Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра алгебры

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
_____ П.А.Крылов
подпись
«15» июня 2020г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Абелевы группы с вполне идемпотентной группой гомоморфизмов

по основной образовательной программе подготовки магистра

направление подготовки 01.04.01- Математика

Молокова Кристина Сергеевна

Руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук
_____ А.Р.Чехлов
подпись
«15» июня 2020г.
Автор работы
студент группы №041811
_____ К.С.Молокова
подпись

Томск-2020

Содержание

Указатели обозначений	3
Введение	5
§1.Основные определения	6
§2.Группа гомоморфизмов	8
§3.Тензорное произведение	14
§4. Вполне идемпотентные гомоморфизмы	20
§5. Регулярные гомоморфизмы	26
§6. Вполне идемпотентные гомоморфизмы абелевых групп	31
Заключение	37
Список литературы	38

Указатель обозначений

$A, B, C, G, H, \ldots$	группы, модули или подмножества групп, модулей
$I, J, K \ldots$	множества индексов
$k, l, m, n, p, q, \ldots$	целые числа
$\alpha, \varphi, \beta, \delta, \eta, \pi, \gamma, \Psi_{A,B}, \mathfrak{f} \ldots$	отображения, гомоморфизмы
$m, n, \ldots$	кардинальные числа

Теория множеств

$\in$	является членом
$\subset, \subseteq$	содержится, строго содержится
\	разность двух множеств
$\circ$	произведение гомоморфизмов
$\emptyset$	пустое множество
$\times$	декартово произведение
$\{a \in A \mid \ldots\}$	множество всех a $\in A$ со свойством
$\{a_i\}_{i\in I}$	множество всех a_i, где $i \in I$
P	множество простых чисел
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
J_p	кольцо группы целых p-адических чисел

Отображения

$\mapsto$	соответствие
$\rightarrow$	отображение множеств
1_A	тождественное отображение группы, модуля A

$Kez\ \alpha$	ядро отображения α
$Im\ \alpha$	образ отображения α
$\oplus$	прямая сумма
$\oplus\ \alpha_i$	прямая сумма отображений α_i

Теория групп

A/B	фактор группа
$\cong$	изоморфизм
$\sum$	сумма
$\prod$	прямое произведение
$C[n]$	множество всех элементов $a \in C$, для которых $na = 0$
$< \cdots >$	подгруппа порожденная

Конкретные группы

$\mathbb{Z}$	группа целых чисел, бесконечная циклическая группа
Hom	группа гомоморфизмов
End	кольцо эндоморфизмов
$\mathbb{Z}(m)$	циклическая группа порядка m

Введение

В данной работе изучаются группы гомоморфизмов. Это означает, что элементы групп — гомоморфизмы фиксированной группы, модуля A в фиксированную группу, модуль C. Тот факт, что такие гомоморфизмы образуют группу $Hom\,(\mathrm{A},\mathrm{C})$, оказался исключительно глубоким. Как выяснилось, что группы гомоморфизмов обладают многими замечательными свойствами и могут быть использованы в различных случаях.

Наша первая задача — познакомиться с некоторыми свойствами групп гомоморфизмов. В некоторых важных случаях группа $Hom\,(\mathrm{A},\mathrm{C})$ алгебраически компактна; например, это так, если A — периодическая группа или если C — алгебраически компактная группа. В этих случаях можно определить инварианты группы $Hom\,(A,\mathrm{C})$ через инварианты групп A и C. В частности, если C − аддитивная группа действительных чисел, рассматриваемых по модулю 1, то получающееся описание групп $Hom\,(A,C)$ приводит к полной характеризации строения компактных (абелевых) групп.

Вторая задача работы − рассмотреть вполне идемпотентные группы гомоморфизмов по работам [1] и [2] (см. литературу) А.Н.Абызова и А.А. Туганбаева. Эти результаты изложены в §4. Основными в них являются теоремы 4.1-4.3.

Третья задача состоит в приведении примеров вполне идемпотентных гомоморфизмов абелевых групп, не являющимися регулярными.

§1. Основные определения

Определение 1.1. Слово «группа» везде будет обозначать аддитивно записанную абелеву (т. е. коммутативную) группу. Это значит, что под группой понимается множество A, где любой паре элементов $a, b \in A$ поставлен в соответствие элемент $a + b$ из A, называемый суммой элементов a и b, существует такой элемент $0 \in A$, нуль, что $a + 0 = a$ для каждого $a \in A$; для всякого $a \in A$ существует $x \in A$ со свойством $a + x = 0$, причем элемент $x = -a$ называется противоположным к элементу a; наконец, выполняются законы ассоциативности и коммутативности: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$ для любых $a, b, c \in A$.

Определение 1.2. Подмножество B группы A называется подгруппой, если элементы множества B образуют группу при том же правиле сложения, что и в A.

Определение 1.3. Периодическая группа — группа, каждый элемент которой имеет конечный порядок. Все конечные группы периодичны.

Определение 1.4. Делимая группа — это группа G, такая что для любых n $\in N$ и $g \in G$ уравнение $nx = g$ разрешимо.

Определение 1.5. Группа C называется редуцированной, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Определение 1.6. Если $B \subseteq A$ и $a \in A$, то множество

$$a + B = \{a + b \mid b \in B\}$$

называется смежным классом группы A по подгруппе B. Напомним, что:

1) $b \to a + b -$ взаимно однозначное соответствие между B и $a + B$;

2) элементы $a_1, a_2 \in A$ лежат в одном смежном классе по подгруппе B тогда и только тогда, когда $a_1 - a_2 \in B$ в этом случае можно писать $a_1 \equiv a_2 \, mod \, B$ и говорить, что a_1 и a_2 конгруэнтны по модулю B;

3) два смежных класса или совпадают, или не пересекаются;

4) A является теоретико-множественным объединением попарно не пересекающихся смежных классов группы A по подгруппе B.

Определение 1.7. Смежные классы группы A по подгруппе B образуют группу A/B, известную под названием факторгруппы группы A по подгруппе B.

Определение 1.8. Группа $< a >$ называется циклической группой, порожденной элементом a. Порядок группы $< a >$ называется также порядком элемента a и обозначается через $o\ (a)$. Таким образом, порядок $o\ (a)$ — это или положительное целое число, или символ ∞. Если $o\ (a)$= ∞, то все кратные na элемента a (n = 0, ±1, ±2, . . .) различны, и ими исчерпывается группа $< a >$, а если $o\ (a)$ = m — положительное целое число, то $0, a,$ . . ., $(m—\ 1)\ a$ — это различные элементы группы < a >, и $ra = sa$ тогда и только тогда, когда $m \mid r - s$.

Определение 1.9. Пусть R и S — два кольца, тогда $(R,\ S)$ −бимодуль — это абелева группа M, такая что

1. M является левым R −модулем и правым S −модулем.
2. Для любых $r \in R, s \in S, m \in M$: $(rm)s = r(ms)$.

$\left(R,\ R\right)$ −бимодуль называют также R −бимодулем.

Определение 1.10. Тензорное произведение это операция над векторными пространствами, а также над элементами (векторами, матрицами, операторами, тензорами и т. д.) перемножаемых пространств. Тензорное произведение линейных пространств A и B есть линейное пространство, обозначаемое $A \otimes B$. Для элементов $a \in A$ и $b \in B$ их тензорное произведение $a \otimes b$ лежит в пространстве $A \otimes B$.

Определение 1.11. Квазициклическая p-группа, для фиксированного простого числа p — это единственная p-группа, в которой из любого элемента можно извлечь ровно p корней p-й степени. Обычно обозначается как $\mathbb{Z}(p^{\infty})$. Квазициклическую p-группу также называют p-группой Прюфера, в честь немецкого математика Хайнца Прюфера.

Определение 1.12. Прямая сумма это производный математический объект, создаваемый по определённым ниже правилам из базовых объектов. В качестве базовых чаще всего выступают векторные пространства или абелевы группы.

Прямая сумма двух объектов A и B обозначается $A \oplus B$, а прямая сумма произвольного множества объектов A_i — как $\bigoplus A_i$. При этом произвольное A_i называется прямым слагаемым .

Определение 1.13. Прямое или декартово произведение двух множеств это множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств. Пусть даны два множества X и Y. Прямое произведение множества X и Y множества есть такое множество $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные пары (x, y) для всевозможных $x \in X$ и $y \in Y$. Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято записывать, используя круглые скобки: $(a;\ b)$. Элемент a называют первой координатой (компонентой) пары, а элемент b – второй координатой (компонентой) пары.

Слово «упорядоченная» значит, что $(x, y) \neq (y, x)$. Так, пары (a, b) и (c, d) равны в том и только том случае, когда $a = c$ и $b = d$.

§2. Группа гомоморфизмов.

Определения и основные формулировки

Пусть A и B — произвольные группы. Отображение $\alpha : A \to B$ — это функция, которая ставит в соответствие каждому элементу $a \in A$ однозначно определенный элемент $b \in B$, $\alpha : a \to b$. Элемент b называется образом элемента a при отображении α, и записывается это так: $b = \alpha(a)$ или просто $b = \alpha a$.

Группа A называется областью определения (или просто областью) отображения α, группа B — его областью значений (или кообластью).

Отображение $\alpha : A \to B$ называется гомоморфизмом (абелеву группы A в абелеву группу B), если оно сохраняет сложение, т.е. $\alpha(a_1 + a_2) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2)$ для всех $a_1, a_2 \in A$. Если нет нужды как-то обозначать гомоморфизм, можно просто писать $A \to B$.

Со всяким гомоморфизмом $\alpha : A \to B$ связаны две подгруппы: $Ker\ \alpha \subseteq A$ и $\mathrm{Im}\ \alpha \subseteq B$. Ядро гомоморфизма α, $Ker\alpha$ − это множество всех элементов

$a \in A$, для которых α (a) = 0. Тогда как образ гомоморфизма α , $Im\ \alpha$, состоит из всех таких $b \in B$, что для некоторого $a \in A$ имеет место $\alpha a = b$. Вместо $Im\ \alpha$ можно писать αA. Если $Im\ \alpha = B$, то гомоморфизм α называется сюръективным; говорят также, что α — эпиморфизм. Если $Ker\ \alpha = 0$, то α называется инъективным гомоморфизмом, или мономорфизмом. Если $Im\ \alpha = B$ и $Ker\alpha = 0$, то α — взаимно однозначное соответствие между A и B (т. е. отображение α биективно); в этом случае гомоморфизм α называется изоморфизмом.

Группы A и B называются изоморфными (обозначение $A \cong B$), если существует изоморфизм $\alpha : A \to B$; в этом случае обратное отображение $\alpha^{-1} : B \to$ A существует и также является изоморфизмом. Как обычно в алгебре, не делается различия между изоморфными группами, кроме случая, когда они — различные подгруппы одной и той же большей группы. Если G является подгруппой одновременно в группе A и в группе B и гомоморфизм $\alpha : A \to B$ оставляет элементы из G на месте, то α называется гомоморфизмом над G.

Гомоморфизм с образом 0 называется нулевым гомоморфизмом, он обозначается через 0. Если $A \subseteq B$, то отображение, которое сопоставляет каждому элементу $\alpha \in$ A его самого, можно рассматривать как гомоморфизм группы A в группу B; он называется инъекцией (или вложением). Инъекция $0 \to A$ единственный гомоморфизм группы 0 в A. Если $\alpha : A \to B$ и $C \subseteq A$, то ограничение $\alpha \mid C$ отображения α на C имеет в качестве области определения группу C, в качестве области значений — группу B и совпадает с α на C .

Пусть $\alpha : A \to B$ и $\beta : B \to C$ гомоморфизмы, здесь область значений гомоморфизма α совпадает с областью определения гомоморфизма β.

Составное отображение $A \to B \to C$, называемое произведением гомоморфизмов α и β и обозначаемое через $\beta \circ \alpha$ или просто βα (обратим внимание на порядок сомножителей), снова является гомоморфизмом.

Напомним, что βα действует согласно правилу $(\beta\alpha)a = \beta(\alpha a)$ для всех $a \in$ A. Если определены произведения $\alpha\beta$ и $\gamma\beta$, то имеет место закон ассоциативности $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$. Легко убедиться, что на α можно сокращать справа (т. е. из $\beta\alpha = \gamma\alpha$ обязательно вытекает $\beta = \gamma$) тогда и только тогда, когда α — эпиморфизм. Так же на α можно сокращать слева (т. е. из $\alpha\beta = \alpha\gamma$ обязательно вытекает $\beta = \gamma$) тогда и только тогда, когда α — мономорфизм. Произведение двух эпиморфизмов снова является эпиморфизмом. А произведение двух мономорфизмов является мономорфизмом.

Гомоморфное отображение группы A в себя называется эндоморфизмом. Изоморфное отображение группы A на себя называется автоморфизмом. Тождественный автоморфизм 1_A группы A удовлетворяет условиям $1_A\alpha = \alpha$, $\beta 1_A = \beta$, если только произведения, стоящие слева, определены.

Подгруппа B группы A, которая отображается в себя при всяком эндоморфизме (автоморфизме) группы A, называется вполне характеристической (характерной) подгруппой группы A.

Пусть α : $A \to B$ — эпиморфизм, и пусть $Ker\alpha = K$. Полный прообраз $\alpha^{-1} b = \{a \mid a \in$ A , $\alpha a = b\}$ элемента $b \in B$ является смежным классом $a + K$ в A. Отсюда следует, что индуцированное эпиморфизмом α отображение $a + K \to \alpha a$ (которое не зависит от конкретного выбора представителя α смежного класса) представляет собой изоморфизм между A/K и B. Таким же образом произвольный гомоморфизм α : $A \to B$ индуцирует изоморфизм между группами A / Кег α и Im α.

Отображение $a \to a + K$ называется каноническим или естественным эпиморфизмом группы A на A/K. Если $C \subseteq B \subseteq A$, то 1_A индуцирует эпиморфизм $a + C \to a + B$ группы A/C на A/B.

Если гомоморфизмы α, β имеют одну и ту же область определения A и одну и ту же область значений B, то можно определить их сумму $\alpha + \beta$, положив

$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a$ для всякого $a \in A$. Легко проверить, что $\alpha + \beta$: A $\rightarrow$ B — также гомоморфизм, причем

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha + 0 = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

$$(\alpha + \beta)\, \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

$$\delta\, (\alpha + \beta) = \delta\alpha + \delta\beta$$

если только суммы и произведения определены.

Далее можно проверить, что гомоморфизмы группы A в группу C образуют абелеву группу (на самом деле — подгруппу группы C^{A}). Эту группу называют группой гомоморфизмов группы A в группу C и обозначают через $Hom\,(A, C)$. Нулем этой группы является тривиальный гомоморфизм группы A в группу C, обратный элемент $-\alpha$ для элемента $\alpha: A \rightarrow C$ переводит элемент $a \in A$ в элемент $-\alpha a \in C$. Если $A = C$, то гомоморфизмы группы A в группу C являются эндоморфизмами группы A, и группа $Hom\,(A, A) = End\, A$ называется группой эндоморфизмов группы A. Группу $End\, A$ можно превратить в кольцо.

Далее рассмотрим 3 примера.

Пример 2.1. Если $A = \mathbb{Z}$, то любой гомоморфизм $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow C$ вполне определяется элементом $\alpha(1) = c\ (\in C)$, причем, очевидно, что для каждого элемента $c \in C$ существует такой гомоморфизм $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow C$, что $\alpha(1) = c$. Так как из $\alpha(1) = c_1, \beta(1) = \mathrm{c}_2$ следует $(\alpha + \beta)\, 1 = \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2$, то соответствие $\alpha \rightarrow c$, если $\alpha(1) = c$, оказывается естественным изоморфизмом между группой $Hom\,(\mathbb{Z}, C)$ и группой C, т. е.

$$Hom\,(\mathbb{Z}, C) \cong C.$$

Пример 2.2. Если $A = \mathbb{Z}\,(m)$, то опять каждый гомоморфизм $\alpha: \mathbb{Z}\,(m) \rightarrow C$ характеризуется образом $\alpha 1 = c$ образующего элемента 1, но здесь должно выполняться условие $mc = 0$, т. е. $c \in C\,[m]$. Обратно, всякое

такое c позволяет построить гомоморфизм $\alpha: 1 \to c$, и, как в предыдущем примере, $\alpha \to c$, где $\alpha 1 = c$, является естественным изоморфизмом

$$Hom\,(\mathbb{Z}\,(m), C) \cong C[m].$$

Пример 2.3. Пусть A — квазициклическая группа, скажем A = $< a_1, \ldots, a_n, \ldots >$, где $pa_1 = 0$, $pa_{n+1} = a_n$ $(n \geq 1)$, и пусть $A = C$. Если η — эндоморфизм группы A, то для каждого n справедливо $\eta a_n = k_n a_n$, где k_n — целое число $(0 \leq k_n < p^n)$. Теперь из $k_n a_n = \eta a_n = \eta(pa_{n+1}) = p\eta a_{n+1} = k_{n+1} a_n$ вытекает $k_n = k_{n+1} mod\, p^n$, откуда следует, что последовательность $k_1, \ldots, k_n, \ldots$ стремится к целому -адическому числу π. Соответствие $\eta \mapsto \pi$ между эндоморфизмами η и целыми p-адическими числами π, как легко видеть, аддитивно. Если эндоморфизмы η_1, η_2 группы A определяют одно и то же число π, то эндоморфизм $\eta_1 - \eta_2$ отображает каждый элемент a_n в 0, т. е. $\eta_1 - \eta_2 = 0$. Если $\pi = s_0 + s_1 p + \cdots + s_n p^n + \cdots -$ какое-то целое -адическое число, то соответствие $a_n \mapsto (s_0 + s_1 p + \cdots + s_{n-1} p^{n-1}) a_n$ (этот последний элемент можно обозначить через πa_n) однозначно продолжается до такого эндоморфизма η группы A, что $\eta \mapsto \pi$. Получаем

$$End\ \mathbb{Z}\ (p^\infty) \cong J_p.$$

Приведем несколько фактов, касающиеся групп гомоморфизмов.

А) $Hom\ (A, C) = 0$ в следующих случаях:

1) A – периодическая группа, $C -$ группа без кручения.

2) A является $p -$группой, C является p-группой, где p, q — различные простые числа.

3) A — делимая группа, C — редуцированная группа.

Б) Если $C[n] = 0$ для некоторого целого числа n , то $Hom\ (A, C)\ [n] = 0$ для любой группы A. Пусть $\alpha \in Hom\ (A, C)$ и $n\alpha = 0$. Для любого элемента $\alpha \in A$ мы имеем $n(\alpha a) = (n\alpha)a = 0$, откуда в силу того, что C $[n] = 0$, получается $\alpha a = 0$, т. е. $\alpha = 0$.

В) $Hom\ (A, C)\ -$ группа без кручения, если $C -$ группа без кручения.

Г) Если $C -$ делимая группа без кручения, то $Hom\ (A, C)\ -$ делимая группа без кручения. Чтобы показать, что $Hom\ (A, C)\ -$ делимая группа, возьмем элемент $\alpha \in Hom(A, C)$ и натуральное число n. Для любого $\alpha \in A$ существует такой однозначно определенный элемент $c \in C$, что $nc = \alpha a$. Следовательно, мы можем рассматривать отображение $\beta: a \to c$. Непосредственно проверяется, что $\beta -$ гомоморфизм, для которого $n\beta = \alpha$. Аналогично получается: если $C -$ группа, в которой однозначно определено деление на простое число p, то в группе $Hom\ (A, C)$ деление на p также однозначно определено.

Д) Если для некоторого целого числа $n > 0$ имеет место $nA = A$, то $Hom\ (A, C)\ [n] = 0$. Пусть $\alpha \in Hom(A, C)$ и $n\alpha = 0$. Представим элемент $a \in A$ в виде $nb = a$, где $b \in A$.Тогда $\alpha a = \alpha\ (nb) = (n\alpha)b = 0$, откуда $a\alpha = 0$.

Е) Если A — делимая группа, то $Hom\ (A, C)$ — группа без кручения.

Ж) Если A — делимая группа без кручения, то это же имеет место для группы $Hom\ (A, C)$.

Чтобы доказать делимость группы $Hom\ (A, C)$, возьмем элемент $\alpha \in \text{Hom}\ (A, C)$ и натуральное число n. Если дано $a \in A$, то существует единственный элемент $b \in A$, для которого $nb = a$. Можно проверить, что отображение $\beta: a \to \alpha b$ является гомоморфизмом $A \to C$, причем, очевидно, $n\beta = a\alpha$.

Рассмотрим теперь, как ведет себя группа $Hom\ (A, C)$ относительно прямых сумм и прямых произведений.

Теорема 2.1. Существует естественный изоморфизм

$$\text{Hom}(A_i, \text{C}) \cong \prod_{i \in I} Hom(A_i, C)$$

Ограничение гомоморфизма a: $A_t \to C$ на A_t – это гомоморфизм α_t: $A_i \to C$. Таким путем мы получаем отображение $\alpha \to (\dots, \alpha_i, \dots)$ группы $Hom\,(A_i, C)$ в группу $\prod Hom\,(A_i, C)$, которое, очевидно, является некоторым гомоморфизмом φ. Ясно, что φ переводит в $(0, \dots, 0, \dots)$ только элемент $\alpha = 0$, т. е. φ – мономорфизм. Так как любое множество $\{\alpha_i\}\, i \in I$, где $\alpha_i \in Hom\,(A_i, C)$, определяет такой элемент $\alpha \in Hom\,(A_i, C)$, что $\alpha_i = \alpha \mid A_i$, то φ –эпиморфизм.

Теорема 2.2. Существует естественный изоморфизм

$$Hom(A, \prod_{i \in I} \mathrm{C_i}) \cong \prod_{i \in I} Hom(A, C_i)$$

Если через π_i обозначить координатную проекцию $\prod C_i \to C_i$,то каждый гомоморфизм $\alpha \in Hom\,(A, C_i)$ будет определять гомоморфизмы $\pi_i \alpha \in Hom\,(A, \mathrm{C}_i)$. Точно так же, как в предыдущем доказательстве, получаем, что $\alpha \to (\dots, \pi_i \alpha, \dots)$ – изоморфизм групп $Hom\,(A, \prod C_i)$ и $\prod Hom\,(A, C_i)$.

§ 3. Тензорное произведение

Пусть A и C — произвольные группы и g — функция, определенная на множестве $A \times C$ и принимающая значения в некоторой группе G,

$$g\colon A \times C \to G. \tag{1}$$

Функция g называется билинейной, если для любых элементов a,

$$a_1, a_2 \in A, \qquad c, c_1, c_2 \in C$$

$$g\,(a_1 + a_2, c) = g\,(a_1, c) + g\,(a_2, c), \tag{2}$$

$$g\,(a, c_1 + c_2) = g\,(a, c_1) + g\,(a, \mathrm{c}_2). \tag{3}$$

Отсюда сразу следует, что билинейная функция g удовлетворяет также следующим условиям: $g\,(a,0) = 0 = g\,(0,c)$, $g\,(-a,c) = -g\,(a,c) = g\,(\mathrm{a},-c), g\,(na,c) = ng\,(a,c) = g\,(a,nc)$ для любых элементов $a \in A$, $c \in C$ и любого $n \in Z$. Следовательно, если известны значения функции $g\,(a_i,c_j)$ для всех элементов a_i, c_j принадлежащих некоторым системам образующих групп A и C соответственно, то значение $g\,(a,c)$ может быть определено для любых $a \in A, c \in C$.

Для заданных групп A, C определим так группу $A \otimes C$ и билинейную функцию e с областью определения $A \times C$ и с областью значений $A \otimes C$, чтобы функция e была наиболее общей билинейной функцией в том смысле, что если (1) — какая-то билинейная функция, то существует однозначно определенный гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes C \to G$, для которого $g = \varphi e$. Другими словами, всякая билинейная функция (1) должна «пропускаться через функцию e».

Пусть X — свободная группа, свободными образующими которой являются все пары (a,c), где $a \in A$, $c \in C$, и пусть Y — подгруппа группы X, порожденная элементами вида

$$(a_1 + \mathrm{a}_2, c) - (a_1, \mathrm{c}) - (\mathrm{a}_2, c) \text{ и } (a, c_1 + \mathrm{c}_2) - (a, c_1) - (a, \mathrm{c}_2) \qquad (4)$$

для всех $a, a_1, a_2 \in A$, $c, c_1, c_2 \in C$. Положим

$$A \otimes C = X/Y$$

и обозначим смежный класс $(a,c) + Y$ через $a \otimes c$. Таким образом, $A \otimes C$ состоит из всех конечных сумм $u = \sum k_i(a_i \otimes c_i)$, где $a_i \in A, c_i \in C, k_i \in Z$, причем выполняются правила (соответствующие образующим группы Y):

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad (5)$$

$$a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2. \qquad (6)$$

Следовательно,

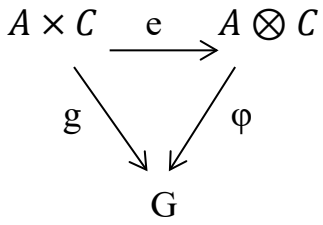
$$na \otimes c = n(a \otimes c) = a \otimes nc$$

для любых $a \in A, c \in C, n \in Z$. Мы видим, что элементы $u \in A \otimes C$ могут быть записаны в виде $u = \sum(a_i \otimes c_i)(a_i \in A, c_i \in C)$, но, вообще, элемент u записывается в таком виде многими различными способами.

В силу формул (5) и (6) отображение

$$e: (a, c) \to a \otimes c$$

есть билинейная функция $A \times C \to A \otimes C$. Если (1) — какая-то билинейная функция, то докажем, что существует однозначно определенный гомоморфизм $\varphi: A \otimes C \to G$, превращающий диаграмму



в коммутативную. Если такой гомоморфизм φ существует, то, очевидно, $\varphi: a \otimes c \to g(a, c)$, так что φ обязательно определен однозначно, отображение $a \otimes c \to g(a, c)$ образующих группы $A \otimes C$ в группу G продолжается до гомоморфизма, так как образующие связаны только соотношениями (5), (6) (и следствиями из них), которыми связаны и соответствующие образы, как показывают формулы (2) и (3). Это завершает доказательство первой части следующей теоремы.

Теорема 3.1. Если дана пара групп A, C, то существует такая группа $A \otimes C$ и такая билинейная функция

$$e: A \times C \to A \otimes C,$$

что если $g: A \times C \to G$ — какая-то билинейная функция, то имеется единственный гомоморфизм $\varphi: A \otimes C \to G$, для которого диаграмма (7) коммутативна.

Указанное свойство определяет группу $A \otimes C$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Чтобы доказать последнее утверждение, предположим, что группа H обладает таким же свойством, причем соответствующей билинейной функцией является функция $h: A \times C \to H$. Тогда в силу доказанного для группы $A \otimes C$ существует такой гомоморфизм $\varphi: A \otimes C \to H$, что $h = \varphi e$, а по нашему предположению относительно группы H для некоторого гомоморфизма $\psi: H \to A \otimes C$ имеет место равенство $e = \psi h$. Следовательно, $e = \psi\varphi e$, $h = \varphi\psi h$, а так как существует только один гомоморфизм $\psi\varphi: A \otimes C \to A \otimes C$, для которого $e = \psi\varphi e$, то $\psi\varphi = 1_{A\otimes C}$ и аналогично $\varphi\psi = 1_H$.

Группа $A \otimes C$ называется тензорным произведением групп A и C, а отображение $e: (a, c) \to a \otimes c$ называется тензорным отображением. В силу единственности, о которой идет речь в предыдущей теореме, получается, что

$$A \otimes C \cong C \otimes A,$$

причем естественный изоморфизм индуцируется соответствием, $a \otimes c \to c \otimes a$.

Чтобы ознакомиться с тензорными произведениями, установим сначала ряд элементарных фактов. Следующая, почти тривиальная лемма дает нам удобный метод получения свойств тензорных произведений.

Лемма 3.1. а) Если $m \mid a$ и $n \mid c$, то $mn \mid a \otimes c$; б) если $ma = 0$ и $nc = 0$, то (m, n) $(a \otimes c) = 0$; в) если $m \mid a$ и $mc = 0$, то $a \otimes c = 0$.

Если для элементов $a_0 \in A$, $c_0 \in C$ выполнены соотношения $ma_0 = a$, $nc_0 = c$, то $mn(a_0 \otimes c_0) = a \otimes c$. Если s, t — такие целые числа, что $ms + nt = (m, n)$, то $(m, n)(a \otimes c) = msa \otimes c + a \otimes ntc = 0$. Наконец, утверждение в) вытекает из того, что $a \otimes c = ma_0 \otimes c = a_0 \otimes mc = 0$

А) Если либо группа А, либо группа C является p −делимой, то $A \otimes C$ есть p −делимая группа.

Б) Для высот элементов справедливо $h_p\,(a \otimes c) \geq h_p\,(a) + h_p\,(c)$.

В) Если либо группа A, либо группа C является p −группой (периодической группой), то $A \otimes C$ есть p −группа (периодическая группа).

Г) Если A есть p −делимая группа, а C есть p −группа, то $A \otimes C = 0$.

В частности, $A \otimes C = 0$, если A есть p −группа, а C есть q −группа, где p, q —различные простые числа. Кроме того, $A \otimes \mathrm{C} = 0$, если A − делимая, а C — периодическая группа.

Д) Если при некотором $m \in Z$ имеют место включения $a \in mA$ и $c \in C[m]$, то $a \otimes c = 0$ в группе $A \otimes C$.

Е) Если $h_r(a) = \infty$, а C есть p −группа, то $a \otimes c = 0$ в группе $A \otimes C$ для любого элемента $c \in C$.

Ж) Существует естественный изоморфизм $Z \otimes C \cong C$.

Элементы группы $Z \otimes C$ могут быть приведены к виду $\sum(n_i \otimes c_i) = \sum(1 \otimes n_i c_i) = 1 \otimes \sum n_i c_i = 1 \otimes c$ для некоторого элемента $c \in C$. Отображение $\varphi: c \to 1 \otimes c$ является поэтому эпиморфизмом группы C на группу $Z \otimes C$. Очевидно, $(m, c) \to mc$ есть билинейное отображение $Z \times C \to C$, поэтому в силу теоремы 3.1 существует такой гомоморфизм $\psi: Z \otimes C \to C$, что $\psi: 1 \otimes c \to c$. Следовательно, отображения φ и ψ взаимно

обратны. (Заметим, что отображение φ является естественным, так как группа Z имеет особо выделенную образующую.)

3) Для любого целого числа т существует естественный изоморфизм

$$Z\{m) \otimes\ C\ \cong\ C/mC.$$

Здесь снова $\varphi: c \to 1 \otimes c$ является эпиморфизмом группы C на группу $Z(m) \otimes C$. Так как $1 \otimes mc = m \otimes c = 0 \otimes c = 0$, то $mC \subseteq Ker\varphi$. Далее, $(n, c) \to nc + mC$ — это билинейное отображение $Z(m) \times C \to C/mC$, индуцирующее такой эпиморфизм $\psi: Z(m) \otimes C \to C/mC$, что $\psi\varphi$ является каноническим отображением $C \to C/mC$. Следовательно $Kez\varphi = mC$. В частности, $Z\ (p^r)\ \otimes\ Z\ (p^s)\ \cong\ Z$ (p^s), где $t\ =\ min\ (r, s)$.

К) Для любых трех групп A, B, C имеет место естественный изоморфизм

$$\varphi: Hom(A \otimes B, C) \to Hom\big(A, Hom(B, C)\big),$$

определяемый следующим образом: если $\eta: A \otimes B \to C$, то

$$[(\varphi\eta)\ a]\ (b)\ =\ \eta(a \otimes b)\ (a \in A, b \in B).$$

Очевидно, $\varphi\eta$ сопоставляет элементу $a \in A$ отображение $(\varphi\eta)\ a: B\ \to C$, которое переводит элемент $b \in B$ в элемент $\eta(a \otimes b) \in C$. Легко проверить, что $(\varphi\eta)a$ — гомоморфизм. Точно так же, $\varphi\eta$ — гомоморфизм и $\varphi: \eta \to \varphi\eta$ — гомоморфизм, и остается доказать, что для φ существует обратное отображение ψ. Пусть $\chi: A \to Hom(B, C)$.

Тогда $(a, b) \to (\chi a)(b)$ есть билинейная функция $g: A \times B\ \to C$, откуда следует, что существует однозначно определенный гомоморфизм $\eta: A \otimes B \to C$, для которого $\eta(a \otimes b) = (\chi a)(b)$. Легко видеть, что отображение $\psi: \chi \to \eta$ является обратным к φ.

§4. Вполне идемпотентные гомоморфизмы

Определение 4.1. Пусть $f \in Hom(A,B)$. Введём следующие обозначения

$H_r(f):=\{\sum_i g_i\ f\ s_i \mid g_i \in Hom(B,A), s_i \in Hom(A,A)$ для каждого $i\}$

$H_l(f):=\{\sum_i s_i\ f\ g_i \mid g_i \in Hom(B,A), s_i \in Hom(B,B)$ для каждого $i\}$

Легко убедиться, что если

$f \in Hom(B,C)$ и $g \in Hom(A,B)$,

то $H_r(fg) \subset H_r(g)$.

Определение 4.2. Группа $Hom(A,B)$ называется вполне идемпотентной справа, если для каждого гомоморфизма $f \in Hom(A,B)$ выполнено условие

$$f \in fH_r(f).$$

Определение 4.3. Группа $Hom(A,B)$ называется вполне идемпотентной слева, если для каждого гомоморфизма $f \in Hom(A,B)$ выполнено условие $f \in H_r(f)f$.

Определение 4.4. Группа $Hom(A,B)$ называется вполне идемпотентной, если $f \in Hom(B,B)fH_r(f)$ для каждого $f \in Hom(A,B)$.

Лемма 4.1. Пусть $f \in Hom(A,B)$, а $g \in H_r(f)$. Если $f - fg \in (f - fg)H_r(f - fg)$, то $f \in fH_r(f)$.

Доказательство. Утверждение следует из включений $H_r(f - fg) \subset H_r(f)$ и $gH_r(f - fg) \subset H_r(f)$.

Определение 4.5. Гомоморфизм $f \in Hom(A,B)$ называется вполне идемпотентным справа, если $f \in fH_r(f)$. Каждый его элемент является вполне идемпотентным справа.

Лемма 4.2. 1). Пусть группы $Hom(A,C_1),\dots,Hom(A,C_m)$ вполне идемпотентны справа. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов

$$f_1 \in Hom(B,C_1),\dots,f_m \in Hom(B,C_m)$$

и каждого гомоморфизма $s \in Hom(A,B)$ существует такой гомоморфизм $h \in H_r(s)$, что для каждого $1 \le i \le m$ имеет место равенство $f_i s = f_i sh$.

2). Пусть группы $Hom(C_1,A),\dots,Hom(C_m,A)$ вполне идемпотентны слева. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов

$$f_1 \in Hom(B,C_1),\dots,f_m \in Hom(B,C_m)$$

и каждого гомоморфизма $s \in Hom(B,A)$ существует такой гомоморфизм $h \in H_l(s)$, что для каждого $1 \le i \le m$ имеет место равенство $sf_i = hsf_i$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения будем проводить с помощью индукции по m. Докажем наше утверждение при $m = 1$. Так как группа $Hom(A,C_1)$ вполне идемпотентна справа, то $f_1 s \in f_1 sH_r(f_1 s) \subset f_1 sH_r(s)$. Предположим, что наше утверждение верно для $m = k$. Пусть $Hom(A,C_1),\dots,Hom(A,C_{k+1})$ вполне идемпотентны справа и $f_1 \in Hom(B,C_1)$,..., $f_{k+1} \in Hom(B,C_{k+1})$, $s \in Hom(A,B)$. По предположению индукции найдётся такой гомоморфизм $h \in H_r(s)$, что для каждого $1 \le i \le k$ имеет место равенство $f_i s = f_i sh$. Так как группа $Hom(A,C_{k+1})$ вполне идемпотентна справа, то для некоторого гомоморфизма $h' \in H_r(f_{k+1}s - f_{k+1}sh) \subset H_r(s)$ имеет место равенство $(f_{k+1}s - f_{k+1}sh) = (f_{k+1}s - f_{k+1}sh)h$. Тогда для каждого $1 \le i \le k$ имеем $f_i s(h + h' - hh') = f_i sh + f_i s(1_A - h)h' = f_i s$ и $f_{k+1}s(h + h' - hh') = f_{k+1}s$.

Очевидно, что $h + h' - hh' \in H_r(s)$. Доказательство второго утверждения двойственно приведенному.

Лемма 4.3. Пусть A и B – модули над некоторым кольцом и пусть $B = B_1 \oplus B_2$. Тогда:

1). Если группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна справа, то $Hom(A, B_1)$ вполне идемпотентна справа.

2). Если группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна слева, то $Hom(A, B_1)$ вполне идемпотентна слева.

3). Если группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна, то $Hom(A, B_1)$ вполне идемпотентна слева.

Доказательство. Пусть $f \in Hom(A, B_1)$, i — вложение модуля B_1 в модуль B и π — проекция модуля B на модуль B_1 относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$.

1). Ввиду вполне идемпотентности справа $Hom(A, B)$ имеем равенство $if = if g$, где $g \in H_r(if) \subset H_r(f)$. Из последнего равенства следует, что $f = fg$.

2). Ввиду вполне идемпотентности слева $Hom(A, B)$ имеем равенство $gif = if$, где $g \in H_l(if)$. Из последнего равенства следует, что $\pi gif = f$ и $\pi gi \in H_l(f)$.

3). Поскольку группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна, имеем равенство

$$if = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{h_k} if g_k$$

где $g_k \in H_r(if)$, а $h_k \in Hom(B, B)$ для каждого k. Тогда

$$f = \sum_{i=1}^{m} \pi h_k i f g_k \in Hom(B_1, B_1) f H_r(f).$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 4.4. Пусть A и B – модули над некоторым кольцом и $A = A_1 \oplus A_2$.

1). Если группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна справа, то $Hom(A_1, B)$ вполне идемпотентна справа.

2). Если группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна слева, то $Hom(A_1, B)$ вполне идемпотентна слева.

3). Если группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна, то $Hom(A_1, B)$ вполне идемпотентна слева.

Лемма 4.5. Пусть A и B – модули над некоторым кольцом и пусть

$B = B_1 \oplus B_2$.

1). Если группы $Hom(A, B_1)$ и $Hom(A, B_2)$ вполне идемпотентны справа, то $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна справа.

2). Если группы $Hom(A, B_1)$ и $Hom(A, B_2)$ вполне идемпотентны слева, то $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна слева.

3). Если группы $Hom(A, B_1)$ и $Hom(A, B_2)$ вполне идемпотентны, то $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна слева.

Доказательство. Пусть $f \in Hom(A, B)$, π_1 и π_2 — проекции модуля B на первое и соответственно на второе прямое слагаемое относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$, i_1 и i_2 — вложения модуля B_1 и соответственно модуля B_2 в модуль B.

1). Из утверждения 1 леммы 4.4 следует, что существует гомоморфизм $h \in H_r(f)$, для которого имеют место равенства $\pi_1 f = \pi_1 f h$, $\pi_2 f = \pi_2 f h$. Тогда $f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = i_1\,\pi_1 f h + i_2\pi_2 f h = f h$.

2). В силу вполне идемпотентности слева $Hom(A, B_1)$ и $Hom(A, B_2)$ имеем, что $\pi_1 f = h_1\pi_1 f$ и $\pi_2 f = h_2\pi_2 f$, где $h_1 \in H_l(\pi_1 f)$ и $h_2 \in H_l(\pi_2 f)$. Тогда

$$f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = i_1 h_1\pi_1 f + i_2 h_2\pi_2 f$$

и, поскольку $i_1 h_1\pi_1$, $i_2 h_2\pi_2 \in H_l(f)$, то $f \in H_l(f) f$.

3). Из вполне идемпотентности $Hom(A, B_1)$ и $Hom(A, B_2)$ следует, что $\pi_1 f = \sum_{k=1}^{m} g_k\pi_1 f h_k$, $\pi_2 f \sum_{k=1}^{n} s_k\pi_2 f\, t_k$, где $g_k \in Hom(B_1, B_1)$, $h_k \in H_r(\pi_1 f)$ для каждого $1 \le k \le m$ и $s_k \in Hom(B_2, B_2)$, $t_k \in H_r(\pi_2 f)$ для каждого $1 \le k \le n$. Тогда

$$f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = \sum_{k=1}^{m} i_1 g_k\pi_1 f h_k + \sum_{k=1}^{n} i_2 s_k\pi_2 f\, t_k.$$

Так как $i_1 g_k\pi_1 f h_k$, $i_2 s_k\pi_2 f t_k \in Hom(B, B) f Hr(f)$ для каждого k, то $f \in Hom(B, B) f Hr(f)$.

Доказательство следующей леммы двойственно доказательству предыдущей леммы.

Лемма 4.6. Пусть A и B – модули над некоторым кольцом и пусть $A = A_1 \oplus A_2$. Тогда :

1). Если группа $Hom(A_1, B)$ и $Hom(A_2, B)$ вполне идемпотентны справа, то группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна справа;

2). Если группа $Hom(A_1, B)$ и $Hom(A_2, B)$ вполне идемпотентны слева, то группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна слева;

3). Если группа $Hom(A_1, B)$ и $Hom(A_2, B)$ вполне идемпотентны, то группа $Hom(A, B)$ вполне идемпотентна слева;

Теорема 4.1. Пусть A и B – модули над некоторым кольцом и пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$. Тогда следующие условия равносильны:

1). Группа $Hom(A,B)$ вполне идемпотентна (вполне идемпотентна справа, вполне идемпотентна слева);

2). Для каждого $1 \leq i \leq n$ и для каждого $1 \leq j \leq m$ группа $Hom(A_i, B_j)$ вполне идемпотентна (соответственно вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентна слева).

Доказательство. Импликация 1) ⇒ 2) следует из лемм 4.3 и 4.4. Импликация 2) ⇒ 1) следует из лемм 4.5 и 4.6. Для произвольных правых R −модулей через $\Psi_{A,B}$ будем обозначать естественный $Hom(A,A) - Hom(A,A) -$ бимодульный гомоморфизм из

$$Hom(B,A) \otimes Hom(B,B)\, Hom(A,B)$$

в группу $Hom(A,A)$, действующий по правилу

$$\Psi_{A,B}(f \otimes g) = fg.$$

Модуль B назовём конечно порождённым (копорождённым) модулем A, если существует эпиморфизм $\varphi: \bigoplus_{k=1}^{m} A_k \to B$ (соответственно мономорфизм $\varphi: B \to \bigoplus_{k=1}^{m} A_k$, где $A = A_k$ для каждого $1 \leq k \leq m$.

Теорема 4.2. Пусть группа $Hom(A,B)$ вполне идемпотентна справа. Тогда :

1). Если гомоморфизм $\Psi_{B,A}$ является эпиморфизмом, то группа $Hom(B,B)$ вполне идемпотентно справа;

2). Если модуль B квазиинъективен и модуль A конечно копорождается модулем B, то группа $Hom(A,A)$ вполне идемпотентна справа.

Доказательство. Доказательство данного утверждения двойственно доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 4.3. Пусть группа $Hom(A,B)$ вполне идемпотентна. Тогда:

1). Если гомоморфизм $\Psi_{A,B}$ является эпиморфизмом, то группа $Hom(A,A)$ вполне идемпотентна.

2).Если гомоморфизм $\Psi_{B,A}$ является эпиморфизмом, то группа $Hom(B,B)$ вполне идемпотентна.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству первого пункта теоремы 4.1.

Пример 4.1. Если обе группы A и B элементарные или делимые без кручения, то группа гомоморфизмов $Hom(A,B)$ регулярна.

§5. Регулярные гомоморфизмы

Пусть R-кольцо с $1 \in R$ и пусть $Mod\text{-}R$ категория всех унитарных правых -модулей. Для произвольных $A, M \in Mod\text{-}R$, положим

$$H: = Hom_R(A,M), \qquad S: = End(M_R), \qquad T: = End(A_R).$$

Тогда H является S-T-бимодулем.

Определение 5.1. Пусть $f \in Hom_R(A,M)$. Тогда f называют регулярным, если существует $g \in Hom_R(M,A)$ такой, что

$$fgf = f. \tag{1}$$

Тогда g называют квазиинверсией f (или r-инверсией f). Подмножество X из $Hom_R(A,M)$ называется регулярным, если каждый элемент из X регулярный.

Определение регулярного гомоморфизма, используемого здесь, включает классические случаи регулярных колец и модулей. Действительно, изоморфизм

$$Hom_R\,(R,M)\ni f\ \to\ f\,(1)\ \in\ M \qquad (2)$$

приводит к понятию регулярного модуля M. Точно так же изоморфизм $Hom_R\,(R,R)\ \cong\ R$ приводит к обычному определению регулярности в кольце.

Обратимый элемент f является регулярным, так как $f\,f^{-1}$.

Из (1) следует

$$f\,(gfg)\,f\ =\ f,\qquad (gfg)\,f\,(gfg)\ =\ gfg.$$

Это показывает, что регулярность f является обобщением понятия обратимости и это мотивирует термина квазиинвертного или квазиобратимого элемента.

Если (1) умножен на g слева и также справа, то мы получаем два идемпотента

$$e:\ =\ fg\ =\ e^2\ \in\ S,\quad d:\ =\ gf\ =\ d^2\ \in\ T. \qquad (3)$$

Из (1) определения e и d следует, что

$$ef\ =\ fgf\ =\ f\ =\ fd. \qquad (4)$$

Если $f\ \neq\ 0$, то также $e\ \neq\ 0$ и $d\ \neq\ 0$. Так как e и d – идемпотенты, то $1-e$ и $1\ -\ d$ также является идемпотентами и

$$M\ =\ e\,(M)\oplus\ (1\ -\ e)(M),\ \ A\ =\ d\,(A)\ \oplus\ (1\ -\ d)\,(A). \qquad (5)$$

Следующая теорема характеризует обычные гомоморфизмы.

Теорема 5.1. Если $f\ \in\ Hom_R\,(A,M)$ регулярный и $fgf\ =\ f$, то

$$A = Ker(f) \oplus Im(gf),\ Im(gf) \cong Im(f) \cong Im(fg), \qquad (6)$$

и

$$M = Im(f) \oplus Ker(fg), Ker(fg) = Im(1 - fg). \qquad (7)$$

Кроме того, отображение

$$f_0: Im(gf)\ gf(a) \to fgf(a) = f(a) \in Im(f)$$

является изоморфизмом с обратным изоморфизмом

$$g_0: Im(f)f(a) \to gf(a) \in Im(gf).$$

Доказательство. Положим $e = fg$ и $d = gf$. У нас есть разложения (5). Сначала покажем, что $(1-d)(A) = Ker(f)$. Действительно, введем (4)

$$f(1 - d) = f - f\,d = 0,$$

Поэтому $$f(1 - d)(A) = 0.$$

Следовательно, $(1 - d)(A) \subseteq Ker(f)$. Теперь $Ker(f) = (1-d)(A)$. Тогда

$$(1 - d)(a) = a - gf(a) = a,$$

следовательно $Ker(f) \subseteq (1 - d)(A)$. Кроме того $Ker(f) = (1-d)(A)$. Дополнительно к нему слагаемое является $d(A) = gf(A)$ и $gf(A) \cong A/Ker(f) \cong Im(f)$.

Используя (4) снова, мы получаем цепь

$$Im(f) = f(A) = ef(A) \subseteq e(M) = fg(M) \subseteq f(A).$$

Следовательно $f(A) = e(M) = fg(M)$, является прямым слагаемым M. Дополнительное слагаемое является $(1 - e)(A) = Ker(e) = Ker(fg)$.

Поскольку $A = gf(A) \oplus Ker(f)$, мы видим, что f_0 - мономорфизм, и очевидно, что f_0 сюръективный.

Пусть $x \in Im(gf)$, $x = gf(a)$. Тогда $g_0f_0(x) = g_0f_0(gf(a)) = gfgf(a) = gf(a) = x$ то $g_0f_0 = 1$. Пусть $x \in Im(f)$, $x = f(a)$. Тогда $f_0g_0(x) = fgf(a) = f(a) = x$, таким образом, $f_0g_0 = 1$.

Далее приведем важнейшие свойства понятия регулярности.

Следствие 5.1. Пусть $f \in Hom_R(A, M)$. Тогда f является регулярным, тогда и только тогда, когда

$$Ker(f) \subseteq \oplus A \text{ и } Im(f) \subseteq \oplus M.$$

Доказательство. Предположим, что f регулярный. Применим Теорему 5.1. С другой стороны $A = Ker(f) \oplus A_0$ и $M = Im(f) \oplus M_0$, (8)

и пусть $\pi : M \to Im(f)$ является проекцией M на $Im(f)$, и $i: A_0 \to A$-вложение. Определим

$$f_0: A_0 \to f(a) \in Im(f).$$

Из (8) следует, что f_0 изоморфизм. Пусть $g := if_0^{-1}\pi$. Покажем что $fgf = f$.

Пусть $a \in A$. Значит из (8), имеем $a = u + a_0$, где u ∈ Ker (f) и $a_0 \in A_0$. Из этого следует, что $f(a) = f(a_0)$ и $fgf(a) = fgf(a_0) = ff_0^{-1}f(a_0) = f(a_0) = f(a)$, следовательно $fgf = f$.

Следующий результат непосредственно является просто переформулировкой (связанной с группой) условия регулярности кольца эндоморфизмов.

Предложение 5.1. Кольцо эндоморфизмов группы A регулярно тогда и только тогда, когда образы и ядра эндоморфизмов группы A служат прямыми слагаемыми для A.

Пример 5.1. Кольцо эндоморфизмов элементарной группы регулярно. Действительно, всякая подгруппа такой группы служит в ней прямым

слагаемым, поэтому регулярность кольца эндоморфизмов вытекает из предложения 5.1

Пример 5.2. Всякая делимая группа без кручения имеет регулярное кольцо эндоморфизмов. Это очевидно в силу предложения 5.1

Предложение 5.2 (Фукс и Рангасвами [1]). Если кольцо $\mathrm{E}(A)$ является регулярным, то $A = C \oplus D$, где

1) C — редуцированная группа, такая, что ее p-компоненты C_p— или конечные, или элементарные группы, $\mathrm{C/T}\,(\mathrm{C})$ — делимая группа и, кроме того,

$$\bigoplus C_p \subseteq C \subseteq \prod_p C_p$$

2) D — делимая группа без кручения.

Доказательство. Умножение на простое число p является эндоморфизмом группы A, который можно, не опасаясь недоразумений, обозначать просто через p. В силу регулярности $p = p\beta p$ для некоторого $m \geq 1$ и $\beta \in E(A)$. Таким образом, для всех выполнено $a \in A$ и $pa = p^2\beta a$, откуда вытекает, что $pA = p^2A$ есть p-делимая группа и $pa = 0$ для всех элементов a из p-компоненты A_p группы A. Следовательно, — A_p прямое слагаемое группы A, т. е. $A = A_p \oplus B$ для некоторого $B \subseteq A$. Отсюда $pA = pB$ и pB есть p-делимая группа. Деление на p в группе B определяется однозначно, поэтому $pB = B$. Таким образом, $A = A_p \oplus pA$, где $pA_p = 0$. Теперь ясно, что максимальная делимая подгруппа D группы A удовлетворяет условию 2). Группа $C/T\,(C)$ — эпиморфный образ каждой группы $A/A_p \cong pA$, где последняя группа p-делима. Следовательно, $C/T\,(C)$ — делимая группа. Остается показать, что если группа $C_p = A_p$ не элементарная, то она конечна. В силу ограниченности C_p — прямая сумма

циклических групп порядка не больше p. Если C_p — не конечная группа, то она имеет прямое слагаемое $G = G_0 \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_n \ldots$, где $G_0 \cong Z(p^n)$ и $G_n \cong Z(p^i)$, причем $i \leq m$ фиксировано для всех $n \geq 1$. Существует эндоморфизм α группы A, переводящий в нуль дополнительное к G прямое слагаемое группы A и такой, что $\alpha G_n = 0$, $\alpha G_1 = pG_n$, $\alpha G_n = G_{n-1}$ при $n > 2$. Очевидно, $pG_0 \subseteq Im\,\alpha^k$при всех $k \geq 1$, и $Im\,\alpha^k$ не может служить прямым слагаемым группы G, если $m \neq 1$. Из предложения 5.1 следует, что C_p обладает нужными свойствами. Наконец, из существования разложений $C = C_p \oplus pC$ вытекает, что для всех p существуют эпиморфизмы $C \to C_p$. Они индуцируют гомоморфизм $C \to \prod_p C_p$.Чтобы проверить, что $C \subseteq \prod C_p$, достаточно показать, что $K = \bigcap_p pC = 0$. Если q — простое число, отличное от p, то C_q — прямое слагаемое группы pC и $C = C_p \oplus C_q \oplus (pC \cap qC)$.Заметим, что каждый элемент $a \in pC \cap qC$ однозначно делится на p в подгруппе $pC \cap qC$, так что каждый элемент $a \in K = \bigcap_q (pC \cap q)$ делится на p в K. Это означает делимость группы K, откуда $K = 0$.

Предложение 5.3. а) Если A — нередуцированная группа, то кольцо $E(A)$ регулярно тогда и только тогда, когда A — прямая сумма делимой группы без кручения и элементарной группы.

б) Если A — периодическая группа, то кольцо $E(A)$ регулярна в том и только в том случае, когда A — элементарная группа.

в) Если A — редуцированная группа и $E(A)$ — регулярное кольцо, то $T(A)$ — элементарная группа, $A/T(A)$ — делимая группа и $\overset{\oplus}{}_p A_p \subseteq A \subseteq \prod_p A_p$.

Из первой части доказательства предложения 5.2 мы заключаем, что все p-компоненты A_p — элементарные группы, если кольцо $E(A)$ регулярно. Этот факт и пример 1 доказывают утверждение б). В силу 1) из предложения 5.2 это доказывает также утверждение в). Наконец, чтобы доказать утверждение а), запишем $A = C \oplus D$, как в предложении 5.2 , и заметим, что ядро

нетривиального гомоморфизма $C \to D$ не может быть прямым слагаемым. Теперь необходимость условия а) очевидна. Его достаточность была установлена при доказательстве предложения 5.2. **(Фукс том 2).**

§6. Вполне идемпотентные гомоморфизмы абелевых групп.

Рассмотрим примеры вполне идемпотентных гомоморфизмов абелевых групп.

Пример 6.1. Если обе группы A и B элементарные или делимые без кручения, то, как известно, группа $Hom(A, B)$ регулярна.

Замечание 6.1. Регулярность групп гомоморфизмов не сохраняется при изоморфизме. Пусть $\prod \subseteq \mathbb{P}$ и $|\prod| = \aleph_0$, а A_p для каждого $p \in \prod$ — ненулевая элементарная p-группа и $A = \prod_{p\in\prod} A_p$. Тогда из [**4.теоремы 43.1, 43.2**] вытекает, что группы $Hom(T(A), T(A))$ и $Hom(T(A), A)$ изоморфны. Но группа $Hom(T(A), A)$ не регулярна.

Следующий пример показывает, что аналог **теорема 4.1.** в случае, когда A является бесконечной прямой суммой ненулевых групп, несправедлив.

Пример 6.2. Пусть B_p — элементарная p-группа для каждого $p \in \prod$, где $\prod \subseteq \mathbb{P}$ и $|\prod| = \aleph_0$. Тогда если $B = \prod_{p\in\prod} B_p$, то группа $Hom(A, B)$, где $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ и все $A_i \cong B$, вполне идемпотентной (соответственно справа, слева) не является.

Доказательство. Занумеруем все простые числа p_i из множества $\prod$. В каждой группе A_i выделим p_i-компоненту и изоморфно отобразим ее на группу B_{pi}, дополнительное же к этой p_i-компоненте прямое слагаемое группы A_i переведем в 0. В результате получим $f : A \to B$ со свойством

$Im\, f = \oplus_{p\in\prod} B_p$. Поскольку множество $\prod$ бесконечное, $nf \neq 0$ для каждого натурального числа n. Далее, равенство $A^1 = 0$ влечет, что образ всякого гомоморфизма $g : B \to A$ является алгебраической компактной группой. Поэтому найдется такое натуральное n, что подгруппа $ng(B)$ содержится в сумме конечного числа групп A_i**[4, теорема 39.9].** Но тогда умножение на некоторое натуральное число аннулирует произведение fg гомоморфизмов f и g. Отсюда следует, что

$f \notin fH_r(f)$ и $f \notin H_l(f)f$.

Напомним, что группа $Hom(B,B)$ регулярна **[4, §112, упражнение 2].**

Пример 6.3. Пусть $A = \oplus_{p\in\prod} Z(p)$ и $B = \prod_{p\in\prod} Z(p)$, где $\prod \subseteq \mathbb{P}$ и $|\prod| = \aleph_0$. Тогда каждый вполне идемпотентный (соответственно справа, слева) гомоморфизм $f \in Hom(A,B)$ является регулярным.

Доказательство. Группу A можно рассматривать, как периодическую часть группы B. Всякий гомоморфизм из $Hom(A,B)$ продолжается до эндоморфизма группы B. Кольцо $E(B)$ коммутативно, поэтому если $f \in Hom(A,B)$, а $s \in E(A)$, то $fs = s'f$, где $s' \in E(B)$ такой, что $s' \mid A = s$. Значит, если $f \in fH_r(f)$, то

$$f = f(g_1fs_1 + \cdots + g_nfs_n) = f(g_1s'_1 + \cdots + g_ns'_n)f,$$

т. е. гомоморфизм f регулярен. Так же рассматриваются случаи $f \in H_l(f)f$ и $f \in Hom(B,B)fH_r(f)$. Заметим, что группа $Hom(A,B)$ регулярной не является, а $f \in Hom(A,B)$ регулярен в точности тогда, когда f аннулирует почти все p-компоненты группы A.

Следствие 6.1. Группа $Hom\,(\oplus_{p\in\prod} Z(p), \prod_{p\in\prod} Z(p))$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева) тогда и только тогда, когда $|\prod| < \aleph_0$.

Приведем примеры нерегулярных (у них образ не выделяется прямым слагаемым) вполне идемпотентных гомоморфизмов.

Пример 6.4. 1. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, где

$$A_1 \cong B_1 \cong \left(\oplus_{p\in\prod} Z(p)\right)^{(\aleph_0)},\ A_2 \cong \oplus_{p\in\prod} Z(p),\ B_2 \cong \prod_{p\in\prod} Z(p),$$

$\prod \subseteq \mathbb{P}$ и $|\prod| = \aleph_0$. Тогда $Hom(A,B)$ содержит нерегулярные гомоморфизмы f такие, что $f = fgfs$, где $g \in Hom(B,A)$, а $s \in E(A)$.

2. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, где

$$A_1 \cong B_1 \cong Z(p^2)^{(\aleph 0)}, B_2 \cong Z(p^2),\ A_2 \cong Z(p).$$

Тогда $Hom(A,B)$ содержит нерегулярные гомоморфизмы f такие, что $f = sfgf$, где $g \in Hom(B,A)$, а $s \in E(B)$.

Доказательство. 1. Пусть $(f \mid A_1) : A_1 \to B_1$ и $s : A \to A_1$ — некоторые изоморфизмы, а $(f \mid A_2) : A_2 \to B_2$ — вложение. Если $g \mid B_1 = (fs)^{-1}$ и $g(B_2) = 0$, то $f = fgfs$.

2. Пусть $(f \mid A_1) : A_1 \to B_1$ и $g : B \to A_1$ — некоторые изоморфизмы, а $(f \mid A_2) : A_2 \to B_2$ — вложение. Если $s \mid B_1 = (fg)^{-1}$ и $s(B_2) = 0$, то $f = sfgf$.

Предложение 6.1. 1. Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм такой, что $f = sfgf$, где $g \in Hom(B,A)$ и $s \in E(B)$, причем если $\varphi f = 0$ при $\varphi \in E(B)$, то $\varphi = 0$. Тогда $ker\ sf$ — прямое слагаемое в A.

2. Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм такой, что $f = fgfs$, где $s \in E(A)$ и $g \in Hom(B,A)$, причем если $f\varphi = 0$ при $\varphi \in E(A)$, то $\varphi = 0$. Тогда $Im\ fs$ — прямое слагаемое в B.

Доказательство. 1. Из $(1_B - sfg)f = 0$ получаем $1_B = sfg$. Далее

$(gsf)(gsf) = g(sfg)sf = gsf$. Так как g — мономорфизм, то $ker(gsf) = ker(sf)$. В частности, если f — эпиморфизм, то и sf — эпиморфизм, и в этом случае группа B изоморфна прямому слагаемому в A.

2. Из $f(1_A - gfs) = 0$ получаем $1_A = gfs$. Далее, $(fsg)(fsg) = fs(gfs)g = fsg$. Так как g — эпиморфизм, то $Im(fsg) = Im(fs)$. В частности, если f — мономорфизм, то и fs — мономорфизм, и в этом случае группа A изоморфна прямому слагаемому в B.

Напомним, что если B — ненулевая делимая группа, то $Hom(A,B) = 0$ тогда и только тогда, когда A — периодическая группа такая, что $A_p = 0$ при $B_p \neq 0$.

Предложение 6.2. Пусть группа $Hom(A,B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева) и $f \in Hom(A,B)$. Тогда

1) для всякого простого числа p группа $pf(A)$ является p-делимой;

2) если $D_p(A) \neq 0$, то $D_p(B) = 0$;

3) если $R_p(A), B_p \neq 0$, то $R_p(A)$ и B_p — элементарные группы и $A/A_p = p(A/A_p)$;

4) если $T(A) \subseteq ker\, f$, то группа $f(A)$ делима.

Доказательство. По условию

$$pf \in Hom(B,B)pfH_r(pf) = p^2\, Hom(B,B)fH_r(f),$$

соответственно

$$pf \in pfH_r(pf) = p^2 fHr(f), \qquad pf \in H_l(pf)pf = p^2 H_l(f)f.$$

Отсюда следует, что группа $pf(A)$ является p-делимой и $pf(A_p) = 0$ для каждого $f \in Hom(A,B)$. В частности, справедливо условие п. 2. Кроме того, подгруппы $R_p(A)$, B_p могут быть обе ненулевыми лишь в том случае,

когда подгруппа $R_p(A)$ элементарна. Элементарность $R_p(A)$ влечет равенство $A = A_p \oplus S$ для некоторой подгруппы $S \subseteq A$. Если $pS \neq S$, то существует гомоморфизм $0 \neq f : A \to B_p$ со свойством $A_p \subseteq ker\, f$. Тогда $fH_r(f) = 0$ и $H_l(f)f = 0$. Поэтому $f \notin fH_r(f)$ и $f \notin H_l(f)f$.

Покажем элементарность подгруппы B_p в п. 3. Если B_p не элементарна, то существует $f \in Hom(A, B)$ такой, что $f(D_p(A)) = 0$ и $0 \neq f(R_p(A)) \subseteq pB[p]$, где, как обычно, $pB[p] = (pB)[p]$. Тогда f не может принадлежать ни $fH_r(f)$, ни $H_l(f)f$. Действительно, элементарность группы $R_p(A)$ влечет $f(g(pB[p])) = 0$ для всякого $g \in Hom(B, A)$. Поэтому $fH_r(f) = 0$ и $H_l(f)f = 0$.

Докажем п. 4. Допустим, что $pf(A) \neq f(A)$ для некоторого простого числа p. Тогда $B_p \neq 0$, так как в противном случае из p-делимости подгруппы $pf(A)$ группы B следовала бы p-делимость подгруппы $f(A)$. Поэтому существует такой $0 \neq \varphi \in Hom(A, B)$, что $\varphi(A) \subseteq B_p$ и $T(A) \subseteq ker\, \varphi$. Несложно видеть, что $\varphi H_r(\varphi) = 0$ и $H_l(\varphi)\varphi = 0$. Отсюда $\varphi \notin \varphi H_r(\varphi)$ и $\varphi \notin H_l(\varphi)\varphi$; противоречие.

Заключение

В данной работе рассмотрены свойства группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ абелевых групп (модулей) A и B.

В §1 даются основные определения и свойства, необходимые для дальнейшего.

В §2 рассматривается группа гомоморфизмов и ее основные свойства, приводятся 3 структурных примера группы гомоморфизмов.

В §3 даются основные определения и свойства тензорного произведения.

В §4 изучается понятие вполне идемпотентных слева и справа гомоморфизмов, доказывается основная теорема 4.1 о вполне идемпотентности группы Hom(A,B).

В §5 рассматриваются понятие регулярности группы гомоморфизмов и приводятся примеры. Доказывается, что всякая регулярная группа гомоморфизмов вполне идемпотентна как слева, так и справа.

В §6 изучаются вполне идемпотентные гомоморфизмы абелевых групп. В частности, приведены примеры вполне идемпотентных гомоморфизмов абелевых групп, не являющиеся регулярными.

Список литературы

[1] Абызов.А.Н. Вполне идемпотентность Hom / Известия вузов. Математика 2011, №8, с. 3–8.

[2] Абызов.А.Н. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения /А.А. Туганбаев, А.Н.Абызов // Фундаментальная и прикладная математика 2010, № 7, с. 3—38.

[3] Friedrich Kasch. Regularity and Substructures of Hom/ Friedrich Kasch Adolf Mader // Birkhäuser Verlag AG 2009. −164c.

[4] Фукс. Л. Бесконечные абелевы группы Т. 1 / Л.Фукс. – М. :Мир , 1974. −335 с.

[5] Nicholson W. K., Zhou Y. Semiregular morphisms // Commun. Algebra. 2006. V. 34, N 1. P. 219–233.

[6] Kasch F. Regularity and substructures of Hom // Appl. Categ. Structures. 2008. V. 16, N 1–2.P. 159–166.

[7] Mader A. Regularity in endomorphism rings // Commun. Algebra. 2009. V. 37, N 8. P. 2823–2844.

[8] Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундам. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 793–812.

Реферат.

Выпускная квалификационная работа содержит 38 страниц, указатели обозначений, 8 источников литературы.

Ключевые слова: регулярный гомоморфизм, вполне идемпотентный гомоморфизм, группа гомоморфизмов.

Цели работы: рассмотреть понятие вполне идемпотентных групп гомоморфизмов, в частности показать, что регулярная группа гомоморфизмов является вполне идемпотентной. И привести примеры вполне идемпотентных гомоморфизмов абелевых групп, в частности не являющиеся регулярными.

Задачи: Рассмотрение групп гомоморфизмов, ее свойства и примеры. Изучение понятия вполне идемпотентных справа и слева гомоморфизмов. Разбор основной теоремы 4.1 о вполне идемпотентности группы $Hom(A, B)$. Показать, что всякая регулярная группа гомоморфизмов вполне идемпотентна как слева, так и справа. Привести примеры нерегулярных вполне идемпотентных гомоморфизмов абелевых групп.

Область применения:

Апробация работы: основные результаты работы были представлены на конференциях

1. Всероссийская Молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», 2018г., с 24 по 28 апреля, Томск.
2. Всероссийская Молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», 2020г., с 13 по 16 апреля, Томск.

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: molokova-1996@list.ru / **ID**: 8032370
Проверяющий: (molokova-1996@list.ru / **ID**: 8032370)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 10
Начало загрузки: 03.06.2020 12:24:46
Длительность загрузки: 00:00:08
Имя исходного файла: Диплом.pdf
Название документа: Диплом
Размер текста: 1 кБ
Символов в тексте: 48113
Слов в тексте: 7137
Число предложений: 362

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 03.06.2020 12:24:55
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
16,08%	0%	0%	83,92%