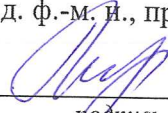


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физико-технический факультет

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП

д. ф.-м. н., профессор


_____ Г.Р. Шрагер

подпись
« 4 » июня 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА


РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО
СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА И ЭЛЕМЕНТОВ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

по направлению подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника
направленность (профиль) «Промышленная и специальная робототехника»

Дубаненко Дмитрий Андреевич

Руководитель ВКР

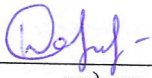
к.ф.-м.н., доцент


_____ В.А. Солоненко

подпись
« 4 » июня 2022 г.

Автор работы

студент группы № 101801


_____ Д.А. Дубаненко

подпись
« 4 » июня 2022 г.

Томск – 2022

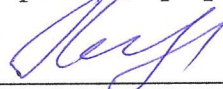


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физико-технический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ООП

д. ф.-м. н., профессор



Г. Р. Шрагер

подпись

« 1 » сентября 2020 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра
обучающемуся

Дубаненко Дмитрий Андреевич

Фамилия Имя Отчество обучающегося

по направлению подготовки 15.03.06 – Мехатроника и робототехника
направленность (профиль) «Промышленная и специальная робототехника»

1 Тема выпускной квалификационной работы

Разработка и реализация алгоритма 3-Д моделирования теплового
состояния прибора и элементов радиоэлектронной аппаратуры.

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной
работы:

а) в деканат – 10.06.2022 б) в ГЭК – 10.06.2022

3 Исходные данные к работе: Крайнов А. Ю. Численные методы в задачах
теплопереноса: Учебно-методическое пособие / А. Ю. Крайнов, Ю. Н. Рыжих,
А. М. Тимохин – Томск : Том. ун-т, 2009. – 114 с.

Дегтярев, А. А. Метод конечных разностей [Электронный ресурс] : электрон.
учеб. пособие / А. А. Дегтярев ; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм.
ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Самара, 2011.

Объект исследования	Задача теплопроводности в нескольких телах
Предмет исследования	Распределение температурного поля в контактирующих друг с другом телах
Цель исследования	Применение различных вариантов решения задачи теплопроводности для описания теплового взаимодействия двух тел.

Задачи:

Математическая формулировка задачи теплового взаимодействия двух тел.
Изучение метода конечных разностей и метода конечных элементов применительно к решению задач теплопроводности;
Изучение языка программирования C++ и реализация алгоритма численного решения задачи теплопроводности;
Анализ условий сходимости численного решения
Проведение верификации полученного метода решения задачи теплопроводности

Методы исследования:

Анализ литературы и информации из открытых источников о реализации численных методов в задачах теплопроводности;
Реализация алгоритма численного решения на примере метода конечных разностей в задачах теплопроводности

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –
Национальный Исследовательский Томский Государственный Университет

4 Краткое содержание работы

Изучение алгоритма решения задачи теплопроводности методом конечных разностей. Реализация численного решения на языке C++ и проведение верификации с помощью программного комплекса Ansys. Изучения условий сходимости и решение задачи теплообмена между двумя контактирующими друг с другом телами

Руководитель выпускной квалификационной работы

доцент, НИ ТГУ, физико-
технический факультет

должность, место работы



подпись

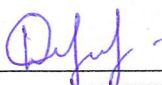
В.А. Солоненко

И.О. Фамилия

Задание принял к исполнению

студент, НИ ТГУ, физико-
технический факультет

должность, место работы



подпись

Д.А. Дубаненко

И.О. Фамилия

АННОТАЦИЯ

В данной работе описывается задача теплопроводности и методы её численного решения. Мы разобрали краевые условия задачи с одним и двумя телами и алгоритм решения таких задач с помощью метода конечных разностей. На основе полученных решений была проведена верификация разработанного алгоритма решения с помощью метода конечных элементов, реализованных в программном комплексе Ansys.

Мы тщательно изучили понятие разностных схем и изучили условия их сходимости с помощью правильной аппроксимации и устойчивости. На основе этих знаний, на языке программирования C++ был написан алгоритм решения задач теплопроводности для одного или двух тел с учётом граничных условий первого, второго, третьего и четвёртого рода. На основе написанного алгоритма были разобраны условия сходимости задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 Численные методы в задачах теплопроводности	7
1.1 Постановка задачи теплопереноса	7
1.2 Численные методы в задачах теплопроводности	8
1.3 Определение аппроксимации и погрешности	10
1.4 Устойчивость и сходимость разностной схемы	12
1.5 Аппроксимация граничных условий	13
1.6 Плотность внутреннего источника теплоты	18
2 Проведение верификации с помощью метода конечных разностей	20
2.1 Определение верификации	20
2.2 Основы метода конечных элементов	21
2.3 Построение математической модели	22
3 Применение метода конечных разностей в задачах теплопроводности	26
3.1 Постановка задачи теплопроводности	26
3.2 Программная реализация алгоритма решения	27
3.3 Определение числа Куранта для задачи с граничными условиями первого рода	31
3.4 Определение устойчивости задачи с граничным условием второго рода	35
3.5 Постановка задачи теплопроводности для двух контактирующих пластин	38
3.6 Анализ сеточной сходимости метода конечных разностей	39
3.7 Верификация алгоритма решения	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	49
ЛИТЕРАТУРА	50

ВВЕДЕНИЕ

Появление и развитие высокопроизводительной вычислительной техники, а также САПР упростили инженерный анализ задач теплопереноса. Благодаря им стало возможным решение различных нестационарных пространственных задач. Но все методы, используемые в САПР, являются численными, поэтому важно учитывать их устойчивость и сходимость. Для того, чтобы приближённый метод, полученный в различных программных комплексах, действительно решал задачу теплопереноса, исследователю необходимо знать и понимать условности численных методов, которые используются в САПР.

Мы будем проводить анализ приближённых методов на основе метода конечных разностей. Данный метод является наиболее распространённым и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений. [1, С. 32].

В настоящей работе нам предстоит провести анализ приближённых методов, для этого нам потребуется написать программу численного решения задачи, проанализировать данный метод при различных условиях и сравнить его с решением, полученным в ПК Ansys. Таким образом, нам предстоит провести формальную верификацию метода конечных разностей.

Цель: реализация алгоритма решения задач теплопереноса с помощью метода конечных разностей и сравнение полученного метода с методом конечных элементов в ПК Ansys.

Задачи:

1. Разработка алгоритма метода конечных разностей для системы из двух тел.
2. Анализ сеточной сходимости предложенного метода.
3. Верификация полученного метода решения задач теплопроводности.

1 Численные методы в задачах теплопроводности

1.1 Постановка задачи теплопереноса

В задачах теплопереноса используются уравнения в частных производных, так как задача решается в n-мерном виде с использованием нескольких независимых переменных. Мы будем решать краевые задачи, то есть дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями на границах области. При отсутствии теплообмена с окружающей средой и источников тепла уравнение теплопроводности в двумерном виде записывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad (1.1)$$

где T – температура в точке, К;

t – момент времени, с;

$a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ – коэффициент температуропроводности, м²/с;

λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м.К);

c_p – изобарная удельная теплоёмкость, Дж/(кг.К);

ρ – плотность, кг/м³;

Δ - оператор Лапласа, равный $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в двумерной декартовой системе координат. [1, С. 50, 52].

Данное уравнение получается с учётом постоянства коэффициента теплопроводности, что не всегда является корректным, так как данный коэффициент связан с температурой обратной зависимостью. Также коэффициент теплопроводности зависит от агрегатного состояния вещества, количества примесей и давления, поэтому далее мы будем делать предположение о постоянстве этих состояний.

1.2 Численные методы в задачах теплопроводности

Существуют несколько методов решения задач теплопроводности. Способ решения, в котором исходные дифференциальные операторы будут заменяться приближенными значениями в отдельных точках, называется методом конечных разностей (МКР). [1, С. 32, 60].

Переход состоит в разбиении области непрерывного изменения функции дискретным множеством точек, равномерно покрывающими исходную область. Получается расчётная сетка с расчётными точками (или узловыми точками), а само разбиение делается это с выбранным шагом h_x, h_y , координаты которых определяются выражением:

$$T_x = ih_x; T_y = jh_y \quad (1.2)$$

где i – координата узловой точки по оси x ;

j – координата узловой точки по оси y .

Время также разбивается на слои с заданным шагом Δt , таким образом получается множество точек разбиения температуры $T_{i,j}^n$, где n – момент времени с шагом Δt . Надстрочные индексы определяют временной слой, подстрочные – пространственные узлы сетки. Пример расчётной сетки представлен на рисунке 1.

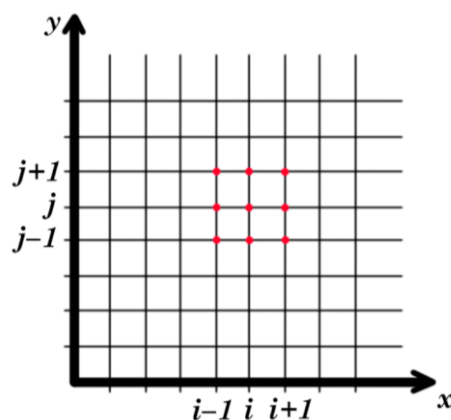


Рисунок 1 – Расчётная сетка дифференциального уравнения в момент времени n

Таким образом, решение дифференциальной задачи сводится к определению числовых значений температуры T во всех точках расчётной сетки и в любой момент времени. Для нахождения значений температуры делают переход к аппроксимирующему разностному уравнению, заменяя производные разностными соотношениями. [1, С. 61].

По определению производной:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{T(x + h_x; y; t) - T(x; y; t)}{h_x}. \quad (1.3)$$

Зафиксировав значение h_x можно получить приближённое значение производной в разностной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T(x + h_x; y; t) - T(x; y; t)}{h_x} \text{ или } \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{h_x} \quad (1.4)$$

Аналогично получается производная второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h_x} \left(\frac{T(x + h_x; y; t) - T(x; y; t)}{h_x} - \frac{T(x; y; t) - T(x - h_x; y; t)}{h_x} \right) = \\ &= \frac{1}{(h_x)^2} (T(x + h_x; y; t) - 2T(x; y; t) + T(x - h_x; y; t)). \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(h_x)^2}. \quad (1.5.2)$$

Для y и t формулы будут иметь соответствующий вид с учётом того, что соседние точки будут братья по другим осям и со своими значениями шагов. На рисунке 1 для точки $T_{i,j}^n$ соседние по оси x будут слева и справа; для y – сверху и снизу; для t с учётом производной первого порядка – только следующий шаг по времени. [1, С. 62].

Таким образом, если известны краевые условия задачи (граничные условия, начальная температура), то для момента времени $t = n + 1$ для любой точки системы можно вычислить температуру:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{a\Delta t}{(h_x)^2} (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) + \\ + \frac{a\Delta t}{(h_y)^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n). \quad (1.6)$$

1.3 Определение аппроксимации и погрешности

С учётом применения приближённых методов стоит учитывать погрешность, допускаемую при замене дифференциальной задачи разностными выражениями. При уменьшении длины шага сетки к нулю по времени и пространству приближённое решение должно совпадать с решением дифференциальной задачи, а при соответствии решений говорят, что разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу. [1, С. 63].

Погрешность аппроксимации определяется невязкой – разностью между точным решением задачи и решением, получаемым при подставлении точного решения в разностное. От невязки зависит порядок точности аппроксимации сетки. Проверить это можно с помощью проверки аппроксимации путём разложения точного решения в узловых точках в ряд Тейлора. Предположим, что точное решение $T(x, y, t)$ удовлетворяет условиям гладкости и имеет ограниченные производные до второго порядка. Тогда $T_{i+1,j}^n$, $T_{i-1,j}^n$, $T_{i,j+1}^n$, $T_{i,j-1}^n$ и $T_{i,j}^{n+1}$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестностях точки (i, j, n) :

$$T_{i+1,j}^n = T_{i,j}^n + \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2} + \frac{\partial^3 T_{i,j}^n}{\partial x^3} \frac{h_x^3}{6} + \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial x^4} \frac{h_x^4}{24} + o(h_x^5); \quad (1.7.1)$$

$$T_{i-1,j}^n = T_{i,j}^n - \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2} - \frac{\partial^3 T_{i,j}^n}{\partial x^3} \frac{h_x^3}{6} + \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial x^4} \frac{h_x^4}{24} + o(h_x^5); \quad (1.7.2)$$

Подставив полученные выражения в разностную схему (1.5.2), получим:

$$\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(h_x)^2} = \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial x^4} \frac{h_x^2}{12} + o(h_x^3). \quad (1.8.1)$$

Аналогично для узловых точек на оси y :

$$\frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(h_y)^2} = \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial y^4} \frac{h_y^2}{12} + o(h_y^3). \quad (1.8.2)$$

Разностная схема по времени содержит только две точки, поэтому можно получить соотношение из формулы (1.4):

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)} + \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)^2} \frac{\Delta t}{2} + o((\Delta t)^2). \quad (1.8.3)$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1.6) получим выражение для невязки:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)} + \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)^2} \frac{\Delta t}{2} - a \left(\frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial x^4} \frac{h_x^2}{12} + \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial y^4} \frac{h_y^2}{12} \right) + \\ + o((\Delta t)^2 + h_x^3 + h_y^3) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Так как мы предполагали, что $T_{i,j}^n$ является решением (1.1) в точке (i, j, n) , то тогда $\frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)} - a \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial y^2} = 0$. В таком случае выражение невязки примет вид:

$$\delta = \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)^2} \frac{\Delta t}{2} - a \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial x^4} \frac{h_x^2}{12} - a \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial y^4} \frac{h_y^2}{12} + o((\Delta t)^2 + h_x^3 + h_y^3) \quad (1.10)$$

Верхняя оценка модуля невязки будет определяться выражением:

$$|\delta| = \frac{\Delta t}{2} \max \left| \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial(\Delta t)^2} \right| + \frac{h_x^2}{12} \max \left| \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial h_x^4} \right| + \frac{h_y^2}{12} \max \left| \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial h_y^4} \right|$$

$\max \left| \frac{\partial^2 T_{i,j}^n}{\partial (\Delta t)^2} \right|, \max \left| \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial h_x^4} \right|$ и $\max \left| \frac{\partial^4 T_{i,j}^n}{\partial h_y^4} \right|$ являются положительными константами, не зависящими от Δt , h_x и h_y соответственно, таким образом разностная задача аппроксимирует исходную дифференциальную задачу с точностью $(\Delta t + h_x^2 + h_y^2)$.

Невязка также зависит от краевых условий, так что если в случае граничных условий II, III и IV рода аппроксимация проводится с учётом двух точек, то даже с использованием аппроксимации уравнения по трём точкам $(\Delta t + h_x^2 + h_y^2)$ порядок аппроксимации всё равно будет иметь вид $(\Delta t + h_x + h_y)$. [1, С. 64-66].

1.4 Устойчивость и сходимость разностной схемы

В силу использования ЭВМ в численных методах решения дифференциальных задачи отклонение от точного решения может возникать из-за ошибок округления. Связано это с использованием чисел с конечным числом значащих цифр, которые, в зависимости от организации вычислительного алгоритма, могут затухать или возрастать. Если ошибки округления затухают, то говорят, что численный метод устойчив, в противном случае – неустойчив. [1, С. 66].

Для определения устойчивости численного метода вводят число Куранта, равное

$$C = a_x \frac{\Delta t}{h_x^2} + a_y \frac{\Delta t}{h_y^2} \quad (1.11)$$

Данный вид числа Куранта представлен для двумерной задачи теплопроводности второго порядка точности относительно h_x , h_y и первого порядка относительно Δt . При предположении о постоянстве значения коэффициента температуропроводности a вдоль осей можно получить

другой вид числа Куранта $C = a\Delta t \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)$. [3, С. 210].

Чтобы разностная схема была устойчива, необходимо, чтобы число Куранта удовлетворяло условию $0 < C < 1$. Если оно удовлетворяет этому условию, то при стремлении h_x , h_y и Δt к нулю разностная задача будет приближаться к точному решению, в противном случае численное решение станет хаотичным и потеряет физический смысл. Данное неравенство помогает настраивать оптимальную длину шагов для уменьшения времени решения задачи с помощью ЭВМ. [1, С. 68].

Таким образом, если разностная задача аппроксимирует исходную дифференциальную задачу на её точном решении и является устойчивой, то решение разностной задачи при стремлении длины шагов к нулю сходится к точному решению дифференциальной задачи, причём порядок точности аппроксимации схемы совпадает с порядком аппроксимации. Данное выражение называется теоремой сходимости. [2, С. 40].

1.5 Аппроксимация граничных условий

При аппроксимации граничных условий возникает вопрос соответствия порядка точности исходной разностной схеме. При втором порядке точности относительно $(\Delta t + h_x^2 + h_y^2)$ в точке $(i; j)$ берутся соседние точки $(i+1; j)$, $(i-1; j)$, $(i; j+1)$ и $(i; j-1)$. На границах поверхности данные точки будут браться вне исследуемого тела, что не является корректным. Как говорилось ранее в подразделе 1.3, если для граничных условий брать разностную схему по двум точкам, то порядок точности всей задачи будет первого порядка $(\Delta t + h_x + h_y)$.

Для сохранения порядка точности можно воспользоваться другой схемой:

$$\frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial x} = \frac{-3T_{i,j}^n + 4T_{i+1,j}^n - T_{i+2,j}^n}{2h_x} + O(h^2), \quad (1.12.1)$$

$$\frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial x} = \frac{T_{i-2,j}^n - 4T_{i-1,j}^n + 3T_{i,j}^n}{2h_x} + O(h^2), \quad (1.12.2)$$

Для левой и правой границы по оси x . Аналогично получаются схемы для оси y . [1, С. 35].

В случае задания граничных условий первого рода в виду постоянства температуры границы можно просто убрать из расчётов слой границы, тогда останутся лишь границы, на которые не наложены граничные условия. В их расчётах можно использовать формулы (1.12.1) и (1.12.2).

Граничные условия второго рода задаются уравнением:

$$\lambda \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial n} \vec{l}_n = q_{i,j}^n, \quad (1.13)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м.К);

n – нормаль к поверхности границы;

\vec{l}_n – вектор нормали поверхности;

$q_{i,j}^n$ – величина теплового потока на поверхность тела в точке (i; j) в момент времени n . [1, С. 55].

В силу того, что дальнейшая работа будет проходить в прямоугольной системе координат с равномерной сеткой и с прямоугольной двумерной пластиной, а также при предположении постоянного значения теплового потока q в течение времени, можно получить формулы:

$$T_{i-1,j}^n = T_{i+1,j}^n + \frac{2h_x}{\lambda} q + O(h^2), \quad (1.14.1)$$

$$T_{i+1,j}^n = T_{i-1,j}^n - \frac{2h_x}{\lambda} q + O(h^2), \quad (1.14.2)$$

для левой и правой границ по оси x соответственно.

Данный вариант задания аппроксимированных граничных условий основывается на задании двух точек (слева и справа, если рассматривать искомый узел на оси x) относительно первой, в которой проводят аппроксимацию частной производной. [1, С. 34].

В этом случае разностная схема будет со вторым порядком точности:

$$\frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2h_x} + O(h^2). \quad (1.15)$$

Данный способ задания разностной схемы называется центральной разностью. [1, С. 34].

Условие теплоизоляции задаётся с помощью фиксирования теплового потока $q = 0$. Тогда в уравнениях (1.14.1) и (1.14.2) останутся лишь слагаемые, содержащие температуру. Это позволяет задать температуру прилегающего к границе слоя внешней среды такую же, как и температуру слоя, лежащего за границей. Благодаря этому можно не перестраивать разностную схему при решении узлов на границе, на которых наложено условие теплоизоляции.

Граничные условия третьего рода устанавливают связь между температурой тела на границах поверхности и значением теплового потока, поступающего в тело. Данное граничное условие, называющееся законом Ньютона-Рихмана, описывает конвективный теплообмен между телом и окружающей средой с температурой T_0 .

В общем случае граничное условие третьего рода записывается уравнением:

$$\lambda \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial n} \vec{l}_n = \alpha(T_{i,j}^n - T_c); \quad (1.16)$$

где T_c – температура окружающей среды, находящейся в контакте с телом, К;
 α – коэффициент теплообмена между окружающей средой и поверхностью

тела.

Преобразовывая данное уравнение, можно получить численные граничные условия для левой и правой границ соответственно:

$$T_{i,j}^n = \frac{\lambda}{2\alpha h_x + 3\lambda} (4T_{i+1,j}^n - T_{i+2,j}^n) + \frac{\alpha}{2\alpha h_x + 3\lambda} T_c + O(h^2), \quad (1.17.1)$$

$$T_{i,j}^n = \frac{\lambda}{2\alpha h_x - 3\lambda} (T_{i-2,j}^n - 4T_{i-1,j}^n) + \frac{\alpha}{2\alpha h_x - 3\lambda} T_c + O(h^2). \quad (1.17.2)$$

Граничные условия четвёртого рода моделируют процесс идеального теплового контакта между двумя поверхностями и описывают соотношения тепловых потоков и температур на границах этих соприкасающихся тел. Они описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_{1,i,j}^n}{\partial n_1} \vec{l}_n = \lambda_2 \frac{\partial T_{2,i,j}^n}{\partial n_2} \vec{l}_n, \\ T_{1,i,j}^n = T_{2,i,j}^n. \end{cases} \quad (1.18)$$

Первое уравнение соотносит величины тепловых потоков двух тел, а второе – значения температур. Таким образом, данное граничное условие имеет простой физический смысл того, что отводимое количество тепла от первого тела полностью передаётся через границу второму телу, причём температура в данных точках на границах двух тел не может иметь двух различных значений. [1, С. 57].

На практике при разработке алгоритма методом конечных разностей оба уравнения можно легко реализовать в несколько этапов. Рассмотрим контактирующие границы двух тел на рисунке 2.

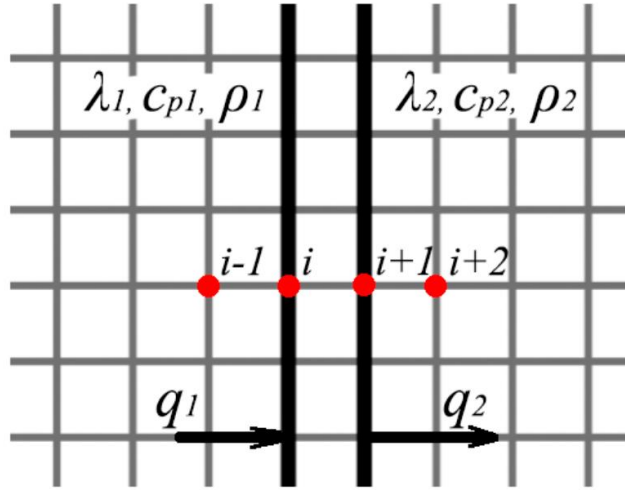


Рисунок 2 – Пример взятия точек для граничного условия четвёртого рода, где левое тело – первое, правое тело – второе

Пусть расстояние между границами тел 1 и 2 стремится к нулю, хотя в расчётах оно может равняться шагу по оси, так как в расчёте температур непосредственно на границах мы не будем брать величину шага между границами.

Разберём условие равенства тепловых потоков. Преобразуем данные уравнения:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_{1,i,j}^n}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_{2,i,j}^n}{\partial n};$$

$$\lambda_1 \frac{T_{1,i,j}^n - T_{1,i-1,j}^n}{h_x} = \lambda_2 \frac{T_{2,i+1,j}^n - T_{2,i+2,j}^n}{h_x}.$$

Учитывая прямоугольную систему координат с равномерной сеткой, можно опустить вектор нормали:

$$T_{1,i,j}^n = T_{1,i-1,j}^n - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (T_{2,i+1,j}^n - T_{2,i+2,j}^n); \quad (1.19)$$

Установив температуру на границе первого тела, мы далее приравниваем значение температуры соседнего узла на границе второго тела.

Таким образом, граничное условие четвёртого рода требует описания температур четырёх точек двух тел на моменте времени t .

1.6 Плотность внутреннего источника теплоты.

Ранее мы рассматривали простой вид уравнения теплопроводности (1.1) без учёта внутренних источников тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (1.1)$$

Общий баланс энергии в теле складывается из несколько видов теплот:

- Подводимых в тело;
- Отводимых от тела;
- Внутренних тепловыделений.

Подводимую и отводимую теплоты в теле мы уже разобрали выше. Внутренние тепловыделения характеризуются объёмной плотностью теплового потока или плотностью внутреннего источника теплоты q_v с размерностью Вт/м³. Внутреннее тепловыделение описывает химические и электрические процессы, протекающие в теле. Тогда уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q_v}{c_p \rho} \quad (1.20) \quad [4, \text{С. 12}]$$

Объёмная плотность теплового потока зависит от времени и от координаты, поэтому его можно задавать в качестве функциональной зависимости. В данной работе мы будем разбирать равномерное распределение источников теплоты в теле, неизменное во времени. Знак «+» означает выделение тепла в теле, а знак «-» – поглощение тепла телом.

С такими допущениями на практике реализовать условие наличия внутренних источников теплоты не является сложной задачей. Если

рассматривать постоянное значение q_v , то его можно добавлять в численное уравнение теплопроводности внутри рассматриваемой области:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{a\Delta t}{(h_x)^2} (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) + \frac{a\Delta t}{(h_y)^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n) + \Delta t \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (1.21)$$

Так как это объёмная плотность, то её значение стоит рассчитывать для выбранного объёма. Так, например, если мы хотим задать величину тепловыделения в 10 Вт для прямоугольника 0,5 x 0,5 м, не имея третьего измерения, то плотность поверхностных источников тепла будет рассчитываться при предположении, что у нас всё-таки задаётся третье измерение, длина в котором равняется 1 метру:

$$\frac{10 \text{ Вт}}{(0,5 \text{ м})^2 * 1 \text{ м}} = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Данный способ задания внутреннего источника теплоты стоит учитывать при моделировании процесса теплопереноса в программном комплексе ANSYS. В дальнейшем в работе будет проведено сравнение распределения температур в ANSYS и с помощью метода конечных разностей, при котором будет подтверждено предположение о дополнительных измерениях с длинами в 1 метр в них.

2 Проведение верификации с помощью метода конечных разностей

Мы разобрали метод конечных разностей для решения задачи теплопроводности. Но для сравнения и подтверждения корректности полученного решения задачи нам нужно получить решение в другом программном комплексе, с помощью которого будет проводиться проверка адекватности и сходимости исходного решения. Данный этап называется верификацией решения.

2.1 Определение верификации

Под верификацией программы или алгоритма решения задачи понимают проверку программы на соответствие предъявленных к ней требованиям. При соответствии этим требованиям говорят, что программа является корректной; в противном случае – некорректная. В общем случае, под верификацией понимают анализ программы на наличие или отсутствие ошибок, отдаляющих их от сходимости решения исходной задачи.

Однако, выше было дано формальное определение верификации. На практике возникает множество нюансов, например:

- формируемые требования зачастую определяются неформально, поэтому определить их соответствие программой удаётся не всегда;
- даже в случае формальных требований доказательство отсутствия ошибок в программе является сложной задачей с математической точки зрения.

Отсюда методы верификации подразделяют на три группы:

1. формальные методы, в которых используют математический анализ модели программы и модели требований к ней;
2. методы тестирования, в которых проверяют поведение программы на наборе реальных экспериментов;

3. экспертиза, в ходе которой специальные люди на основе знаний и опыта оценивают полученные программой результаты. [5, С. 18].

В данной работе мы будем использовать формальный метод верификации, в частности – метод проверки эквивалентности. В данном методе модель программы и модель требований являются однотипными (в случае модели требований мы возьмём решение, полученное с помощью программного комплекса ANSYS). Модель требований в данном методе называется эталонной моделью или эталонной реализацией. [5, С. 20].

Об эквивалентности программы и модели можно судить, если с одинаковыми наборами входных переменных они возвращают одинаковые выходные переменные. [5, С. 22].

Однако этот метод верификации не идеально применим к данной задаче. Он опирается на эквивалентных заменах уравнений программы и модели, благодаря чему их можно привести друг к другу. В данной работе для решения задачи используются два разных метода, которые нельзя свести один к другому, к тому же нам не доступны точные алгоритмы решения методом конечных элементов, реализованные в программном комплексе ANSYS. Если взять во внимание те факты, что классы точности полученных решений отличаются между этими методами и ошибки округления в ЭВМ имеют место при решении задачи, то мы можем лишь с некоторой точностью судить о прохождении верификации программной реализации метода конечной разности с считающейся в данной работе эталонной реализацией с помощью метода конечных элементов в комплексе ANSYS.

2.2 Основы метода конечных элементов

Идея метода конечных элементов (МКЭ) заключается в аппроксимации любой непрерывной величины моделями из отдельных элементов. В каждом из таких элементов непрерывная величина заменяется кусочно-непрерывной

функцией, значение которой опирается на значения непрерывной величины в конечном числе точек элемента, называемых узлами.

Исходное дифференциальное уравнение умножается на некоторую произвольную функцию v (называемой аппроксимирующей функцией), принадлежащей множеству непрерывных функций, k раз дифференцируемых и равных нулю на концах отрезка. Полученное равенство интегрируют по заданному отрезку и затем с помощью формулы интегрирования по частям преобразуют интеграл, содержащий производные от неизвестной функции. Таким образом, метод конечных элементов отличается от метода конечных разностей другим типом дискретизации и методом построения расчётной сетки. Благодаря этому в МКЭ решение получается на границах элементов в сравнении с решением в отдельных расчётных точках в методе конечных разностей. [6, С. 7-9].

Метод конечных элементов требует больших вычислительных мощностей в сравнении с методом конечных разностей, но из-за повышения точности (интегрирование проводится по объёму конечного элемента, а не только в расчётных точках) данный способ решения получил большую популярность, вследствие чего в различных программных комплексах используют преимущественно именно МКЭ.

2.3 Построение математической модели

Реальная конструкция может иметь множество особенностей, усложняющих составление модели и дальнейшего анализа. К таковым относятся: несовершенство формы, неоднородность структуры материала и, соответственно, неоднородность его свойств. На практике учесть все имеющиеся свойства тела невозможно, поэтому прибегают к идеализированным телам или к физическим моделям. Такие модели имеют ряд принятых допущений, позволяющих проанализировать систему с

определённой степенью точности и значительно упрощающих дальнейшее решение. [7, С. 12].

Для задачи теплопроводности приняты следующие допущения:

- твёрдое тело является сплошным (в любом выделенном объёме содержится вещество), однородным и изотропным (в любом выделенном объёме и в любом рассматриваемом направлении свойства материала одинаковы);
 - деформации за счёт изменения температуры пренебрежимо малы по сравнению с линейными размерами тела;
 - внутренние источники тепла в теле распределены равномерно.
- [8, С. 15]

Исходя из особенностей конкретных задач, некоторые допущения могут быть несправедливы и, соответственно, опущены, но в большинстве случаев они не влияют на решение.

После получения физической модели приступают к построению математической модели, включающую входные и выходные данные, а также математически сформулированный оператор перехода от одного к другому. Зачастую в математической модели используют определённые допущения, упрощающие описание отдельных свойств. Связано это с существованием нескольких различных математических моделей для одной физической модели. [7, С. 13].

После составления математической модели переходят к её исследованию и решению. Выбор метода исследования может существенно влиять на устойчивость решения, поэтому для каждой задачи выделяют более эффективный метод решения. [7, С. 14].

Анализ математической модели методом конечных элементов состоит из следующих шагов:

1. Исследуемая область разбивается на конечное множество элементов, имеющих общие узловые точки. Таким образом аппроксимируют форму исходной области.

2. В каждом узле с помощью граничных условий определяется значение непрерывной величины.

3. Значения исследуемой величины внутри области определяется с помощью значений в узловых точках и тех или иных аппроксимирующих функций. [7, С. 20].

Для построения эффективной сетки конечных элементов нужно учитывать следующее:

- Частоту сетки следует задавать согласно каждой области: частую сетку задают для областей с высокими градиентами исследуемых величин, а редкую – в областях с постоянными значениями величин или в областях, не представляющих интереса для исследования (рисунок 3 а).
- Форма элементов должна быть примерно одинаковой, так как в чрезмерно вытянутых элементах наблюдается рост ошибки (рисунок 3 б).
- Желательно подбирать к каждому типу объекта свой тип конечных элементов: для двумерной задачи нужно выбирать треугольники или четырёхугольники, для трёхмерных задач также нужно подбирать пирамиды или параллелепипеды. Кроме того, важно учитывать порядок элементов: линейные (первого порядка), в котором узловые точки будут только в углах, или параболические (второго порядка), имеющие дополнительный узел вдоль каждой из сторон (рисунок 3 в).
- Элементы первого порядка требуют более частой сетки, чем элементы второго и более высоких порядков (рисунок 3 г).
- Ориентация элементов должна быть корректно подобрана. Так, например, повышение частоты элементов вдоль длины объекта снижает количество ошибок, в сравнении с случаем повышения частоты вдоль высоты (рисунок 3 д). [7, С. 23, 24, 29, 91].

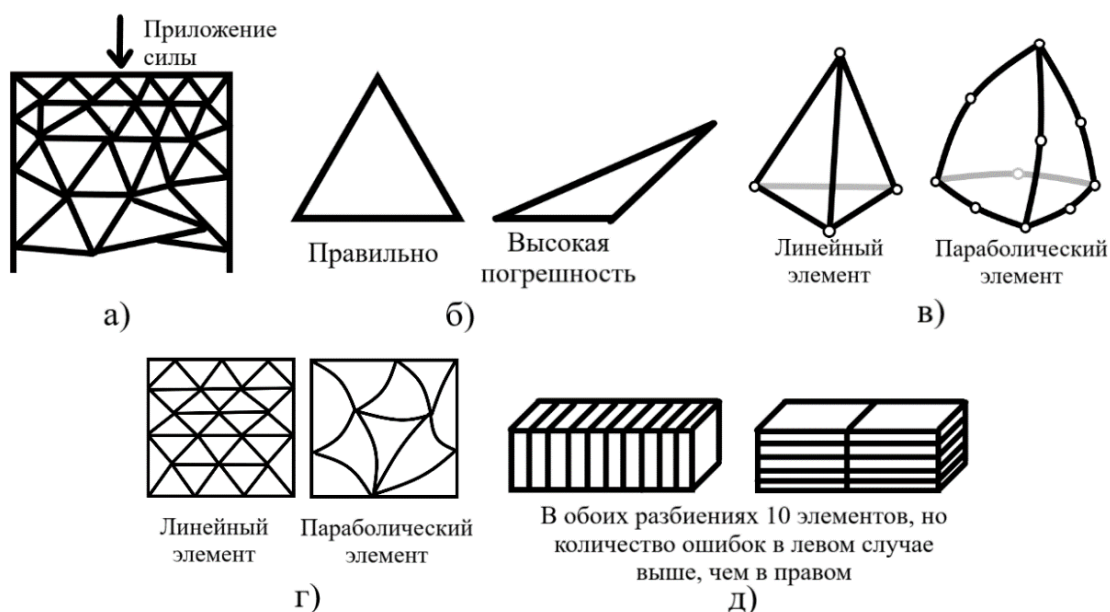


Рисунок 3 – Типы конечных элементов

На практике расчёта МКЭ были выявлены следующие рекомендации:

- использование упорядоченной сетки предпочтительнее произвольной сетки;
- прямоугольные элементы более предпочтительнее треугольных;
- треугольная сетка второго порядка обладает такой же точностью, как прямоугольная сетка первого порядка;
- прямоугольная сетка второго порядка эффективнее треугольной сетки второго порядка. [7, С. 24, 25].

3 Применение метода конечных разностей в задачах теплопроводности

3.1 Постановка задачи теплопроводности для одной пластины

В настоящей работе мы будем разбирать двумерную задачу теплопроводности стального листа марки ст 10 и сравнивать решения, полученные с помощью метода конечных разностей, реализованного с помощью языка программирования C++, и метод конечных элементов в программном пакете ANSYS APDL. Характеристики стали представлены в таблице 1. Мы будем задавать такие значения температуры, при которых коэффициент теплопроводности и теплоёмкость будут равны константе.

Таблица 1 – характеристики стали ст 10

Плотность ρ , кг/м ³	Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м.К);	Удельная теплоёмкость c_p , Дж/(кг.К);
7900	83	460

Мы будем рассматривать плоскость 1 x 1 метр, соответственно при одинаковом количестве разбиений вдоль осей x и y у нас получатся квадратные элементы. Нам предстоит определить влияние числа Куранта на устойчивость решения и влияние количества узловых точек на точность решения.

Мы будем использовать разностную сетку второго порядка точности относительно h_x и h_y . Таким образом, численное решение будет аппроксимировать исходную задачу с погрешностью $O(\Delta t + h_x^2 + h_y^2)$. Исходя из условия устойчивости, которую мы будем определять из числа Куранта, мы сможем говорить о сходимости задачи.

Мы рассмотрим два вида граничных условий: в первом опыте мы будем рассматривать граничные условия первого рода, принятые для противоположных границ. На верхней границе значение температуры будет

равным 300 К, на нижней – 400 К, начальная температура будет равна также 300 К, а на оставшихся двух границах будет принято условие теплоизоляции $q = 0$. Во второй серии опытов мы будем рассматривать соседние границы с наложенными на них граничными условий первого и второго рода. Начальная температура будет равна 273 К, температура нижней границы – 300К, а на левую стенку будет наложен тепловой поток, равный 1400 Вт/м², на оставшихся двух границах будет принято условие теплоизоляции $q = 0$.

3.2 Программная реализация алгоритма решения

Работу программы условно можно поделить на три части:

1. Входные данные;
2. Цикл решения;
3. Вывод результатов в файл.

Первая часть содержит описание объявленных параметров и переменных, которые нужны для работоспособности программы. В ней объявляются:

- константы тепловых характеристик материалов (удельная теплоёмкость, плотность и коэффициент теплопроводности, а также рассчитанная константа коэффициента температуропроводности);
- геометрические характеристики и параметры сетки (длины пластин по осям x и y , количество узловых точек вдоль осей, рассчитанные константы длины шага по осям);
- два массива узловых точек, с помощью которых будет численно решаться задача;
- значения начальных температур, граничных условий, длины шага по времени в секундах (оптимальное значение которой будет рассчитываться с помощью числа Куранта и наблюдений при сохранении сходимости), конечное время расчёта.

Два массива вводятся для того, чтобы на момент времени t учитывать граничные условия системы (для этого вводится массив $t0$), а при следующем шаге по времени $t+1$ решение идёт в другом массиве (t), опираясь на значения массива $t0$. В конце решения на определённом шаге по времени массив $t0$ перезаписывается массивом t и решение продолжается точно также.

Стоит отметить, что расчётная сетка берётся с двумя дополнительными мнимыми точками, находящимися вне пластины по каждую из границ. Данное решение сделано, во-первых, для упрощения расчётов в случае условия теплоизоляции $q = 0$, при котором можно не изменять разностную схему. Температуру внешней точки на левой границе можно найти, преобразовав выражение условия теплоизоляции:

$$-\lambda \frac{\partial T_{i,j}^n}{\partial n} \vec{l}_n = q_{i,j}^n = 0; \quad (3.1.1)$$

$$\frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2h_x} = 0; \quad (3.1.2)$$

$$T_{i-1,j}^n = T_{i+1,j}^n. \quad (3.1.3)$$

Во-вторых, внедрение мнимых точек восстанавливает порядок наименования узловых точек в массивах, так как в них наименование начинается идти с нуля. Это помогает исследователю не допустить ошибки с наложением множества условий, потому что в случае обращения к определённой границе в массиве координаты данной границы будут в той же точке, что и в модели.

Во второй части программы в основном теле цикла проводится решение задачи. Сначала с помощью цикла задаётся начальная температура каждого узла пластины, затем основная работа по решению системы проводится во втором цикле, в котором для каждого шага времени

рассчитываются узловые температуры. На первом этапе решения задаются граничные условия и мнимые узловые температуры вне пластины для массива $t0$ в момент времени n . Связано это с тем, что в аппроксимации граничных условий отсутствует частная производная по времени, поэтому граничные условия должны накладываться перед численным решением на новом шаге по времени.

В случае граничного условия первого рода значения температур всех узловых точек на выбранной границе заменяется на установленное. Если брать граничные условия второго рода, то расчёт проводится следующим образом:

- Начиная с границы, на которую наложено граничное условие второго рода, температура мнимой точки 0 (рис. 4), находящейся вне тела на той же оси, рассчитывается по формуле для момента времени n :

$$T_0 = T_2 + \frac{2h_x}{\lambda} q.$$

Знак «+» для слагаемого с тепловым потоком в данной ситуации будет из-за того, что нормаль теплового потока направлена вглубь тела, а при аппроксимации значения теплового потока направление берётся в противоположную сторону на той же оси;

- Температуры с 1 по $(i-1)$ узлов рассчитываются по формуле (1.6) для следующего шага по времени $n+1$:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{a\Delta t}{(h_x)^2} (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) + \frac{a\Delta t}{(h_y)^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)$$

- Перед расчётом температуры узла на противоположной границе рассчитывается значение температуры для $(i+1)$ узла для момента времени n :

$$T_{i+1} = T_{i-1} - \frac{2h_x}{\lambda} q.$$

Знак « $-$ » будет теперь из-за того, что направления шага в разностной схеме совпадает с направлением нормали и имеет простой физический смысл: если тепловой поток не будет покидать тело, то энергия, сообщаемая тепловым потоком, будет бесконечно накапливаться в теле, следовательно, температура будет бесконечно расти.

- Температура последнего узла i для момента времени $(n+1)$ рассчитывается по той же формуле (1.6).

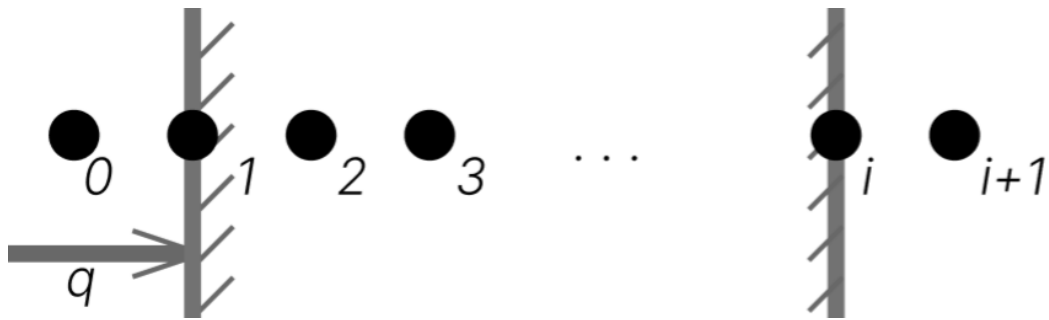


Рисунок 4 – Расчётная сетка при наложении граничного условия второго рода

Граничные условия третьего рода реализуются схожим образом, что и второго рода, а алгоритм реализации граничного условия четвёртого рода мы уже разобрали в первом разделе.

Задав все граничные условия, можно приступать к расчёту температур всех внутренних узлов тела с помощью формулы (1.6) для времени $(n+1)$:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{a\Delta t}{(h_x)^2} (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) + \frac{a\Delta t}{(h_y)^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n).$$

Когда значения всех температур всех узлов системы будут заданы для данного шага времени, происходит перезаписывание массивов ($t0 = t$) и работа программы будет продолжаться, пока она не дойдёт до конечного

времени, либо пока разница температур между шагами по времени в выбранной точке не будет меньше заданного значения. Первый метод неэффективен в плане времязатратности, так как когда система придёт к стационарному процессу, то программа всё равно продолжит проводить расчёты. Во втором методе стоит учитывать время, при котором распределение температур от наложенных граничных условий ещё не достигнет выбранной точки, однако процесс ещё не будет считаться стационарным, следовательно, программа закончит проводить расчёты раньше времени. Предотвратить это можно с помощью задания границы времени, после преодоления которой программа может начать проверять возможность выйти из цикла, либо с помощью задания нескольких таких точек.

Вывод программы осуществлён с помощью записи во внешний файл конечной модели системы. При этом задаются координаты точек по оси x , y , а также значения температур в этих точках. С помощью данного файла можно построить плоскость распределения температур с помощью программного обеспечения для построения контурных карт. В данной работе за основу было взято программное обеспечение Surfer от Golden Software.

Вывод можно также осуществлять в качестве графика изменения температуры выбранной точки в течение времени. Для этого в отдельный файл с определённым шагом по времени записывается значение температуры точки, который потом можно наглядно сравнивать с решениями при других способах задания сетки.

3.3 Определение числа Куранта для задачи с граничными условиями первого рода

Рассчитаем число Куранта для определения величины шага времени. Мы будем рассматривать разбиение на 10, 20 и 40 элементов вдоль осей x и y ,

поэтому длины шагов h_x, h_y будут равны 0,1 м, 0,05 м и 0,025 м соответственно. Рассчитаем число Куранта по формуле (1.11):

$$C = \frac{\lambda}{c_p \rho} \Delta t \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) = \frac{83 \text{ Вт/(м.К)};}{7900 \text{ кг/м}^3 \cdot 460 \text{ Дж/(кг.К)}} \frac{2}{0,1^2 \text{ м}^2} \Delta t$$

$$\approx 0,004568 \frac{1}{\text{с}} \Delta t$$

$$C = \frac{\lambda}{c_p \rho} \Delta t \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) = \frac{83 \text{ Вт/(м.К)};}{7900 \text{ кг/м}^3 \cdot 460 \text{ Дж/(кг.К)}} \frac{2}{0,05^2 \text{ м}^2} \Delta t$$

$$\approx 0,018271 \frac{1}{\text{с}} \Delta t$$

$$C = \frac{\lambda}{c_p \rho} \Delta t \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) = \frac{83 \text{ Вт/(м.К)};}{7900 \text{ кг/м}^3 \cdot 460 \text{ Дж/(кг.К)}} \frac{2}{0,025^2 \text{ м}^2} \Delta t$$

$$\approx 0,073087 \frac{1}{\text{с}} \Delta t$$

С учётом того, что C должно лежат в интервале (0; 1) для обеспечения условия устойчивости, то верхняя граница шага по времени для разбиения на 10 элементов будет равна 218,914 с; для 20 элементов – 54,728 с; для 40 элементов – 13,682 с.

Сравнение температуры центральной точки пластины с помощью метода конечных разностей и метода конечных элементов, реализованных в ПК ANSYS, представлено на рисунке 5.

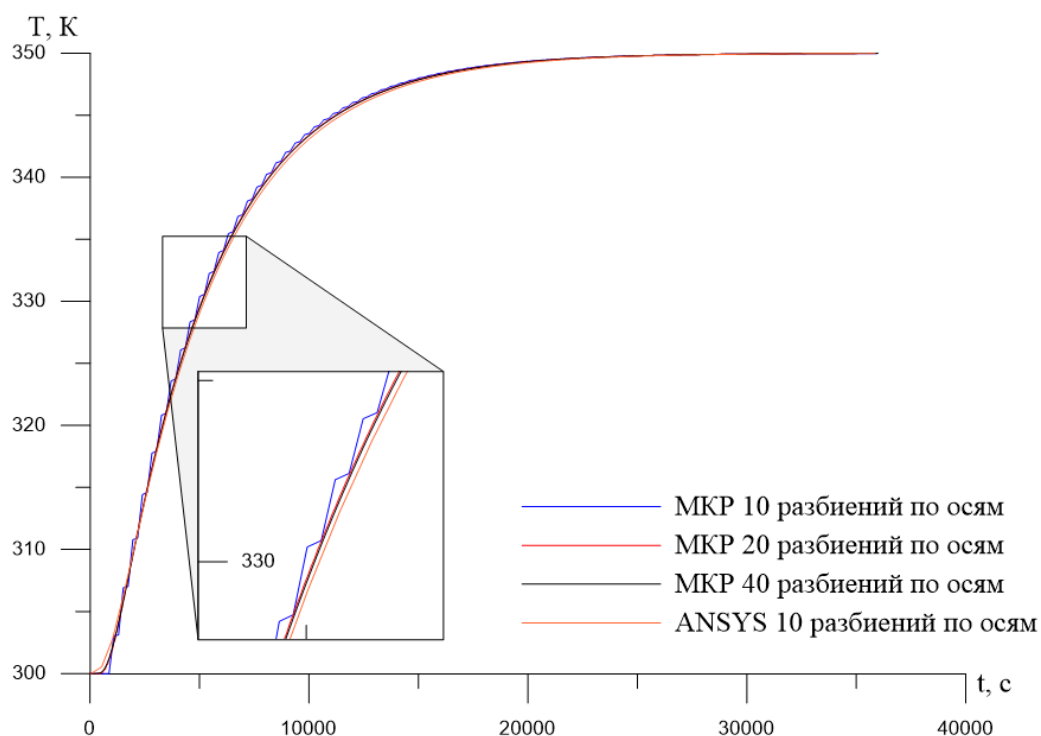


Рисунок 5 – Сравнение температуры центральной точки пластины с граничными условиями первого рода при изменении количества разбиений по осям

На данном рисунке представлены ещё не установившиеся значения температуры центральной точки пластины при ограничении по времени 10 часов. Несмотря на разное количество разбиений, графики для задачи с граничными условиями первого рода получились схожими с решением, полученным в ANSYS. Так как точность конечно-разностного метода равна $(\Delta t + h_x^2 + h_y^2)$, то при измельчении сетки в 2 раза по осям приближённое решение должно стремиться к аналитическому в $2^2 + 2^2 = 8$ раз быстрее. Точность решения с 10 элементами вдоль осей схоже с более измельчённой сеткой, но является менее сглаженным из-за выбранного шага по времени, удовлетворяющему границе задания числа Куранта.

Распределение температур на пластине представлено на рисунке 6.

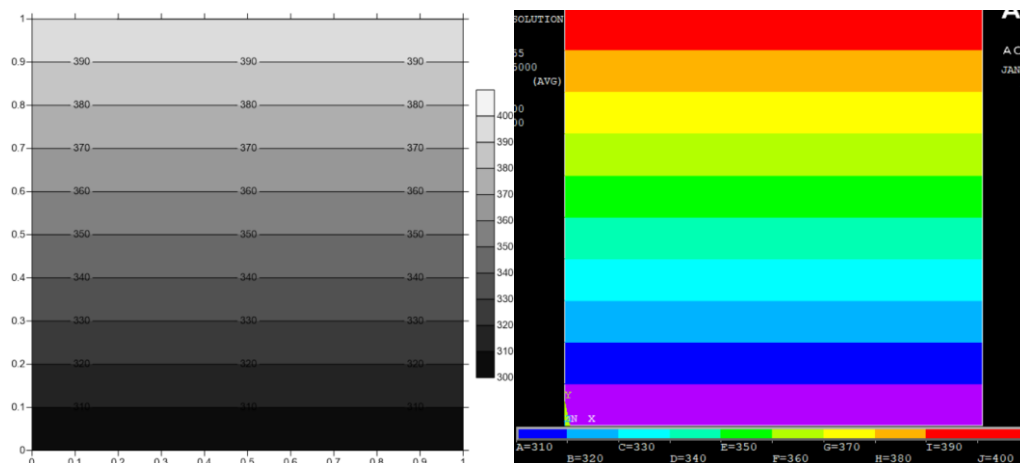


Рисунок 6 – Распределение температур на пластине с граничными условиями первого рода. Рисунок слева – распределение, полученное с помощью МКР, справа – с помощью МКЭ в ПК Ansys

Из рисунков видно, что распределение температур идентичны с шагом в 10 К.

Рассмотрим теперь условие превышения единицы числом Куранта. Для наглядности мы будем рассматривать задачу при разбиении осей на 10 элементов. Рассмотрим два значения числа Куранта, равных $C = 1,005$ и $C = 1,025$ при величинах шага по времени 220 с и 225 с соответственно. Графики температуры центральной точки пластины представлены на рисунке 7.

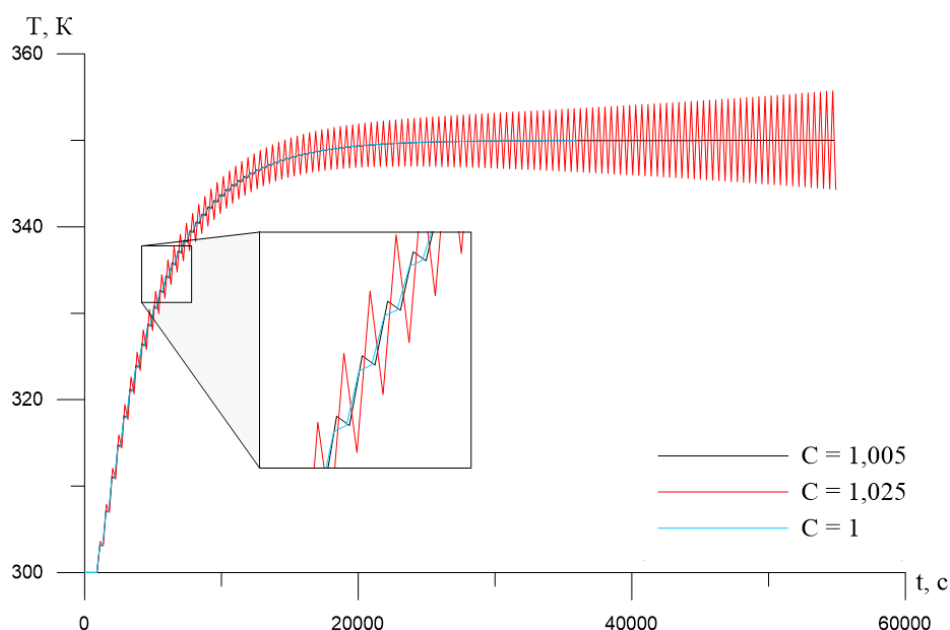


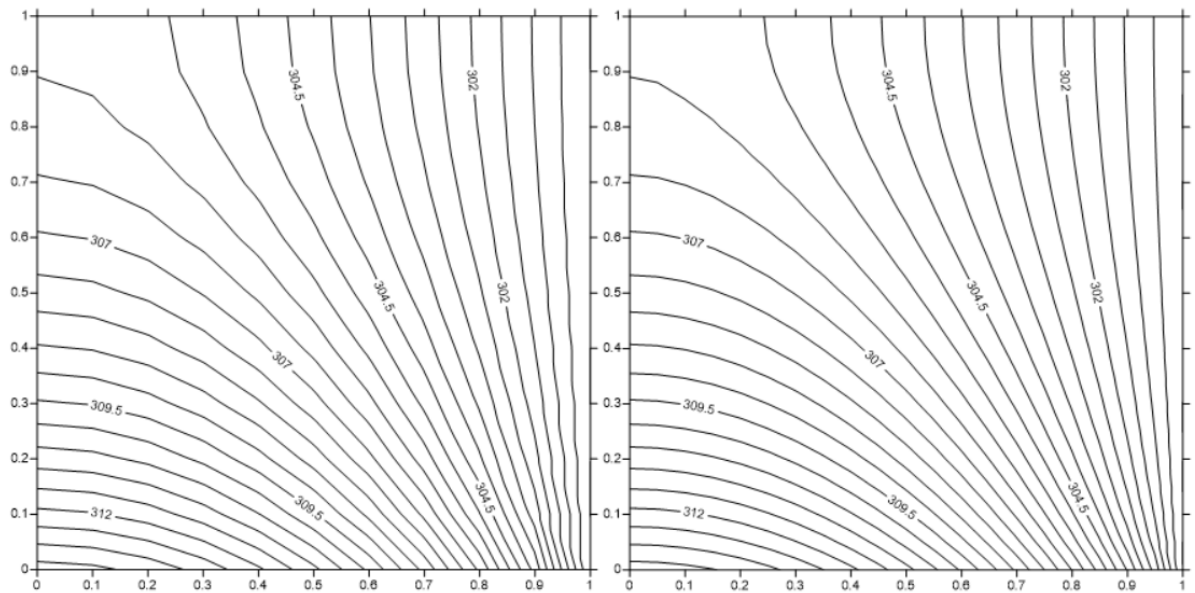
Рисунок 7 – Сравнение температуры центральной точки пластины с граничными условиями первого рода при изменении числа Куранта

Из графиков видно, что даже при небольшом превышении единицы числом Куранта рост температуры является знакоперевающимся: при $C = 1,005$ после увеличения температуры на следующей итерации идёт уменьшение температуры до значения, соответствующего числу Куранта $C = 1$. При больших значениях идёт расхождение графика, поэтому приближённый метод перестаёт быть решением исходной задачи.

3.4 Определение устойчивости задачи с граничным условием второго рода

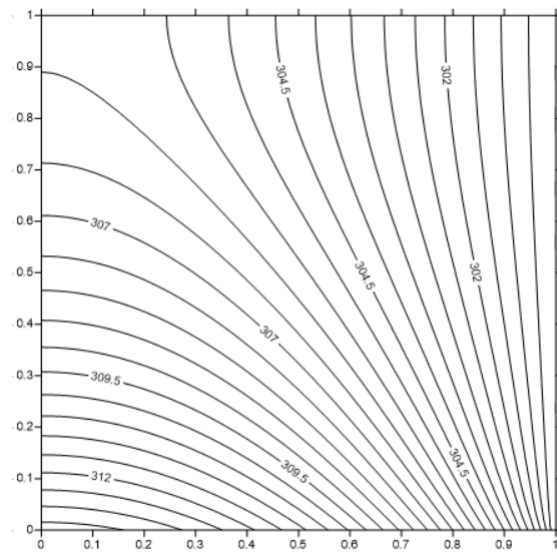
В данном опыте мы будем рассматривать задачу с граничным условием второго рода на нижней границе ($q = 1400 \text{ Вт/м}^2$), с граничным условием первого рода, наложенным на правую границу ($T = 300 \text{ К}$), и с условиями теплоизоляции на оставшихся двух границах. Начальная температура будет равна 273 К .

Мы будем рассматривать уменьшение шага по осям x и y при значении числа Куранта, примерно равного $0,5$. Связано это с тем, что, в отличие от опыта с граничными условиями первого рода, устойчивость разностной схемы теряется при превышении $C > 0,5$, потому что граничные условия второго рода накладывают более жёсткие ограничения на систему. Распределение температур на пластине приведены на рисунке 8. Из данных распределений температур видно, что при разбиении сетки на более короткие отрезки изолинии сглаживаются, давая тем самым более точное распределение температур.

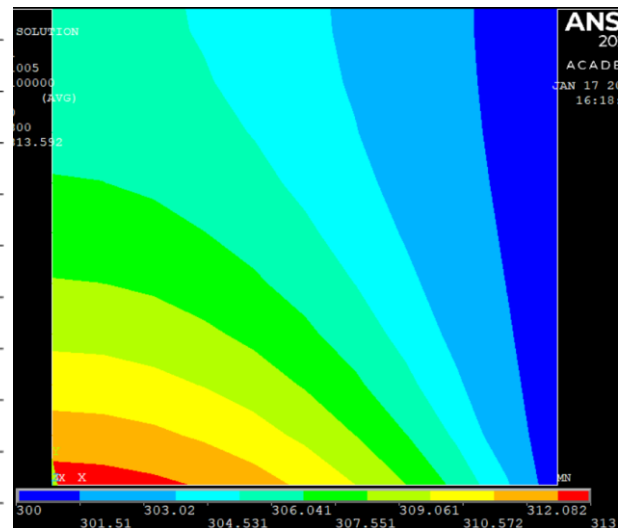


а)

б)



в)



г)

Рисунок 8 – Распределение температур пластины. а), б), в) – полученные методом конечных разностей для 10, 20 и 40 элементов соответственно; г) – с помощью метода конечных элементов

Температура центральной точки пластины при ограничении времени измерения $t = 100000 \text{ с} \approx 27,7 \text{ часов}$ дана на рисунке 9.

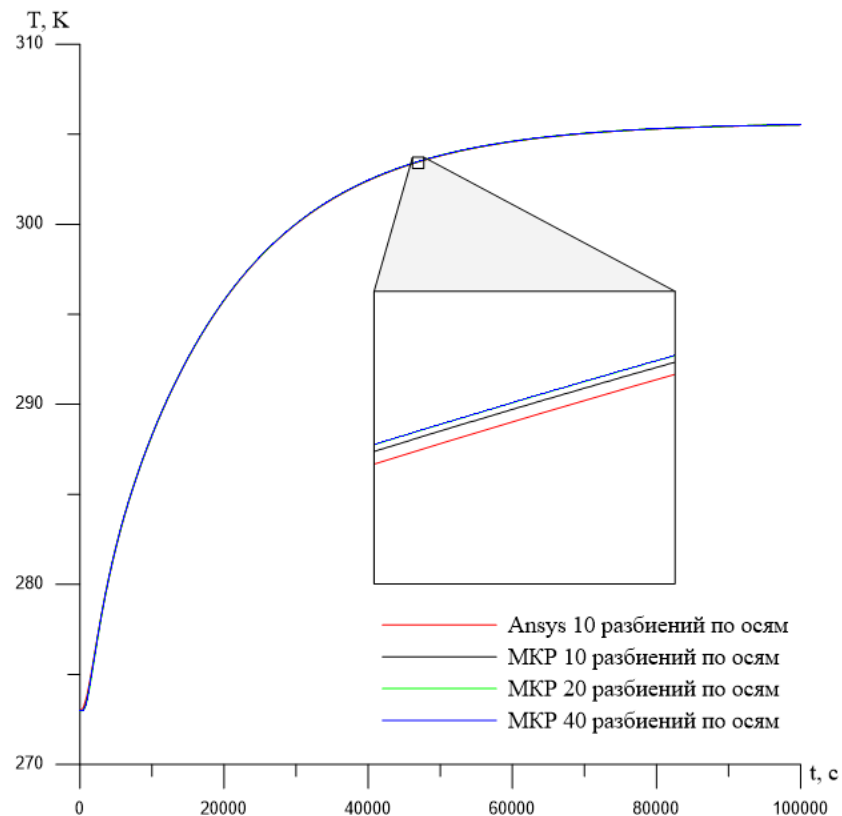


Рисунок 9 – График изменения температуры центральной точки пластины при наложении граничных условиях первого и второго рода

При уменьшении длин шагов по осям x и y графики, в отличие от прошлого опыта, не стягиваются к графику, полученному в ПК Ansys, а наоборот приобретают более выраженную выпуклость. Связано это может быть с тем, что в данном опыте решение, полученное в Ansys, является менее точным в сравнении с решением, полученным методом конечных разностей.

Однако для такой упрощённой задачи измельчение сетки не оказывает большого влияния на распределение температур в теле. При наложении более сложных граничных условий, с другой стороны, влияние количества узлов будет более существенным

3.5 Постановка задачи теплопроводности для двух контактирующих пластин

Рассмотрим систему, состоящую из двух пластин, находящихся в контакте друг с другом. При этом на контактирующие границы будет наложено граничное условие четвёртого рода. В качестве материалов мы возьмём также сталь марки ст 10 и стеклотекстолит СТЭФ. Их характеристики представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Характеристики материалов

Материал	Плотность ρ , кг/м ³	Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м.К);	Удельная теплоёмкость c_p , Дж/(кг.К);
Сталь ст 10	7900	83	460
Стеклотекстолит СТЭФ	1800	1,9	840

Расположение пластин друг относительно друга представлено на рисунке 10. В качестве материала верхней пластины будет сталь ст 10, в качестве нижней пластины – стеклотекстолит СТЭФ. Численное решение будет проводиться следующим образом:

1. Наложение граничных условий на первую пластину (кроме граничных условий четвёртого рода);
2. Численное решение для следующего шага времени всех узлов первой пластины (кроме границы, находящейся в контакте со второй пластиной);
3. Решение распределения температур контактирующей границы первого тела, перенос значения температур узлов на соседние узлы для границы второго тела;
4. Наложение граничных условий на вторую пластину;

5. Численное решение оставшихся узлов для следующего шага времени.

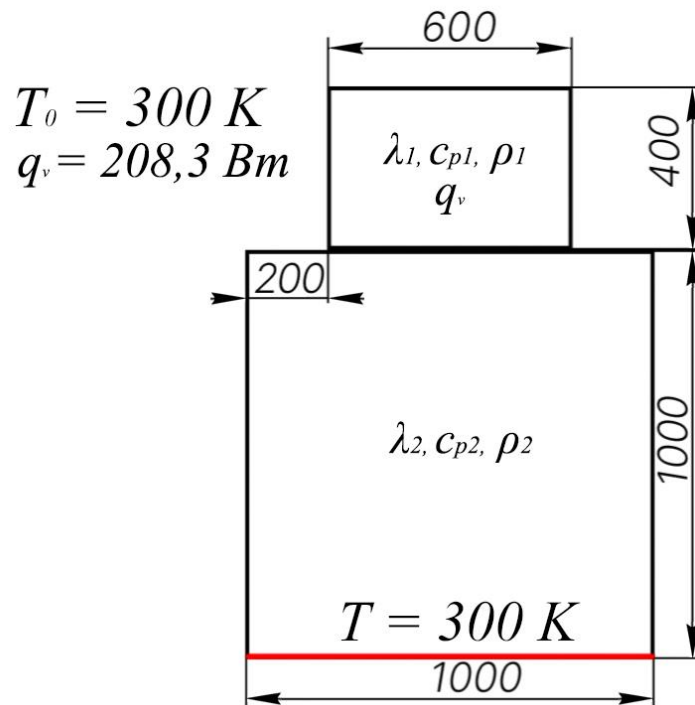


Рисунок 10 – Расположение пластин друг относительно друга и их габаритные размеры

3.6 Анализ сеточной сходимости метода конечных разностей

Рассмотрим поведение системы при разном количестве узловых точек. Пусть начальная температура системы равняется 300 К, на нижнюю границу второго тела наложено граничное условие первого рода с зафиксированной температурой 300 К, а в первой пластине будет источник внутреннего тепловыделения с общей мощностью 50 Вт.

Нам нужно найти плотность внутреннего источника тепловыделения. Так как он задаётся объёмной величиной, то:

$$\int_V q_v dx dy dz = 50 \text{ Вт};$$

Для поверхности можно задать плотность внутреннего источника

тепловыделения при предположении о мнимой третьей оси, длина в которой будет равняться 1 метру. Так как тело будет являться параллелепипедом, то:

$$q_v = \frac{50 \text{ Вт}}{l_x l_y l_z} = \frac{50 \text{ Вт}}{0,6 \text{ м} * 0,4 \text{ м} * 1 \text{ м}} \approx 208,33 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Из-за того, что задание сетки реализовано с одинакового шага по осям x и y , а также из-за того, как задано смещение одной пластины относительно другой с помощью узловых точек, то минимальное смещение можно задавать только через один узел с каждой стороны. Таким образом, минимальная длина шага по осям x и y будет равна 0,2 м. Уменьшать значения длин шагов можно только делением на 2. Поэтому мы разберём сеточную сходимость для четырёх случаев, то есть для длин шагов 0,2 м, 0,1 м, 0,05 м и 0,025 м соответственно. В этом случае вдоль оси x будет 5, 10, 20 и 40 элементов, а вдоль оси y – 7, 14, 28 и 56 элементов соответственно. Примеры распределения температур представлены на рисунке 11.

Из распределений температур видно, что в самой первой сетке с длиной шага 0,2 м температура первой пластины меньше на 15 К, нежели при разбиениях более частой сеткой. Так как от частоты сетки зависит точность решения, то можно сказать, что в этом случае решение является неправильным и такое разбиение сетки использовать нельзя из-за слишком большой погрешности.

Во втором разбиении сетки с длиной шага 0,1 м отклонение температуры в первой пластине относительно других разбиений с меньшей длиной шагов составляет 3 К, то есть относительная погрешность составляет

$$\frac{3 \text{ К}}{329 \text{ К}} \approx$$

$\approx 0,00912$. Данная погрешность составляет чуть менее 1%, поэтому, начиная с разбиения с длиной шага 0,1 м, точность решения является удовлетворительной.

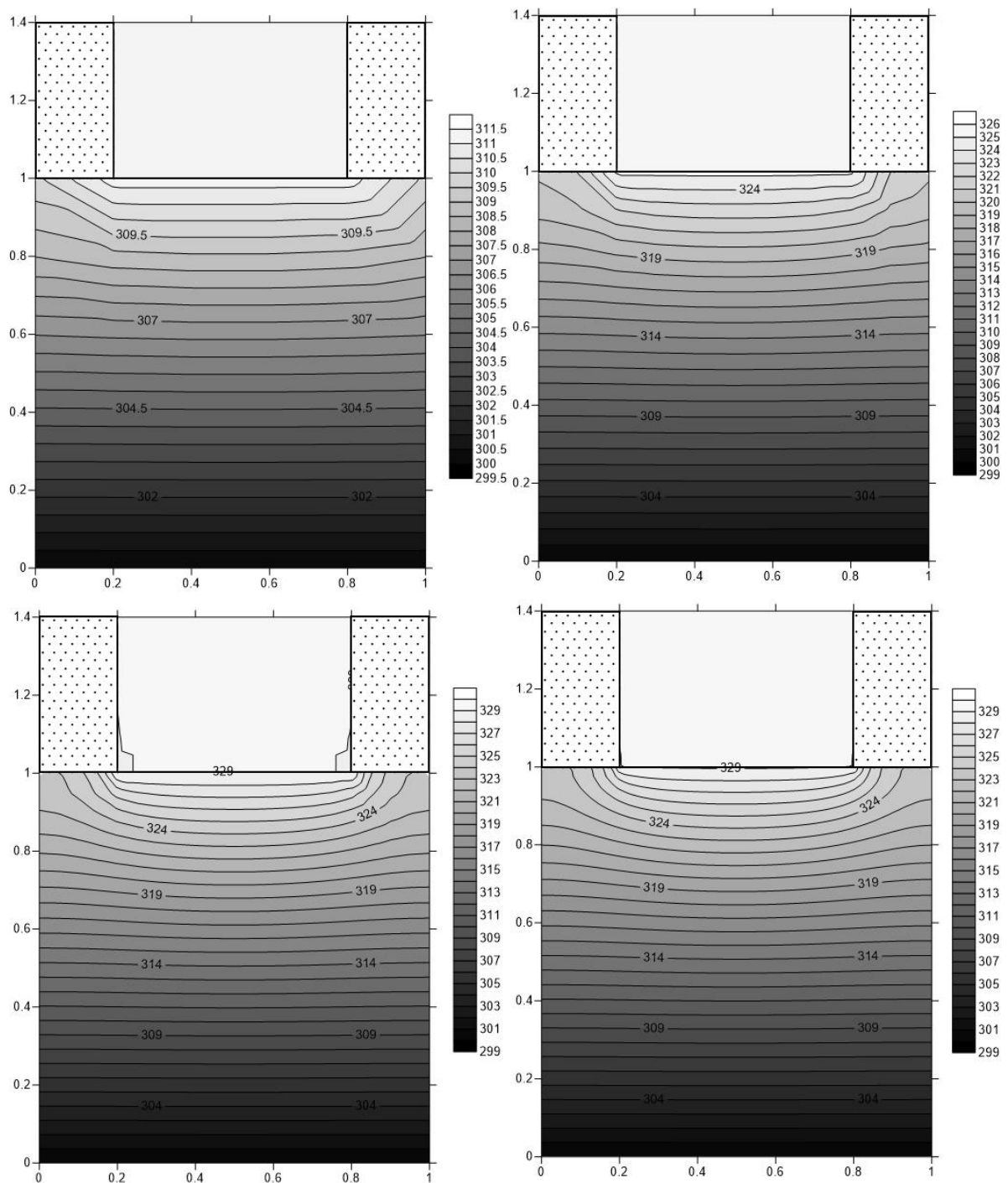


Рисунок 11 – Распределение температур пластин при длинах шагов 0,2; 0,1; 0,05 и 0,025 соответственно по осям x и y ;
пунктирная область – внешняя среда

Отклонения температур между разбиениями с длиной шага 0,05 м и 0,025 м являются совсем незначительными, однако время, которое затрачивается на решение системы, возрастает многократно, поэтому использование более частой сетки теряет смысл.

Стоит отметить, что небольшие области с меньшей температурой в третьем разбиении с величиной шага 0,05 – погрешность при построении плоскости распределения с помощью Surfer. На самом деле температура точек в углах первой пластины составляет 328,988 К, то есть температура всей пластины находится в небольшом интервале [328,988; 329,19].

Рассмотрим сеточную сходимость для ситуации, когда система стремится к стационарному состоянию. Так как время перехода к стационарному состоянию велико, а вблизи температуры стационарного состояния значения температуры меняются очень медленно, то время измерений можно ограничить $t = 1000000$ с. Графики изменения центрального узла в контактной зоне первого тела представлены на рисунке 12.

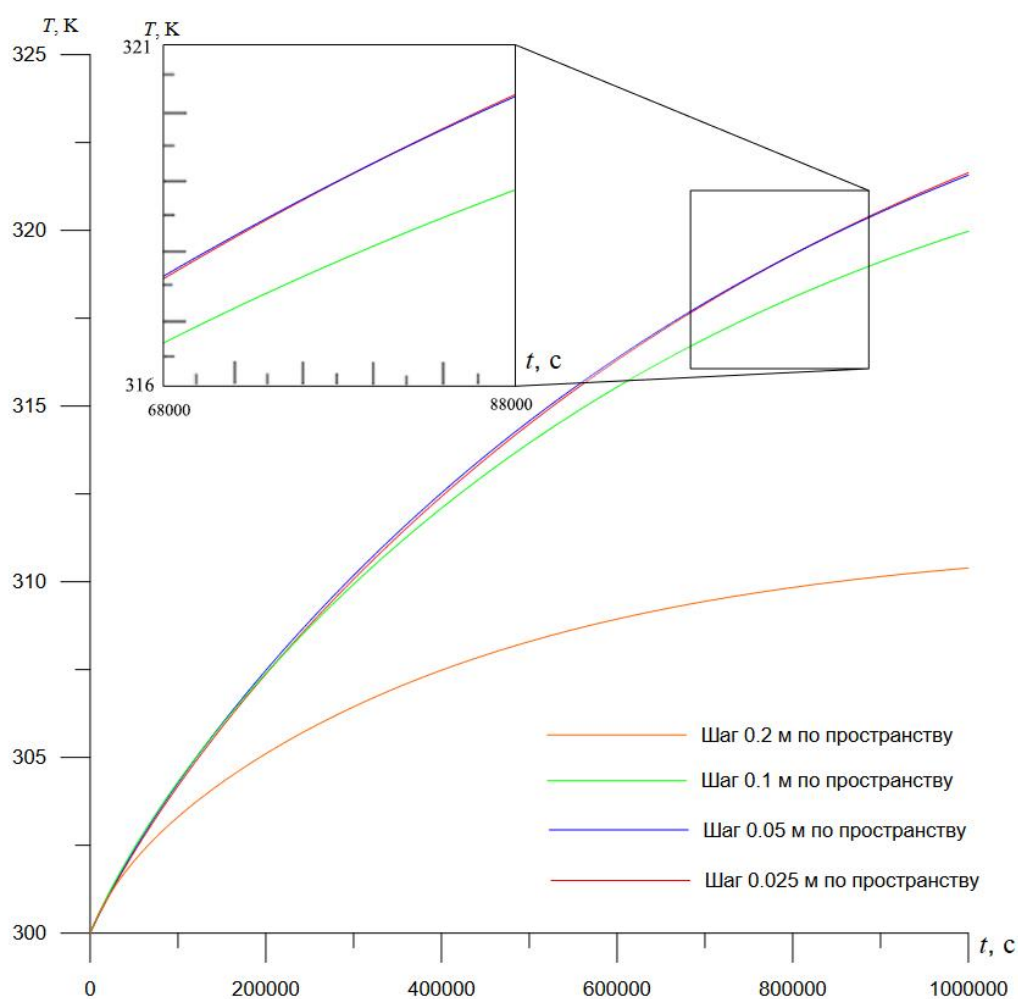


Рисунок 12 – Графики изменения температуры центрального узла в контактной зоне для четырёх различных сеток

Из графиков видно, что расхождение решения с самой большой величиной шага начинается уже с 2 К. Ошибки постоянно накапливаются и поэтому решение не сходится к исходной задаче.

В отличие от задачи с одной пластиной, в которой решение с длиной шага 0,1 м сходилось с решениями с более измельчённой сеткой (рис. 6), в данной задаче из-за дополнительно наложенных условий отклонение полученного решения начинает идти с 8 К. Итоговое отклонение в стационарном состоянии составляет всего 3 К, что всё равно можно считать допустимым относительным отклонением в 0,912%

Решения с величиной шага 0,05 м и 0,025 м являются практически одинаковыми. Конечно, решение с шагом 0,05 м является более выпуклым вверх, однако примерно на 800000 секунде графики всё равно пересекаются. Наибольшее отклонение температур между данными решениями составляет 0,103 К, что является очень малым значением. Поэтому сетка с размером шага 0,05 м в данной задаче является самой эффективной в плане точности и времени, затраченного на решение.

Из графиков может показаться, что отклонения решений друг относительно друга является довольно большим. Если строить графики, выбрав начальную точку по оси y (температура), равную 0 К, а не 300 К, как это было представлено выше, то лишь один график заметно отличается от других – график сетки с шагом 0,2 м. (рис. 13)

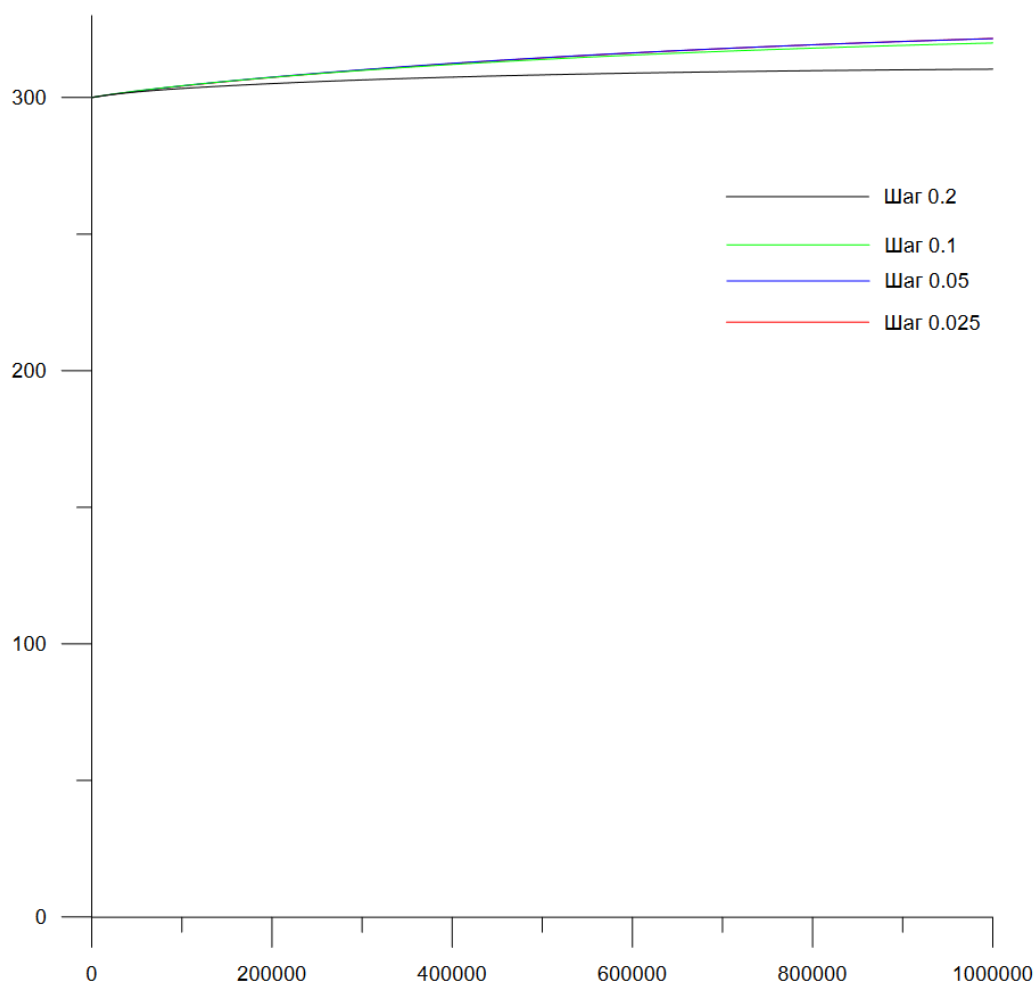


Рисунок 13 – Сравнение графиков с начальной точкой отсчёта 0 К

3.7 Верификация алгоритма решения

Для проведения верификации метода построим точно такую же модель в ANSYS. Мы наложим на неё такие же краевые условия, что и на задачу, решаемую методом конечных разностей: задание плотности тепловыделения в первой пластине и задание первого граничного условия на нижней границе второй пластины.

Мы будем рассматривать решения с помощью конечных элементов первого и второго порядка с пятью примерами разбиений в каждом.

Разберём конечные элементы первого порядка. Графики сравнения температур центральной точки на контактной границе первой пластины представлены на рисунке 14.

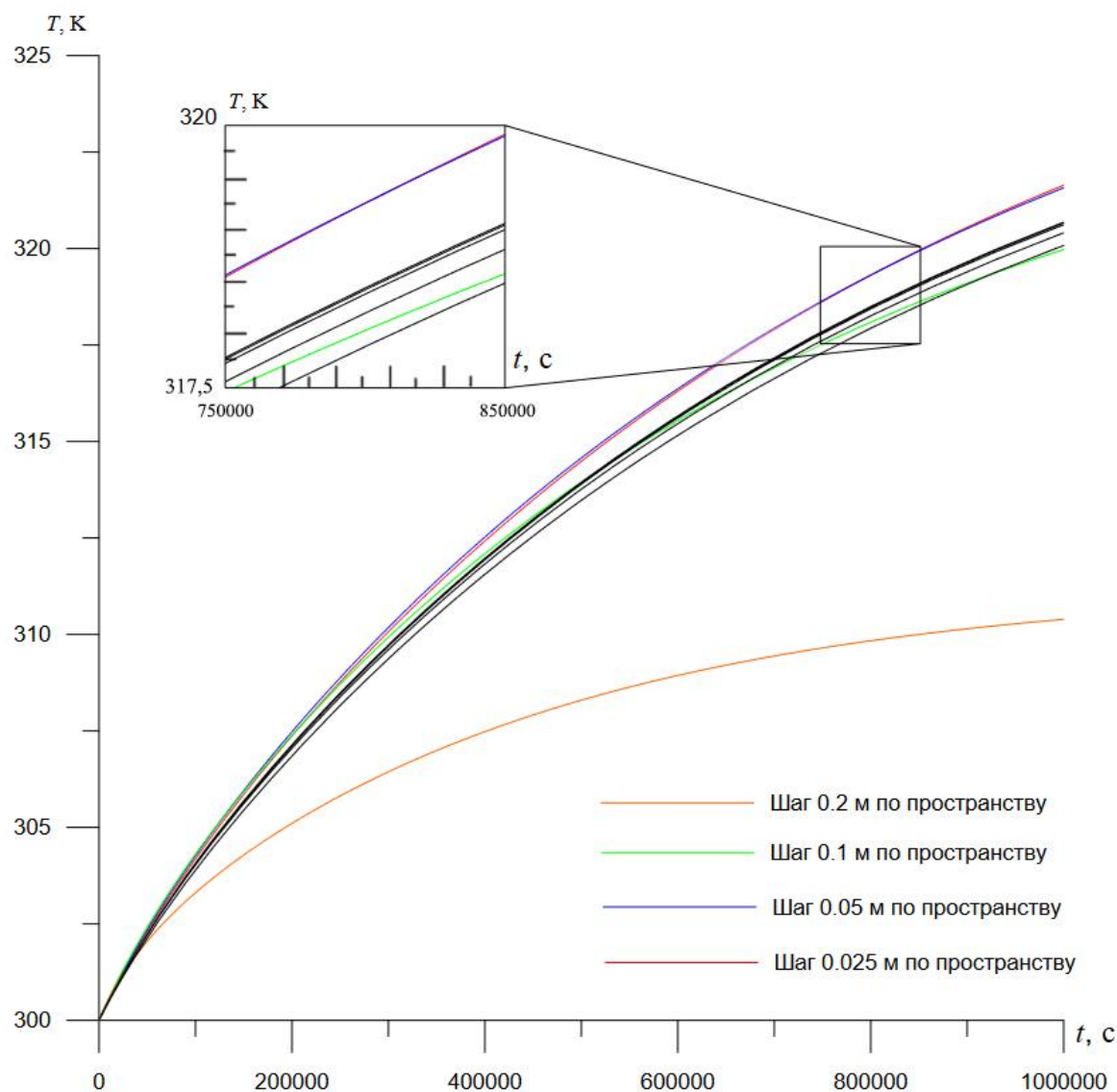


Рисунок 14 – Сравнение температур, полученных с помощью метода конечных разностей (цветные линии) и с помощью метода конечных элементов (чёрные линии) первого порядка; количество конечных элементов идёт по возрастанию снизу вверх

Из графиков видно, что решение, полученное с помощью самой редкой сетки в методе конечных элементов (соответственно, оно является самым неточным для данного метода), практически соответствует решению методом конечных разностей с шагом 0,1 м. При этом в модели МКЭ всего 21 элемент, а в МКР – 124 элемента. Отсюда можно сделать вывод, что, пусть МКЭ для решения требует большего времени, однако он способен выдавать результат, схожий с результатом МКР, однако обладая намного меньшим количества

узлов и элементов.

При увеличении количества элементов в МКЭ графики сходятся к одной кривой, лежащей между графиками МКР с шагами 0,1 м и 0,05 м. Наибольшее отклонение между графиками наибольших порядков обоих методов составляет 0,96 К, что примерно равно 0,3% относительной погрешности МКР от МКЭ. Тот факт, что графики решений МКР сходятся немного выше, чем графики решений МКЭ, можно объяснить разной природой методов аппроксимации с разными порядками точности.

Разберём решение, полученные с помощью конечных элементов второго порядка (рис. 15)

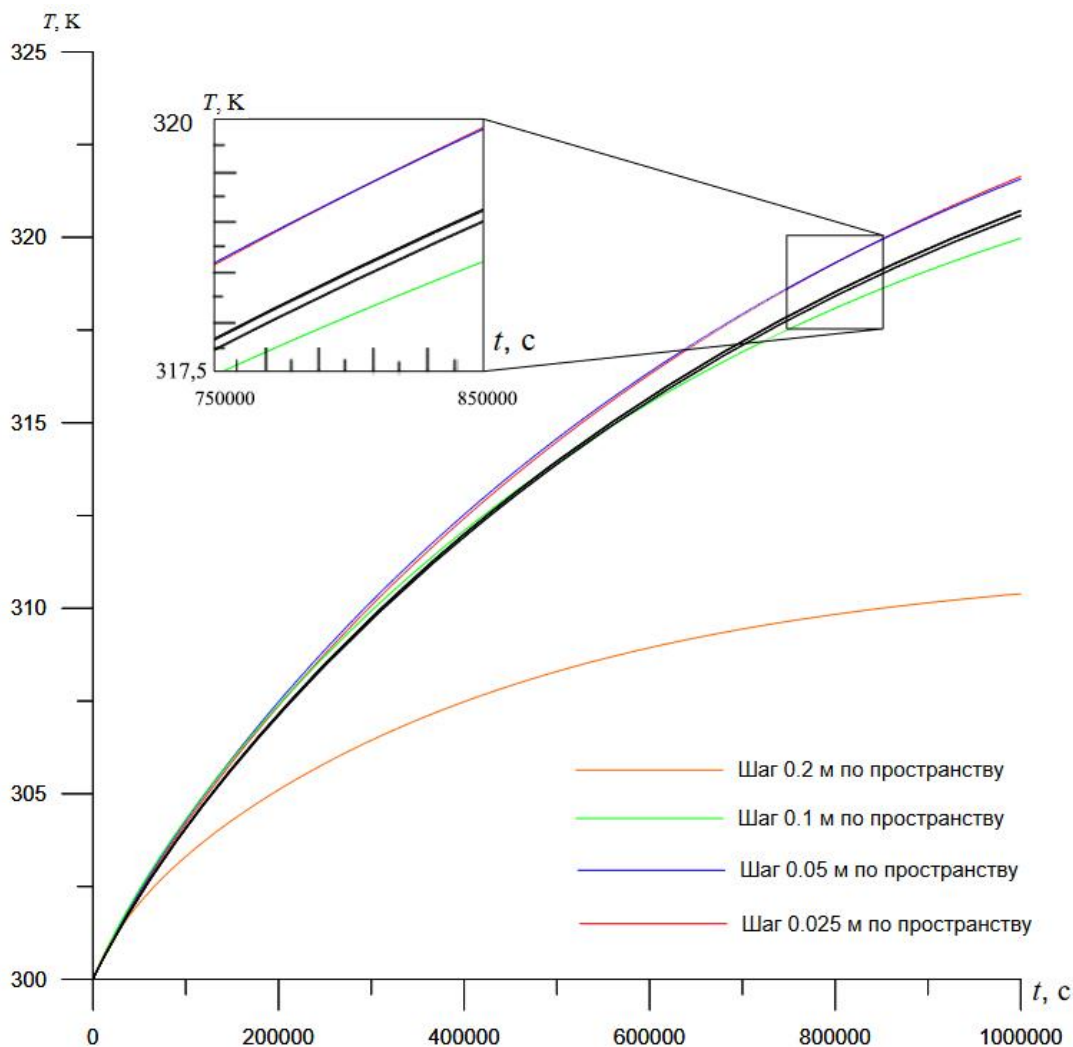


Рисунок 15 – Сравнение температур, полученных с помощью метода конечных разностей (цветные линии) и с помощью метода конечных элементов (чёрные линии) второго порядка

Если в случае конечных элементов первого порядка графики медленно сходились к графику МКР с шагом 0,1 м, то в случае конечных элементов второго порядка графики идут практически едино с графиком МКР с шагом 0,1 м. Отклонение начинает возникать после 50000-60000 секунды. Вновь решения, полученные с помощью МКЭ, оказались между решениями МКР с шагами 0,1 м и 0,05 м.

В сравнении с конечными элементами первого порядка, элементы второго порядка дают более точное решение, но отличия от количества элементов в плане точности решения намного меньше. Влияние количества элементов первого порядка на решение перестаёт быть таким значимым на 4 уровне алгоритма разбиения модели на элементы (что соответствует 274 элементам), однако всё равно для данной задачи отличие между решениями для разбиений с самым большим и самым малым количеством элементов первого порядка составляет 0,6 К. Для элементов второго порядка это отличие составляет всего 0,14 К.

Отличия полученных решений между элементами первого и второго порядков представлены на рисунке 16. Из графиков видно самое неточное решения с элементами второго порядка всё равно практически равняется самому точному решению с элементами первого порядка. Однако, всё равно отклонение решений друг от друга составляет очень малое значение (наибольшим отклонением является 0,6 К или 0,18%), поэтому на решение особого влияния количество элементов не составляет.

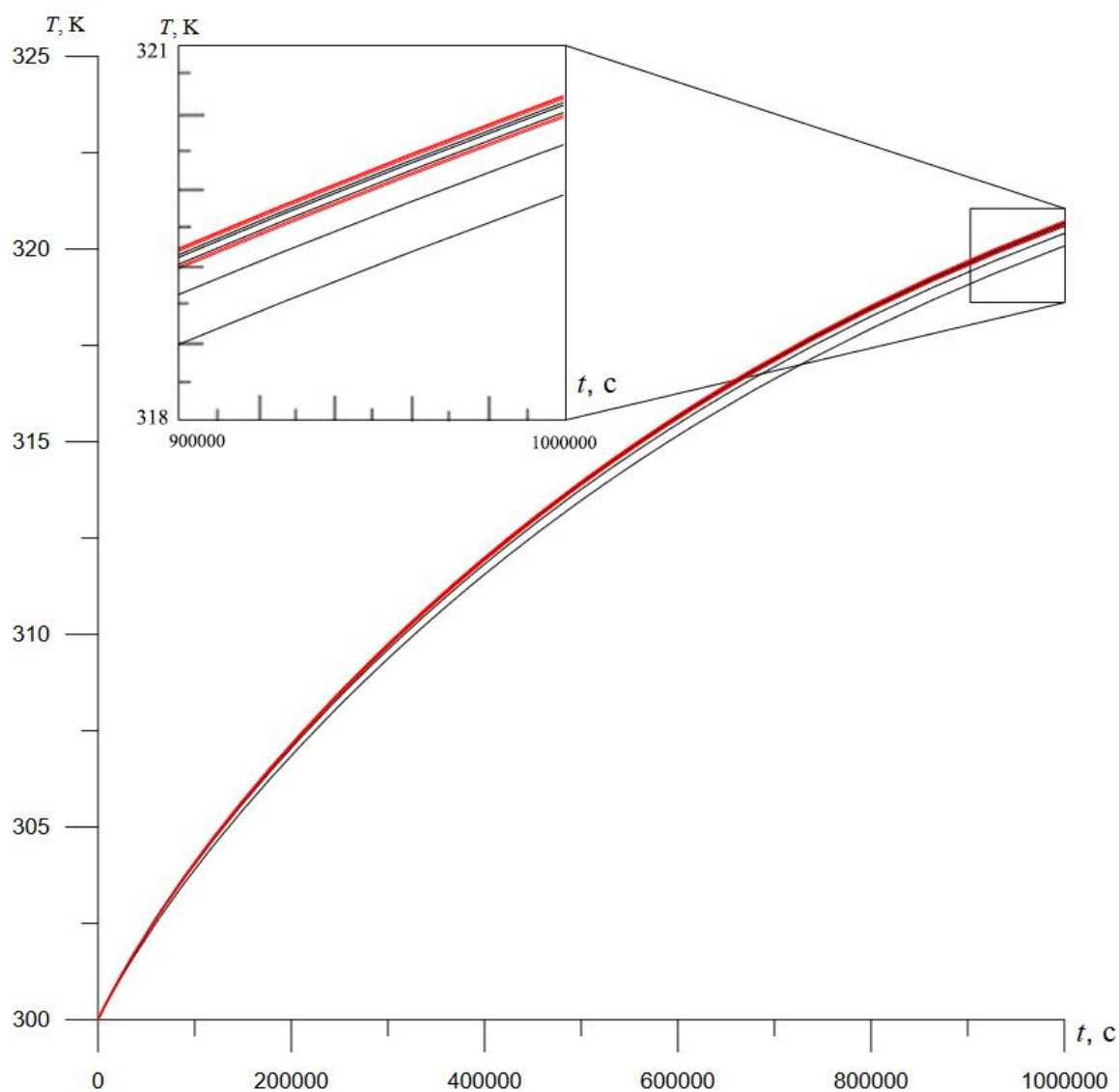


Рисунок 16 – Сравнение полученных решений МКЭ с элементами первого порядка (чёрные линии) и второго порядка (красные линии); количество конечных элементов идёт по возрастанию снизу вверх

Таким образом, можно считать, что алгоритм метода конечных элементов прошёл верификацию с наибольшим отклонением в 0,96 К или 0,3% относительной погрешности относительно решений, полученных с помощью метода конечных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги данной работы, мы разобрали алгоритм работы численных методов решения задач теплопроводности. Мы оценили влияние порядка аппроксимации на точность получаемого решения, а также проанализировали условия устойчивости и сходимости.

Мы убедились, что сходимость решения может достигаться корректной аппроксимацией и выполнением условия устойчивости. Для этого мы рассмотрели поведение системы при различных значениях числа Куранта.

Нами также были сравнены решения, полученные с помощью метода конечных разностей, с решением, полученным в ПК Ansys. Данные, полученные обоими способами, имеют малую степень отклонения, поэтому можно считать, что полученный нами алгоритм решения задач теплопроводности методом конечных разностей прошёл верификацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайнов А. Ю. Численные методы в задачах теплопереноса: Учебно-методическое пособие / А. Ю. Крайнов, Ю. Н. Рыжих, А. М. Тимохин – Томск : Том. ун-т, 2009. – 114 с.
2. Дегтярев, А. А. Метод конечных разностей [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / А. А. Дегтярев ; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Самара, 2011. URL: <http://repo.ssau.ru/handle/Uchebnye-posobiya/Method-konechnyh-raznostei-Elektronnyi-resurs-elektron-ucheb-posobie-54144> (дата обращения: 18.01.2022)
3. Годунов С.К. Разностные схемы. Введение в теорию. Изд.2, перераб. и доп. / С. К. Годунов, В. С. Рябенский – М., 1977 – 440 с.
4. Теплопередача. [В 2 ч.] : [учебное пособие для вузов. Ч. 1 / В. С. Чередниченко и др.] ; под общ. ред. В. С. Чередниченко и А. И. Алифорова ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Изд. 2-е, перераб. и доп.. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. - 378 с.
5. Камкин А.С. Введение в формальные методы верификации программ: учебное пособие – Москва: МАКС Пресс, 2018. – 272 с.
6. Введение в теорию метода конечных элементов. Учебное пособие. — Казань: Изд-во КГУ им. В. И. Ульянова–Ленина, 2004. – 239 с.
7. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
8. Коротких А. Г. Теплопроводность материалов: Учебное пособие / А. Г. Коротких. – Томск : Изд-во ТПУ, 2011. – 97 с.

Введите текст:

...или загрузите файл:

Файл не выбран...

Выбрать файл...

Укажите год публикации: 2022 ▾

Выберите коллекции

Все

Рефераты

Авторефераты

Иностранные конференции

PubMed

Википедия

Российские конференции

Иностранные журналы

Российские журналы

Энциклопедии

Англоязычная википедия

Анализировать

Проверить по расширенному списку коллекций системы Руконтекст (<http://text.rucont.ru/like>)

Обработан файл:

ВКР Дубаненко 03.06.2022.pdf.

Год публикации: 2022.

Оценка оригинальности документа - 97.18%

Процент условно корректных заимствований - 0.0%

Процент некорректных заимствований - 2.82%

Просмотр заимствований в документе

Время выполнения: 17 с.

Документы из базы

Источники заимствования

1. Реферат: Методы оценки температурного состояния
(<http://www.bestreferat.ru/files/20/bestreferat-170220.docx>)

Год публикации: 2016. Тип публикации: реферат.

<http://www.bestreferat.ru/files/20/bestreferat-170220.docx> (<http://www.bestreferat.ru/files/20/bestreferat-170220.docx>)

Показать заимствования (4)

2. Реферат: 1. 1 Биомеханика (<http://www.bestreferat.ru/files/70/bestreferat-411170.docx>)

Год публикации: 2016. Тип публикации: реферат.

<http://www.bestreferat.ru/files/70/bestreferat-411170.docx> (<http://www.bestreferat.ru/files/70/bestreferat-411170.docx>)

Показать заимствования (3)



В списке литературы	Источники заимствования
	1.06%
	0.87%

3. Применение метода конечных элементов для исследования теплового состояния гироблока (<http://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-metoda-konechnyh-elementov-dlya-issledovaniya-teplovogo-sostoyaniya-girobloka>)

Авторы: МУРАШОВ М.В., НАУМЕНКО А.В., САПОЖНИКОВ А.И.

Год публикации: 2004. Тип публикации: статья научного журнала.

<http://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-metoda-konechnyh-elementov-dlya-issledovaniya-teplovogo-sostoyaniya-girobloka> (<http://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-metoda-konechnyh-elementov-dlya-issledovaniya-teplovogo-sostoyaniya-girobloka>)

Показать заимствования (3)

0.75%

4. Определение эффективных теплофизических характеристик композиционного материала (<http://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-effektivnyh-teplofizicheskikh-harakteristik-kompozitsionnogo-materiala>)

Авторы: Люкшин Петр Александрович, Люкшин Борис Александрович, Матолыгина Наталья Юрьевна, Панин Сергей Викторович.

Год публикации: 2008. Тип публикации: статья научного журнала.

<http://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-effektivnyh-teplofizicheskikh-harakteristik-kompozitsionnogo-materiala> (<http://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-effektivnyh-teplofizicheskikh-harakteristik-kompozitsionnogo-materiala>)

Показать заимствования (3)

0.75%

5. Реферат: Моделирование процессов переработки пластмасс (<http://www.bestreferat.ru/files/44/bestreferat-83544.docx>)

Год публикации: 2016. Тип публикации: реферат.

<http://www.bestreferat.ru/files/44/bestreferat-83544.docx> (<http://www.bestreferat.ru/files/44/bestreferat-83544.docx>)

Показать заимствования (3)

0.64%

6. Моделирование процессов переработки пластмасс (<http://mobiro.org/downloads/himija/165525.zip>)

Год публикации: 2016. Тип публикации: реферат.

<http://mobiro.org/downloads/himija/165525.zip> (<http://mobiro.org/downloads/himija/165525.zip>)

Показать заимствования (3)




0.64%

Значимые оригинальные фрагменты

Дополнительно

Библиографические ссылки

Искать в Интернете

Надпись руководителя  /Сokolov В.А.
Студент гр. 101801  /Дубаненко Д.А.
Руководитель ООП  /Шретер С.П./