Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физико-технический факультет
Кафедра прикладной аэромеханики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
_______________ Э.Р. Шрагер
«____»________________2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ С ПЕРЕГОРОДКАМИ

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки 16.03.01 – Техническая физика, профиль Теплофизика

Усманова Елена Сергеевна

Руководитель ВКР
канд. физ.-мат. наук, доцент
__________ А. В. Мерзляков
подпись
«11» июня 2020 г.

Автор работы
Студент группы № 10606
________ Е. С. Усманова
подпись

Томск – 2020

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы
«Аналитическое решение задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде с перегородками»
на степень бакалавра по направлению 16.03.01 – Техническая физика
и по профилю бакалаврской программы «Теплофизика»

1. Провести поиск научной литературы по проблеме исследования колебаний идеальной жидкости в ограниченных сосудах с проницаемыми перегородками.
2. Определить физическую постановку задачи с учетом исследуемой геометрии.
3. Определить математическую постановку задачи на решения уравнения Лапласа в плоской и осесимметричной постановке в нескольких областях.
4. Осуществить аналитическое решение задачи.
5. Проанализировать полученные результаты.
6. На основе проведенного исследования для квалификации степени бакалавра представить текст ВКР на тему «Аналитическое решение задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде с перегородками».
7. Осуществить проверку текста работы на объем заимствований, и поместить отчет в конец текста ВКР.
8. По поручению руководителя ООП текст ВКР разместить в электронной библиотеке НБ НИ ТГУ.

Рекомендуемая научная литература по теме ВКР:

1. Борисов Д.И.- Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками / Д.И. Борисов, Ю.И. Руднев // Прикладная гидромеханика. - 2010. - Т.12, № 2. - 8-19 с.

2. Марченко В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов -Киев : Наукова думка, 1974. - 280 с.

3. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе; Под ред. Н. Е. Кочина. -М. : ГИФМЛ, 1963. - Ч.1. - 584 с.

4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский - М. : Наука, 1977. - 742 с.

Руководитель работы

канд. физ.- мат. наук, доцент ________ А.В. Мерзляков

КАЛЕНДАРНЫЙ ГРАФИК
по выполнению выпускной квалификационной работы
«Аналитическое решение задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде с перегородками»
на степень бакалавра по направлению 16.03.01 – Техническая физика
и по профилю бакалаврской программы «Теплофизика»

- **Февраль 2020 г.**
  Изучение теории движения идеальной жидкости.
- **Март 2020 г.**
  Освоение метода Фурье решения уравнения Лапласа; составление уравнения Лапласа для плоской задачи колебаний идеальной жидкости.
  Решение плоской задачи колебаний идеальной жидкости.
  Формулирование задачи осесимметричных свободных колебаний в цилиндрическом сосуде без перегородки и с горизонтальной перегородкой.
- **Апрель 2020 г.**
  Решение задачи осесимметричных свободных колебаний идеальной жидкости в сосуде цилиндрической формы
  Решение задачи осесимметричных свободных колебаний идеальной жидкости в сосуде цилиндрической формы с горизонтальной проницаемой перегородкой.
- **Май-июнь 2020 г.**
  Написание выпускной работы.
- **Июнь 2020 г.**
  Представление выпускной работы.

Руководитель ООП
д-р физ.-мат.наук, профессор ________ Э. Р. Шрагер

АННОТАЦИЯ

Выпускной квалификационной работы Усмановой Е.С.

«Аналитическое решение задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде с перегородками»

ВКР содержит 36 страниц, 10 рисунков и 4 источника

Задача о колебании идеальной жидкости является достаточно серьезной задачей для развития научно-технического прогресса.

В работе проводится моделирование процессов плоских и осесимметричных малых колебаний идеальной жидкости в ограниченных сосудах. Исследование направлено на определение формы свободной поверхности при движении однородной несжимаемой идеальной жидкости в прямоугольном и цилиндрическом сосуде с перегородкой. Решение задачи проведено в линейной постановке аналитическим путем.

Решение осуществляется методом разделения переменных. Задача о малых колебаниях идеальной жидкости в ограниченном объеме со свободной поверхностью под действием силы тяжести многократно рассматривалась в различных работах. Но во всех перечисленных работах ограничиваются только определением частот колебаний и не приводят динамику изменения формы свободной поверхности.

В результате получается форма свободной поверхности жидкости в разные моменты времени, а также изменение этой формы в течении времени.

Полученные результаты могут быть использованы для контроля процессов, происходящих в емкостях при перевозке больших объемах жидкости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе проведено исследование, которое направленно на определение формы свободной поверхности при движении однородной несжимаемой идеальной жидкости в прямоугольном и цилиндрическом сосуде с перегородкой. Решение задачи проведено в плоской линейной постановке аналитическим путем.

Задача о колебании идеальной жидкости является достаточно серьезной задачей для развития научно-технического прогресса. Например: колебание топлива в баке автомобиля или ракеты, движение жидкости в автомобильной или железнодорожной цистерне и т.д. В случаях, когда жидкость имеет небольшую вязкость, а размеры сосуда, в котором она колеблется, очень большие, то жидкость можно считать идеальной. Когда неполная емкость с жидкостью совершает какое-либо движение, то в результате жидкость начинает раскачиваться. В случае движения автомобиля по дороге это может привести к автоаварии. Соответственно, при использовании подобных емкостей для перевозки жидкостей, нужно знать, как ведет себя жидкость в этой емкости.

Для транспортировки и длительного хранения больших объемов жидкости используются емкости, содержащие вертикальные и горизонтальные перегородки, оказывающие влияние на ее движение. Перегородки стабилизируют и уменьшают амплитуду колебаний.

Задача о малых колебаниях идеальной жидкости в ограниченном объеме со свободной поверхностью под действием силы тяжести многократно рассматривалась в различных работах. Но во всех перечисленных работах ограничиваются только определением частот колебаний и не приводят динамику изменения формы свободной поверхности. Сейчас можно аналитически решать задачи на определение формы свободной поверхности и пользоваться вычислительными средствами для реализации полученных результатов. В данной работе рассматривается один из допустимых случаев движения идеальной жидкости – колебательное движение под воздействием силы тяжести.

2. Колебания идеальной жидкости в сосуде без перегородок.

2.1. Математическая постановка задачи.

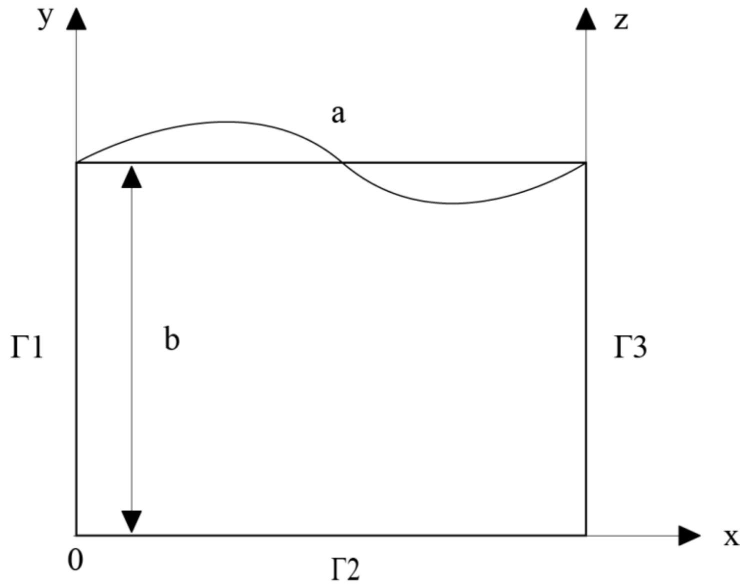


Рисунок 1

Рассматривается движение однородной несжимаемой идеальной жидкости в прямоугольном сосуде, размеры которого представлены на рисунке 1, происходящее под действием сил тяжести. Движение жидкости, происходящее в данном сосуде, ограничено снизу и с боков некоторыми неподвижными плоскостями, а сверху свободной поверхностью жидкости.

В плоском случае движение идеальной несжимаемой жидкости расписывается уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{d v_y}{d t} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{d v_x}{d x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

где v_x и v_y– проекции вектора скорости жидкости на оси декартовой системы координат; X и Y – проекции внешних сил на оси Ox, Oy; P – давление, ρ – плотность, t – время.

Первые два уравнения Эйлера - уравнения движения; последнее уравнение - уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности).

Граничными условиями для уравнений Эйлера являются:

- на твердой границе – условие непротекания:

$$v_n = 0.$$

где v_n-проекция вектора скорости на направление внешней нормали к стенке.
- на свободной поверхности задаются два условия: динамическое и кинематическое. Кинематическое условие: частицы не могут проникать через твёрдые стенки и отрываться от них. Жидкость и поверхность, с которой поддерживается соприкосновение, должны иметь одинаковую скорость, перпендикулярную к поверхности, т. е. $v_т = v_ж$.
Динамическое условие: давление на свободной поверхности и давление жидкости одинаково.

В силу того, что жидкость является идеальной, скорость жидкости является потенциальной, т.е. $\vec{v} = grad\, u$, где u - потенциал вектора скорости. Подставляя это выражение в уравнение неразрывности, получим вместо уравнений Эйлера, для описания движения жидкости, уравнение Лапласа для потенциала u:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(форма уравнения Лапласа в декартовой системе координат).

Граничными условиями для него являются:
- на твердых границах Γ_1 и Γ_3 – условия непротекания:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- на твердой границе Γ_2 – условие непротекания:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

В качестве граничного условия на свободной поверхности задается интеграл Коши – Лагранжа:

$$\frac{\partial u}{dt} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = f(t),$$

где v_x и v_y– проекции вектора скорости жидкости на оси декартовой системы координат; П-потенциал внешних сил, действующих на жидкость, f(t) – произвольная функция времени, p – давление, ρ – плотность, t – время.

Единственной массовой силой, воздействующей на жидкость в рамках рассматриваемой задачи, представляется сила тяжести. В данной работе рассматриваются малые колебания идеальной жидкости. Поэтому удобно ввести новую координату z – отклонение точки свободной поверхности от равновесного положения (соответствующая координата представлена на рисунке 1). В горизонтальном направлении при малых колебаниях движения практически не существует и в работе оно не рассматривается. Потенциал силы тяжести, действующей на единицу массы, определяется формулой $\Pi = gz$. При решении поставленной задачи полагается, что отклонение свободной поверхности жидкости от положения равновесия настолько мало, что область, занятая жидкостью, сохраняет прямоугольную форму. Из-за этого в выражении для интеграла Коши-Лагранжа можно пренебречь квадратами скоростей. Произвольную функцию f (t) можно сделать равной 0, так как она не окажет влияния на использование потенциала для определения характеристик жидкости. Решение задачи проводится для случая, когда наружное давление остается постоянным. В результате использования указанных условий и незначительных преобразований граничное условие на свободной поверхности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + gz = 0.$$

В качестве начальных условий задачи задаются начальная форма свободной поверхности и начальная скорость точек свободной поверхности. Начальной формой свободной поверхности является плоскость, наклоненная под малым углом к горизонтали.

Начальная скорость точек свободной поверхности жидкости полагается равной нулю, т.е.

$$v_y = \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=b} = 0.$$

2.2. Метод решения.

Уравнение Лапласа для потенциала вектора скорости в данной задаче решается методом Фурье (метод разделения переменных). Метод разделения переменных реализован согласно работе [3]. Согласно этому методу, потенциал вектора скорости представляется в виде произведения трех функций:

$$u = T(t)X(x)Y(y),$$

где T(t) – функция, зависящая только от времени,

X(x) – функция, зависящая только от координаты x,

Y(y) – функция, зависящая только от координаты y.

Уравнение Лапласа после подстановки указанной формы неизвестной функции принимает вид:

$$TX''Y + TXY'' = 0.$$

При делении этого уравнения на произведение TXY, получится:

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – постоянное положительное число, которое не зависит от описанных координат.

Из полученного равенства получаются дифференциальные уравнения для определения функций X и Y.

Уравнение для определения функции X – задача Штурма – Лиувилля:

$$X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Решение данного уравнения:

$$X = A\,cos(\lambda x) + B\,sin(\lambda x).$$

Постоянные A и B определяются из граничных условий.

Граничные условия для уравнения: $x'(0) = x'(a) = 0$.

Общее решение имеет вид:

$$x = A cos\,\lambda x + B\,sin\,\lambda x.$$

$$x' = -A\,sin\,\lambda x + B\lambda\,cos\,\lambda x.$$

Из граничных условий следует

1. $B = 0$.
2. $-A\,sin\,\lambda a = 0 \;\Rightarrow\; sin\,\lambda a = 0.$

Решение получившегося уравнения выглядит так: $\lambda_n a = \pi n \;\Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi n}{a}$.

Таким образом, выражение для функции X – собственная функция задачи Штурма – Лиувилля:

$$x_n = cos\,\lambda_n x = cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Уравнение для определения функции Y:

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

Граничные условия для уравнения: $Y'(0) = 0$.

Общее решение данного уравнения:

$$Y = A \cdot ch(\lambda y) + B \cdot sh(\lambda y)$$

$$Y' = A\lambda \cdot sh(\lambda y) + B\lambda \cdot ch(\lambda y)$$

Из граничных условий B=0. Поэтому выражение для функции Y:

$$Y_n = ch(\lambda_n y) = ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right).$$

Решение уравнения Лапласа имеет вид:

$$u_n = T_n\,ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Подобные произведения можно записать для каждого значения величины λ_n. Поэтому общее решения уравнения Лапласа необходимо искать в виде линейной комбинации полученных решений:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a} y\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right)$$

Для поиска функции T(t) необходимо использовать граничное условие на свободной поверхности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + gz = 0$$

Это условие нужно продифференцировать по времени с учетом выражения:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Результат дифференцирования выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0.$$

Подстановка выражения для потенциала в это равенство приводит к следующему выражению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''\, ch\left(\frac{\pi n}{a} b\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) + g \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{\pi n}{a} \mathrm{sh}\left(\frac{\pi n}{a} b\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) = 0.$$

После группировки и вынесения общих множителей, получится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''\, ch\left(\frac{\pi n}{a} b\right) + g \frac{\pi n}{a} \mathrm{sh}\left(\frac{\pi n}{a} b\right) * T_n)\, cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) = 0.$$

Данная сумма будет равна нулю, когда каждая скобка будет равна нулю.

$$T_n''\, ch\left(\frac{\pi n}{a} b\right) + g \frac{\pi n}{a} sh\left(\frac{\pi n}{a} b\right) * T_n = 0.$$

При делении полученного уравнения на $ch\left(\frac{\pi n}{a} b\right)$, получится:

$$T_n'' + g \frac{\pi n}{a} th\left(\frac{\pi n}{a} b\right) * T_n = 0.$$

Обозначив $w_n^2 = g \frac{\pi n}{a} th\left(\frac{\pi n}{a} b\right)$, уравнение будет иметь вид:

$$T_n'' + w_n^2 * T_n = 0.$$

Общее решение данного уравнения: $T_n = A_n\, cos(\omega_n t) + B_n\, sin(\omega_n t)$.

Общий вид решения уравнения Лапласа принимает следующий вид:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n * cos\, \omega_n t + B_n * sin\, \omega_n t)\, \mathrm{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \cos(\frac{\pi n}{a} x).$$

Постоянные интегрирования A_n и B_n определяются из начальных условий колебаний жидкости в сосуде. Такими условиями являются:

1. Начальная скорость точек свободной поверхности равна нулю:

$v_n = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{t=0} = 0$. Подстановка выражения для потенциала в данное равенство приводит к выражению: $A_n = 0$.

В результате выражение для потенциала принимает следующую форму:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t)\, \mathrm{ch}\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

2. Задается начальная форма свободной поверхности в следующем виде: начальное отклонение свободной поверхности от ее равновесного положения считается функцией координаты x. В начальный момент времени с учетом граничного условия на свободной поверхности должно выполняться равенство:

$$z|_{t=0} = f(x) = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0, y=b}.$$

Выражение для ζ принимает вид:

$$z = -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, \omega_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a} b\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Начальная форма свободной поверхности задается исходя из конкретной задачи. Для проверки метода начальная форма поверхности была задана в виде наклонной прямой, максимальные отклонения которой от положения равновесия задавались как d:

$$z|_{t=0} = \frac{2d}{a} x - d$$

Приравнивание одного выражения к другому приводит к выражению для определения коэффициентов B_n:

$$z = -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, cos(\omega_n t) \omega_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a} y\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) = \frac{2d}{a} x - d.$$

Воспользовавшись свойством ортогональности собственных функций, после интегрирования получили следующие выражения для коэффициентов:

$$B_n = 4\, d\, \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2}.$$

Таким образом, в выражении для потенциала скорости жидкости оказались известными все необходимые величины, а само выражение для потенциала приняло следующий вид:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\, sin(\omega_n t)\, ch\left(\frac{\pi n}{a} y\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

На основании выражения для граничного условия на свободной поверхности можно определить зависимость от времени текущего отклонения точек свободной поверхности ζ от их равновесного положения:

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} 4d \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2} cos(w_n t)\, cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

2.3. Результаты.

Исходными данными в задаче являются: ширина сосуда a = 1м, высота сосуда b = 1м, начальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения d = 0.01м. Данная формула позволяет определять текущую форму свободной поверхности жидкости в любой момент времени. На рисунке 2 приведена эта форма в начальный момент времени и в момент времени t = 0,3 с.

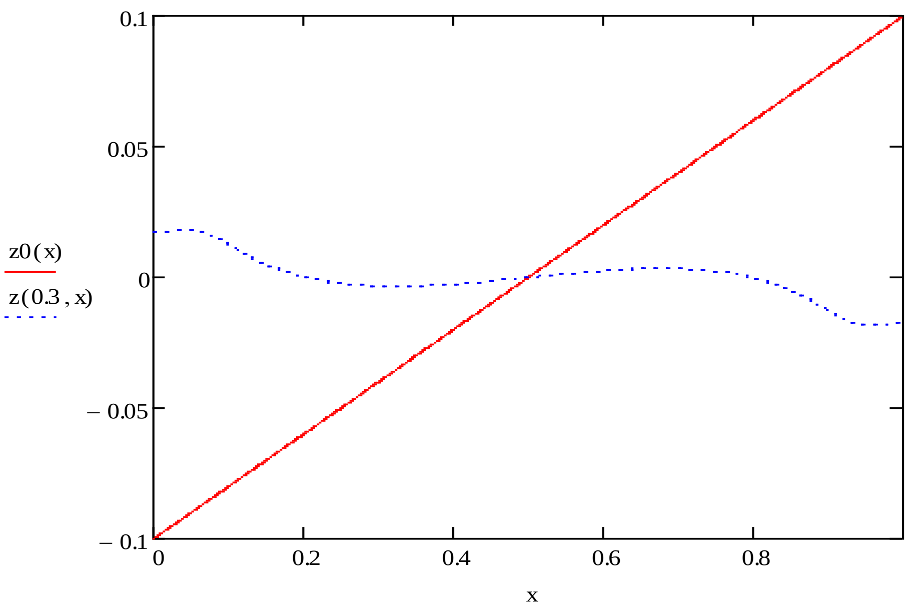


Рисунок 2

Полученное выражение проверялось для достаточно больших значений времени и дало возможность наблюдать картину колебания жидкости.

3. Свободные колебания идеальной жидкости в сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой.

3.1. Математическая постановка задачи.

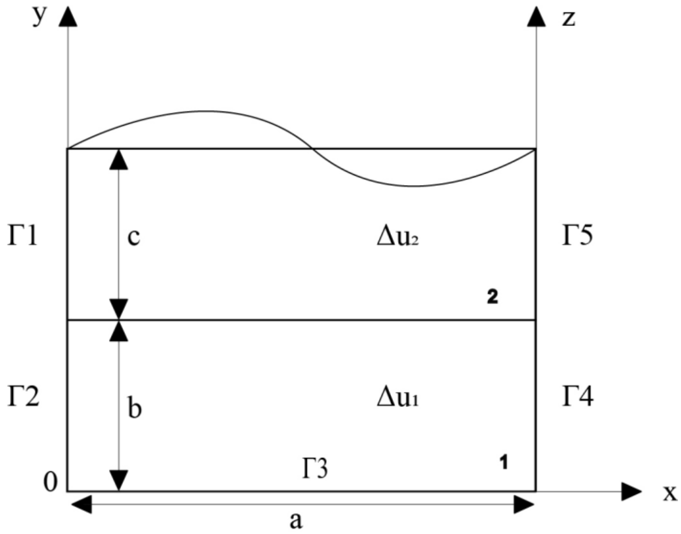


Рисунок 3

Размеры расчетной области и граничные условия указаны на рисунке 3. На высоте b от дна находится горизонтальная проницаемая перегородка. Перегородка разделяет сосуд на две расчетные области: 1 и 2. Движение жидкости будет определяться решением уравнения Лапласа для потенциала скорости.

В плоском случае движение идеальной несжимаемой жидкости расписывается уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

где v_x и v_y– проекции вектора скорости жидкости на оси декартовой системы координат; X и Y – проекции внешних сил на оси Ox, Oy; P – давление, ρ – плотность, t – время.

Первые два уравнения Эйлера - уравнения движения; последнее уравнение - уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности).

Граничными условиями для уравнений Эйлера являются:

- на твердой границе – условие непротекания:

$$v_n = 0.$$

где v_n-проекция вектора скорости на направление внешней нормали к стенке.
- на свободной поверхности задаются два условия: динамическое и кинематическое. Кинематическое условие: частицы не могут проникать через твёрдые стенки и отрываться от них. Жидкость и поверхность, с которой поддерживается соприкосновение, должны иметь одинаковую скорость, перпендикулярную к поверхности, т. е. $v_т = v_ж$.
Динамическое условие: давление на свободной поверхности и давление жидкости одинаково.

В силу того, что жидкость является идеальной, скорость жидкости является потенциальной, т.е. $\vec{v} = grad\, u$, где u - потенциал вектора скорости. Подставляя это выражение в уравнение неразрывности, получим вместо уравнений Эйлера, для описания движения жидкости, уравнение Лапласа для потенциала u:

Для области 1 уравнение Лапласа:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0.$$

Граничные условия для него:
- на твердых границах $Г_2$ и $Г_4$ – условия непротекания:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0.$$

- на твердой границе $Г_3$ – условие непротекания:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0.$$

Для области 2 уравнение Лапласа:

$$\Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0.$$

Граничные условия для него:
- на твердых границах $Г_1$ и $Г_5$ – условия непротекания:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.$$

На свободной поверхности, в качестве граничного условия задается интеграл Коши – Лагранжа:

$$\frac{\partial u}{dt} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = f(t),$$

где v_x и v_y– проекции вектора скорости жидкости на оси декартовой системы координат; П-потенциал внешних сил, действующих на жидкость, f(t) – произвольная функция времени, p – давление, ρ – плотность, t – время.

Единственной массовой силой, воздействующей на жидкость в рамках рассматриваемой задачи, представляется сила тяжести. В данной работе рассматриваются малые колебания идеальной жидкости. Поэтому удобно ввести новую координату z – отклонение точки свободной поверхности от равновесного положения (соответствующая координата представлена на Рис.1). В горизонтальном направлении при малых колебаниях движения практически не существует и в работе оно не рассматривается. Потенциал силы тяжести, действующей на единицу массы, определяется формулой $\Pi = gz$. При решении поставленной задачи полагается, что отклонение свободной поверхности жидкости от положения равновесия настолько мало, что область, занятая жидкостью, сохраняет прямоугольную форму. Из-за этого в выражении для интеграла Коши-Лагранжа можно пренебречь квадратами скоростей. Произвольную функцию f (t) можно сделать равной 0, так как она не окажет влияния на использование потенциала для определения характеристик жидкости. Решение задачи проводится для случая, когда наружное давление остается постоянным. В результате использования указанных условий и незначительных преобразований граничное условие на свободной поверхности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + gz = 0.$$

На проницаемой стенке ставится условие для потока жидкости через перегородку: нормальная скорость жидкости вблизи перегородки пропорциональна разности значений потенциалов скорости жидкости по обе стороны перегородки. Поэтому, условие имеет вид:

$$\left.\frac{du_1}{dy}\right|_{y=b} = \left.\frac{du_2}{dy}\right|_{y=b} = q(u_1 - u_2),$$

где q-проницаемость перегородки для жидкости.

Начальной формой свободной поверхности является плоскость, наклоненная под малым углом к горизонтали. Начальная скорость точек свободной поверхности жидкости считается равной нулю, т.е.

$$\left.\frac{du_2}{dy}\right|_{y=\mathrm{c},t=0} = \left.\frac{du_2}{dz}\right|_{z=0,t=0} = 0.$$

3.2. Метод решения.

Уравнение Лапласа для потенциала вектора скорости в области 1 решается методом Фурье (разделения переменных), в котором потенциал вектора скорости представляется в виде произведения трех функций:

$$u_1 = T_1(t)X_1(x)Y_1(y),$$

где $T_1(t)$ – функция, зависящая только от времени,

$X_1(x)$ – функция, зависящая только от координаты x,

$Y_1(y)$ – функция, зависящая только от координаты y.

Уравнение Лапласа после подстановки указанной формы неизвестной функции принимает вид:

$$T_1X_1''Y_1 + T_1X_1Y_1'' = 0.$$

При делении этого уравнения на произведение TXY, получится:

$$\frac{X_1''}{X_1} = \frac{Y_1''}{Y_1} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – постоянное положительное число, которое не зависит от описанных координат.

Из полученного равенства получаются дифференциальные уравнения для определения функций X_1 и Y_1.

Уравнение для определения функции X_1 – задача Штурма – Лиувилля:

$$X_1'' + \lambda^2 X_1 = 0.$$

Решение данного уравнения:

$$X_1 = A_1 cos\,\lambda x + B_1\, sin\,\lambda x.$$

Постоянные A_1 и B_1 определяются из граничных условий.

Граничные условия для уравнения: $x'(0) = x'(a) = 0$.

Общее решение имеет вид:

$$x = A_1 cos\,\lambda x + B_1\, sin\,\lambda x.$$

$$x' = -A_1\,\lambda\, sin\,\lambda x + B_1\lambda\, cos\,\lambda x.$$

Из граничных условий следует:

1. $B_1 = 0.$
2. $-A_1\, sin\,\lambda a = 0 \Rightarrow sin\,\lambda a = 0.$

Решение получившегося уравнения выглядит так: $\lambda_n a = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi n}{a}$.

Таким образом. выражение для функции X – собственная функция задачи Штурма – Лиувилля:

$$x_{1n} = cos\,\lambda_n x = \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Уравнение для определения функции Y_1:

$$Y_1'' - \lambda^2 Y_1 = 0.$$

Граничные условия для уравнения: $Y_1'(0) = 0$.

Общее решение данного уравнения:

$$Y_1 = C_1\, ch(\lambda y) + D_1\, sh(\lambda y).$$

$$Y_1' = C_1 \lambda\, sh(\lambda y) + D_1 \lambda\, ch(\lambda y).$$

Из граничных условий $C_1=0$. Из этого выражение для функции Y:

$$Y_{1n} = ch(\lambda_n y) = ch\left(\frac{\pi n}{a} y\right).$$

Решение уравнения Лапласа имеет вид:

$$u_{1n} = T_{1n}\, ch\left(\frac{\pi n}{a} y\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Подобные произведения можно записать для каждого значения величины λ_n. Поэтому общее решения уравнения Лапласа необходимо искать в виде линейной комбинации полученных решений:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} T_{1n}\, ch\left(\frac{\pi n}{a} y\right) cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

В области 2 уравнение Лапласа решается также методом Фурье, согласно которому потенциал вектора скорости:

$$u_2 = T_2(t) X_2(x) Y_2(y),$$

где $T_2(t)$ – функция, зависящая только от времени,

$X_2(x)$ – функция, зависящая только от координаты x,

$Y_2(y)$ – функция, зависящая только от координаты y.

Аналогично вышесказанному, получится:

$$\frac{X_2''}{X_2} = \frac{Y_2''}{Y_2} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – постоянное положительное число, которое не зависит от описанных координат.

Из полученного равенства получаются дифференциальные уравнения для определения функций X_2 и Y_2.

Уравнение для определения функции X_2 – задача Штурма – Лиувилля:

$$X_2'' + \lambda^2 X_2 = 0.$$

Уравнение в области 2 совпадает с уравнением в области 1, граничные условие одинаковы вследствие равенства ширины областей. Поэтому решение этого уравнения:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}.$$

$$x_{2n} = cos\,\lambda_n x = \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Уравнение для определения функции Y_2:

$$Y_2'' - \lambda^2 Y_2 = 0.$$

Решение данного уравнения:

$$Y_{2n} = ch(\lambda_n y) = ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right).$$

Таким образом, решение уравнения Лапласа:

$$u_{2n} = T_{2n}\left(A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right),$$

а общее решение:

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\propto} T_{2n}\left(A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right),$$

Исходя из граничных условий на перегородке определяются постоянные A_{2n} и B_{2n}, и функции T_{1n} и T_{2n}. Подстановка уравнений u_1и u_2, и подстановка значения координаты y=b приводит к системе уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{1n}\frac{\pi n}{a}sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) =$$

$$= q\sum_{n=1}^{\propto} T_{1n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - T_{2n}\left(A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right.$$
$$\left. + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

$$\sum_{n=1}^{\propto} T_{2n}\frac{\pi n}{a}\left(A_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) + B_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) =$$

$$= q\sum_{n=1}^{\propto} T_{1n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - T_{2n}\left(A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right.$$
$$\left. + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

В каждом уравнении все слагаемые перенести в одну сторону, объединить их одинаковым суммированием, вынести общий множитель $cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$ и приравнять коэффициенты при них нулю, получатся уравнения для определения T_{1n} и T_{2n}:

$$T_{1n}\frac{\pi n}{a}sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) = q\left[T_{1n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - T_{2n}\left(A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right)\right].$$

$$T_{2n}\frac{\pi n}{a}\left(A_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) + B_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right) = \\ = q\left[T_{1n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - T_{2n}\left(A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right)\right].$$

Если оба уравнения разделить на произведение qT_{2n} и ввести обозначение

$$C_n = \frac{T_{1n}}{T_{2n}},$$

То после простейших преобразований уравнения будут иметь вид:

$$A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) + B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) = C_n ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \frac{C_n}{q}\frac{\pi n}{a}sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right).$$

$$\frac{1}{q}\frac{\pi n}{a}\left(A_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) + B_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right)\right) \\ = C_n ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - A_{2n}\,ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - B_{2n}\,sh\left(\frac{\pi n}{a}b\right).$$

При n=0 эти уравнения сводятся к виду $A_{20} = C_0$, что свидетельствует о правильности преобразований. Видно, что произведения $T_1(t)X_1(x)Y_1(y)$ и $T_2(t)X_2(x)Y_2(y)$ при n=0 являются функциями времени, которые включать необязательно. Поэтому, все рассуждения и суммирования будут проводиться при n>0.

Если разделить оба уравнения на $ch\left(\frac{\pi n}{a}b\right)$ и исключить C_n, то в результате получится выражение:

$$A_{2n} = B_{2n}\frac{1 - \frac{1}{q}\frac{\pi n}{a}\tanh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \tanh^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}{\frac{1}{q^2}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\tanh^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)} = k_n B_{2n},$$

где

$$k_n = \frac{1 - \frac{1}{q}\frac{\pi n}{a}\tanh\left(\frac{\pi n}{a}b\right) - \tanh^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}{\frac{1}{q^2}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\tanh^2\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}.$$

Таким образом, после подстановки полученного результата выражение для потенциала имеет вид:

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\propto}\bar{T}_{2n}\left(k_n\,ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right),$$

где

$$\bar{T}_{2n} = T_{2n}B_{2n}.$$

Используя граничное условие на свободной поверхности, определим функции $\bar{T}_{2n}$. После дифференцирования по времени и использования соотношения, получим:

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + g\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=c} = 0$$

Подстановка в него выражение u_2 дает равенство:

$$\sum_{n=1}^{\propto} \bar{T}_{2n}{''}\left(k_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right)\right) cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) +$$

$$+ g\sum_{n=1}^{\propto} \bar{T}_{2n}\frac{\pi n}{a}\left(k_n\, sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right)\right) cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) = 0.$$

Объединение под одной суммой, перегруппировка, вынесение общего множителя $cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$ и приравнивание коэффициентов при них нулю приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\bar{T}_{2n}{''}\left(k_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right)\right) + g\bar{T}_{2n}\frac{\pi n}{a}\left(k_n\, sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right)\right) = 0.$$

Если разделить это уравнение на коэффициент у второй производной и ввести обозначение:

$$\frac{k_n\, sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right)}{k_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right)} g\frac{\pi n}{a} = w_{2n}^2,$$

квадрат частоты колебаний жидкости, то дифференциальное уравнение:

$$\bar{T}_{2n}'' + w_{2n}^2 * \bar{T}_{2n} = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$\bar{T}_{2n} = C_{2n}\cos(w_{2n}t) + D_{2n}\sin(w_{2n}t)\ ,$$

а выражение для потенциала второй области:

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\propto}(C_{2n}\cos(w_{2n}t) + D_{2n}\sin(w_{2n}t))\left(k_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)\right) cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Константы C_{2n} и D_{2n} определяются из начальных условий. Подстановка выражения для u_2 приводит к равенству:

$$\sum_{n=1}^{\propto}(C_{2n}\cos(w_{2n} * 0) + D_{2n}\sin(w_{2n} * 0))\left(k_n\, ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right)\right) cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Форма свободной поверхности жидкости определяется из выражения:

$$\zeta|_{t=0} = z(t,x) = -\frac{1}{g}\frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{y=c}.$$

Выражение для формы свободной поверхности принимает вид:

$$z = -\frac{1}{g}\sum_{n=1}^{\infty} D_{2n}\,\omega_n\left(k_n\,ch\left(\frac{\pi n}{a}c\right) + sh\left(\frac{\pi n}{a}c\right)\right)cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Начальная форма свободной поверхности была задана в виде наклонной прямой, максимальные отклонения которой от положения равновесия задавались как d:

$$z\big|_{t=0} = \frac{2d}{a}x - d$$

Приравняв одно выражение к другому и воспользовавшись свойством ортогональности собственных функций, после интегрирования получили следующие выражения для коэффициентов:

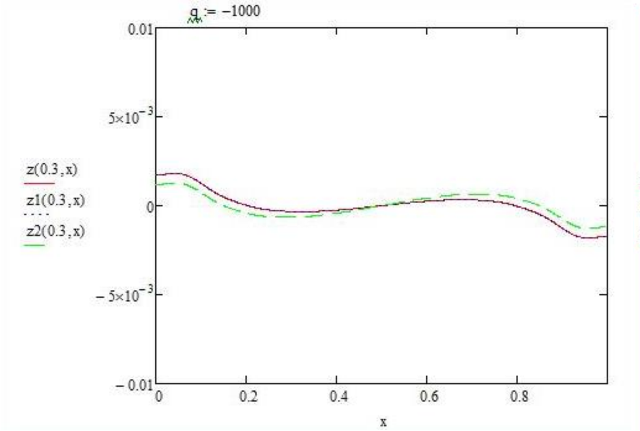
$$D_{2n} = 4\,d\,\frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2}.$$

На основании выражения для граничного условия на свободной поверхности можно определить зависимость от времени текущего отклонения точек свободной поверхности ζ от их равновесного положения:

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} 4d\,\frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2}\,cos(w_{2n}t)\,cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

3.3. Результаты.

Исходными данными в задаче являются: ширина сосуда a = 1м, расстояние от дна до перегородки b = 0.5м, полная высота сосуда c = 1м, начальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения d = 0.01м. Проницаемость q принимала различные значения. Были выполнены расчеты формы свободной поверхности жидкости в двух предельных случаях: когда перегородки нет (проницаемость велика) и когда перегородка сплошная (проницаемость нулевая).



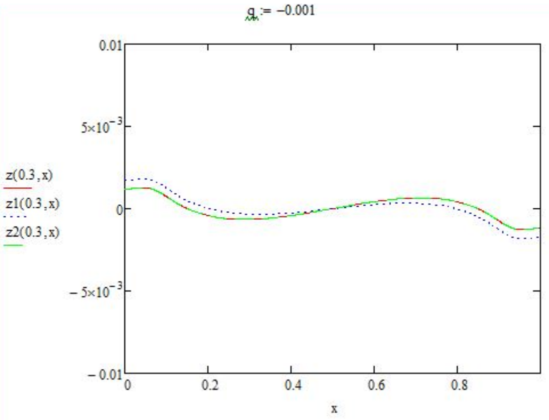


Рисунок 4 **Рисунок 5**

На рисунке 4 и рисунке 5 представлена форма свободной поверхности жидкости через 0,3 с после начала колебаний (b). Сплошной линией показана свободная поверхность в сосуде с проницаемой перегородкой, пунктирной – в сосуде с непроницаемой перегородкой, штриховой – в сосуде без перегородки.

Для контроля были проведены расчеты формы свободной поверхности для очень маленького значения проницаемости (q = -0,001) и очень большого значения (q = -1000). Когда проницаемость велика - решение совпало с точным решением для сосуда без перегородок. Когда перегородка с маленькой проницаемостью - форма свободной поверхности совпала с формой свободной поверхности мелкого сосуда. Данные совпадения также подтверждают правильность предложенной методики.

4. Осесимметричные колебания идеальной жидкости в сосуде с перегородкой.

4.1. Математическая постановка.

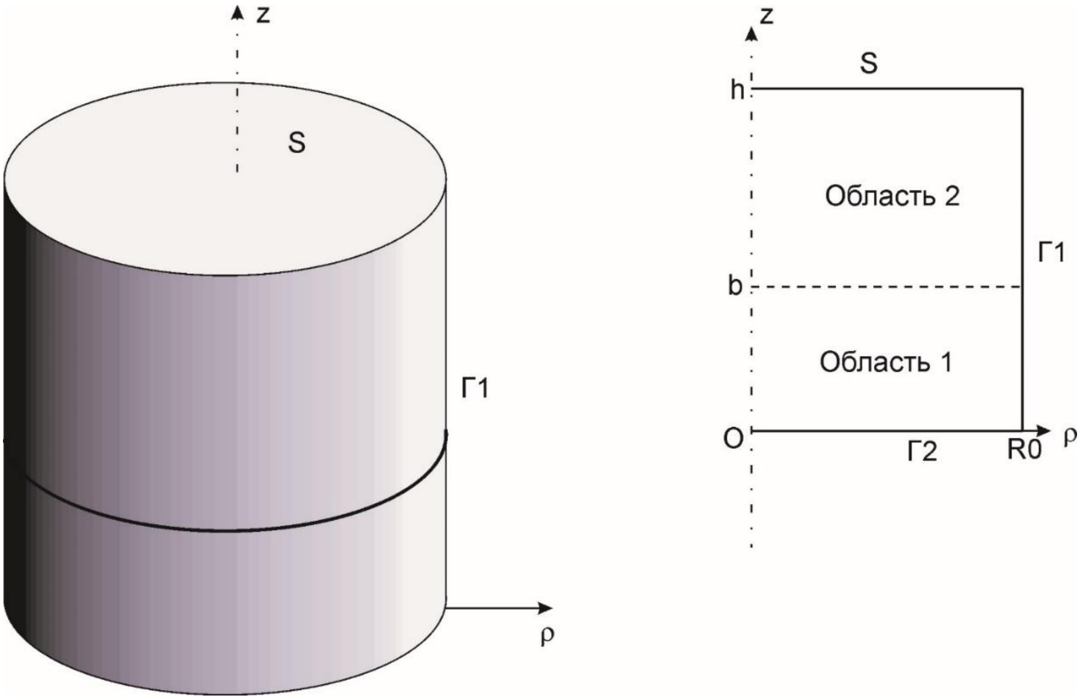


Рисунок 6

Рассматриваются осесимметричные колебания жидкости в цилиндрическом сосуде. Общий вид сосуда и его осевое сечение, приведены на рисунке 6. На высоте b от дна находится горизонтальная проницаемая перегородка. Перегородка разделяет сосуд на две расчетные области: 1 и 2. Высота цилиндрического сосуда h и радиусом R_0 Движение жидкости будет определяться решением уравнения Лапласа для потенциала скорости.

В цилиндрической системе координат в осесимметричном случае уравнение Лапласа принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

Граничные условия будут выглядеть следующим образом:

- на вертикальной стенке Г1 условие непротекания сводится к равенству.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=0$$

- на горизонтальном дне Г2 условие непротекания сводится к равенству:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

На свободной поверхности, в качестве граничного условия задается интеграл Коши – Лагранжа, который в случае малых колебаний жидкости, как указано в предыдущей части, принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\zeta=0$$

где ζ - отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения.

4.2. Метод решения.

Уравнение Лапласа для потенциала вектора скорости в области 1 решается методом разделения переменных, в котором потенциал вектора скорости представляется в виде произведения трех функций:

$$\varphi_1=T_1(t)R_1(\rho)Z_1(z)\,.$$

где $T_1(t)$ – функция, зависящая только от времени,

$R_1(\rho)$ – функция, зависящая только от координаты ρ,

$Z_1(z)$ – функция, зависящая только от координаты z.

Уравнение Лапласа после подстановки указанной формы неизвестной функции принимает вид:

$$\frac{T_1Z_1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho R_1'\right)+T_1R_1Z_1''=0\,.$$

При делении этого уравнения на произведение TRZ, получится:

$$\frac{1}{R_1\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho R_1'\right)=\frac{Z_1''}{Z_1}=-\lambda^2,$$

где λ^2 – постоянное положительное число, которое не зависит от описанных координат.

Из полученного равенства получаются дифференциальные уравнения для определения функций $R_1(\rho)$ и $Z_1(z)$.

Уравнение для определения функции $R_1(\rho)$:

$$\frac{1}{R_1\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R_1')+\lambda^2=0\,.$$

Уравнение в преобразованном виде сводится к следующему:

$$R_1''+\frac{1}{\rho}R_1'+\lambda^2R_1\rho=0\,.$$

Если ввести замену $\rho=\dfrac{x}{\lambda}$, то после преобразований уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2R_1'}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dR_1}{dx}+R_1=0\,.$$

Данное уравнение называют уравнением Бесселя нулевого порядка.

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$R_1 = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x),$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка,

$N_0(x)$ - функция Неймана нулевого порядка.

Постоянная интегрирования C_2 должна быть равна нулю, так как при $x \to 0$ значение $N_0(x) \to \infty$.

Таким образом решение задачи штурма Лиувилля имеет следующий вид:

$$R_1 = J_0(\lambda\rho)$$

Собственные значения задачи Штурма - Лиувилля числа λ определяются из граничного условия непротекания.

Тогда получаем для λ_x следующее значение:

$$J_0'(\lambda\rho)\Big|_{\rho=R0} = 0.$$

Согласно рекуррентной формуле значения корней ищутся из равенства:

$$J_0'(\lambda \cdot R0) = J_1(\lambda \cdot R0),$$

где $J_1(\lambda \cdot R0)$ - функция Бесселя первого порядка.

Корни этой функции Бесселя определялись численно, с помощью программы Mathcad.

Этих корней – бесконечно много. Поэтому решений задачи Штурма - Лиувилля бесконечно много:

$$R_{1n} = J_0(\lambda_n\rho).$$

Уравнение для определения функции $Z(z)$:

$$Z_1'' - \lambda^2 Z_1 = 0.$$

Решение уравнения определяется аналогично предыдущей части:

$$Z_{1n} = A_1 ch(\lambda_n z) + B_1 sh(\lambda_n z)$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определяются из граничных условий:

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

$$Z_1'\big|_{z=0} = 0.$$

Из граничных условий следует: $B_1 = 0$.

Таким образом. выражение для функции Z имеет вид:

$$Z_{1n} = ch(\lambda_n z)$$

Теперь можем записать выражение для потенциала φ:

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} T_{1n} ch(\lambda_n z) \cdot J_0(\lambda_n\rho)$$

Линейная комбинация полученных решений сама является решением уравнения.

Здесь J0 – функция Бесселя нулевого порядка, λ_n – корни уравнения

$$J_0'(\lambda\rho)\Big|_{\rho=R0}=0 \Rightarrow J_1(\lambda\rho)\Big|_{\rho=R0}=0$$

В области 2 уравнение Лапласа решается также методом разделения переменных, согласно которому потенциал вектора скорости:

$$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}T_{2n}(t)\cdot\left(A_{2n}\cdot ch(\lambda_n z)+B_{2n}\cdot sh(\lambda_n z)\right)\cdot J_0(\lambda_n\rho)$$

Для определения постоянных A_{2n} и B_{2n} и функций T_{1n} и T_{2n} необходимо воспользоваться граничными условиями на перегородке:
Для области (1) это условие выглядит так:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=b}=q\cdot(\varphi_2-\varphi_1)\big|_{z=b}$$

Для области (2) – так:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=b}=q\cdot(\varphi_2-\varphi_1)\big|_{z=b},$$

где q – проницаемость перегородки для жидкости.

Подстановка выражений для φ_1 и φ_2 в эти условия и подстановка значения координаты z перегородки приводит к системе уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_{1n}\cdot\lambda_n\cdot sh(\lambda_n b)\cdot J_0(\lambda_n x)=$$
$$=q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_{2n}\cdot\left(A_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)\right)-T_{1n}\cdot ch(\lambda_n b)\right]\cdot J_0(\lambda_n x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}T_{2n}\cdot\lambda_n\cdot\left(A_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)\right)\cdot J_0(\lambda_n x)=$$
$$=q\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_{2n}\cdot\left(A_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)\right)-T_{1n}\cdot ch(\lambda_n b)\right]\cdot J_0(\lambda_n x)$$

Если перенести все слагаемые в каждом уравнении одну сторону, объединить их одинаковым суммированием, вынести общие множители (функции Бесселя) и приравнять коэффициенты при них нулю – получатся следующие уравнения для определения функцийT_{1n} и T_{2n}:

$$T_{1n}\cdot\lambda_n\cdot sh(\lambda_n b)=q\cdot\left[T_{2n}\cdot\left(A_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)\right)-T_{1n}\cdot ch(\lambda_n b)\right]$$
$$T_{2n}\cdot\lambda_n\cdot\left(A_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)\right)=$$
$$=q\cdot\left[T_{2n}\cdot\left(A_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)\right)-T_{1n}\cdot ch(\lambda_n b)\right]$$

Если разделить уравнения на произведение qT_{2n} и сделать замену $\frac{T_{1n}}{T_{2n}}=C_n$, то после простейших преобразований уравнения будут иметь вид:

$$A_{2n}\cdot ch(\lambda_n b)+B_{2n}\cdot sh(\lambda_n b)=\frac{C_n}{q}\cdot\lambda_n\cdot sh(\lambda_n b)+C_n\cdot ch(\lambda_n b)$$
$$A_{2n}\cdot\left(ch(\lambda_n b)-\frac{1}{q}\cdot\lambda_n\cdot sh(\lambda_n b)\right)+B_{2n}\cdot\left(sh(\lambda_n b)-\frac{1}{q}\cdot\lambda_n\cdot ch(\lambda_n b)\right)=C_n\cdot ch(\lambda_n b)$$

Если разделить оба уравнения на $ch(\lambda_n b)$ и исключить из них C_n, то в результате получится выражение

$$A_{2n} = B_{2n} \frac{th^2(\lambda_n b) - \frac{1}{q} \cdot \lambda_n \cdot th(\lambda_n b) - 1}{\frac{1}{q} \cdot \lambda_n \cdot th^2(\lambda_n b)} = k_n \cdot B_{2n},$$

где

$$k_n = \frac{th^2(\lambda_n b) - \frac{1}{q} \cdot \lambda_n \cdot th(\lambda_n b) - 1}{\frac{1}{q} \cdot \lambda_n \cdot th^2(\lambda_n b)}$$

Таким образом, после подстановки полученного результата выражение для потенциала φ_2 выглядит следующим образом:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} T_{2n} \cdot \left(k_n \cdot ch(\lambda_n z) + sh(\lambda_n z)\right) \cdot J_0(\lambda_n x)$$

Для определения функции T_{2n} используется граничное условие на свободной поверхности:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\zeta = 0$$

Здесь ζ - отклонение свободной поверхности колеблющейся жидкости от равновесного положения.

Если его продифференцировать по времени и использовать соотношение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

то получится выражение:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0.$$

Подстановка в него формулы (9) дает равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{2n}'' \cdot \left(k_n \cdot ch(\lambda_n h) + sh(\lambda_n h)\right) \cdot J_0(\lambda_n \rho) +$$

$$+ g \cdot \sum_{n-1}^{\infty} T_{2n} \cdot \lambda_n \cdot \left(k_n \cdot sh(\lambda_n h) + ch(\lambda_n h)\right) \cdot J_0(\lambda_n \rho) = 0$$

Объединение под одной суммой, перегруппировка, вынесение общих множителей (функций Бесселя) и приравнивание коэффициентов при них нулю приводит к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$T_{2n}'' \cdot \left(k_n \cdot ch(\lambda_n h) + sh(\lambda_n h)\right) + g \cdot T_{2n} \cdot \lambda_n \cdot \left(k_n \cdot sh(\lambda_n h) + ch(\lambda_n h)\right) = 0$$

Если разделить это уравнение на коэффициент у второй производной и ввести обозначение:

$$\frac{k_n \cdot sh(\lambda_n h) + ch(\lambda_n h)}{k_n \cdot ch(\lambda_n h) + sh(\lambda_n h)} \cdot g \cdot \lambda_n = \omega_{2n}^2$$

то дифференциальное уравнение примет следующую форму:

$$T_{2n}'' + \omega_{2n}^2 \cdot T_{2n} = 0$$

Общее решение этого уравнения выглядит так:

$$T_{2n} = A_n \cdot \cos\left(\omega_{2n} t\right) + B_n \cdot \sin\left(\omega_{2n} t\right)$$

а выражение для потенциала второй области – так:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\omega_{2n} t\right) + B_n \cdot \sin\left(\omega_{2n} t\right)\right) \cdot \left(k_n \cdot ch\left(\lambda_n z\right) + sh\left(\lambda_n z\right)\right) \cdot J_0\left(\lambda_n \rho\right)$$

Константы A_n и B_n определяются из начальных условий:

Начальная форма свободной поверхности в рассматриваемой задаче считается некоторой функцией от координаты ρ, т.е.

$$\zeta\left(t, \rho\right)\Big|_{t=0} = f\left(\rho\right).$$

Начальная скорость точек свободной поверхности жидкости считается равной нулю, т.е.

$$\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=h, t=0} = 0 .$$

Подстановка выражения для потенциала второй области в выражение для начальной формы свободной поверхности приводит к равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\omega_{2n} \cdot 0\right) + B_n \cdot \sin\left(\omega_{2n} \cdot 0\right)\right) \cdot \lambda_n \cdot \left(k_n \cdot ch\left(\lambda_n h\right) + sh\left(\lambda_n h\right)\right) \cdot J_0\left(\lambda_n \rho\right) = 0 .$$

откуда сразу же вытекает $A_n = 0$, а выражение для потенциала становится таким:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\omega_{2n} t\right) \cdot \left(k_n \cdot ch\left(\lambda_n z\right) + sh\left(\lambda_n z\right)\right) \cdot J_0\left(\lambda_n \rho\right).$$

Форма свободной поверхности жидкости (зависимость z(t, x)) определяется из граничного условия на свободной поверхности:

$$\zeta\left(t, \rho\right) = -\frac{1}{g} \cdot \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right|_{z=h} .$$

Подстановка в это выражение потенциала, подстановка в правую часть выражения для начальной формы свободной поверхности, а в левую – t = 0, приводит к выражению для определения B_n:

$$f(\rho) = -\frac{1}{g} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \omega_{2n} \cdot \left(k_n \cdot ch\left(\lambda_n h\right) + sh\left(\lambda_n h\right)\right) \cdot J_0\left(\lambda_n \rho\right).$$

Для определения коэффициента с произвольным номером n необходимо это выражение умножить на $J_0\left(\lambda_n \rho\right) \cdot \rho$ и проинтегрировать от 0 до R0. В результате получается равенство:

$$\int_0^{R0} f(\rho) \cdot J_0\left(\lambda_n \rho\right) \cdot \rho \cdot d\rho = -\frac{1}{g} \cdot B_n \cdot \omega_{2n} \cdot \left(k_n \cdot ch\left(\lambda_n h\right) + sh\left(\lambda_n h\right)\right) \cdot \int_0^{R0} \left(J_0\left(\lambda_n \rho\right)\right)^2 \cdot \rho \cdot d\rho$$

откуда

$$B_n = -\frac{g \cdot \int\limits_0^{R0} f(\rho) \cdot J_0(\lambda_n \rho) \cdot \rho \cdot d\rho}{B_n \cdot \omega_{2n} \cdot \left(k_n \cdot ch(\lambda_n h) + sh(\lambda_n h)\right) \cdot \int\limits_0^{R0} \left(J_0(\lambda_n \rho)\right)^2 \cdot \rho \cdot d\rho}.$$

Подстановка этого выражения в выражение для потенциала позволяет получить значения потенциала во всей области 2, а также текущую форму свободной поверхности в любой момент времени:

$$\zeta(t,\rho) = -\frac{1}{g} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \omega_{2n} \cdot \cos(\omega_{2n} t) \cdot \left(k_n \cdot ch(\lambda_n h) + sh(\lambda_n h)\right) \cdot J_0(\lambda_n \rho).$$

4.3. Результаты

Задача о малых осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой решалась методом разделения переменных. Размеры сосуда: радиус R0 – 1 метр, глубина h – 1 метр. Начальная скорость жидкости равна нулю. Начальная форма поверхности жидкости задавалась в виде конической поверхности с образующей, заданной уравнением. Уравнение образующей этой поверхности задавалось в следующем виде:

$$\zeta_0 = d \cdot \left(1 - \frac{1.5\rho}{R0}\right)$$

Данный вид свободной поверхности был выбран для того, чтобы полной объем колеблющейся жидкости был равен полному объему жидкости при отсутствии колебаний. d – коэффициент, равный в нашей задаче 1 см. Перегородка находится на высоте b = 0,5 м от дна. Применение метода Фурье к поставленной задаче позволило получить форму свободной поверхности жидкости в любой момент времени. Данное решение было получено путем использования программы Mathcad. Полученные иллюстрации дают возможность считать, что метод оказался надежным и работоспособным.

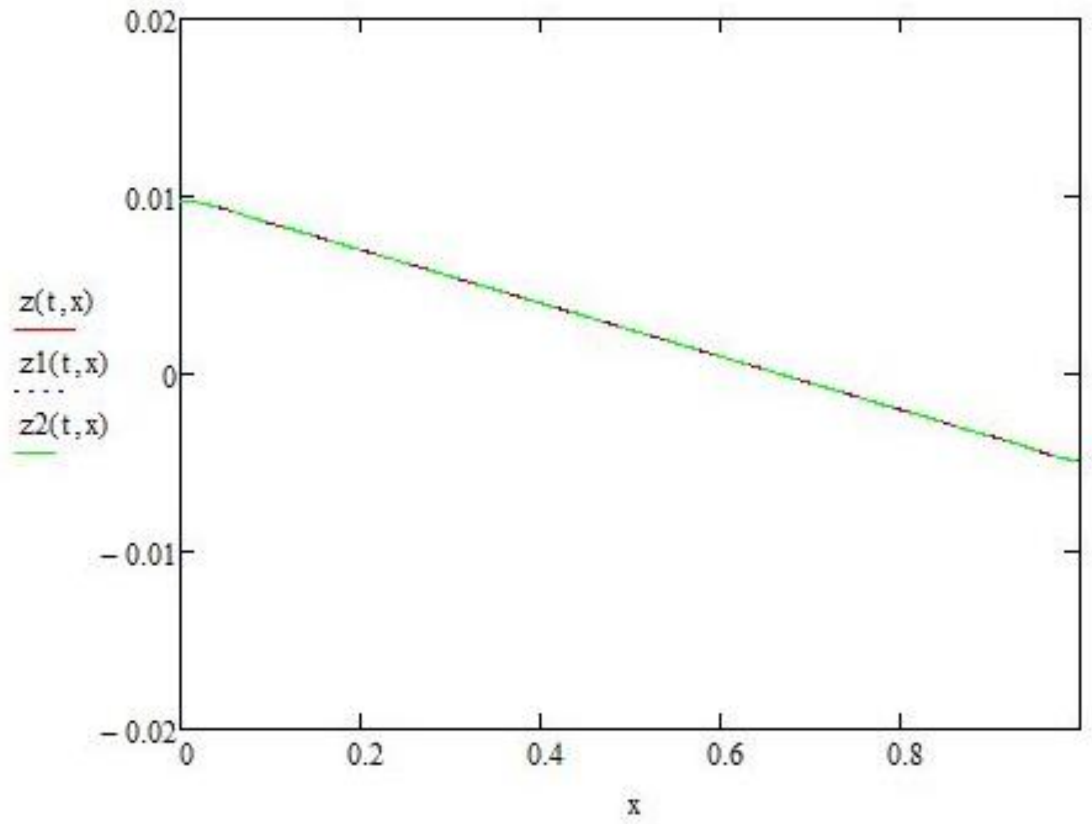


Рисунок 7

На рисунке. 7 представлена форма свободной поверхности в начальный момент времени. Сплошной красной линией показана свободная поверхность в сосуде с перегородкой, пунктирной синей линией – без перегородки с глубиной h, сплошной зеленой линией – без перегородки с глубиной h - b. Решение задачи, проведенное для перегородки с проницаемостью $q = 1$ на протяжении времени 2 с (немного больше периода колебаний) дало следующую картину свободных поверхностей (см. рисунок 8). Хорошо видно, что свободная поверхность жидкости в сосуде с проницаемой перегородкой лежит между свободными поверхностями жидкости в мелком и глубоком сосудах, что косвенно подтверждает правильность расчетов.

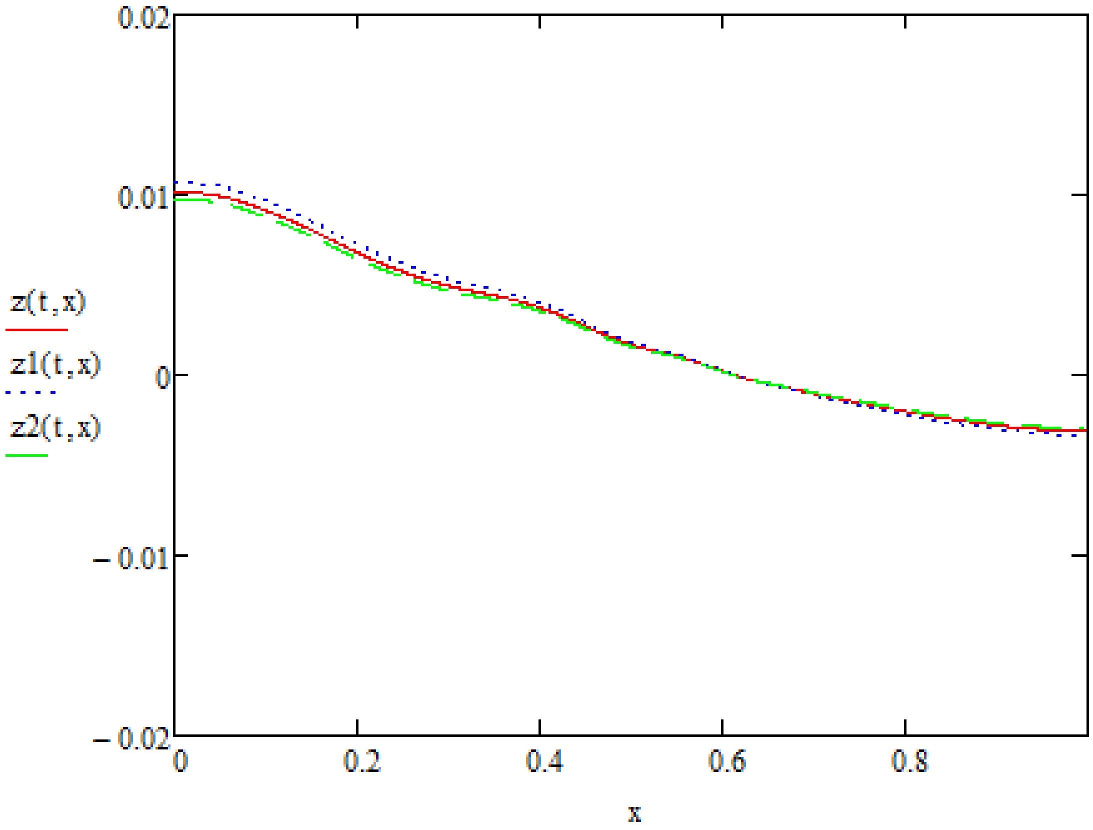


Рисунок 8

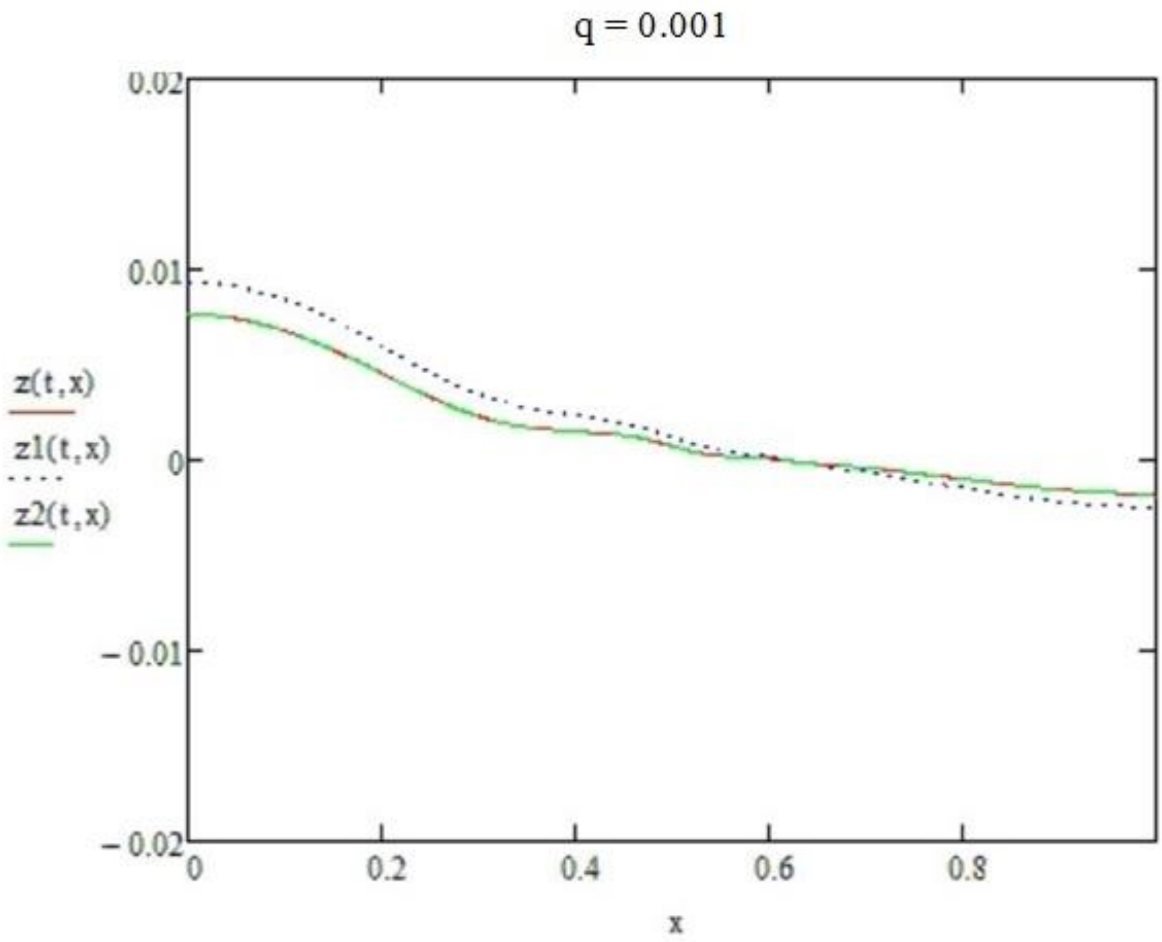


Рисунок 9

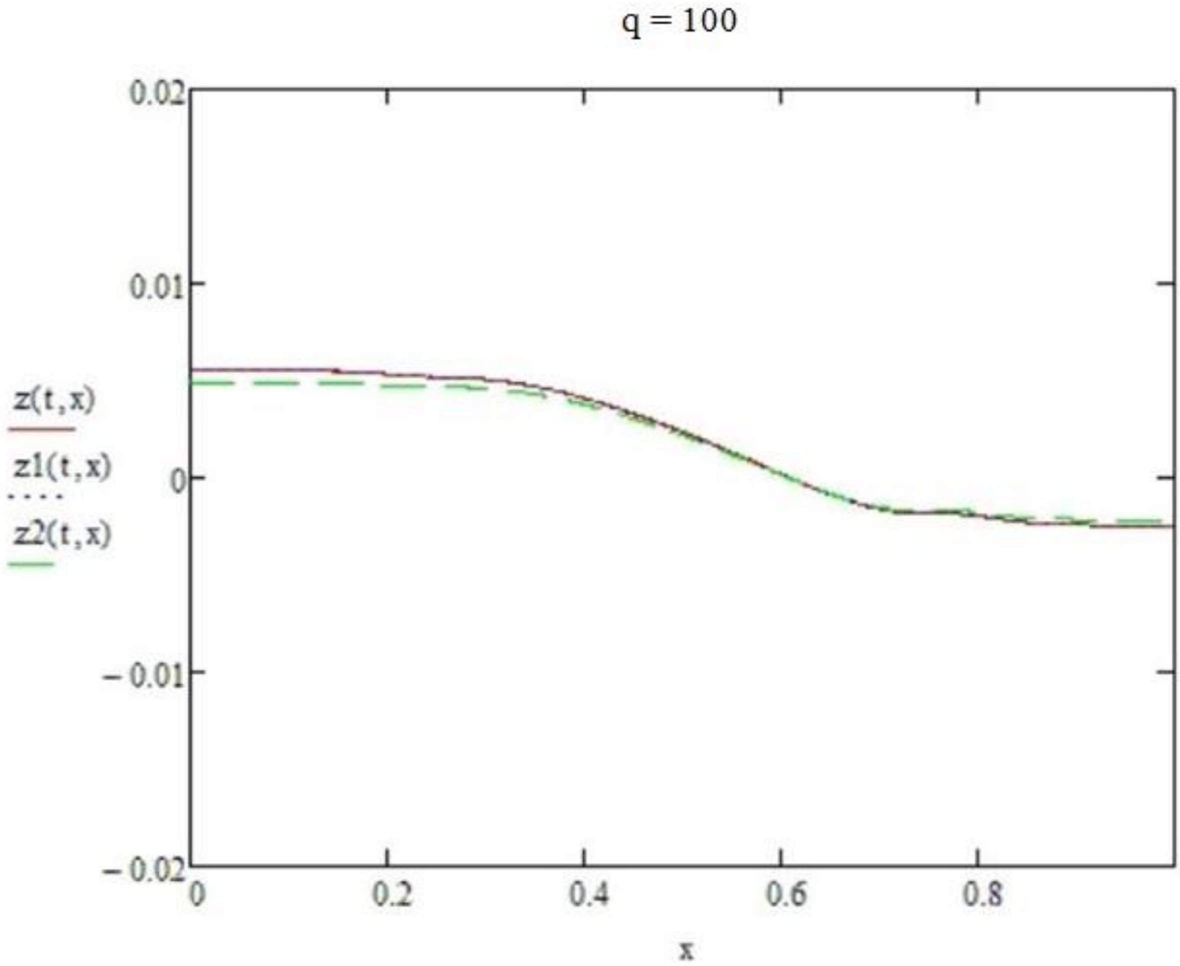


Рисунок 10

Для контроля были проведены расчеты формы свободной поверхности через то же время после начала колебаний для очень маленького значения проницаемости (q = 0,001) и очень большого значения (q = 100). Результаты показаны на рисунке 9 и рисунке 10. Когда проницаемость велика - решение совпало с точным решением для сосуда без перегородок. Когда перегородка с маленькой проницаемостью - форма свободной поверхности совпала с формой свободной поверхности мелкого сосуда. Данные совпадения также подтверждают правильность предложенной методики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Поставили задачу о колебаниях идеальной жидкости.
2. Разобрались с методом решения.
3. Решили задачу о малых колебаниях идеальной жидкости в плоской постановке.
4. Решили задачу о свободных колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с горизонтальной проницаемой стенкой.
5. Решили задачу осесимметричных колебаний идеальной жидкости с перегородкой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Д.И.- Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками / Д.И. Борисов, Ю.И. Руднев // Прикладная гидромеханика. - 2010. - Т.12, № 2. - 8-19 с.
2. Марченко В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов -Киев : Наукова думка, 1974. - 280 с.
3. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе; под ред. Н. Е. Кочина. -М. : ГИФМЛ, 1963. - Ч.1. - 584 с.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский - М. : Наука, 1977. - 742 с.

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: lena260299@gmail.com / ID: 6619516
Проверяющий: (lena260299@gmail.com / ID: 6619516)

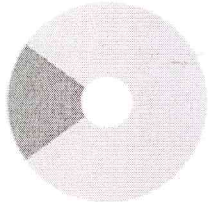
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» http://users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 26
Начало загрузки: 22.06.2020 15:57:43
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: Выпускная работа.pdf
Название документа: Выпускная работа
Размер текста: 1 кБ
Символов в тексте: 43028
Слов в тексте: 6162
Число предложений: 300

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 22.06.2020 15:57:44
Длительность проверки: 00:00:08
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ 19,87%
САМОЦИТИРОВАНИЯ 0%
ЦИТИРОВАНИЯ 0%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ 80,13%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа.
Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации. Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа. Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска
[01]	9,41%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vital:000666280/SOURCE1	http://vital.lib.tsu.ru	13 Мар 2020	Модуль поиска Интернет
[02]	1,42%	Аналитическое решение задачи о малых вынужденных колебаниях иде...	http://journals.tsu.ru	20 Дек 2017	Модуль поиска Интернет
[03]	0%	Аналитическое решение задачи о малых вынужденных колебаниях иде...	http://journals.tsu.ru	10 Фев 2020	Модуль поиска Интернет

Еще источников: 14
Еще заимствований: 9,04%

Руководитель ООП д-р физ.-мат. наук, профессор ________ Э. Р. Шрагер
Руководитель ВКР канд. физ.-мат. наук, доцент ________ А. В. Мерзляков
Автор работы студент группы № 10606 ________ Е. С. Усманова