z)\frac{J_{m-1}(k_\perp r)}{sk_0 - k_3}\big], \\ A_2 = A\frac{k_\perp}{2}\big[\cos(k_0t - (m+1)\varphi - k_3z)\frac{J_{m+1}(k_\perp r)}{sk_0 + k_3} - \cos(k_0t - (m-1)\varphi - k_3z)\frac{J_{m-1}(k_\perp r)}{sk_0 - k_3}\big], \\ A_3 = AJ_m(k_\perp r)\cos(m\varphi + k_3z - k_0t). \end{gathered} \tag{44}$$

Теперь построим тензор электромагнитного поля:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{45}$$

Получим его компоненты в явном виде. Заметим, что при $\mu = i, \nu = j$ компоненты тензора в точности совпадают с результатом действия оператора Максвелла-Гамильтона на волновые функции. Так как потенциал выражается через моды, несложно получить соотношение:

$$F^{ij} = sk_0\varepsilon_{ijk}A^k. \tag{46}$$

Временные компоненты тензора также легко находятся, поскольку $A_0 = 0$.

$$F^{0i} = -\partial_t A^i. \tag{47}$$

Если собрать все в матрицу:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_t A_1 & -\partial_t A_2 & -\partial_t A_3 \\ \partial_t A_1 & 0 & sk_0 A_3 & -sk_0 A_2 \\ \partial_t A_2 & -sk_0 A_3 & 0 & sk_0 A_1 \\ \partial_t A_3 & sk_0 A_2 & -sk_0 A_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1 Траектория электрона

Запишем теперь уравнения Лоренца в общем виде:

$$m_e \ddot{x}^\mu = eF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu. \tag{48}$$

В этой формуле точка обозначает производную по собственному времени частиц. Однако, удобнее будет переписать уравнения для лабораторной системы координат (используя γ-фактор Лоренца : $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$):

$$m_e \frac{d(\gamma \dot{x}^\mu)}{dt} = eF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu, \tag{49}$$

Здесь и далее, точка обозначает производную по лабораторному времени. Ясно, что при такой параметризации $\dot{x}^0 = 1$. Далее, учитывая, что $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ($\beta^i = \dot{x}^i$), распишем по правилу Лейбница производную, и запишем нулевое уравнение отдельно от остальных

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{e}{m_e} F^{0j}\beta_j, \\ \gamma\ddot{x}^i + \dot{x}^i \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{e}{m_e}(-F^{i0} + F^{ij}\beta_j). \end{aligned} \tag{50}$$

Подставив нулевое уравнение в остальные и преобразовав, получим:

$$\dot{\beta}^i = \frac{1}{\gamma}\frac{e}{m_e}(-F^{i0} + F^{ik}\beta_k - \beta^i F^{0j}\beta_j). \tag{51}$$

Будем считать, что электрон движется достаточно быстро, то есть $\gamma \gg 1$. В таком случае можем воспользоваться ультрарелятивистским при-

ближением. На современных ускорителях достигаются значения γ до 10^5, так что такое приближение вполне оправдано.

В рассматриваемой задаче, электрон движется преимущественно вдоль третьей оси. В таком случае, $\beta_\perp \ll 1$ и можем разложить $\vec{\beta}$ на основной вклад и на малые поправки:

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 + \delta\vec{\beta}. \tag{52}$$

Заметим также, что $|\vec{\beta}_0| \approx 1$ в нулевом приближении. Для дополнительного упрощения решения будем считать, что эта ось совпадает с осью, вдоль которой движется пучок фотонов. Тогда, $\delta\vec{\beta}$ разложим на перпендикулярную часть и параллельную и оценим их порядки малости относительно друг друга. Несложный анализ дает результат $\delta\beta_{||} \approx \delta\beta_\perp^2$, то есть поправка к скорости параллельная движению много меньше поправки к перпендикулярной компоненте. Еще одно важное отношение порядков малости это $\delta\beta_\perp = \frac{K}{\gamma} \ll 1$, где K так же как и выше - параметр дипольности. Такое приближение называется эйкональным.

В нулевом приближении система (51) выглядит как $\dot{\beta}_i = 0$, то есть прямолинейное движение. Учитывая, что электрон движется в направлении светового пучка, получим решение:

$$\begin{aligned} \beta_{0,1} &= 0, \\ \beta_{0,2} &= 0, \\ \beta_{0,3} &= const =: \beta_0. \end{aligned} \tag{53}$$

Здесь предполагается, что β_0 может быть меньше нуля. Для определенности положим, что фотон движется в положительном направлении оси z. Траекторию тогда представим следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{0,1} + \delta x_1, \\ x_1 &= x_{0,2} + \delta x_2, \\ x_3 &= x_{0,3} + \beta_0\, t + \delta x_3. \end{aligned} \tag{54}$$

Теперь для нахождения решения в первом порядке малости подставим эту траекторию в тензор электромагнитного поля и разложим его компоненты

по δx_i. В силу того, что правая часть уравнения (51) уже имеет первый порядок малости, достаточно учесть нулевое слагаемое ряда Тейлора. Только для третьей компоненты удержим следующий порядок малости, поскольку, как будет видно, слагаемые первого порядка малости будут вычитаться. Соответственно уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\beta}_1 &= \frac{1}{\gamma}\frac{e}{m_e}(-F^{10}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t) + F^{13}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t)\beta_0), \\
\delta\dot{\beta}_2 &= \frac{1}{\gamma}\frac{e}{m_e}(-F^{20}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t) + F^{23}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t)\beta_0), \\
\delta\dot{\beta}_3 &= \frac{1}{\gamma}\frac{e}{m_e}(F^{30}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t)(\beta_0^2 - 1) + F^{31}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t)\delta\beta_1 + \\
&\quad + F^{32}(t, r_0, \phi_0, z_0 + \beta_0\ t)\delta\beta_2)
\end{aligned} \tag{55}$$

Видно, что первое слагаемое в третьем уравнении имеет порядок малости более высокий, чем другие два. Соответственно уравнение примет вид:

$$\delta\dot{\beta}_3 = \frac{1}{\gamma}\frac{e}{m_e}(F^{31}\delta\beta_1 + F^{32}\delta\beta_2). \tag{56}$$

Каждое из уравнений (55) интегрируется дважды с учетом гладкого включения поля. Это значит, что амплитуда считается медленно меняющейся функцией времени, производная от амплитуды считается малой, и есть момент времени T в который амплитуда равна нулю. На примере первой компоненты:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x}_1 = -\int_T^t d\tau \frac{A(\tau)}{\gamma}\frac{e}{m_e}\frac{k_\perp}{2}\big[C_+^s J_{m+1}(k_\perp r_0)\cos(\omega t - k_3 z_0 - (m+1)\phi_0) + \\
+ C_-^s J_{m-1}(k_\perp r_0)\cos(\omega t - k_3 z_0 - (m-1)\phi_0)\big] = \\
= \int_T^t d\tau A(\tau)F(\tau) = A(\tau)f(\tau)\big|_T^t - \int_T^t d\tau A'(\tau)f(\tau) = A(t)f(t)
\end{aligned} \tag{57}$$

Здесь $F(t)$ - производная от $f(t)$. Кроме того, в это формуле и в дальнейшем принято обозначение, $\omega = k_0 - k_3\beta_0$. Аналогично проводится второе

интегрирование. Полученная траектория:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_{0,1} + \frac{A}{\gamma}\frac{e}{m_e}\frac{k_\perp}{2\omega^2}\big[C_+^s J_{m+1}(k_\perp r_0)\cos(\omega t - k_3 z_0 - (m+1)\phi_0) + \\
&\qquad + C_-^s J_{m-1}(k_\perp r_0)\cos(\omega t - k_3 z_0 - (m-1)\phi_0)\big], \\
x_2 &= x_{0,2} + \frac{A}{\gamma}\frac{e}{m_e}\frac{k_\perp}{2\omega^2}\big[- C_+^s J_{m+1}(k_\perp r_0)\sin(\omega t - k_3 z_0 - (m+1)\phi_0) + \\
&\qquad + C_-^s J_{m-1}(k_\perp r_0)\sin(\omega t - k_3 z_0 - (m-1)\phi_0)\big], \\
x_3 &= z_0 + \beta_0\, t - \frac{A^2}{2\gamma^2}\frac{e^2}{m_e^2}\frac{s k_0^2 \beta_0}{2\omega^3} J_{m-s}(k_\perp r_0) J_{m+s}(k_\perp r_0)\sin(2\omega t - 2k_3 z_0 - 2m\phi_0),
\end{aligned}
\tag{58}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_+^s &= \frac{1 + s\beta_0}{s + n_3} \\
C_-^s &= \frac{1 - s\beta_0}{s - n_3}.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Видно, что траектория представляет спираль, в сечении которой лежит эллипс.

Заметим, что, подставляя $s = \pm 1$, можно записать траекторию эквивалентным образом:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_{0,1} + s\frac{A}{\gamma}\frac{e}{m_e}\frac{k_\perp}{2\omega^2}\big[C_+ J_{m+s}(k_\perp r_0)\cos(\omega t - k_3 z_0 - (m+s)\phi_0) + \\
&\qquad + C_- J_{m-s}(k_\perp r_0)\cos(\omega t - k_3 z_0 - (m-s)\phi_0)\big], \\
x_2 &= x_{0,2} + \frac{A}{\gamma}\frac{e}{m_e}\frac{k_\perp}{2\omega^2}\big[- C_+ J_{m+s}(k_\perp r_0)\sin(\omega t - k_3 z_0 - (m+s)\phi_0) + \\
&\qquad + C_- J_{m-s}(k_\perp r_0)\sin(\omega t - k_3 z_0 - (m-s)\phi_0)\big],
\end{aligned}
\tag{60}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_+ &= \frac{1 + \beta_0}{1 + n_3} \\
C_- &= \frac{1 - \beta_0}{1 - n_3}.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Проанализируем отношение $\frac{C_+}{C_-}$. Заметим тот факт, что при движении электрона навстречу фотону это отношение примет вид:

$$
\frac{1 - |\beta_0|}{1 + n_3}\frac{1 - n_3}{1 + |\beta_0|} \approx \frac{1}{1 + n_3}\frac{1 - n_3}{4\gamma^2} \ll 1. \tag{62}
$$

Из этого следует, что для столкновения лоб-в-лоб $C_+ \ll C_-$, следовательно слагаемые с C_+ можно отбросить в выражении (60). Однако для других случаев подобного отношения уже не наблюдается:

$$\frac{1+\beta_0}{1+n_3}\frac{1-n_3}{1-\beta_0} \approx \frac{4\gamma^2(1-n_3)}{1+n_3}\ \gamma^2(1-n_3). \tag{63}$$

Ясно, что, подбирая параметры системы, можно добиться чтобы это выражение было как очень мало, так и очень велико.

На данный момент не обязательно конкретизировать направление движения электрона. То есть рассмотрим одновременно оба случая.

Параметр дипольности для траектории (60) запишется как

$$K := \gamma\langle\beta_\perp^2\rangle^{1/2} = \frac{A}{n_\perp}\frac{e}{m_e}. \tag{64}$$

Выражение (60), как и выражение для траектории электрона в ондуляторе верно в предположении, что $\gamma \gg 1$ и $K/\gamma \ll 1$. Здесь также в дальнейшем считаем, что $K \gtrsim 1$, т.е. дипольное приближение не применимо для описания излучения. Видно также, что (60) подпадает под вид (27). То есть для этой траектории должно также наблюдаться правило отбора $m+n=2k$. Это станет явно видно в дальнейшем.

Прочие комментарии, связанные с излучением закрученных фотонов заряженной частицей в эллиптическом ондуляторе, здесь также имеют место.

2.2 Амплитуда вероятности излучения закрученных фотонов классическим током

Среднее число закрученных фотонов, излученных классической точечной заряженной частицей, имеет вид (6), перепишем ее вновь, чтобы ввести новые обозначения.

$$dP(s',m',k_3',k_\perp') = e^2\Bigg|\int d\tau e^{-i[k_0'x^0(\tau)-k_3'x_3(\tau)]}\Big\{\frac{1}{2}\big[\dot{x}_+(\tau)a_-(s',m',k_3',k_\perp';\mathbf{x}(\tau))+$$

$$+\dot{x}_-(\tau)a_+(s',m',k_3',k_\perp';\mathbf{x}(\tau))\big]+\dot{x}_3(\tau)a_3(m',k_\perp';\mathbf{x}(\tau))\Big\}\Bigg|^2 n_\perp'^3\frac{dk_3'dk_\perp'}{16\pi^2}, \tag{65}$$

где штрихованные величины - параметры излученного фотона. Явные выражения для модовых функций закрученных фотонов

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= \frac{in'_{\perp}}{s' \pm n'_3} j_{m'\pm 1}(k'_{\perp}x_+, k'_{\perp}x_-) \\ a_3 &= j_{m'}(k'_{\perp}x_+, k'_{\perp}x_-) \end{aligned} \tag{66}$$

(см. подробнее в формуле (2.5) работы [10]). Параметр τ в нашем случае равен $\tau = t \equiv x^0(t)$.

Как будет показано в разделе 3, для вероятности излучения закрученных фотонов пучком электронов требуется выражение для одночастичной амплитуды вероятности излучения. Поэтому здесь рассматривается не сама вероятность. Выражение для амплитуды излучения на основе формулы (65):

$$A(x_0) = \int dt \{\frac{1}{2}[a_+\dot{x}_- + a_-\dot{x}_+] + a_3\dot{x}_3\} e^{-i(k'_0 - \beta_0 k'_3)t} e^{ik'_3\delta x_3} e^{-i(k'_0 t_0 - k'_3 z_0)}. \tag{67}$$

Вычисления этой амплитуды происходят аналогично выкладкам, представленным в первом разделе. Для этого представим траекторию(60) в базисе (7):

$$\begin{aligned} x_+ &= x^0_+ + sR_+ e^{-is(\omega t - \chi_+)} + sR_- e^{is(\omega t - \chi_-)} = x^0_+ + y_+ + z_+, \\ x_- &= x^0_- + sR_+ e^{+is(\omega t - \chi_+)} + sR_- e^{-is(\omega t - \chi_-)} = x^0_- + y_- + z_-, \\ x_3 &= z_0 + \beta_0\, t - \tfrac{A^2}{2\gamma^2}\tfrac{e^2}{m_e^2}\tfrac{sk_0^2\beta_0}{2\omega^3} J_{m-s}(k_\perp r_0) J_{m+s}(k_\perp r_0) \sin(2\omega t - 2k_3 z_0 - 2m\phi_0), \end{aligned} \tag{68}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &a = \frac{A}{\gamma}\frac{e}{m_e}\frac{k_\perp}{2\omega^2}, \quad R_+ = aC_+ J_{m+s}(r_0 k_\perp), \quad R_- = aC_- J_{m-s}(r_0 k_\perp), \\ &\chi_+ = \chi + s\phi_0, \quad \chi_- = \chi - s\phi_0, \quad \chi = k_3 z_0 + m\phi_0. \end{aligned} \tag{69}$$

Теперь выразим $a_\pm$ и a_3 используя теорему о суммировании для функций $j_m(k_\perp x_+, k_\perp x_-)$, которая присутствует в работе [8]:

$$a_{\pm} = \frac{in'_{\perp}}{s' \pm n'_3} j_{m'\pm 1}(k'_{\perp}x_+, k'_{\perp}x_-) =$$

$$= \frac{in'_\perp}{s' \pm n'_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{m'+n\pm1}(k'_\perp x^0_+, k'_\perp x^0_-) j_n(-k'_\perp(y_- + z_-), -k'_\perp(y_+ + z_+)) =$$

$$= \frac{in'_\perp}{s' \pm n'_3} \sum_{n,j=-\infty}^{\infty} j_{m'+n\pm1}(k'_\perp x^0_+, k'_\perp x^0_-) j_{n+j}(-k'_\perp y_-, -k'_\perp y_+) j_j(k'_\perp z_+, k'_\perp z_-) =$$

$$= \frac{in'_\perp}{s' \pm n'_3} \sum_{n,j=-\infty}^{\infty} J_{m'+n\pm1}(k'_\perp r_0) J_{n+j}(k'_\perp R_+) J_j(k'_\perp R_-) e^{is(n+2j)\omega t} \times$$

$$\times e^{is(s(m'+n\pm1)\phi_0 - 2j\chi - n\chi_+)} = \frac{in'_\perp}{s' \pm n'_3} \sum_{n,j=-\infty}^{\infty} J_{m'+n}(k'_\perp r_0) J_{n+j\mp1}(k'_\perp R_+) \times$$

$$\times J_j(k'_\perp R_-) e^{is(n\mp1+2j)\omega t} e^{is(s(m'+n)\phi_0 - 2j\chi - (n\mp1)\chi_+)},$$

$$a_3 = \sum_{n,j=-\infty}^{\infty} J_{m'+n}(k'_\perp r_0) J_{n+j}(k'_\perp R_+) J_j(k'_\perp R_-) e^{is(n+2j)\omega t} e^{is(s(m'+n)\phi_0 - 2j\chi - n\chi_+)}. \tag{70}$$

Далее, вычисляя $a_+\dot{x}_-, a_-\dot{x}_+$, приводим их и $a_3 x_3$ к такому виду, чтобы можно было вынести общую экспоненту за скобку. Получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2}[a_+\dot{x}_- + a_-\dot{x}_+] + a_3 x_3 = \sum_{n,j=-\infty}^{\infty} J_{m'+n}(k'_\perp r_0) e^{is(n+2j)\omega t} e^{is(sm'\phi_0 - (2j+n)\chi)} \Theta_{n,j}, \tag{71}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
\Theta_{n,j} =& \beta_0 J_{n+j}(k'_\perp R_+) J_j(k'_\perp R_-) + \frac{\omega n'_\perp}{2} R_+ J_j(k'_\perp R_-) \Big(\frac{J_{n+j+1}(k'_\perp R_+)}{s' - n'_3} - \\
& - \frac{J_{n+j-1}(k'_\perp R_+)}{s' + n'_3} \Big) + \frac{\omega n'_\perp}{2} R_- J_{n+j}(k'_\perp R_+) \Big(\frac{J_{j+1}(k'_\perp R_-)}{s' + n'_3} - \frac{J_{j-1}(k'_\perp R_-)}{s' - n'_3} \Big) = \\
=& J_{n+j}(k'_\perp R_+) J_j(k'_\perp R_-) \Big(\beta_0 + \frac{n\omega k'_3}{(k'_\perp)^2} \Big) + \\
& + \frac{\omega s'}{n'_\perp} (R_+ J'_{n+j}(k'_\perp R_+) J_j(k'_\perp R_-) - R_- J_{n+j}(k'_\perp R_+) J'_j(k'_\perp R_-)).
\end{aligned} \tag{72}$$

Теперь подставим все в $A(x_0)$ и проинтегрируем (считаем $k'_3\delta x_3 \ll 1$):

$$A(x_0) = \sum_{n,j=-\infty}^{\infty} J_{m'+n}(k'_\perp r_0)\Theta_{n,j}\delta_N(k'_0(1-n'_3\beta_0) - (n+2j)s\omega) \\ e^{i((m'-ms(2j+n))\phi_0 + (k'_3 - s(2j+n)k_3)z_0 - k'_0 t_0)}. \tag{73}$$

Таким образом, амплитуда излучения закрученных фотонов электроном, движущемся по эллиптической спирали, сдвинутой на r_0 относительно оси распространения первоначальных фотонов, пренебрегая интерференционными вкладами между различными гармониками, амплитуда излучения на одной гармонике n, без учета поправки к траектории вдоль оси z (здесь был заменен индекс суммирования, чтобы суммирование было явно по гармоникам):

$$A(x_0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{J_{n-j}(k'_\perp R_+)J_j(k'_\perp R_-)(\beta_0 + \frac{(n-2j)\omega k'_3}{(k'_\perp)^2}) + \\ + \frac{\omega s'}{n'_\perp}(R_+ J'_{n-j}(k'_\perp R_+)J_j(k'_\perp R_-) - R_- J_{n-j}(k'_\perp R_+)J'_j(k'_\perp R_-))\} \times \\ \times J_{m'+n-2j}(k'_\perp r_0)\delta_N(k'_0(1-n'_3\beta_0) - sn\omega)e^{i((m'-msn)\phi_0 + (k'_3 - snk_3)z_0 - k'_0 t_0)}. \tag{74}$$

Если же не пользоваться приближением $k'_3\delta x_3 \ll 1$, то используя формулу Якоби-Ангера:

$$e^{ik'_3 c\, sin(2\omega t - 2\chi)} = e^{ik'_3 c\, cos(\frac{\pi}{2} - 2\omega t + 2\chi)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_l(k'_3 c)e^{-i2l(\omega t - \chi)}e^{\frac{il\pi}{2}} = \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^{2l} J_l(k'_3 c)e^{-i2l(\omega t-\chi)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k'_3 c)e^{i2l(\omega t-\chi)} \tag{75}$$

Получим следующее:

$$A(x_0) = \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \delta_N(k'_0(1-n'_3\beta_0) - ((n+2j)s+2l)\omega)J_{m'+n}(k'_\perp r_0)\times \\ \times J_l(k'_3 c)\Theta_{n,j}e^{i((m'-m(s(2j+n)+2l))\phi_0 + (k'_3 - (s(2j+n)+2l)k_3)z_0 - k'_0 t_0)} \tag{76}$$

$$c = \frac{A^2}{2\gamma^2}\frac{e^2}{m_e^2}\frac{sk_0^2\beta_0}{2\omega^3}J_{m-s}(k_\perp r_0)J_{m+s}(k_\perp r_0)$$

Поменяем индекс суммирования $s(n+2j)+2l \to n'$ и переобозначим его за n:

$$A(x_0) = \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \delta_N(k'_0(1-n'_3\beta_0)-n\omega) J_{m'+s(n-2l)-2j}(k'_\perp r_0)\times \\ \times J_l(k'_3 c)\Theta_{s(n-2l)-2j,j} e^{i((m'-mn)\phi_0+(k'_3-nk_3)z_0-k'_0 t_0)} \tag{77}$$

Из данного выражения видно, что n – это положительное число, в силу положительности энергии фотонов. Оно имеет смысл номера гармоники излучения. Однако, для более компактной записи суммирование пока оставим по всевозможным значениям n.

Из выражения (77) видно, что при $k'_\perp r_0 << 1$ выполнено правило отбора $m'+n$ – число, чего и следовало ожидать из результатов первого раздела.

3 Излучение закрученных фотонов пучком электронов

3.1 Общие выражения для излучения гауссовым пучком электронов

Для пучка электронов необходимо рассмотреть среднюю вероятность излучения (метки $_0$ у координат опущены):

$$< \frac{dP(s', m', k'_3, k'_\perp)}{n'^3_\perp dk'_3 dk'_\perp} >\approx \int d^{N_p}x\rho(x_1, ...\, x_{N_p})|\sum_{i=1}^{N_p} A(x_i)|^2. \tag{78}$$

Она разбивается на два слагаемых :

$$< \frac{dP(s', m', k'_3, k'_\perp)}{(n'_\perp)^3 dk'_3 dk'_\perp} >\approx \int d^{N_p}x\rho(x_1, ...\, x_{N_p})(\sum_{i,j=1, i\neq j}^{N_p} A(x_i)A^*(x_j)+\sum_{i=1}^{N_p}|A(x_i)|^2). \tag{79}$$

Теперь, если пренебречь нетривиальными корреляциями, получается выражение:

$$< \frac{dP(s', m', k'_3, k'_\perp)}{(n'_\perp)^3 dk'_3 dk'_\perp} > \approx N_p \int d^3x\rho(x)|A(x)|^2 + N_p(N_p-1)\left|\int d^3x\rho(x)A(x)\right|^2 = \\ = N_p(N_p-1)|<A>|^2 + N_p<|A|^2>. \tag{80}$$

Первое слагаемое в этом выражении имеет смысл когерентного вклада в излучение, поскольку в нем стоит множитель N_p^2, а второе определяет некогерентный вклад.

Напомним, что в формулах выше предполагается, что $n_3 > 0$, а β_0 любого знака. Например, для случая лобового столкновения: $\beta_0 = -\beta_3 < 0$. Используем выражение $t = \frac{z}{|n_3-\beta_0|}$ чтобы учесть оба интересующих случая. В качестве распределения частиц в пучке выберем гауссов пакет. Запишем его в цилиндрической системе координат

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma_\perp^2\sigma_\parallel(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_\perp^2}} e^{-\frac{(z-R_0)^2}{2\sigma_\parallel^2}}, \tag{81}$$

R_0 – это расстояние между центром пучка электронов и пучком фотонов.

Теперь можно вычислить выражение для средней амплитуды вероятности

$$
\begin{aligned}
< A > = \int d^3x\rho(x)A(x) = \frac{1}{\sigma_\perp^2\sigma_\parallel(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \delta_N(k_0'(1-n_3'\beta_0) - n\omega)\times \\
\times \int_0^\infty r dr \Theta_{s(n-2l)-2j,j}(r) J_l(k_3'c) J_{m'+s(n-2l)-2j}(k_\perp' r) e^{-\frac{r^2}{2\sigma_\perp^2}} \times \\
\times \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m'-mn)\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz(k_3'-k_3 n - \frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|})} e^{-\frac{(z-R_0)^2}{2\sigma_\parallel^2}} = \\
= \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \delta_N(k_0'(1-n_3'\beta_0) - n\omega)\delta_{mn}^{m'} e^{iR_0((k_3'-k_3 n) - \frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|}))} \times \\
\times e^{-\frac{\sigma_\parallel^2}{2}(k_3'-k_3 n - \frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|})^2} I^r_{n,j,l} = \sum_{j,l=-\infty}^{\infty} \delta_N(k_0'(1-n_3'\beta_0) - \frac{m'}{m}\omega)\times \\
\times e^{iR_0(k_3'-k_3\frac{m'}{m} - \frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|})} e^{-\frac{\sigma_\parallel^2}{2}(k_3'-k_3\frac{m'}{m} - \frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|})^2} I^r_{\frac{m'}{m},j,l}.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Здесь введено обозначение

$$
I^r_{n,j,l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x dx \Theta_{s(n-2l)-2j,j}(x\sigma_\perp) J_l(k_3'c) J_{m'+s(n-2l)-2j}(xk_\perp'\sigma_\perp) e^{-\frac{x^2}{2}}.
\tag{83}
$$

Как видно из явных выкладок, для когерентного вклада существует правило отбора $m' = nm$, которое можно интерпретировать как закон сохранения момента импульса. То есть пучком было поглощено n фотонов с полным угловым моментом m, а излучен один с угловым моментом nm.

После возведения усредненной амплитуды по модулю в квадрат, получаем выражение для когерентного вклада

$$
\begin{aligned}
| < A > |^2 = \delta_N^2(k_0'(1-n_3'\beta_0) - \frac{m'}{m}\omega) e^{-\sigma^2(k_3'-k_3\frac{m'}{m} - \frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|})^2} \times \\
\times \sum_{j,l,j',l'=-\infty}^{\infty} I^r_{\frac{m'}{m},j,l} I^r_{\frac{m'}{m},j',l'}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Видно, что это вклад подавлен экспоненциально. Этого и следовало ожидать, исходя из известных экспериментальных данных по излучению пучками электронов.

Теперь приступим к вычислению некогерентного вклада. Интеграл по z вычисляется автоматически, так как представляет собой всего лишь нормировку нормального распределения. Интеграл по ϕ равен 2π. Тогда имеем

$$< |A|^2 >= \frac{1}{\sigma_\perp^2\sqrt{2\pi}} \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \sum_{j',l'=-\infty}^{\infty} \delta_N^2(k_0'(1-n_3'\beta_0)-n\omega) \int_0^\infty r dr J_l(k_3'c)\times$$
$$\times J_{m'+s(n-2l)-2j}(k_\perp' r)\Theta_{s(n-2l)-2j,j}(r)\Theta_{s(n-2l')-2j',j'}(r)J_{l'}(k_3'c)\times$$
$$\times J_{m'+s(n-2l')-2j'}(k_\perp' r)e^{-\frac{r^2}{2\sigma_\perp^2}} = \sum_{n,j,l=-\infty}^{\infty} \sum_{j',l'=-\infty}^{\infty} \delta_N^2(k_0'(1-n_3'\beta_0)-n\omega) I^r_{n,j,l,j',l'}. \tag{85}$$

Введено обозначение

$$I^r_{n,j,l,j',l'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x dx \Theta_{s(n-2l)-2j,j}(x\sigma_\perp) J_l(k_3'c) J_{m'+s(n-2l)-2j}(xk_\perp'\sigma_\perp)\times$$
$$\times \Theta_{s(n-2l')-2j',j'}(x\sigma_\perp) J_{l'}(k_3'c) J_{m'+s(n-2l')-2j'}(xk_\perp'\sigma_\perp) e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{86}$$

Средняя вероятность излучения закрученных фотонов гауссовым пучком электронов:

$$< \frac{dP(s',m',k_3',k_\perp')}{n_\perp'^3 dk_3' dk_\perp'} > \approx \sum_{n=1}^{\infty} \delta_N^2(k_0'(1-n_3'\beta_0)-n\omega)\big[N_p(N_p-1)\delta^{m'}_{nm}\times$$
$$\times e^{-\sigma_\parallel^2(k_3'-k_3\frac{m'}{m}-\frac{k_0'}{|n_3-\beta_0|})^2} \sum_{j,l,j',l'=-\infty}^{\infty} I^r_{\frac{m'}{m},j,l} I^r_{\frac{m'}{m},j',l'} + N_p \sum_{j,l=-\infty}^{\infty} \sum_{j',l'=-\infty}^{\infty} I^r_{n,j,l,j',l'}\big]. \tag{87}$$

3.2 Излучение закрученных фотонов узким пучком электронов

Выражения для радиальных интегралов (83), (86) нельзя вычислить аналитически, не вводя каких-то упрощений. Во-первых, рассмотрим слу-

чай лобового столкновения закрученных фотонов и пучка электронов. То есть $\beta_0 = -\beta_3 < 0$. Тогда $C_+ \ll C_-$, что приводит к ряду упрощений. В частности, $R_+ \ll R_-$. Кроме того, рассмотрим узкий пучок, то есть $k_\perp \sigma_\perp \ll 1$. Из этого в следует, что $k'_\perp \sigma_\perp \ll 1$, а так же то, что из сумм по l и l' остаются только нулевые слагаемые. Последнее утверждение фактически выражает тот факт, что $k'_3 \delta x_3 \ll 1$. Важно также отметить тот факт, что при такой конфигурации n'_3 – отрицательная величина.

Начнем рассмотрение с функций $\Theta_{n,j}$. Для этого, в первую очередь, необходимо отметить, что функции Бесселя, в аргументе которых стоит R_+, раскладываются как $J_m(k'_\perp R_+) \approx \delta^0_m$. Далее необходимо рассмотреть асимптотическое выражение для R_-. Для этого потребуется асимптотика функций Бесселя при малых значениях аргумента

$$J_m(x) \approx \frac{1}{|m|!}(\frac{x}{2})^{|m|}. \tag{88}$$

Тогда из (68) имеем

$$R_- = \frac{\xi}{|m-s|!} y^{|m-s|}, \qquad \xi = \frac{eA}{m_e} \frac{k_\perp}{\gamma \omega^2 (1-n_3)}, \qquad y = \frac{x \sigma_\perp k_\perp}{2}. \tag{89}$$

Как видно из выражений (72), R_- входит в функции Бесселя в комбинации $k'_\perp R_-$. В связи с этим введем обозначение для следующей безразмерной величины

$$\zeta_{m,s} = \frac{\xi k'_\perp}{|m-s|!}. \tag{90}$$

Покажем, что $\zeta_{m,s}$ мало в рамках используемых приближений. Для этого воспользуемся спектром излучения исходя из формулы (77), который с учетом направления движения электронов имеет вид $k'_0(1+\beta_3 n'_3) = k_0 n(1+\beta_3 n_3)$. Имеем

$$\begin{aligned} \xi k'_\perp &= \frac{K}{\gamma} \frac{n_\perp}{1-n_3} \frac{k'_\perp}{k_0} \frac{1}{(1+n_3\beta_3)^2} = \frac{K}{\gamma} \frac{n_\perp}{1-n_3} \frac{k'_\perp}{k_0} \frac{n}{(1+n_3\beta_3)(1+\beta_3 n'_3)} \approx \\ &\approx \frac{K}{\gamma} \frac{n'_\perp}{n_\perp} \frac{n}{1+n'_3} \approx \frac{K}{\gamma} \ll 1. \end{aligned} \tag{91}$$

Используя (88), обозначения из (89) и тот факт, что $R_+ << R_-$ прихо-

дим к асимптотической форме для $\Theta_{sn-2j,j}(x)$

$$\Theta_{sn-2j,j}(x) =\delta^j_{sn}\Big[-\beta_3\frac{\zeta^n_{m,s}}{n!}y^{n|m-s|}+\frac{\omega\zeta_{m,s}}{2k'_0}\Big(\frac{1}{n'_3+s'}\frac{\zeta^{|sn+1|}_{m,s}}{|sn+1|!}y^{|sn+1||m-s|}+ \\ +\frac{1}{n'_3-s'}\frac{\zeta^{|sn-1|}_{m,s}}{|sn-1|!}y^{|sn-1||m-s|}\Big)\Big]. \tag{92}$$

Это выражение получено с использованием δ-символа, стоящего в начале формулы. Представленная формула может быть еще упрощена. Дело в том, что при определенных значениях s в него входят слагаемые большего порядка малости по $\zeta_{m,s}$ либо y. Например, при $s=1$ степень $|sn+1|+1$ переходит в $n+2$ ($n>0$), в то время, как степень $|sn-1|+1$ переходит в n. Аналогичные рассуждения можно провести и для $s=-1$. В результате, выделяя только ведущий вклад по $\zeta_{m,s}$ и y имеем

$$\Theta_{sn-2j,j}(x) =\delta^j_{sn}\frac{\zeta^n_{m,s}}{n!}y^{n|m-s|}\Big[-\beta_3+\frac{\omega}{2k'_0}\Big(\frac{1}{n'_3+s'}\delta_{s,-1}+\frac{1}{n'_3-s'}\delta_{s,1}\Big)\Big]. \tag{93}$$

Теперь можно перейти к вычислению радиальных интегралов (83),(86). Используя (88) и (93), находим для первого интеграла

$$I^r_{n,j}:=I^r_{n,j,0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xdx\Theta_{sn-2j,j}(x\sigma_\perp)J_{m'+sn-2j}(xk'_\perp\sigma_\perp)e^{-\frac{x^2}{2}}= \\ =\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\delta^j_{sn}\frac{\zeta^n_{m,s}}{n!|m'-sn|!}\Big[-\beta_3+\frac{\omega}{2k'_0}\Big(\frac{1}{n'_3+s'}\delta_{s,-1}+\frac{1}{n'_3-s'}\delta_{s,1}\Big)\Big]\times \\ \times\Big(\frac{k_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{|nm-sn|}\Big(\frac{k'_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{|m'-sn|}\int_0^\infty dx x^{|nm-sn|+|m'-sn|+1}e^{-x^2}. \tag{94}$$

Последний интеграл представляет собой гамма-функцию. Ясно, что суммирование по j и j' в (87) снимается. В результате, в ведущем порядке

$$\sum_{j,l,j',l'=-\infty}^{\infty}I^r_{\frac{m'}{m},j,l}I^r_{\frac{m'}{m},j',l'}=(I^r_{n,j=sn})^2:=(I^r_n)^2. \tag{95}$$

Аналогично рассматривается второй радиальный интеграл

$$I^r_{n,j,0,j',0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xdx\Theta_{sn-2j,j}(x\sigma_\perp)J_{m'+sn-2j}(xk'_\perp\sigma_\perp)\Theta_{sn-2j',j'}(x\sigma_\perp)\times$$
$$\times J_{m'+sn-2j'}(xk'_\perp\sigma_\perp)e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\delta^j_{sn}\delta^{j'}_{sn}\frac{\zeta^{2n}_{m,s}}{|m'-sn|!^2(n!)^2}\Big[-\beta_3+$$
$$+\frac{\omega}{2k'_0}\Big(\frac{1}{n'_3+s'}\delta_{s,-1}+\frac{1}{n'_3-s'}\delta_{s,1}\Big)\Big]^2\Big(\frac{k_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{2|nm-sn|}\Big(\frac{k'_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{2|m'-sn|}\times$$
$$\times\int_0^\infty dx x^{2|nm-sn|+2|m'-sn|+1}e^{-x^2}. \tag{96}$$

Здесь последний интеграл также представляет собой гамма-функцию, которая в данном случае выражается через факториал $(|nm-sn|+|m'-sn|)!$. Сумма по j, j' также снимается в (87).

Итак, асимптотическое выражение для вероятности излучения закрученных фотонов узким пучком электронов имеет вид

$$<\frac{dP(s',m',k'_3,k'_\perp)}{n'^3_\perp dk'_3dk'_\perp}>\approx\sum_{n=1}^\infty\delta^2_N(k'_0(1+n'_3\beta_3)-n\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\zeta^{2n}_{m,s}}{(n!)^2|m'-sn|!^2}\Big[$$
$$\frac{\omega}{2k'_0}\Big(\frac{\delta_{s,-1}}{n'_3+s'}+\frac{\delta_{s,1}}{n'_3-s'}\Big)-\beta_3\Big]^2\Big(\frac{k_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{2|nm-sn|}\Big(\frac{k'_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{2|m'-sn|}\Big[N_p(N_p-1)\times$$
$$\times\delta^{m'}_{nm}e^{-\sigma^2_\parallel(k'_3-k_3\frac{m'}{m}-\frac{k'_0}{n_3+\beta_3})^2}(|n(m-s)|!)^2+N_p(|nm-sn|+|m'-sn|)!\Big]. \tag{97}$$

Проанализируем данную формулу. Во-первых, видно, что когерентный вклад экспоненциально подавлен. Это следует из того, что в показателе экспоненты в круглых скобках стоит число не обращающееся в ноль, для любого k'_3. Некогерентный вклад в вероятность излучения обладает, в ведущем порядке по параметру $k'_\perp\sigma_\perp$, правилом отбора. А именно $m'=sn$. В связи с этим, можем записать ведущий вклад в излучение закрученных фотонов узким пучком электронов на гармонике n.

$$<\frac{dP(s',m',k'_3,k'_\perp)}{n'^3_\perp dk'_3dk'_\perp}>\approx\delta^2_N(k'_0(1+n'_3\beta_3)-n\omega)\frac{N_p}{\sqrt{2\pi}}\frac{\zeta^{2n}_{m,s}(n|m-s|)!}{(n!)^2}\Big[$$
$$\frac{\omega}{2k'_0}\Big(\frac{\delta_{s,-1}}{n'_3+s'}+\frac{\delta_{s,1}}{n'_3-s'}\Big)-\beta_3\Big]^2\Big(\frac{k_\perp\sigma_\perp}{\sqrt{2}}\Big)^{2n|m-s|}. \tag{98}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, фактически задает спиральность излученного фотона. Можно показать, что при $n'_\perp \gg 1/\gamma$ происходит переворот спиральности, то есть $s' = -s$. Подобный эффект действительно наблюдается при исследовании обратного комптоновского рассеяния.

Заключение

Сформулируем основные результаты данной работы. Используя общий формализм, развитый в работах [8–10], получены явные выражения для: среднего числа закрученных фотонов, излученных релятивистской заряженной частицей в эллиптическом ондуляторе, вероятности излучения закрученных фотонов электроном взаимодействующим с закрученным светом, среднего числа закрученных фотонов излученных узким гауссовым пучком электронов провзаимодействовавших с закрученным светом. В формулах для эллиптического ондулятора была, в частности, учтена квантовая отдача, для чего использовался метод, разработанный в [9, 10], который является адаптацией метода Байера-Каткова [36, 37] для описания вероятности излучения закрученных фотонов в области параметров, где сосредоточена основная часть излучения. В этой области параметров получены явные выражения для вероятности излучения одного закрученного фотона как заряженной скалярной частицей, так и заряженным дираковским фермионом. В пределе исчезающе малой квантовой отдачи в параксиальном режиме найденное выражение переходит в выражение для среднего числа закрученных фотонов, созданных классическим током точечной заряженной частицы в эллиптическом ондуляторе, которое также получено в данной работе. В частных случаях кругового и плоского ондуляторов полученные выражения для эллиптического ондулятора переходят в ранее известные [8–10]. Доказано, что излучение закрученных фотонов вперед подчиняется правилу отбора: $m + n$ – четное число, где m – проекция полного углового момента закрученного фотона, а n – номер гармоники ондуляторного излучения. Данное правило отбора верно как в классическом подходе к описанию излучения, так и с учетом квантовой отдачи. Оно обобщает известные правила отбора для излучения закрученных фотонов круговым и плоским ондуляторами, и остается верным для траекторий вида (27). Это правило отбора верно и для излучения закрученных фотонов электроном в поле закрученного света.

Явные выражения для одночастичной амплитуды излучения фотона, полученные в данной работе, позволяют легко найти среднее число закрученных фотонов, излученных пучком заряженных частиц в эллиптическом

ондуляторе. Для этого можно воспользоваться теорией излучения закрученных фотонов пучками заряженных частиц, развитой в [29–31]. Также, поскольку движение заряженных частиц в поле плоской лазерной волны с эллиптической поляризацией схоже с движением заряженных частиц в эллиптическом ондуляторе, полученные в данной работе результаты можно применить для описания излучения закрученных фотонов и в этом случае [9]. Кроме того, развитый формализм может быть использован для описания излучения закрученных фотонов при осевом и плоскостном каналировании [38, 39]. Схожие свойства излучения следует ожидать при переходном излучении в диспергирующих средах, тензор диэлектрической проницаемости которых инвариантен относительно сдвигов вдоль эллиптической спирали [30, 40], и для эллиптических ондуляторов, заполненных диспергирующей средой [35].

В рамках анализа полученного выражения для среднего числа излученных закрученных фотонов пучком электронов получены различные правила отбора для когерентного и некогерентного вкладов в излучение. Для когерентного излучение верно правило $m' = nm$, а для некогерентного $m' = sn$. Кроме того, из явного выражения для вероятности следует, что при $n'_\perp \gg 1/\gamma$ происходит переворот спиральности.

В рамках развития темы, рассмотренной в данной работе, можно изучить различные конфигурации пучка электронов. Кроме того, научный интерес представляет изучение вопроса об излучении закрученных фотонов узким пучком электронов, в результате взаимодействия с закрученным светом, для случая набегания электромагнитной волны на пучок, а также обратной ситуации, когда электроны нагоняют закрученные фотоны. Формулы, представленные в данной работе, позволяют рассмотреть эти две ситуации.

Часть результатов, касающихся излучения закрученных фотонов в эллиптических ондуляторах, опубликована в работе [46]

Список использованной литературы

[1] Sasaki S. Proposal for generating brilliant X-ray beams carrying orbital angular momentum / S. Sasaki, I. McNulty // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100. – P. 124801.

[2] Afanasev A. On generation of photons carrying orbital angular momentum in the helical undulator / A. Afanasev, A. Mikhailichenko // arXiv:1109.1603.

[3] Bordovitsyn V. A. Angular momentum of synchrotron radiation / V. A. Bordovitsyn, O. A. Konstantinova, E. A. Nemchenko // Russ. Phys. J. – 2012. – Vol. 55. – P. 44.

[4] Hemsing E. Echo-enabled X-ray vortex generation / E. Hemsing, A. Marinelli // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – P. 224801.

[5] First observation of photons carrying orbital angular momentum in undulator radiation / J. Bahrdt, K. Holldack, P. Kuske, [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 111. P. 034801.

[6] Coherent optical vortices from relativistic electron beams / E. Hemsing, A. Knyazik, M. Dunning, [et al.] // Nature Phys. – 2013. – Vol. 9. – P. 549.

[7] Ribič P. R. Generation of coherent extreme-ultraviolet radiation carrying orbital angular momentum / P. R. Ribič, D. Gauthier, G. De Ninno // Phys. Rev. Lett. – 2014. – Vol. 112. – P. 203602.

[8] Bogdanov O. V. Probability of radiation of twisted photons by classical currents / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, G. Yu. Lazarenko // Phys. Rev. A. – 2018. – Vol. 97. – P. 033837.

[9] Bogdanov O. V. Semiclassical probability of radiation of twisted photons in the ultrarelativistic limit / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, G. Yu. Lazarenko // Phys. Rev. D. – 2019. – Vol. 99. – P. 116016.

[10] Bogdanov O. V. Planar wiggler as a tool for generating hard twisted

photons / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, G. Yu. Lazarenko // JINST. – 2020. – Vol. 15. – P. C04008.

[11] Jentschura U. D. Generation of high-energy photons with large orbital angular momentum by Compton backscattering / U. D. Jentschura, V. G. Serbo // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – P. 013001.

[12] Jentschura U. D. Compton upconversion of twisted photons: Backscattering of particles with non-planar wave functions / U. D. Jentschura, V. G. Serbo // Eur. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71. – P. 1571.

[13] Torres J. P. Twisted Photons / J. P. Torres, L. Torner Wiley-VCH, Weinheim, 2011.

[14] Andrews D. L. The Angular Momentum of Light / D. L. Andrews, M. Babiker. – Cambridge University Press, New York, 2013.

[15] Padgett M. J. Orbital angular momentum 25 years on // Opt. Express. – 2017. – Vol. 25. – P. 11265.

[16] Roadmap on structured light / H. Rubinsztein-Dunlop, A. Forbes, M. V. Berry, [et al.] // J. Opt. – 2017. – Vol. 19. – P. 013001.

[17] Knyazev B. A. Beams of photons with nonzero projections of orbital angular momenta: New results / B. A. Knyazev, V. G. Serbo // Phys. Usp. – 2018. – Vol. 61. – P. 449.

[18] Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum / J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, S. Chávez-Cerda // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – 053904.

[19] Efficient sorting of orbital angular momentum states of light / G. C. G. Berkhout, M. P. J. Lavery, J. Courtial, [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. P. 153601.

[20] Demonstration of free space coherent optical communication using integrated silicon photonic orbital angular momentum devices / T. Su,

R. P. Scott, S. S. Djordjevic, [et al.] // Opt. Express. – 2012. – Vol. 20. – P. 9396.

[21] Lavery M. P. J. Measurement of light's orbital angular momentum in *The Angular Momentum of Light* / M. P. J. Lavery, J. Courtial, M. J. Padgett; ed. by D. L. Andrews, M. Babiker. – Cambridge University Press, New York, 2013.

[22] Parallel sorting of orbital and spin angular momenta of light in a record large number of channels / G. F. Walsh, L. De Sio, D. E. Roberts, [et al.] // Opt. Lett. – 2018. – Vol. 43. – P. 2256.

[23] A compact difractive sorter for high-resolution demultiplexing of orbital angular momentum beams / G. Ruffato, M. Massari, M. Girardi, [et al.] // Sci. Rep. – 2018. – Vol. 8. – P. 10248.

[24] Non-paraxial design and fabrication of a compact OAM sorter in the telecom infrared / G. Ruffato, M. Massari, M. Girardi, [et al.] // Opt. Express. – 2019. – Vol. 27. – P. 15750.

[25] Goto Y. Diffraction patterns of the millimeter wave with a helical wavefront by a triangular aperture / Y. Goto, T. I. Tsujimura, S. Kubo // Int. J. Infrared Millimeter Waves. – 2019. – Vol. 40. – P. 943.

[26] Taira Y. Measuring the topological charge of an x-ray vortex using a triangular aperture / Y. Taira, Y. Kohmura // J. Opt. – 2019. – Vol. 21. – P. 045604.

[27] Paroli B. Measuring the topological charge of orbital angular momentum radiation in single-shot by means of the wavefront intrinsic curvature / B. Paroli, M. Siano, M. A. C. Potenza // Appl. Opt. – 2020. – Vol. 59. – P. 5258.

[28] Synchrotron Radiation Theory and its Development / V. G. Bagrov, G. S. Bisnovatyi-Kogan, V. A. Bordovitsyn [et al.]. – World Scientific, Singapore, 1999.

[29] Bogdanov O. V. Probability of radiation of twisted photons by axially symmetric bunches of particles / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski // Eur. Phys. J. Plus. – 2019. – Vol. 134. – P. 586.

[30] Bogdanov O. V. Probability of radiation of twisted photons in the isotropic dispersive medium / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, G. Yu. Lazarenko // Phys. Rev. A. – 2019. – Vol. 100. – P. 043836.

[31] Bogdanov O. V. Probability of radiation of twisted photons by cold relativistic particle bunches / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, G. Yu. Lazarenko // Annals Phys. – 2020. – Vol. 415. – P. 168116.

[32] Angular momentum of twisted radiation from an electron in spiral motion / M. Katoh, M. Fujimoto, H. Kawaguchi [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2017. – Vol. 118. – P. 094801.

[33] Helical phase structure of radiation from an electron in circular motion / M. Katoh, M. Fujimoto, N. S. Mirian [et al.] // Sci. Rep. – 2017. – Vol. 7. – P. 6130.

[34] Epp V. Angular momentum of radiation from a charge in circular and spiral motion / V. Epp, U. Guselnikova // Phys. Lett. A. – 2019. – Vol. 383. – P. 2668.

[35] Bogdanov O. V. Generation of twisted photons by undulators filled with dispersive medium / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, G. Yu. Lazarenko // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – Vol. 135.– P. 901.

[36] Baier V. N. Quasiclassical theory of bremsstrahlung by relativistic particles / V. N. Baier, V. M. Katkov // J. Exp. Theor. Phys.– 1969.– Vol. 28. – P. 807.

[37] Baier V. N. Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals / V. M. Katkov, V. M. Strakhovenko. – World Scientific, Singapore, 1998.

[38] Abdrashitov Orbital S. V. Angular momentum of channeling radiation from relativistic electrons in thin Si crystal / S. V. Abdrashitov, O. V.

Bogdanov, P. O. Kazinski, T. A. Tukhfatullin // Phys. Lett. A. – 2018. – Vol. 382. – P. 3141.

[39] Epp V. Angular momentum of radiation at axial channeling / V. Epp, J. Janz, M. Zotova // Nucl. Instrum. Methods B. – 2018. – Vol. 436. – P. 78.

[40] Bogdanov O. V. Radiation of twisted photons from charged particles moving in cholesterics / O. V. Bogdanov, P. O. Kazinski, P. S. Korolev, G. Yu. Lazarenko // J. Mol. Liq. – 2021. – Vol. 326. – P. 115278.

[41] Nikishov A. I. Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field / A. I. Nikishov , V. I. Ritus // I. J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.). – 1964. – Vol. 46. – P. 776.

[42] Radiation from relativistic electrons in a magnetic wiggler / A. N. Didenko, A. Kozhevnikov, A.F. Medvedev [et al.] // Sov. Phys. JETP. – 1979. – Vol. 49. – P. 973.

[43] Dattoli G. Theory of generalized Bessel functions / G. Dattoli, L. Giannessi, L. Mezi, A. Torre // Nuovo Cim. – 1990. – Vol. 105 B. – P. 327.

[44] Dattoli G. Theory of generalized Bessel functions. – II / G. Dattoli, L. Giannessi, L. Mezi, A. Torre // Nuovo Cim. – 1991. – Vol. 106 B. – P. 21.

[45] Allen. L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.

[46] Kazinski P.O. Radiation of Twisted Photons in Elliptic Undulators / P. O. Kazinski, V. A. Ryakin // Rus.Phys.J. – 2021. – Vol. 64. – P. 717–727.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: rognar30@protonmail.com / ID: 6430209
Проверяющий:

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 9
Начало загрузки: 06.05.2022 12:03:38
Длительность загрузки: 00:00:00
Имя исходного файла: Dipl_1.pdf
Название документа: Dipl_1
Размер текста: 49 кБ
Символов в тексте: 50318
Слов в тексте: 7804
Число предложений: 635

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 06.05.2022 12:03:40
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска: Интернет Free

ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
0%	0%	0%	100%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Актуален на	Модуль поиска

Источников не найдено

Научный руководитель Казинский П.О.