Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
____________ С.П. Гулько
подпись
«11» июня 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

по основной образовательной программе подготовки магистров
Направление подготовки 01.04.01 – Математика

Киреенко Светлана Григорьевна

Научный руководитель ВКР:
канд. физ.-мат. наук, доцент
____________ Я.С. Гриншпон
подпись
«10» июня 2020 г.

Автор работы
студент группы № 04803(М)
____________ С.Г. Киреенко
подпись

Томск 2020

Содержание

Введение

В методике обучения школьной математике традиционно выделяют несколько содержательно-методических линий: числовая, алгебраическая, геометрическая, функциональная, вероятностно-статистическая и т.д. Такое распределение, безусловно, оправдано с точки зрения полной и четкой классификации приобретаемых учащимися знаний и навыков, без которой невозможна организация логически выверенного системного курса математики.

Однако строгое разделение материала по основным линиям может препятствовать развитию гибкости и вариативности мышления. Действительно, если школьник уверен, что при решении уравнений нужно использовать только аппарат алгебраических преобразований, то тем самым он существенно ограничивает свои мыслительные усилия по выбору рационального метода решения.

Кроме того, далеко не всякое уравнение или неравенство можно решить с помощью стандартных приемов, предназначенных для вполне определенных типов уравнений (неравенств). Встречаются такие уравнения (неравенства), которые с помощью традиционных алгоритмов решить затруднительно. В таких случаях часто оказывается полезным использовать и так называемые нестандартные методы решения, которые порой существенно упрощают и сокращают решение. Одним из таких методов является «функциональный подход», основанный на применении свойств элементарных функций.

Наиболее ярко эффективность функционального метода проявляется при решении заданий с параметром, так как часто привычные алгебраические методы либо приводят к чрезвычайно громоздким преобразованиям, либо вообще не приводят к результату.

В работе исследуется применение при решении уравнений, неравенств и их систем области определения функции (для уравнений и неравенств вместо термина «область определения» принято употреблять термин «область допустимых значений») и таких ее свойств, как ограниченность, монотонность и четность.

Применение теоретических знаний о свойствах функций в самых порой неожиданных ситуациях позволяет, с одной стороны, более прочно овладеть материалом по теме «Функции», а с другой стороны, научиться переносить знания из одной тематической области в другую.

Довольно часто использование свойств функций позволяет качественно выполнять задания высокого уровня сложности ЕГЭ по математике, а также различных математических олимпиад и конкурсов, где встречаются нетрадиционные формулировки и предусматриваются нестандартные подходы к решению.

Литературы, в которой бы данный материал был систематизирован и сопровожден достаточным количеством примеров, практически нет, а в большинстве школьных учебников нет даже и упоминания о применении функциональных методов решения задач. Это подтверждает *актуальность* темы исследования.

Цель исследования — систематизация приемов использования свойств функций при решении уравнений и неравенств, формирование компетентностного мышления школьников через применение функциональных методов решения задач.

При выполнении работы были поставлены следующие *задачи*:

1. Изучить теоретический материал по теме «Функции и их свойства», а также возможность его применения для решения уравнений, неравенств и их систем.

2. Систематизировать функциональные методы решения уравнений и неравенств.

3. Научить школьников распознавать и решать задачи, в которых является целесообразным использование свойств функций.

4. Создать банк преимущественно авторских задач и классифицировать их по методам решения.

5. Подготовить методическое пособие по теме.

Объект исследования — методы решения уравнений, неравенств и их систем.

Предмет исследования — функциональный подход при решении уравнений, неравенств и их систем.

Новизна диссертации заключается в формулировке ряда утверждений, касающихся свойств функций и их применения, в составлении авторских заданий, демонстрирующих эффективность функционального метода, в систематизации материала.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, и заключения. Список литературы включает девять наименований.

ГЛАВА 1. Область определения функции (ОДЗ)

1.1. Теоретические сведения

Введем основные понятия, которые будут использованы при раскрытии темы.

Определение 1.1. *Функцией* называется такая зависимость между двумя множествами, при которой каждому элементу одного множества ставится в соответствие единственный элемент другого множества. Первое множество называется *областью определения функции*, а второе — *областью значений функции.*

Функцию обозначают $y = f(x)$, где x — это независимая переменная (аргумент функции), принимающая значения в области определения, y — это зависимая переменная (значение функции), принимающая значения в области значений, f — правило, ставящее в соответствие значениям переменной x значения переменной y. В этом случае область определения обозначают $D(y)$ или $D(f)$, а область значений — $E(y)$ или $E(f)$.

В данной работе рассматриваются только числовые функции, т.е. функции, области определения и значений которых состоят из действительных чисел.

В прикладных задачах область определения функции, как правило, считается заданной исходя из реального смысла рассматриваемой модели. В теоретических математических задачах под областью определения общепринято подразумевать множество всех чисел, при подстановке которых в формулу f получается выражение, имеющее смысл. Иногда в условии задачи оговариваются дополнительные ограничения, которые сужают область определения (например, указывается, что независимая переменная принимает только положительные или только целые значения).

Таким образом, если задана числовая функция $y = f(x)$, то ее областью определения считается множество значений, которые может принимать переменная x. Область значений функции образовывают те значения переменной y, которые она принимает при условии, что x пробегает всю область определения.

Пересечение областей определения функций, входящих в уравнение, неравенство или систему, называют *областью допустимых значений* переменной (ОДЗ) для данного уравнения, неравенства или системы соответственно.

Выпишем функции, имеющие ограничения на области определения (табл. 1.1). При этом будем подразумевать, что сами функции $f(x)$ и $g(x)$ существуют.

Таблица 1.1

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">Вид функции</th><th>Ограничения на переменную</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$</td><td>$g(x)\neq 0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">$y=\sqrt[2n]{f(x)},\ n\in\mathbb{N}$</td><td>$f(x)\geq 0$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">$y=\operatorname{tg} f(x)$</td><td>$f(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">$y=\operatorname{ctg} f(x)$</td><td>$f(x)\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">$y=\arcsin f(x)$
$y=\arccos f(x)$</td><td>$-1\leq f(x)\leq 1$</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">$y=\log_{g(x)} f(x)$</td><td>$\begin{cases} g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \\ f(x)>0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7</td><td rowspan="4">$y=x^{\alpha}$</td><td>$\alpha\in\mathbb{N}$</td><td>x — любое число</td></tr>
<tr><td>$\alpha\in\mathbb{Z}_{-}\cup\{0\}$</td><td>$x\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\alpha\notin\mathbb{Z},\ \alpha>0$</td><td>$x\geq 0$</td></tr>
<tr><td>$\alpha\notin\mathbb{Z},\ \alpha<0$</td><td>$x>0$</td></tr>
</table>

Также в работе будут встречаться числовые функции $z=f(x, y)$, зависящие от двух переменных. Для таких функций область определения — это множество допустимых значений переменных x и y. Данное множество можно изобразить на декартовой плоскости Oxy.

1.2. Применение ОДЗ при решении уравнений, неравенств и их систем

Иногда анализ условий, определяющих ОДЗ, позволяет существенно сократить количество рассматриваемых случаев и найти решения уравнения (или неравенства) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ, либо доказать, что решений нет.

Пример 1.1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x-3}-\sqrt{3x-x^2}=\sqrt{x-3}$ [3].

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2-2x-3\ge 0, \\ 3x-x^2\ge 0, \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty), \\ x\in[0;3], \\ x\in[3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

$x=3$ — единственное допустимое значение переменной. Проверим, является ли $x=3$ корнем уравнения:

$$\sqrt{3^2-2\cdot3-3}-\sqrt{3\cdot3-3^2}=\sqrt{3-3},$$

$$\sqrt{0}-\sqrt{0}=\sqrt{0} \text{ (верно).}$$

Значит, $x=3$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

Пример 1.2. Решите уравнение $\sqrt{3-x}=\log_5(2x-6)$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3-x\ge 0, \\ 2x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Так как не существует значений переменной, при которых все функции, входящие в данное уравнение, были бы определены, то и корней уравнение не имеет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 1.3. Решите уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}+x=4$.

Решение. ОДЗ: $x\ge 3$. Рассмотрим, какие значения принимает сумма функций в левой части уравнения на ОДЗ: $\sqrt{x+1}\ge 2$, $\sqrt{x-3}\ge 0$, $x\ge 3$.

Таким образом, левая часть уравнения принимает значения большие или равное 5. Следовательно, левая часть уравнения всегда больше правой, а значит, уравнение корней не имеет.

Ответ: $x \in \varnothing$.

<u>Пример 1.4</u>. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ -|\sin x| \ge 0, \\ \dfrac{x}{2} \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \sin x = 0, \\ x \ne \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя допустимые значения x в исходное уравнение, получаем, что его левая и правая части равны 0, а это означает, что все $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ являются его решениями.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Пример 1.5</u>. Решите неравенство $\log_5 x < \sqrt{1 - x^2}$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^2 \ge 0, \end{cases}$$

$x \in (0;\ 1]$ (рис. 1.1).

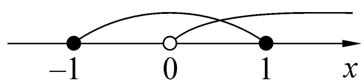


Рис. 1.1

При $x = 1$ получаем: $\log_5 1 = \sqrt{1-1}$, т.е. левая часть неравенства равна правой и неравенство не выполняется.

Во всех точках ОДЗ, кроме $x = 1$, верны неравенства

$$f(x) = \log_5 x < 0,\ \ f(x) = \sqrt{1 - x^2} > 0.$$

Значит, на интервале (0; 1) выполняется неравенство $\log_5 x < \sqrt{1 - x^2}$.

Ответ: $x \in (0;\ 1)$.

<u>Пример 1.6</u>. Решите неравенство $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 1} > (x-1)^2(x-7)$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3 - x \ge 0, \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;\ 3].$$

Рассмотрим, какие значения принимают функции в левой и правой частях неравенства:

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}>0,$$

$$(x-7)<0 \Rightarrow (x-1)^2(x-7)\le 0.$$

Значит, на ОДЗ левая часть уравнения всегда больше правой.

Ответ: $x \in [1; 3]$.

Пример 1.7. Решите неравенство $\sqrt[4]{x+36}+\sqrt{6-x}<\sqrt{6}$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+36\ge 0, \\ 6-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x\in[-36; 6].$$

Разобьем ОДЗ на два промежутка: $x \in [-36; 0]$ и $x \in (0; 6]$.

Для $-36 \le x \le 0$ получим

$$\sqrt[4]{x+36}\ge 0,\ \ \sqrt{6-x}\ge\sqrt{6}.$$

Тогда

$$\sqrt[4]{x+36}+\sqrt{6-x}\ge\sqrt{6}$$

и исходное неравенство на этом промежутке не выполняется.

Если $0 < x \le 6$, то

$$\sqrt[4]{x+36}\ge\sqrt{6},\ \ \sqrt{6-x}\ge 0.$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{x+36}+\sqrt{6-x}\ge\sqrt{6},$$

а значит, и на втором промежутке неравенство не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Для уравнений и неравенств с двумя переменными каких-то общих традиционных приемов решения не существует. Чаще всего при решении используются методы, основанные на разложении выражений на множители, выделении полного квадрата, применении области определения, ограниченности функций, входящих в уравнение или неравенство, и другие.

<u>Пример 1.8</u>. Решите неравенство $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1}\le 1$ [1].

Решение. ОДЗ: $x \ge y^2+1$. Из полученного условия следует, что $x \ge 1$. Тогда левая часть неравенства больше или равна 1. Следовательно, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x=1, \\ y^2=0, \\ \sqrt{x-y^2-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Ответ: (1; 0).

<u>Пример 1.9</u>. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} 10x^3+47x^2+52x+12=0, \\ \log_{8+5x}\left(y+\dfrac{6}{x}+6\right)=\dfrac{y+10(x+1)}{y-1}+\sqrt{\dfrac{36}{x}-5x(7+5x)+24}\,\lg(y+1). \end{cases}$$

Решение

1. Из уравнения $10x^3+47x^2+52x+12=0$ видно, что $x \ge 0$ не подходит, следовательно, $x < 0$.

2. Из второго уравнения системы следует, что в область допустимых значений переменной x могут входить только значения, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{36}{x}-5x(7+5x)+24\ge 0,$$

$$\frac{36-35x^2-25x^3+24x}{x}\ge 0,$$

т.к. $x < 0$, то

$$25x^3+35x^2-24x-36\ge 0,$$

$$(x-1)(25x^2+60x+36)\ge 0,$$

$$(x-1)(5x+6)^2\ge 0.$$

Поскольку $x-1<0$, то

$$(5x+6)^2\le 0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{6}{5}.$$

3. Подставим найденное значение в первое уравнение системы:

$$-\frac{10\cdot 6^3}{5^3}+\frac{47\cdot 6^2}{5^2}-\frac{52\cdot 6}{5}+12=0 \text{ (верно).}$$

4. Проверим $x=-\frac{6}{5}$ во втором уравнении:

$$\log_{8-5\cdot\frac{6}{5}}\left(y-\frac{6\cdot 5}{6}+6\right)=\frac{y+10\left(-\frac{6}{5}+1\right)}{y-1}+$$

$$+\sqrt{-\frac{36\cdot 5}{6}+5\cdot\frac{6}{5}\left(7-5\cdot\frac{6}{5}\right)+24}\,\lg(y+1),$$

$$\log_2(y+1)=\frac{y-2}{y-1}+\sqrt{-30+6+24}\,\lg(y+1),$$

$$\log_2(y+1)=\frac{y-2}{y-1}. \qquad (1.1)$$

Заметим, что при $y<1$

$$\log_2(y+1)<1,\ \ 1-\frac{1}{y-1}>1,$$

при $y>1$

$$\log_2(y+1)>1,\ \ 1-\frac{1}{y-1}<1.$$

Значит, уравнение (1.1) не имеет решений. Следовательно, система уравнений также не имеет решений.

Проиллюстрируем решение, построив графики функций

$$f(y)=\log_2(y+1) \text{ и } g(y)=\frac{y-2}{y-1}$$

в одной системе координат (рис. 1.2).

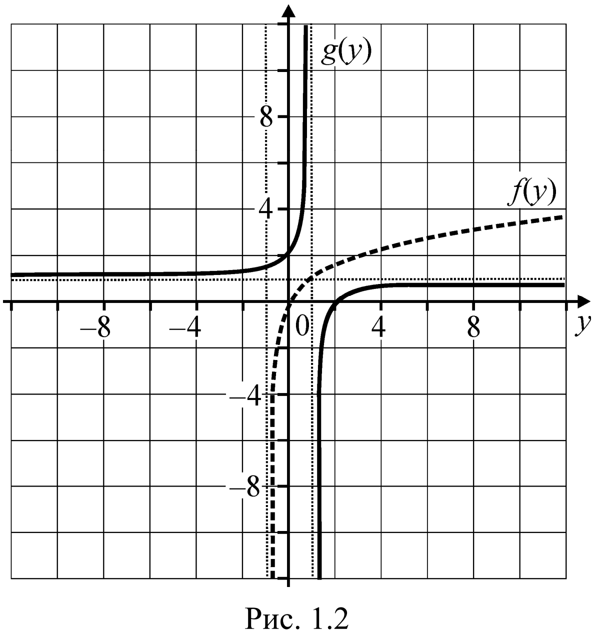


Рис. 1.2

Ответ: система не имеет решений.

1.3. Применение области определения при решении заданий с параметром

Рассмотрим уравнения и неравенства с параметром, при решении которых анализ условий, входящих в ОДЗ, играет ключевую роль.

Пример 1.10. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x+1} = a - \sqrt{4-x^2}$$

имеет хотя бы один целый корень?

Решение. Область допустимых значений для переменной x — это отрезок $[-1; 2]$. Значит, целые корни уравнения могут находиться только среди чисел -1; 0; 1; 2. Подставив каждое из этих чисел в исходное уравнение, получим все искомые значения параметра a.

Ответ: $a=\sqrt{3},\ a=3,\ a=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

Пример 1.11. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{4-x^2} + a\sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{x^2+x-2} = a^2 - ax - 1$$

имеет единственное решение?

Решение. Преобразуем подкоренные выражения:

$$\sqrt{(2-x)(2+x)} + a\sqrt{(x+1)(x-2)} + \sqrt{(x+2)(x-1)} = a^2 - ax - 1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} (2-x)(2+x) \ge 0, \\ (x+1)(x-2) \ge 0, \\ (x+2)(x-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 2], \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in \{-2; 2\}.$$

Подставим в уравнение полученные допустимые значения переменной x и найдем a.

1. Пусть $x = 2$, тогда

$$2 = a^2 - 2a - 1,$$
$$a^2 - 2a - 3 = 0,$$
$$a = -1 \text{ или } a = 3.$$

Проверим, сколько корней имеет исходное уравнение при каждом из найденных значений параметра.

а) При $a = -1$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{(2-x)(2+x)} - \sqrt{(x+1)(x-2)} + \sqrt{(x+2)(x-1)} = x.$$

Мы знаем, что при $a = -1$ $x = 2$ является корнем уравнения. Проверим, не является ли корнем еще одно допустимое значение переменной $x = -2$:

$$0 - 2 + 0 = -2 \text{ (верно)},$$

следовательно, при $a = -1$ уравнение имеет два корня.

б) При $a = 3$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{(2-x)(2+x)} + 3\sqrt{(x+1)(x-2)} + \sqrt{(x+2)(x-1)} = 8 - 3x.$$

$x = 2$ — очевидный корень.

$x = -2 \Rightarrow 0 + 6 + 0 = 8 + 6$ (неверно),

следовательно, при $a = 3$ исходное уравнение имеет единственное решение.

2. Пусть $x = -2$, тогда

$$2a = a^2 + 2a - 1,$$
$$a^2 = 1,$$
$$a = \pm 1.$$

Случай, когда $a = -1$, уже был рассмотрен в первом пункте решения.

Подставим $a = 1$ в исходное уравнение:

$$\sqrt{(2-x)(2+x)} + \sqrt{(x+1)(x-2)} + \sqrt{(x+2)(x-1)} = -x.$$

$x = -2$ —корень, проверим $x = 2$:

$0 + 0 + 2 = -2$ (неверно),

значит, при $a = 1$ уравнение имеет только один корень.

Ответ: $a = 3$, $a = 1$.

<u>Пример 1.12</u>. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{\ln^2(a^2 + 2x - x^2)}{1 - \operatorname{tg}(\pi x/4)} \geq 0$$

имеет ровно три целых решения?

Решение. Найдем область допустимых значений для переменной:

$$\begin{cases} a^2+2x-x^2>0, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\neq 1, \\ \dfrac{\pi x}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1-(a^2+1)<0, \\ \dfrac{\pi x}{4}\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x\neq 2+4n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{a^2+1}<x<1+\sqrt{a^2+1}, \\ x\neq 1+4n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x\neq 2+4n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Целые числа, удовлетворяющие двум последним условиям в ОДЗ, имеют вид $x = 4n$ и $x = 3 + 4n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Убедимся, что они обращают знаменатель левой части неравенства в положительное число.

При $x = 4n$, $n\in\mathbb{Z}$ имеем

$$1-\operatorname{tg}\frac{4\pi n}{4}=1-\operatorname{tg}\pi n=1>0.$$

При $x = 3 + 4n$, $n\in\mathbb{Z}$ имеем

$$1-\operatorname{tg}\frac{(3+4n)\pi}{4}=1-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=2>0.$$

Числитель левой части неравенства при всех допустимых значениях x неотрицателен. Следовательно, заявленные три целых решения в условии должны принадлежать интервалу $(1-\sqrt{a^2+1};1+\sqrt{a^2+1})$, заметим, симметричному относительно 1, и не совпадать с числами вида $1 + 4n$ и $2 + 4n$, где $n\in\mathbb{Z}$ (рис. 1.3).

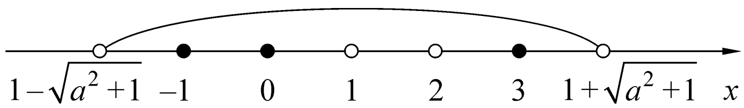


Рис. 1.3

Такими решениями могут быть только –1; 0; 3. Выполнение этого требования равносильно следующему условию:

$$-2\le 1-\sqrt{a^2+1}<-1,\ 2<\sqrt{a^2+1}\le 3,\ \sqrt{3}<|a|\le 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $a\in[-2\sqrt{2};-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};2\sqrt{2}]$.

ГЛАВА 2. Ограниченность функции

2.1. Теоретические сведения

Определение 2.1. Числовое множество X называют *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*), если существует такое число M, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq M$ ($x \geq M$). Множество, ограниченное одновременно и сверху и снизу, называют *ограниченным*.

Определение 2.2. Функцию $f(x)$ называют ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если ее область значений $E(f)$ ограничена (ограничена сверху, ограничена снизу).

Метод решения уравнений и неравенств, заключающийся в исследовании свойства ограниченности функции сверху или снизу на некотором множестве, называют *методом оценки*. Этот метод часто играет ключевую роль в тех заданиях, которые затруднительно или вообще невозможно решить с помощью стандартных алгебраических преобразований.

Метод оценки основывается на следующих утверждениях.

Утверждение 2.1. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A — некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют [1].

Утверждение 2.2. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A — некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leq g(x)$ равносильны системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A \end{cases}$ [1].

Утверждение 2.3. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \geq B$ ($f(x) \leq A$ и $g(x) \leq B$), где A и B — некоторые числа, то на множестве X уравнение $f(x) + g(x) = A + B$ и неравенство

$f(x) + g(x) \le A + B$ $(f(x) + g(x) \ge A + B)$ равносильны системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B. \end{cases}$

<u>Утверждение 2.4</u>. Для того чтобы неравенство $f(x) \ge g(x)$ на некотором промежутке X имело хотя бы одно решение, необходимо (но не достаточно), чтобы выполнялось условие $\max\limits_{x \in X} f(x) \ge \min\limits_{x \in X} g(x)$.

<u>Утверждение 2.5</u>. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \ge A$ и $g(x) \ge B$ $(0 < f(x) \le A$ и $0 < g(x) \le B)$, где A и B — положительные числа, то на множестве X уравнение $f(x) \cdot g(x) = AB$ и неравенство $f(x) \cdot g(x) \le AB$ $(f(x) \cdot g(x) \ge AB)$ равносильны системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B. \end{cases}$

<u>Утверждение 2.6</u>. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $|f(x)| \ge A$ и $|g(x)| \ge B$ $(|f(x)| \le A$ и $|g(x)| \le B)$, где A и B — положительные числа, то на множестве X уравнение $f(x) \cdot g(x) = AB$ равносильно совокупности систем уравнений $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -A, \\ g(x) = -B. \end{cases} \end{array} \right.$

<u>Утверждение 2.7</u>. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливо неравенство $f(x) \ge f(x_0)$, где $f(x)$ — непрерывная и неограниченная сверху на X функция и $x_0 \in X$, то для того, чтобы уравнение $f(x) = A$ и неравенство $f(x) \le A$, где A — некоторое число, имели на X хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) \le A$.

<u>Утверждение 2.8</u>. Пусть для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \ge f(x_0)$ и $g(x) \le g(x_0)$, где $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X, $f(x)$ не ограничена сверху, а $g(x)$ не ограничена снизу на X, и $x_0 \in X$. Тогда для того, чтобы уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \le g(x)$ имели на X хо-

тя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) \le g(x_0)$.

Утверждение 2.9. Пусть для всех x из некоторого промежутка X справедливо неравенство $f(x) \ge f(x_0)$ и при этом уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное на промежутке X решение $x = x_0$. Пусть также функция $f(x)$ непрерывна и не ограничена сверху на X. Тогда для того, чтобы уравнение $f(x) = A$ и неравенство $f(x) \le A$, где A — некоторое число, имели на X более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) < A$.

Утверждение 2.10. Пусть для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \ge f(x_0)$ и $g(x) \le g(x_0)$ и при этом каждое из уравнений $f(x) = f(x_0)$ и $g(x) = g(x_0)$ имеет единственное на промежутке X решение $x = x_0$. Пусть также функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X и $f(x)$ не ограничена сверху, а $g(x)$ не ограничена снизу на X. Тогда для того, чтобы уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \le g(x)$ имели на X более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) < g(x_0)$.

Также при решении задач методом оценки могут оказаться полезными следующие неравенства [7]:

1) $a^{2n} \ge 0$ при любом действительном a и натуральном n;

2) $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ (неравенство Коши) для неотрицательных a и b, причем знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$;

3) $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$ при $a > 0$, причем знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда $a = 1$;

$a + \dfrac{1}{a} \le -2$ при $a < 0$, причем знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда $a = -1$;

4) $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a} \ge c - \dfrac{b^2}{4a}$ при $a > 0$;

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a} \le c - \dfrac{b^2}{4a}$ при $a < 0$;

5) $|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1$ при любых действительных x;

6) $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ при любых действительных a, b, x;

7) $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \arccos x \le \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \mathrm{acrtg} x < \frac{\pi}{2},\ 0 < \mathrm{acrtg} x < \pi$ при любом действительном x, при котором выражение имеет смысл;

8) $a^x > 0$ при положительном a и любом действительном x.

2.2. Применение ограниченности при решении уравнений, неравенств и их систем

Решение примеров данного параграфа будет основываться на использовании свойств ограниченных функций, прежде всего на оценке множества значений функций. Это задачи, которые обычно невозможно свести к простейшим уравнениям (неравенствам) с помощью алгебраических преобразований, замены переменной или разложения на множители. Такие уравнения (неравенства) могут содержать функции различных наименований, причем, возможно, даже разных аргументов. Поэтому традиционные методы могут быть не применимы.

Пример 2.1. Решите уравнение

$$\sqrt{5x^2-10x+9}+\sqrt{2x^2-4x+3}=2+2x-x^2.$$

Решение

$$\sqrt{5(x-1)^2+4}+\sqrt{2(x-1)^2+1}=-(x-1)^2+3.$$

Рассмотрим, какие значения принимает сумма функций в левой части уравнения:

$$\sqrt{5(x-1)^2+4} \ge 2,$$
$$\sqrt{2(x-1)^2+1} \ge 1.$$

Следовательно, значение функции в левой части всегда больше или равно 3. Но $3-(x-1)^2 \le 3$, следовательно, уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{5(x-1)^2+4}=2, \\ \sqrt{2(x-1)^2+1}=1, \\ -(x-1)^2+3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 1=1 \text{ (верно)}, \\ 3=3 \text{ (верно)} \end{cases} \Leftrightarrow \; x=1.$$

Ответ: $x = 1$.

<u>Пример 2.2</u>. Решите уравнение $\log_{1/3}(1+(x^2-3x+2)^2)=\sqrt{x^2-6x+8}.$

Решение. Рассмотрим, какие значения принимают функции в левой и правой частях уравнения:

$$1+(x^2-3x+2)^2 \ge 1 \;\Rightarrow\; \log_{1/3}(1+(x^2-3x+2)^2) \le 0,$$
$$\sqrt{x^2-6x+8} \ge 0.$$

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x^2-6x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \; x=2.$$

Ответ: $x = 2$.

<u>Пример 2.3</u>. Решите уравнение $\log_2(2x^2-4x+3)+\log_3(1+\sin^2 \pi x)=0.$

Решение. Рассмотрим, какие значения принимает сумма функций в левой части уравнения:

$$2x^2-4x+3 \ge 1 \;\Rightarrow\; \log_2(2x^2-4x+3) \ge 0,$$
$$1+\sin^2 \pi x \ge 1 \;\Rightarrow\; \log_3(1+\sin^2 \pi x) \ge 0.$$

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(2x^2-4x+3)=0, \\ \log_3(1+\sin^2 \pi x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x+3=1, \\ 1+\sin^2 \pi x=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2+1=1, \\ \sin^2 \pi x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ \sin^2 \pi=0 \text{ (верно)} \end{cases} \Leftrightarrow \; x=1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 2.4. Решите уравнение $\log_{\pi}\cos^2 x = x^4$.

Решение. ОДЗ: $\cos^2 x > 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,$ где $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим, какие значения принимают функции в левой и правой частях уравнения:

$$\log_{\pi}\cos^2 x \leq 0, \text{ т.к. } \cos^2 x \leq 1 \text{ и } \pi > 1,$$
$$x^4 \geq 0.$$

Из областей значений функций видно, что уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases}\log_{\pi}\cos^2 x = 0,\\ x^4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x = 1,\\ x = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 2.5. Решите уравнение $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) = 1$ [5].

Решение. ОДЗ: $4x - x^2 - 2 > 0$.

Оценим множители, находящиеся в левой части уравнения:

1) $0 < 2^{-|x-2|} \leq 1$,

2) $4x - x^2 - 2 = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -(x-2)^2 + 2 \leq 2$,

3) $\log_2(4x - x^2 - 2) \leq \log_2 2 = 1$.

Из 1) и 3) следует, что исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}2^{-|x-2|} = 1,\\ \log_2(4x - x^2 - 2) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{-|x-2|} = 2^0,\\ \log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2 2\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x - 2 = 0,\\ 4x - x^2 - 2 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2,\\ 8 - 4 - 2 = 2 \text{ (верно)}\end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 2.6. Решите уравнение $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sin 2x + (-\sin 6x) = -2.$$

Поскольку $\sin 2x \geq -1$ и $-\sin 6x \geq -1$, исходное уравнение равносильно системе

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1, \\ -\sin 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3}, \end{cases} n, k \in \mathbb{Z}.$$

Найдем пересечение серий решений уравнений на единичной окружности (рис. 2.1). Получим $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

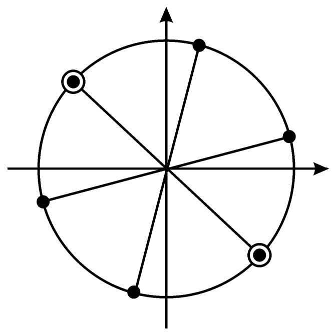


Рис. 2.1

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2.7. Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 3x = 1$.

Решение. Каждый множитель в левой части уравнения $\cos x \cdot \cos 3x = 1$ по модулю не превосходит 1. Поэтому произведение таких множителей может равняться 1 тогда и только тогда, когда выполняется следующая совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 3x = -1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2.8. Решите уравнение

$$\left(\cos\frac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(2 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0.$$

Решение. Раскроем скобки и применим тригонометрические формулы. Тогда уравнение преобразуется к виду $\sin\frac{5x}{4}+2\cos x=3.$

Оценивая каждое слагаемое в левой части уравнения, делаем вывод, что исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{5x}{4}=1,\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{8\pi n}{5},\\ x=2\pi k,\end{cases} n,k\in\mathbb{Z}.$$

Найдем пересечение серий решений уравнений:

$$\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5}=2\pi k,$$

$$4n=5k-1,\ n,k\in\mathbb{Z}.$$

Равенство выполняется, если $k=1+4l, l\in\mathbb{Z}.$ Тогда $x=2\pi+8\pi l, l\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $x=2\pi+8\pi l, l\in\mathbb{Z}.$

Пример 2.9. Решите уравнение $\sin^6 x+\cos^3 x=1$.

Решение. Оценим левую часть уравнения: $\sin^6 x\le\sin^2 x,\ \cos^3 x\le\cos^2 x.$

Тогда $\sin^6 x+\cos^3 x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$. С учетом оценки получаем

$$\sin^6 x+\cos^3 x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^6 x=\sin^2 x,\\ \cos^3 x=\cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\pm1,\\ \sin x=0,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=1,\end{array}\right.\end{cases} \overset{\text{рис. 2.2}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=2\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. n\in\mathbb{Z}.$$

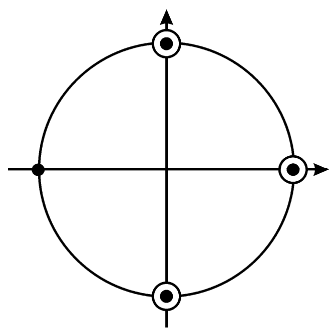


Рис. 2.2

Ответ: $x=2\pi n, x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

<u>Пример 2.10</u>. Решите уравнение $1+\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x=\sin^2 5x$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x+\cos^2 5x=0$$

и рассмотрим его как квадратное относительно $\cos x$.

$$D_1=\cos^4 5x-\cos^2 5x=\cos^2 5x(\cos^2 5x-1)\le 0.$$

Уравнение может иметь корни, только если $D_1=0$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \cos 5x=\pm 1,\end{array}\right.$$

тогда

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \cos 5x=\pm 1,\end{array}\right.\\ \cos x=-\cos^2 5x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 5x=0,\\ \cos x=0,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 5x=\pm 1,\\ \cos x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=\pi+2\pi n,\end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

<u>Пример 2.11</u>. Решите уравнение $3\sin x+4\cos 3x\cos x+2\sin 5x=7$.

Решение. Выражение $3\sin x+4\cos 3x\cos x$ можно представить как произведение, используя формулу вспомогательного угла:

$$3\sin x+4\cos 3x\cos x=\sqrt{9+16\cos^2 3x}\,\sin(x+\varphi),\ \text{где}\ \varphi=\arccos\frac{3}{\sqrt{9+16\cos^2 3x}},$$

$$\sqrt{9+16\cos^2 3x}\,\sin(x+\varphi)+2\sin 5x=7.$$

Рассмотрим, какие значения принимают функции в левой части уравнения:

$$\cos^2 3x\in[0;1]\ \Rightarrow\ \sqrt{9+16\cos^2 3x}\,\sin(x+\varphi)\le 5,$$

$$2\sin 5x\le 2.$$

Следовательно, каждое из этих выражений должно принимать свое максимальное значение. Необходимыми (но недостаточными) условиями являются:

$$\begin{cases} \sqrt{9+16\cos^2 3x} = 5, \\ 2\sin 5x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3x = 1, \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 10n = 3 + 12k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

В левой части уравнения четное число, в правой — нечетное. Следовательно, данная система не имеет решений. Так как эти необходимые условия не могут быть выполнены одновременно, то и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 2.12. Решите уравнение $x^5 - x - \sin \pi x = 0$.

Решение. Очевидно, что $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ являются корнями данного уравнения. Заметим, что в левой части уравнения нечетная функция, т.е. если x_0 — корень исходного уравнения, то и $-x_0$ также является корнем этого уравнения. Поэтому можно ограничиться поиском решений на промежутке $(0; +\infty)$, исключая $x = 1$.

Запишем уравнение в виде $x(x^4 - 1) = \sin \pi x$.

1. Рассмотрим $x \in (0; 1)$. Очевидно, что левая часть уравнения принимает отрицательные значения, а правая — положительные, т.е. на промежутке $(0; 1)$ уравнение корней не имеет.

2. Рассмотрим $x \in (1; 2]$. Левая часть на этом промежутке принимает положительные значения, а правая — не положительные. В этом случае уравнение также не имеет решений.

3. Рассмотрим $x \in (2; +\infty)$. Оценим значения обеих частей уравнения:

$$x(x^4 - 1) > 30, \ \sin \pi x \le 1.$$

Решений нет.

Ответ: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Пример 2.13. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{\sin^8 x}+\frac{1}{\cos^2 2x}\right)(\sin^8 x+\cos^2 2x)=4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}.$$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \dfrac{\pi^2}{4}-x^2\geq 0.\end{cases}$

Введем замену: $\sin^8 x=a,\ \cos^2 2x=b,$ где $a>0$, $b>0$, с учетом ОДЗ. Оценим левую часть уравнения:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4.$$

Оценим правую часть уравнения:

$$4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}\leq 4.$$

Следовательно, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\sin^8 x}+\dfrac{1}{\cos^2 2x}\right)(\sin^8 x+\cos^2 2x)=4,\\ 4\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}=4.\end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Уравнение имеет смысл только при $n=0$ и $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$. Подставляя полученные значения x в первое уравнение системы, убеждаемся, что они являются его корнями.

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

<u>Пример 2.14</u>. Решите уравнение $x^2+2+\frac{4}{x^2-2x+2}=2x+\sqrt{12-x^2+4x}$ [1].

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2-2x+2+\frac{4}{x^2-2x+2}=\sqrt{12-x^2+4x}.$$

Для всех $x\in\mathbb{R}$ имеем $\sqrt{12-x^2+4x}=\sqrt{16-(x-2)^2}\le 4,$ причем равенство достигается при $x=2$. Заметим, что $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Тогда, используя неравенство Коши, получим

$$x^2-2x+2+\frac{4}{x^2-2x+2}\ge 2\sqrt{(x^2-2x+2)\frac{4}{x^2-2x+2}}=4,$$

причем равенство достигается при $x=0$ и $x=2$. Таким образом, можно утверждать, что $x = 2$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

<u>Пример 2.15</u>. Решите неравенство $\frac{1-x}{1+x}<2^x$ [5].

Решение. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Разобьем ОДЗ на три промежутка: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0]$ и $(0; +\infty)$ и оценим левую и правую части неравенства на каждом из этих промежутков.

1. Пусть $x<-1$, тогда $\frac{1-x}{1+x}<0,$ а $2^x>0$. Следовательно, все значения x из промежутка $(-\infty; -1)$ являются решениями неравенства.

2. Пусть $-1<x\le 0$, тогда $\frac{1-x}{1+x}=1-\frac{2x}{1+x}\ge 1,$ а $2^x\le 1$. Следовательно, ни одно значение x из промежутка $(-1; 0]$ не является решением неравенства.

3. Пусть $x>0$, тогда $1-\frac{2x}{1+x}<1,$ а $2^x>1$. Следовательно, все значения $x>0$ удовлетворяют неравенству.

Ответ: $x\in(-\infty; -1)\cup(0; +\infty)$.

Пример 2.16. Решите неравенство $\log_3(8x^2-24x+27)\le|\sin\pi x|+1$ [7].

Решение. Оценим левую и правую части неравенства:

$$\log_3(8x^2-24x+27)=\log_3\left[8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+9\right]\ge\log_3 9=2,$$

$$|\sin\pi x|+1\le 2.$$

Поэтому неравенство может быть выполнено тогда и только тогда, когда обе его части будут равны 2, т.е. должна выполняться система

$$\begin{cases}\log_3(8x^2-24x+27)=2,\\ |\sin\pi x|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1{,}5,\\ |\sin 1{,}5\pi|=1\ (\text{верно})\end{cases}\Leftrightarrow\ x=1{,}5.$$

Ответ: $x = 1{,}5$.

Пример 2.17. Решите уравнение

$$\arccos(x^2-1)-\operatorname{tg}^2\sqrt{x}=1-\sqrt{x^4+x^3-x^2-2x-2}-\frac{2}{1+\cos 2\sqrt{x}}.$$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases}-1\le x^2-1\le 1,\\ x\ge 0,\\ \sqrt{x}\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x^4+x^3-x^2-2x-2\ge 0,\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 0,\\ |x|\le\sqrt{2},\\ \sqrt{x}\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x^4+x^3-x^2-2x-2\ge 0.\end{cases}$

После применения формул тригонометрии уравнение принимает вид

$$\arccos(x^2-1)+\sqrt{x^4+x^3-x^2-2x-2}=0.$$

В левой части уравнения — сумма неотрицательных слагаемых, следовательно, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\arccos(x^2-1)=0,\\ \sqrt{x^4+x^3-x^2-2x-2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2,\\ x^4+x^3-x^2-2x-2=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x=\pm\sqrt{2}$.

$x=-\sqrt{2}$ не удовлетворяет ОДЗ.

$x=\sqrt{2}$ удовлетворяет второму уравнению системы и ОДЗ.

Ответ: $x=\sqrt{2}$.

Пример 2.18. Найдите все пары (x; y) действительных чисел x и y, для каждой из которых $\cos x - y^2 \geq \sqrt{y - x^2 - 1}$ [6].

Решение. Данное неравенство содержит две переменные и разного наименования функции. Поэтому очевидно, что решить его с помощью стандартных приемов: преобразований, замены переменной, разложения на множители и т.п. не удастся. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$$

и попытаемся оценить левую и правую части полученного неравенства на области допустимых значений:

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Правая часть определена при $y \geq x^2 + 1$. Значит, $y \geq 1$, но тогда и $y^2 \geq 1$. Следовательно, правая часть неравенства $y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 1$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ y^2 = 1, \\ \sqrt{y - x^2 - 1} = 0 \end{cases} \overset{y \geq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \cos 0 = 1 \text{ (верно)}, \\ y = 1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

Пример 2.19. Найдите все пары (x; y) действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$\begin{cases} \sqrt{0,5(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geq 4x^4 + 4yx^2 + 0,5 \end{cases} \quad [7].$$

Решение. Рассмотрим уравнение системы

$$\sqrt{0,5(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2.$$

Оценим его левую часть, заменив $(x-y)^2$ на t. Имеем

$$\sqrt{0,5t - t^2} = \sqrt{-\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}} \leq \frac{1}{4}.$$

Тогда и правая часть уравнения

$$y^2 - 2x^2 \le \frac{1}{4}. \qquad (2.1)$$

Запишем неравенство системы в виде

$$4x^4 + 4yx^2 + 0,5 - y \le 0. \qquad (2.2)$$

Сложим левые и правые части неравенств (2.1) и (2.2), получим

$$4x^2 + y^2 + 4yx^2 - 2x^2 - y + 0,5 \le 0,25, \text{ или}$$

$$4x^2 + y^2 + 0,25 + 4yx^2 - 2x^2 - y \le 0.$$

Левая часть неравенства сворачивается по формуле квадрата трехчлена:

$$(2x^2 + y + 0,5)^2 \le 0 \iff 2x^2 + y - 0,5 = 0.$$

Следовательно, в неравенствах (2.1) и (2.2) должны выполняться только равенства.

Имеем систему

$$\begin{cases} 2x^2 + y + 0,5 = 0, \\ y^2 - 2x^2 = 0,25 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 0,5 - y, \\ y^2 + y - 0,75 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 0,5 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = -1,5, \\ y = 0,5 \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = -1,5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -1,5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 0,5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подстановкой полученных значений x и y в исходную систему убеждаемся, что ее решениями являются только две пары (–1; –1,5) и (0; 0,5).

Ответ: (–1; –1,5), (0; 0,5).

2.3. Применение ограниченности при решении заданий с параметром

Рассмотрим задачи с параметром, решение которых основывается на свойствах ограниченных функций. В некоторых из них для доказательства ограниченности будем использовать монотонность функций.

Пример 2.20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2 + 8|x| + 4\log_2(5x^2 + 2) = 5x + 2|x - 2a|$ имеет хотя бы один корень [7].

Решение. Запишем уравнение в виде

$$4\log_2(5x^2+2)+a^2=-8|x|+5x+2|x-2a|$$

и введем обозначения:

$$f(x)=4\log_2(5x^2+2)+a^2,$$

$$g(x)=-8|x|+5x+2|x-2a|.$$

а) Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Следовательно, ее наименьшее значение достигается при $x = 0$ и равно $f(0)=4+a^2$.

б) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $g(x)$ принимает вид

$$g(x)=13x+2|x-2a|,$$

а следовательно, при любом раскрытии оставшегося модуля будет возрастать. На промежутке $[0; +\infty)$ функция $g(x)$ принимает вид

$$g(x)=-3x+2|x-2a|$$

и будет являться убывающей. Значит, наибольшее значение функция $g(x)$ принимает в точке $x = 0$ и оно равно $g(0)=4|a|$.

Необходимым и достаточным условием существования решений исходного уравнения является выполнение неравенства

$$\min f(x)\le \max g(x), \text{ т.е.}$$

$$4+a^2\le 4|a| \iff |a|^2-4|a|+4\le 0 \iff (|a|-2)^2\le 0 \iff |a|=2, \text{ т.е. } a=\pm 2.$$

Ответ: $a=\pm 2$.

Пример 2.21. При каких значениях параметра a уравнение

$$25a^2+20a+1+4^{9x^2-30x+25}=\cos 6\pi x$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Введем обозначения:

$$25a^2+20a+1=c,\ f(x)=4^{9x^2-30x+25}+c,\ g(x)=\cos 6\pi x.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$ и преобразуем ее: $f(x)=4^{(3x-5)^2}+c$. Заметим, что $f(x)$ убывает на промежутке $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\dfrac{5}{3};+\infty\right)$. Ее наименьшее значение равно $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=c+1$.

Свое наибольшее значение функция $g(x)$ принимает, если $6\pi x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\dfrac{n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$. Во всех точках вида $x=\dfrac{n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$, в том числе в точке $x=\dfrac{5}{3}$, функция $g(x)$ принимает значение равное 1.

Таким образом, уравнение вида $f(x)=g(x)$ может иметь хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $f\left(\dfrac{5}{3}\right)\le g\left(\dfrac{5}{3}\right)$. Решим это неравенство и найдем искомые значения параметра (рис. 2.3):

$$25a^2+20a+1+1\le 1,$$
$$25a^2+20a+1\le 0.$$

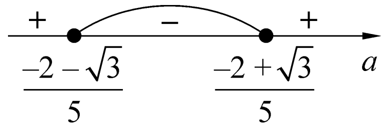


Рис. 2.3

Ответ: $a\in\left[\dfrac{-2-\sqrt{3}}{5};\dfrac{-2+\sqrt{3}}{5}\right]$.

<u>Пример 2.22</u>. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3|x+a|+2|x-a|+2=x+8|x-2|+2|3a+2|$ имеет два различных корня.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$8|x-2|-3|x+a|-2|x-a|+x+2|3a+2|-2=0.$$

Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. Рассмотрим поведение функции $f(x)$ отдельно при $x\le 2$ и $x\ge 2$.

1. Пусть $x\in(-\infty;2]$, тогда $f(x)$ принимает вид

$$f(x)=-7x-3|x+a|-2|x-a|+2|3a+2|+14.$$

Следует заметить, что при любом раскрытии оставшихся модулей $f(x)$ будет принимать вид линейной функции с отрицательным угловым коэффициентом, т.к. $-7 \pm 3 \pm 2 < 0$. А значит, на $(-\infty; 2]$ функция $f(x)$ будет убывать.

2. Аналогично, рассматривая промежуток $[2; +\infty)$, убеждаемся, что $f(x)$ возрастает на нем. Следовательно, точка $x = 2$ является точкой минимума функции.

Чтобы исходное уравнение имело два различных корня, необходимо и достаточно выполнения неравенства $f(2) < 0$. Получаем

$$-3|2+a| - 2|2-a| + 2 + 2|3a+2| - 2 < 0,$$

$$3|a+2| + 2|a-2| > 2|3a+2|.$$

а) Пусть $a < -2$, тогда получим

$$-3a - 6 - 2a + 4 > -6a - 4,$$
$$a > -2.$$

В этом случае $a \in \varnothing$.

б) Пусть $-2 \le a \le -\frac{2}{3}$, тогда

$$3a + 6 - 2a + 4 > -6a - 4,$$
$$a > -2.$$

В этом случае $a \in \left(-2; -\frac{2}{3}\right]$.

в) Пусть $-\frac{2}{3} < a < 2$, тогда

$$3a + 6 - 2a + 4 > 6a + 4,$$
$$a < \frac{6}{5}.$$

В этом случае $a \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{6}{5}\right)$.

г) Пусть $a \ge 2$, тогда

$$3a + 6 + 2a - 4 > 6a + 4,$$
$$a < -2.$$

В этом случае $a \in \varnothing$.

Ответ: $a \in (-2; 1{,}2)$.

<u>Пример 2.23</u>. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=\cos\frac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$(x^2-6|x|-a+6)^2=\cos\frac{18\pi}{a}-1.$$

Так как левая часть уравнения неотрицательна, а правая не положительна, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6|x|-a+6=0, \\ \cos\dfrac{18\pi}{a}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-3)^2=a+3, \\ \dfrac{18\pi}{a}=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -3, \\ |x|=3\pm\sqrt{a+3}, \\ a=\dfrac{9}{n},\ n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $|x|=3\pm\sqrt{a+3}$ системы имеет ровно два корня в двух случаях:

1. Если $a = -3$, тогда $x = \pm 3$, а уравнение $-3=\frac{9}{n}$ выполняется при $n = -3$.

2. Если $3-\sqrt{a+3}<0,$ отсюда имеем $a > 6$. Из неравенства $\frac{9}{n}>6$ получаем одно целое значение $n = 1$ и $a = 9$.

Ответ: $a = -3$; $a = 9$.

<u>Пример 2.24</u>. Найдите все значения параметра a, при которых для любой пары $(x; y)$ действительных чисел x и y выполнено неравенство

$$13\sin x-9|\sin x-y+2a-1|+2|\sin x+3y+4a-1|\le 15 \text{ [6]}.$$

Решение. Выполним замену $\sin x=t$ и запишем неравенство в виде

$$13t-9|t-y+2a-1|+2|t+3y+4a-1|-15\le 0.$$

Пусть $f(t)=13t-9|t-y+2a-1|+2|t+3y+4a-1|-15.$

Переформулируем задание для вновь введенных переменных. Нужно найти такие значения параметра a, при которых функция $f(t)$ не положительна для всех значений $-1\le t\le 1$ и всех действительных y. Заметим, что при любом раскрытии модулей функция $f(t)$ будет иметь вид $f(t)=kt+b,$ где $k>0,$ т.е. $f(t)$ является возрастающей функцией на [–1; 1], а значит, $\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=f(1).$ Следовательно, $f(t)\le 0$ для любых $t \in [-1; 1]$ тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0.$ Получаем неравенство

$$9|y-2a|-2|3y+4a|+2\ge 0.$$

Пусть $g(y)=9|y-2a|-2|3y+4a|+2.$ Тогда, если $y\le 2a,$ то $g(y)$ убывает, а если $y\ge 2a,$ то $g(y)$ возрастает. Следовательно, $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} g(y)=g(2a).$ Неравенство $g(y)\ge 0$ выполняется для любых $y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow g(2a)\ge 0.$ Решим неравенство относительно параметра a:

$$-2|3(2a)+4a|+2\ge 0,$$
$$|10a|\le 1,$$
$$-0{,}1\le a\le 0{,}1.$$

Ответ: $a \in [-0{,}1; 0{,}1]$.

Пример 2.25. При каких значениях параметра b система

$\begin{cases} x^2+bx+2=0, \\ \sin^2 \pi b+\sin^2 \pi x+2^{|y|}=\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right| \end{cases}$ имеет решение [9]?

Решение. Так как $\sin^2 \pi b\ge 0, \sin^2 \pi x\ge 0, 2^{|y|}\ge 1,$ то левая часть второго уравнения системы не меньше 1. В то время как правая часть уравнения не больше 1. Поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 \pi b=0, \\ \sin^2 \pi x=0, \\ 2^{|y|}=1, \\ \left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|=1. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $b\in\mathbb{Z},\ x=2n+1, n\in\mathbb{Z},\ y=0.$

Первое уравнение имеет целые коэффициенты и должно иметь целый корень $x_1 = 2n+1,$ чтобы исходная система имела решения. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b, x_1x_2 = 2,$ тогда x_2 — тоже целое. Так как x_1 — нечетный делитель числа 2, то $x_1 = 1$ или $x_1 = -1$. Тогда имеем при $x_1 = 1$: $x_2 = 2$, $b = -3$; а при $x_1 = -1$: $x_2 = -2$, $b = 3$.

Ответ: $b = \pm 3$.

Пример 2.26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + a = 6\sin x, \\ y^4 + z^2 = 6a, \\ (a-3)^2 = \left|z^2 + 6z\right| + \sin^2 2x + 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a [6].

Решение. Заметим, что во втором уравнении системы левая часть неотрицательна и, следовательно, $a \ge 0$. Из первого уравнения системы получаем:

$$|y| = 6\sin x - a \ge 0.$$

Следовательно, $a \le 6\sin x,$ а так как $\sin x \le 1,$ то $a \le 6.$

Из первых двух уравнений следует, что $0 \le a \le 6.$ Приведем третье уравнение к виду

$$(a-3)^2 - 9 = \left|z^2 + 6z\right| + \sin^2 2x \Leftrightarrow a(a-6) = \left|z^2 + 6z\right| + \sin^2 2x.$$

Так как $\left|z^2 + 6z\right| + \sin^2 2x \ge 0,$ то $a(a-6) \ge 0.$

С учетом полученного выше имеем

$$\begin{cases} a(a-6) \ge 0, \\ 0 \le a \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 6. \end{cases}$$

1. При $a = 0$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} |y| = 6\sin x, \\ y^4 + z^2 = 0, \\ \left|z^2 + 6z\right| + \sin^2 2x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует $y = z = 0$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ x = \pi k,\, k \in \mathbb{Z}.$$

2. При $a = 6$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} |y| = 6\sin x - 6, \\ y^4 + z^2 = 36, \\ \left|z^2 + 6z\right| + \sin^2 2x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $y = 0$ и $\sin x = 1$, т.е. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sin 2x = 0$. Из второго уравнения следует $z = -6$ или $z = 6$. Подставляя эти значения в уравнение $\left|z^2 + 6z\right| = 0,$ получаем, что $z = -6$.

Ответ: при $a = 0$ $(\pi k;\, 0;\, 0),\ k \in \mathbb{Z};$ при $a = 6$ $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\, 0;\, -6\right),\, k \in \mathbb{Z}.$

ГЛАВА 3. Монотонность функции

3.1. Теоретические сведения

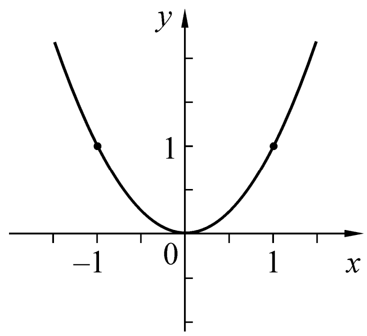
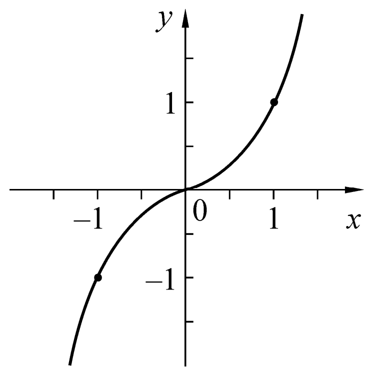
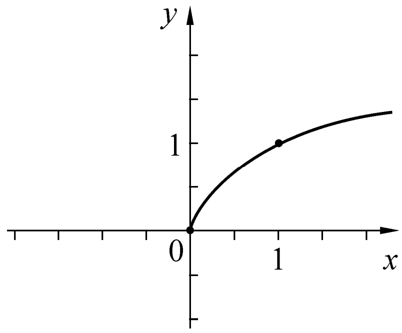
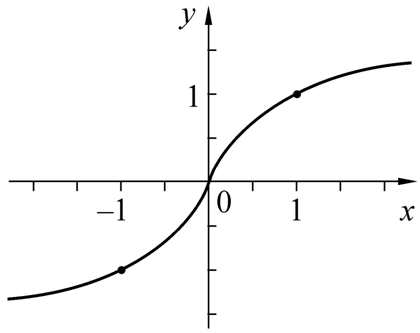
Определение 3.1. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение 3.2. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

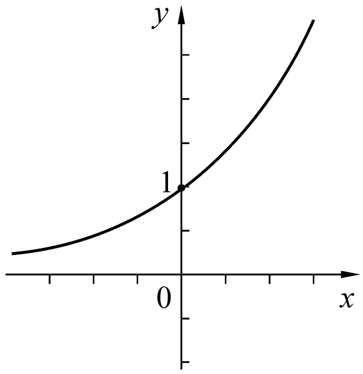
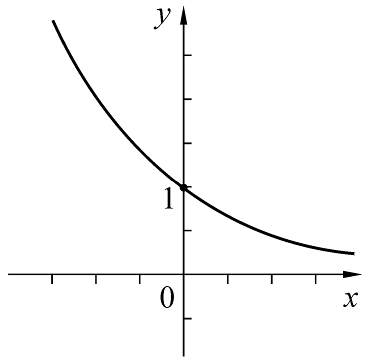
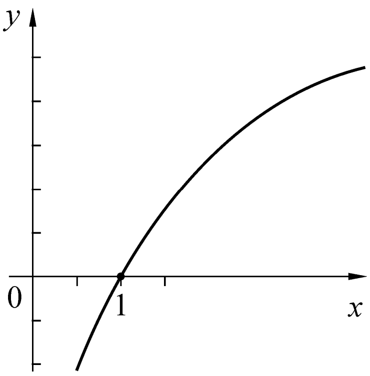
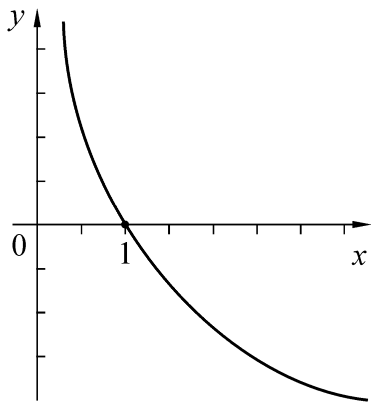
Определение 3.3. Функция $f(x)$ называется *монотонной* на промежутке X, если она либо возрастает, либо убывает на этом промежутке.

Отразим в табл. 3.1 монотонность некоторых элементарных функций, о которых идет речь в данной главе.

Таблица 3.1

№	Вид функции	Характер монотонности	
1	Степенная $y = x^n, n \in \mathbb{N}$	$n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$  Убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$	$n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$  Возрастает на $\mathbb{R}$
2	Корень n-й степени $y = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$  Возрастает на $[0; +\infty)$	$n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$  Возрастает на $\mathbb{R}$

Продолжение таблицы 3.1

№	Вид функции	Характер монотонности	
3	Показательная $y = a^x, a > 0, a \neq 1$	$a > 1$  Возрастает на $\mathbb{R}$	$0 < a < 1$  Убывает на $\mathbb{R}$
4	Логарифмическая $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$	$a > 1$  Возрастает на $\mathbb{R}_+$	$0 < a < 1$  Убывает на $\mathbb{R}_+$

<u>Свойства монотонных функций</u>:

1. Сумма возрастающих (убывающих) на X функций является возрастающей (убывающей) функцией на X.

2. Произведение двух возрастающих (убывающих) на X неотрицательных функций является возрастающей (убывающей) функцией на X.

3. Если положительная (отрицательная) функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на X.

4. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ возрастает и функция $t = g(x)$ возрастает, то сложная функция $y = f(g(x))$ также будет возрастать.

5. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ убывает и функция $t = g(x)$ убывает, то сложная функция $y = f(g(x))$ возрастает.

6. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ возрастает, а функция $t = g(x)$ убывает, то сложная функция $y = f(g(x))$ убывает.

7. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ убывает, а функция $t = g(x)$ возрастает, то сложная функция $y = f(g(x))$ убывает.

При использовании монотонности функций часто полезными оказываются теорема о корне и ее следствия.

Теорема о корне. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, число b — любое из значений, принимаемых $f(x)$ на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет единственный корень на промежутке X [1].

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного корня на промежутке X [1].

Следствие 2. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на этом промежутке [1].

Следствие 3. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in X$, может иметь решение только при $x_1 = x_2$.

Сформулируем еще ряд важных утверждений.

Утверждение 3.1. Если функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x)$ убывает на всей числовой прямой и $f(x_0) = g(x_0)$, то справедливы следующие высказывания [7]:

а) $f(x) \le g(x)$ в том и только в том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$;

б) $f(x) \ge g(x)$ в том и только в том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$.

Наглядный смысл этого утверждения очевиден (рис. 3.1).

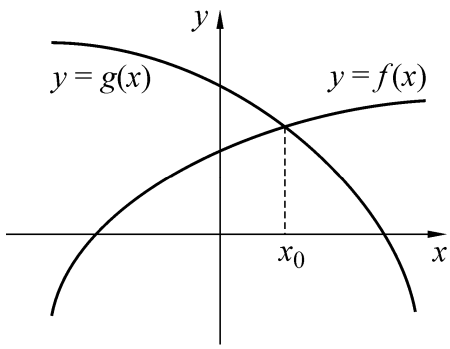


Рис. 3.1

Утверждение 3.2. Если функция $f(x)$ возрастает, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$ [1].

Следствие. Если n — натуральное число, а функция $f(x)$ монотонно возрастает, то уравнение $\underbrace{f(f(...f(x))...)}_{n \text{ раз}} = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.

3.2. Применение монотонности при решении уравнений, неравенств и их систем

Утверждения, сформулированные в предыдущем параграфе, позволяют обосновывать единственность решения уравнения в тех случаях, когда свести его к простейшему не удается, но довольно просто можно подобрать корень. Обоснование того, что других корней нет, часто удается сделать, опираясь на свойства монотонных функций.

Пример 3.1. Решите уравнение $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2$.

Решение. В левой части уравнения монотонно возрастающая на промежутке $\left[-\frac{3}{2}; 4\right]$ функция, т.к. она представлена в виде суммы двух возрастающих функций. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня.

$x = 3$ — единственный корень, т.к. $\sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$ (верно).

Ответ: $x = 3$.

Пример 3.2. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 3 - x$.

Решение. В левой части уравнения монотонно возрастающая на промежутке $[1;+\infty)$ функция, а в правой части уравнения монотонно убывающая функция. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня.

$x = 1$ — единственный корень, т.к. $\sqrt{0}+\sqrt{4}=2$ (верно).

Ответ: $x = 1$.

<u>Пример 3.3</u>. Решите неравенство $\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+12}>4$.

Решение. В левой части неравенства находится сумма двух возрастающих на их области определения функций. Значит, уравнение

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+12}=4$$

имеет не более одного решения.

При $x = -1$ неравенство обращается в равенство:

$$\sqrt{-4+5}+\sqrt{-3+12}=4 \text{ (верно).}$$

А поскольку функция в левой части уравнения возрастает, то при $x > -1$ исходное неравенство будет выполняться.

Ответ: $x \in (-1;+\infty)$.

<u>Пример 3.4</u>. Решите уравнение $4\log_3(|x-1|+2)+\sqrt[3]{(x-1)^2}=5$.

Решение. Каждая из двух функций $f(x)=4\log_3(|x-1|+2)$ и $g(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ убывает при $x\le 1$ и возрастает при $x\ge 1$, следовательно, уравнение $f(x)+g(x)=5$ имеет не более двух корней, причем $x_1\in(-\infty;1]$, $x_2\in[1;+\infty)$, где x_1, x_2 — возможные корни уравнения.

$x = 0$ — корень уравнения, т.к. $4\log_3 3+\sqrt[3]{1}=5$,

$x = 2$ — корень уравнения, т.к. $4\log_3 3+\sqrt[3]{1}=5$.

Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

<u>Пример 3.5</u>. Решите уравнение $x\cdot 2^{\log_3(x^2+2x+12)}=24$.

Решение. Заметим, что $x > 0$, иначе левая часть уравнения будет являться не положительным числом. На промежутке $(0;+\infty)$ функция

$y = x \cdot 2^{\log_3(x^2+2x+12)}$ возрастает, т.к. представлена в виде произведения двух положительных возрастающих функций. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня.

Нетрудно заметить, что $x = 3$ является корнем уравнения, т.к.

$$3 \cdot 2^{\log_3 27} = 24.$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 3.6. Решите неравенство

$$4x^3 + \sqrt[4]{x-1} + \log_3(x^3+1) - \sqrt{4-2x} < 35.$$

Решение. ОДЗ: $1 \le x \le 2$.

На ОДЗ функция $f(x) = 4x^3 + \sqrt[4]{x-1} + \log_3(x^3+1) - \sqrt{4-2x}$ непрерывна и возрастает. Так как $f(2) = 35$, то все значения x из промежутка $[1; 2)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $x \in [1; 2)$.

Пример 3.7. Решите неравенство $\sqrt{x+1} - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} > 0.$

Решение. ОДЗ: $x \ge -1$.

Преобразуем неравенство:

$$2\sqrt{x+1} - 2 - x + \frac{x^2}{4} > 0,$$

$$\frac{x^2}{4} - x - 1 + 2\sqrt{x+1} - 1 > 0,$$

$$\frac{x^2}{4} - (\sqrt{x+1} - 1)^2 > 0,$$

$$\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x+1} + 1\right)\left(\frac{x}{2} + \sqrt{x+1} - 1\right) > 0,$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - 1)^2 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{x+1} - 1\right) > 0.$$

Поскольку $(\sqrt{x+1} - 1)^2 \ge 0,$ то получившееся неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \sqrt{x+1} - 1 > 0, \\ (\sqrt{x+1} - 1)^2 \ne 0. \end{cases}$$

Первое неравенство обращается в равенство при $x = 0$, т.к. $0+\sqrt{1}-1=0$ (верно). А поскольку $f(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{x+1}-1$ является возрастающей на ОДЗ функцией, то $f(x) > 0$ при $x > 0$. Получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x>0.$$

Ответ: $x > 0$.

Пример 3.8. Решите уравнение

$$2(2x^3+3x+4)^3+3(2x^3+3x+4)+4=x. \qquad (3.1)$$

Решение. Заметим, что исходное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, где

$$f(x)=2x^3+3x+4.$$

Так как $f'(x)=6x^2+3>0$ при всех x, то функция $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Тогда уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ равносильны. Поэтому множество решений уравнения (3.1) совпадает с множеством решений уравнения

$$2x^3+3x+4=x,$$

$$x^3+x+2=0.$$

Поскольку в левой части возрастающая функция, то $x = –1$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x = –1$.

Пример 3.9. Решите уравнение $2\sqrt{\sqrt{2\sqrt{x+7}+8}+8}=\frac{x-1}{2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{x+7}+1)+7}+1)+7}+1=x. \qquad (3.2)$$

Заметим, что оно имеет вид $f(f(f(x))) = x$, где $f(x)=2\sqrt{x+7}+1$ — монотонно возрастающая на $[–7; +\infty)$ функция.

Тогда уравнение (3.2) равносильно уравнению $2\sqrt{x+7}+1=x$.

$$2\sqrt{x+7}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}4(x+7)=x^2-2x+1,\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=9,\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

Ответ: $x = 9$.

<u>Пример 3.10</u>. Решите уравнение $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}=2$.

Решение. В левой части уравнения разность монотонно возрастающих функций, поэтому применить теорему о корне не получится.

Умножим обе части уравнения на сопряженное выражение, т.е. на сумму корней. Заметим, что оба корня в ноль одновременно не обращаются. Получим

$$2x+5-(2x-3)=2(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}),$$

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}=4.$$

Теперь в левой части уравнения монотонно возрастающая на промежутке $[1{,}5;+\infty)$ функция, следовательно, по теореме о корне единственным решением этого уравнения является $x = 2$ (т.к. $\sqrt{9}+\sqrt{1}=4$).

Ответ: $x = 2$.

<u>Пример 3.11</u>. Решите уравнение $5^x+12^x=13^x$.

Решение. Очевидно, что $x = 2$ — корень уравнения. Докажем, что других корней нет.

В обеих частях уравнения монотонно возрастающие на $\mathbb{R}$ функции, поэтому невозможно сослаться на теорему о корне.

Разделим обе части уравнения на 13^x (заметим, $13^x\neq 0$), получим

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1.$$

Теперь в левой части уравнения монотонно убывающая функция, следовательно, $x = 2$ — единственный корень получившегося, а значит, и исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

<u>Пример 3.12</u>. Решите неравенство

$$9^{5x-2}-3^{2x+8}+2\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+20}\le \log_5\frac{x+7}{5x+1}.$$

Решение. Область допустимых значений переменной $x\ge\frac{1}{5}.$

Преобразуем неравенство, разнесем «одноименные» функции в разные части неравенства:

$$9^{5x-2}+2\sqrt{5x-1}+\log_5(5x+1)\le 9^{x+4}+2\sqrt{x+5}+\log_5(x+7).$$

Теперь неравенство приняло вид $f(t_1)\le f(t_2),$ где

$$f(t)=9^t+2\sqrt{t+1}+\log_5(t+3)\ —$$

монотонно возрастающая на области определения функция;

$$t_1=5x-2, t_2=x+4.$$

Так как $f(t_1)\le f(t_2)\ \Leftrightarrow\ t_1\le t_2$ для допустимых t_1 и $t_2,$ то имеем равносильную систему

$$\begin{cases}5x-2\le x+4,\\ x\ge\dfrac{1}{5}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\le 1{,}5,\\ x\ge 0{,}2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ 0{,}2\le x\le 1{,}5.$$

Ответ: $x\in[0{,}2;\ 1{,}5]$.

<u>Пример 3.13</u>. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}7\sin x-6y^3+5x=7\sin y-6x^3+5y,\\ 9x^2+16y^2=9\end{cases}\quad [6].$$

Решение. Запишем первое уравнение системы иначе:

$$7\sin x+6x^3+5x=7\sin y+6y^3+5y.$$

Тогда нетрудно понять, что оно имеет вид $f(x)=f(y),$ где

$$f(t)=7\sin t+6t^3+5t.$$

Исследуем на монотонность функцию $f(t)$. Для начала определим промежуток для переменной t. Из второго уравнения системы следует, что

$$\begin{cases} 9x^2 \le 9, \\ 16y^2 \le 9, \end{cases} \text{ т.е. } |x| \le 1, |y| \le \frac{3}{4}.$$

Значит, достаточно рассмотреть $|t| \le 1$.

Найдем производную функции $f(t)$:

$$f'(t) = 7\cos t + 18t^2 + 5.$$

Так как $-1 \le t \le 1$, то $\cos t > 0$. Следовательно, $f'(t) > 0$ при $|t| \le 1$, т.е. функция $f(t)$ является возрастающей и первое уравнение системы равносильно уравнению $x = y$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x = y, \\ 9x^2 + 16y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 25x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0,6, \\ y = 0,6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0,6, \\ y = -0,6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (0,6; 0,6), (–0,6; –0,6).

3.3. Применение монотонности при решении заданий с параметром

Пример 3.14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x - |4x - |x - a|| = 8|x - 2|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$8|x - 2| + |4x - |x - a|| - 2x = 0.$$

Пусть $f(x) = 8|x - 2| + |4x - |x - a|| - 2x$. Существование корней уравнения эквивалентно существованию нулей функции $f(x)$. Исследуем $f(x)$ на монотонность на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[2; +\infty)$.

1. Пусть $x \in (-\infty; 2]$, тогда $f(x) = -10x + |4x - |x - a|| + 16$. При любом раскрытии оставшихся модулей $f(x)$ принимает вид линейной функции с отрицательным угловым коэффициентом $(-10 \pm 4 \pm 1 < 0)$. Значит, на промежутке $(-\infty; 2]$ функция убывает.

2. Пусть $x \in [2; +\infty)$, тогда $f(x) = 6x + |4x - |x - a|| - 16$, а значит, $f(x)$ будет возрастать ($6 \pm 4 \pm 1 > 0$). $x = 2$ является точкой минимума функции $f(x)$.

Условия задания выполняются тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $f(2) \le 0$. Решим это неравенство:

$$|8 - |2 - a|| - 4 \le 0,$$

$$|8 - |a - 2|| \le 4,$$

$$-4 \le 8 - |a - 2| \le 4,$$

$$4 \le |a - 2| \le 12,$$

$$\left[\begin{array}{l} -10 \le a \le -2, \\ 6 \le a \le 14. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in [-10; -2] \cup [6; 14]$.

<u>Пример 3.15</u>. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$ выполняется для любого x [3].

Решение. Неравенство преобразуется к виду

$$f(x) > 3, \text{ где } f(x) = |x + 1| + 2|x + a| + 2x.$$

Точки -1 и $-a$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при раскрытии модуля).

На левом промежутке ($x \le -1$, $x \le -a$) функция принимает вид

$$f(x) = -x - 2a - 1$$

и является убывающей. На правом промежутке ($x \ge -1$, $x \ge -a$) функция имеет вид

$$f(x) = 5x + 2a + 1$$

и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки -1 и $-a$ являются точками излома, поэтому в одной из этих точек функция принимает наименьшее значение.

Значит, все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} f(-1) > 3, \\ f(-a) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1+a|-2 > 3, \\ |-a+1|-2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-1| > \dfrac{5}{2}, \\ |a-1| > 2a+3 \end{cases} \Leftrightarrow a < -1{,}5.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1{,}5)$.

Пример 3.16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^{14} + (3a - 2|x|)^7 + x^6 - (2|x| - 3a)^3 = 0$ имеет более трех различных решений.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$(x^2)^7 + (x^2)^3 = (2|x| - 3a)^7 + (2|x| - 3a)^3. \qquad (3.3)$$

Заметим, что оно имеет вид $f(t_1) = f(t_2)$, где

$$f(t) = t^7 + t^3,\ t_1 = x^2,\ t_2 = 2|x| - 3a.$$

Так как $f(t) = t^7 + t^3$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$, то уравнение (3.3) равносильно уравнению

$$x^2 = 2|x| - 3a,$$

$$|x|^2 - 2|x| + 3a = 0. \qquad (3.4)$$

Обозначим $|x| = y$, $y \geq 0$.

$$y^2 - 2y + 3a = 0. \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.4) имеет более трех корней (т.е. четыре корня), если уравнение (3.5) имеет два различных положительных корня.

Так как по теореме Виета $y_1 + y_2 = 2$, то $y_1 y_2 = 3a > 0$. Дополнительно потребуем существование корней, т.е. $D_1 > 0$:

$$\begin{cases} 3a > 0, \\ 1 - 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(0; \frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $a \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.

Пример 3.17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x+4a)+\sin\frac{x^2-6x-7a}{2}=4x-x^2-a$$

не имеет действительных корней [9].

Решение. Проведем некоторые преобразования:

$$\frac{x^2-6x-7a}{2}=\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}a,$$

$$4x-x^2-a=-2\left(\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}a\right)+2(-x-4a)$$

и запишем исходное уравнение следующим образом:

$$\sin\left(\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}a\right)+2\left(\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}a\right)=\sin(-x-4a)+2(-x-4a). \quad (3.6)$$

Теперь очевидно, что уравнение имеет вид $f(t_1)=f(t_2)$, причем

$$f(t)=\sin t+2t,\ t_1=\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}a,\ t_2=-x-4a.$$

Кроме того, $f'(t)=\cos t+2>0$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(t)$ является возрастающей, а значит, уравнение (3.6) равносильно уравнению

$$\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}a=-x-4a, \text{ или}$$

$$x^2-4x+a=0.$$

Последнее уравнение не имеет корней, если $D_1 < 0$:

$$4-a<0,$$

$$a>4.$$

Ответ: $a\in(4;+\infty)$.

Пример 3.18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|4\cos x+a+6|+\left|5\cos x+a^2+1\right|\le 10\cos x+\left|a^2+a-2\right|+10 \quad (3.7)$$

выполняется для любого действительного значения x [6].

Решение. Введем переменную $t = \cos x$ и запишем неравенство (3.7) в виде

$$10t - |4t + a + 6| - \left|5t + a^2 + 1\right| + \left|a^2 + a - 2\right| + 10 \geq 0. \qquad (3.8)$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 10t - |4t + a + 6| - \left|5t + a^2 + 1\right| + \left|a^2 + a - 2\right| + 10.$$

При любом раскрытии модулей функция будет принимать вид $f(t) = kt + b$, где $k > 0$. Таким образом, $f(t)$ — монотонно возрастающая на $\mathbb{R}$ функция.

Неравенство (3.7) будет выполняться для всех x в том и только в том случае, когда неравенство (3.8) выполняется для всех $t \in [-1; 1]$. А это равносильно выполнению условия $f(-1) \geq 0$, т.е.

$$-10 - |2 + a| - \left|a^2 - 4\right| + \left|a^2 + a - 2\right| + 10 \geq 0,$$

$$|2 + a| + \left|a^2 - 4\right| \leq \left|a^2 + a - 2\right|. \qquad (3.9)$$

Заметим, что неравенство (3.9) имеет вид

$$|m| + |n| \leq |m + n|.$$

Но по свойству модуля для любых m и n верно неравенство

$$|m| + |n| \geq |m + n|,$$

причем равенство выполняется только, если m и n одного знака или равны нулю.

Следовательно, неравенство (3.9) равносильно уравнению

$$|2 + a| + \left|a^2 - 4\right| = \left|a^2 + a - 2\right|,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$(2 + a)(a^2 - 4) \geq 0. \qquad (3.10)$$

Решая неравенство (3.10), получим $a \in \{-2\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $a \in \{-2\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 3.19. При каких значениях параметра a уравнение

$$17|x + 3a| + 9\log_7(3x^2 + 18ax + 27a^2 + 7) + a^2 + 3a = -3x + 12|x + 2a|$$

имеет хотя бы один корень (ЕГЭ-2013).

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$17|x+3a|+3x-12|x+2a|+9\log_7(3x^2+18ax+27a^2+7)+a^2+3a=0.$

Обозначим

$$f(x)=17|x+3a|+3x-12|x+2a|,$$
$$g(x)=9\log_7(3x^2+18ax+27a^2+7)+a^2+3a.$$

Рассмотрим каждую из этих функций:

1. Заметим, что если $x \ge -3a$, то $f(x)=20x+51a-12|x+2a|$ — возрастающая функция независимо от раскрытия второго модуля; $x<-3a$, то $f(x)=-14x-51a-12|x+2a|$ — убывающая функция.

2. Монотонность функции $g(x)$ зависит только от логарифмируемого выражения, т.к. $y=\log_7 t$ — возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция. Внутренняя функция $y=3x^2+18ax+27a^2+7$ является квадратичной, график которой — парабола с ветвями, направленными вверх, и вершиной в точке с абсциссой $x_0=-\dfrac{18a}{6}=-3a$. Поэтому $g(x)$ убывает при $x \le -3a$ и возрастает при $x \ge -3a$.

Следовательно, для существования корней уравнения $f(x)+g(x)=0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$f(-3a)+g(-3a)\le 0,$$
$$a^2-6a-12|a|+9\le 0,$$

$a<0,$	$a\ge 0,$
$a^2+6a+9\le 0,$	$a^2-18a+9\le 0,$
$(a+3)^2\le 0,\ a=-3.$	$a\in\left[9-6\sqrt{2};9+6\sqrt{2}\right].$

Ответ: $a=-3;\ a\in\left[9-6\sqrt{2};9+6\sqrt{2}\right].$

Пример 3.20. Найдите все значения параметра a, при которых каждое число из отрезка [1; 2] является решением неравенства

$$\sqrt[3]{x^2-6ax+2}-\sqrt[3]{x+2+\left|a^2-2a\right|}\le\left(x+\left|a^2-2a\right|\right)^3-(x^2-6ax)^3.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt[3]{x^2-6ax+2}+(x^2-6ax)^3\le\sqrt[3]{x+\left|a^2-2a\right|+2}+\left(x+\left|a^2-2a\right|\right)^3. \quad (3.11)$$

Заметим, что неравенство имеет вид $f(t_1) \le f(t_2)$, где

$$t_1 = x^2 - 6ax, t_2 = x + \left|a^2 - 2a\right|, \; f(t) = \sqrt[3]{t+2} + t^3.$$

Функция $f(t)$ возрастает на $\mathbb{R}$, т.к. представлена суммой возрастающих функций. Тогда неравенство (3.11), а значит, и исходное неравенство равносильно неравенству $t_1 \le t_2$, т.е. $x^2 - 6ax \le x + \left|a^2 - 2a\right|$.

Таким образом, требуется найти такие значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - (6a+1)x - \left|a^2 - 2a\right| \le 0$ выполняется для всех $x \in [1; 2]$.

Пусть $g(x) = x^2 - (6a+1)x - \left|a^2 - 2a\right|$. Графиком функции $g(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 3.2). Следовательно, множество решений неравенства будет включать в себя отрезок [1; 2] тогда и только тогда, когда выполняется система $\begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(2) \le 0. \end{cases}$

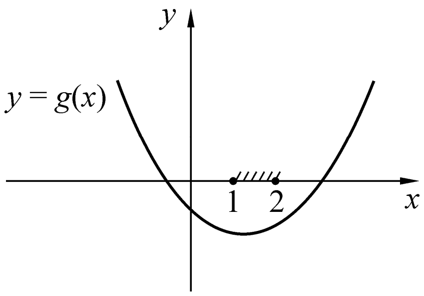


Рис. 3.2

$$\begin{cases} 1 - 6a - 1 - \left|a^2 - 2a\right| \le 0, \\ 4 - 12a - 2 - \left|a^2 - 2a\right| \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|a^2 - 2a\right| \ge -6a, \\ \left|a^2 - 2a\right| \ge 2 - 12a. \end{cases}$$

Так как $a \le 0$ (следует из первого неравенства), то $2 - 12a > -6a$. Поэтому достаточно решить второе неравенство системы:

$$\left|a^2 - 2a\right| \ge 2 - 12a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2a \ge 2 - 12a, \\ a^2 - 2a \le 12a - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + 10a - 2 \ge 0, \\ a^2 - 14a + 2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [-5 + 3\sqrt{3}; +\infty), \\ a \in [7 - \sqrt{47}; 7 + \sqrt{47}] \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [7 - \sqrt{47}; +\infty).$$

Ответ: $a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [7 - \sqrt{47}; +\infty)$.

ГЛАВА 4. Четность (нечетность) функции

4.1. Теоретические сведения

<u>Определение 4.1</u>. Функция $f(x)$ называется *четной,* если для любого x из области определения функции значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Например, $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (рис. 4.1).

$D(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

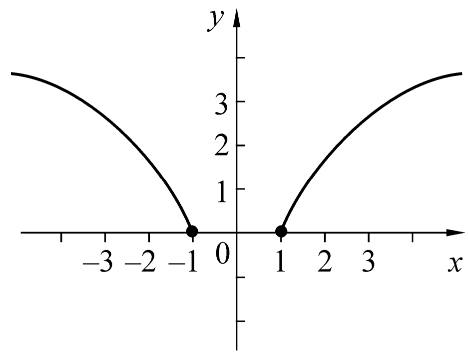


Рис. 4.1

<u>Определение 4.2</u>. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x из области определения функции значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y = \arcsin x$ (рис. 4.2).

$D(y) = [-1; 1]$.

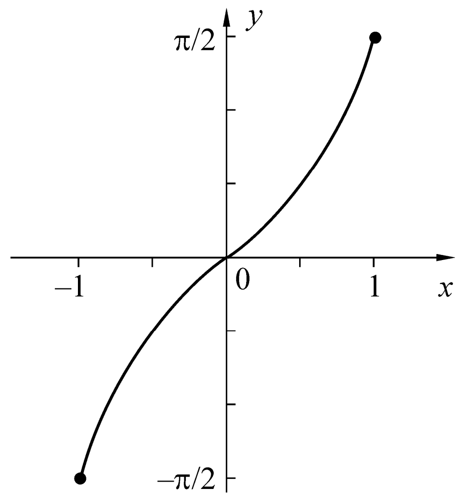


Рис. 4.2

<u>Замечание</u>. Из определения следует, что область определения как четной, так и нечетной функций должна быть симметричной относительно нуля.

Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, будем называть функциями общего вида.

Сформулируем свойства четных (нечетных) функций.

Утверждение 4.1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, то

а) $f(x) \pm g(x)$ — четная функция;

б) $f(x) \cdot g(x)$ — четная функция;

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ — четная функция.

Утверждение 4.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то

а) $f(x) \pm g(x)$ — нечетная функция;

б) $f(x) \cdot g(x)$ — четная функция;

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ — четная функция.

Утверждение 4.3. Если $f(x)$ — четная ненулевая функция, а $g(x)$ — нечетная ненулевая функция, то

а) $f(x) \pm g(x)$ — функция общего вида;

б) $f(x) \cdot g(x)$ — нечетная функция;

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ — нечетная функция.

– Рассмотрим уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — четная или нечетная функция. Для его решения достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, а потом добавить корни, противоположные к найденным. Для нечетной функции $f(x)$ корнем будет являться $x = 0$ (если 0 входит в область определения), а для четной функции $x = 0$ проверяется подстановкой в уравнение.

– При решении неравенства вида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ — четная функция, тоже можно ограничиться неотрицательными числами, а в ответ добавить симметричный промежуток.

– При решении неравенства вида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ — нечетная функция, сначала находим решения на множестве неотрицательных чисел и с учетом полученных промежутков знакопостоянства выбираем промежутки нужного знака в отрицательной области.

Часто определение четности (нечетности) входящих в уравнение функций позволяет сделать вывод о количестве его корней. Так, например, из определения четной функции следует, что если $x = c$ является корнем уравнения $f(x) = a$, где $f(x)$ — четная функция, то и $x = -c$ тоже является корнем. Поэтому уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное число корней тогда и только тогда, когда $x = 0$ является одним из корней уравнения. Аналогично, если количество корней четно, то $x = 0$ не принадлежит множеству корней.

Четность может встречаться и в системах уравнений и неравенств. В таких случаях четность может быть как относительно всех переменных, так и относительно части из них [3].

4.2. Применение четности при решении уравнений, неравенств и их систем

Пример 4.1. Найдите сумму корней уравнения:

а) $7x^{2020} - x^{20} + 2x^{10} - 8 = 0;$

б) $\log_4(10 - x^2) - 3^{|x|} + 27 = 0;$

в) $\sin 2x - x^5 - x^3 = 0.$

Решение. а) Функция, стоящая в левой части уравнения, четная. Следовательно, если уравнение имеет корни, то их сумма равна 0. Очевидно, что $x = \pm 1$ являются корнями данного уравнения.

б) Заметим, что $x = \pm 3$ — корни уравнения $\log_4(10 - x^2) - 3^{|x|} + 27 = 0.$ Так как в уравнении содержатся только четные функции, то сумма всех корней уравнения равна 0.

в) Функция, стоящая в левой части уравнения $\sin 2x - x^5 - x^3 = 0$ является нечетной. $x = 0$ — очевидный корень. Если уравнение имеет еще корни, то они взаимно противоположны. Значит, сумма корней уравнения равна 0.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 0.

Пример 4.2. Решите уравнение $4^{|x-3|+|x+3|} = 32^{|x|}.$

Решение. Так как в обеих частях уравнения четные функции, то можно сначала найти решения на промежутке $[0; +\infty)$.

1. Пусть $x \in [0; 3]$, тогда уравнение примет вид

$$2^{2(3-x+x+3)} = 2^{5x},$$

$$12 = 5x,$$

$$x = 2{,}4.$$

2. Пусть $x \in (3; +\infty)$, тогда

$$2^{2(x-3+x+3)} = 2^{5x},$$

$$4x = 5x,$$

$$x = 0 \notin (3; +\infty).$$

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня 2,4 и –2,4.

Ответ: $\pm 2{,}4$.

<u>Пример 4.3</u>. Решите уравнение $x^2 + 5^{|x|} - 29 = 0.$

Решение. Так как в левой части уравнения четная функция и $x = 0$ корнем уравнения не является, достаточно найти решения уравнения на промежутке $(0; +\infty)$.

Если $x > 0$, то $x^2 = 29 - 5^x$. В левой части уравнения возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, а в правой — убывающая. $x = 2$ — единственное решение на $\mathbb{R}_+$.

Тогда $x = \pm 2$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $x = \pm 2$.

<u>Пример 4.4</u>. Докажите, что сумма корней уравнения

$$x^3 + 3x + 5\sin 2\pi x = 3x^2 + \frac{x}{x-1}$$

является четным натуральным числом.

Решение. Преобразуем уравнение

$$(x-1)^3 + 5\sin 2\pi x - \frac{1}{x-1} = 0.$$

После замены $t = x - 1$ получим

$$t^3 + 5\sin 2\pi t - \frac{1}{t} = 0.$$

Заметим, что уравнение имеет корни, например, $t = \pm 1$. Кроме того, в левой части уравнения нечетная функция, причем $t \neq 0$. Поэтому все корни уравнения можно разбить на пары взаимно противоположных чисел.

Если $t_1 = t_0$, а $t_2 = -t_0$, то $x_1 + x_2 = 1 + t_0 + 1 - t_0 = 2$.

Значит, сумма всех корней исходного уравнения является четным числом.

Пример 4.5. Решите неравенство $4x^3 - x - 3\sin 2\pi x > 0$.

Решение. Левая часть неравенства является нечетной функцией. Поэтому сначала можно найти решения неравенства на промежутке $[0; +\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $x(2x-1)(2x+1) > 3\sin 2\pi x$ и введем обозначения:

$$f(x) = x(2x-1)(2x+1),\ \ g(x) = 3\sin 2\pi x.$$

Таким образом, решением неравенства являются те значения переменной x, при которых $f(x) > g(x)$. Рассмотрим несколько случаев:

1. $x = 0$ или $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = g(x)$ (не удовлетворяют условию);

2. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) < 0,\ 0 < 2\pi x < \pi$, тогда $g(x) > 0$ (не удовлетворяют условию);

3. $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(x) > 0,\ \pi < 2\pi x < 2\pi$, тогда $g(x) \le 0$ (удовлетворяют условию);

4. $x \in (1; +\infty) \Rightarrow f(x) > 3,\ g(x) \le 3$ (удовлетворяют условию).

Рассматривая неотрицательные значения x, получили решения $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

В силу нечетности функции, стоящей в левой части неравенства, имеем

$$x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

На рис. 4.3 отмечены знаки левой части неравенства.

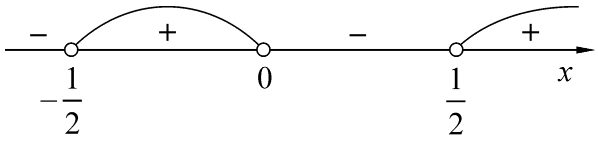


Рис. 4.3

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

4.3. Применение четности при решении заданий с параметром

Пример 4.6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2 + a}{x^2 + 1} + a^2 = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Заметим, что левая часть уравнения есть четная функция, т.е., если x_0 — корень уравнения, то и $-x_0$ — тоже корень уравнения. Следовательно, единственным корнем уравнения может быть только $x = 0$.

Подставим $x = 0$ в исходное уравнение. Получим

$$-a + a^2 = 0, \text{ тогда}$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1.$$

Проверим каждое из найденных значений параметра.

1. Пусть $a = 0$, тогда

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^4 + x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

2. Пусть $a = 1$, тогда $\frac{x^4}{2} = 0$. А значит, $x = 0$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $a = 1$.

Пример 4.7. При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2 - a\,\mathrm{tg}(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение [2]?

Решение. Заметим, что переменная входит в уравнение только под знаком четных функций. Следовательно, уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$, т.е., если x_0 — корень уравнения, то и $-x_0$ также является корнем уравнения. Значит, единственным решением данного уравнения может быть только $x = 0$.

Пусть $x = 0$ (необходимое условие), тогда

$$0 - a\,\mathrm{tg}1 + a^2 = 0,$$

$$a = 0 \text{ или } a = \mathrm{tg}\,1,$$

Проверим найденные значения параметра a.

1. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

2. Если $a = \mathrm{tg}\,1$, то получим

$$2x^2 - \mathrm{tg}1 \cdot \mathrm{tg}(\cos x) + \mathrm{tg}^2 1 = 0,$$

$$\mathrm{tg}^2 1 + 2x^2 = \mathrm{tg}1 \cdot \mathrm{tg}(\cos x). \tag{4.1}$$

Левая часть уравнения не меньше чем $\mathrm{tg}^2 1$, т.к. $2x^2 \geq 0$.

Рассмотрим правую часть уравнения. $-1 \leq \cos x \leq 1$. Функция $y = \mathrm{tg}\,t$ на промежутке $[-1;\, 1]$ возрастает, следовательно, $\mathrm{tg}(\cos x) \leq \mathrm{tg}1$. И так как $\mathrm{tg}\,1 > 0$, то правая часть уравнения не больше чем $\mathrm{tg}^2 1$.

Значит, уравнение (4.1) равносильно системе

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2 1 + 2x^2 = \mathrm{tg}^2 1, \\ \mathrm{tg}1 \cdot \mathrm{tg}(\cos x) = \mathrm{tg}^2 1 \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 0 \text{ — единственное решение.}$$

Ответ: $a = 0$, $a = \mathrm{tg}\,1$.

Пример 4.8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4a^2x^4 + (2a - 8)x^2 + a + |a| = 0$$

имеет ровно три решения на промежутке $(-1;\, 1]$ [9]?

Решение. В левой части уравнения четная функция относительно переменной x. Поэтому если x_0 — корень уравнения, то и $-x_0$ — тоже корень уравнения. Следовательно, исходное уравнение может иметь ровно три решения на промежутке $(-1; 1]$ в двух случаях:

1. $x_1 = 0$, $x_{2,3} \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

2. $x_1 = 1$, $x_{2,3} \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Рассмотрим первый случай. При $x = 0$ получаем $a + |a| = 0,$ т.е. $a \le 0$.

Если $a \le 0$, то уравнение принимает вид

$$2x^2(2a^2x^2 + a - 4) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } 2a^2x^2 = 4 - a.$$

Если $a = 0$, то $x = 0$ — единственный корень.

Если $a < 0$, то $x^2 = \dfrac{4-a}{2a^2}$, причем $\dfrac{4-a}{2a^2} > 0$.

Для выполнения условия задачи потребуем, чтобы $\dfrac{4-a}{2a^2} < 1$:

$$\begin{cases} a < 0, \\ 2a^2 + a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right).$$

Рассмотрим второй случай. При $x = 1$ получаем

$$4a^2 + 2a - 8 + a + |a| = 0,$$

$$4a^2 + 3a + |a| - 8 = 0.$$

Отрицательные значения a можно не рассматривать, т.к. тогда $x = 0$ будет среди корней. А этот случай был разобран. Поэтому $a \ge 0$.

$$a^2 + a - 2 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -2 < 0. \end{array}\right.$$

Если $a = 1$, то

$$4x^4 - 6x^2 + 2 = 0,$$

$$2x^4 - 3x^2 + 1 = 0,$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 = 1, & & x^2 = \dfrac{1}{2}, \\ x = 1, & \text{или} & \\ x = -1 \notin (-1;\ 1] & & x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in (-1; 1]. \end{array}$$

При $a = 1$ три решения.

Ответ: $a \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}\right) \cup \{1\}$.

Пример 4.9. Найдите значения параметра a, при которых уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $x - 1 = t$, тогда уравнение принимает вид

$$2\pi^2 t^2 + 4a\cos(2\pi(t+1)) - 9a^3 = 0,$$

$$2\pi^2 t^2 + 4a\cos 2\pi t - 9a^3 = 0. \qquad (4.2)$$

Левая часть уравнения содержит только четные функции относительно переменной t. Поэтому если t_0 — корень уравнения, то и $-t_0$ — тоже корень уравнения. Следовательно, необходимым условием для существования единственного корня будет наличие корня $t = 0$.

Если $t = 0$, то

$$4a - 9a^3 = 0,$$

$$a = 0 \text{ или } a = \pm\frac{2}{3}.$$

Проверим, будет ли при найденных значениях a $t = 0$ единственным корнем.

1. При $a = 0$ $t = 0$ — единственное решение.

2. При $a = -\dfrac{2}{3}$ имеем $2\pi^2 t^2 - \dfrac{8}{3}\cos 2\pi t + \dfrac{8}{3} = 0.$

Введем обозначение $2\pi t = z$:

$$3z^2 - 16\cos z + 16 = 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$3z^2 = 16(\cos z - 1).$$

В левой части уравнения неотрицательное число, а в правой части — не положительное. Получим равносильную систему

$\begin{cases} 3z^2 = 0, \\ \cos z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ z = 0,$ т.е. $t = 0$ — единственное решение уравнения (4.2).

3. При $a = \dfrac{2}{3}$ имеем

$$2\pi^2 t^2 + \frac{8}{3}\cos 2\pi t - \frac{8}{3} = 0$$

или с заменой $2\pi t = z$:

$$3z^2 + 16\cos z - 16 = 0,$$

$$3z^2 = 16(1 - \cos z),$$

$z = 0$ — корень уравнения.

Если $z = \pi$, то $3\pi^2 < 32 = 16(1 - \cos\pi)$,

если $z = 2\pi$, то $12\pi^2 > 0 = 16(1 - \cos 2\pi)$.

Следовательно, на промежутке $(\pi; 2\pi)$ уравнение имеет еще один корень. Таким образом, $a = \dfrac{2}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 0$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

Пример 4.10. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \le -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение [8].

Решение. Неравенство содержит четные функции относительно переменной x и, следовательно, имеет единственное решение при $x = 0$.

Пусть $x = 0$, тогда

$$\frac{9}{a+1} + a - 5 \le 0,$$

$$\frac{(a-2)^2}{a+1} \le 0,$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}.$$

При $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$ исходное неравенство содержит среди решений $x = 0$. Найдем a, при которых $x = 0$ — единственное решение неравенства.

1. $a = 2$.

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{2+\cos x} - 2.$$

Умножим обе части неравенства на $(2 + \cos x)$ с сохранением знака, т.к. $2 + \cos x > 0$:

$$x^2 + 9 - 2\sqrt{x^2+9}(2+\cos x) + \cos^2 x + 4\cos x + 4 \le 0.$$

Свернем левую часть неравенства по формуле «квадрат разности»:

$$(\sqrt{x^2+9} - (\cos x + 2))^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} = \cos x + 2. \qquad (4.3)$$

Так как $\sqrt{x^2+9} \ge 3,$ а $\cos x + 2 \le 3,$ то уравнение (4.3) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} = 3, \\ \cos x + 2 = 3, \end{cases}$$

единственным решением которой является $x = 0$.

2. $a \in (-\infty; -1)$. Можно заметить, что в левой части неравенства при подстановке любого x получается число не превосходящее –5, а в правой части при данных значениях параметра получается положительное число. Имеем $x \in \mathbb{R},$ что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 2$.

<u>Пример 4.11</u>. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение [4].

Решение. Система инвариантна относительно замены x на $-x$, т.к. переменная x содержится в уравнениях системы только в качестве аргумента четных функций. Поэтому если пара $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ тоже будет являться решением. Значит, единственным решением системы может быть только пара вида $(0; y_0)$.

Потребуем выполнения необходимого условия существования единственного решения системы.

Пусть $x = 0$, тогда

$$\begin{cases} 3=5y-5a, \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{2}{5}, \\ y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\dfrac{8}{5}, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверим, что при найденных значениях параметра система, действительно, имеет ровно одно решение.

1. При $a=\dfrac{2}{5}$ система принимает вид

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|=5y+3x^2, \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2^{|x|}-y)=3|x|(|x|-1), \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что $|x|\le 1$ и $|y|\le 1$.

С учетом полученных ограничений на переменные x и y можно утверждать, что левая часть первого уравнения системы принимает неотрицательные значения, а правая — не положительные. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} 2^{|x|} - y = 0, \\ 3|x|(|x|-1) - 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases} \end{array} \right. \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

То есть система при $a = \dfrac{2}{5}$ имеет единственное решение.

2. При $a = -\dfrac{8}{5}$ получим

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| = 5y + 3x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы представляется весьма затруднительным. Но нетрудно убедиться, что помимо прогнозируемого решения (0; –1) система имеет, как минимум, еще одно решение (1; 0), что уже противоречит условию.

Ответ: $a = 0{,}4$.

<u>Пример 4.12</u>. Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - a x^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра a и решите систему при найденном значении параметра [9].

Решение. Из первого уравнения системы получаем

$$2^{\ln y} = 4^{|x|} \Leftrightarrow y = e^{2|x|}.$$

Заметим, что если пара (x; y) — решение системы, то пара ($-x$; y) — также решение этой системы.

Следовательно, единственным решением системы может быть только пара вида (0; y).

Пусть $x = 0$, тогда из второго уравнения получаем:

$$\log_2(2a^2)=\log_2 1+1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2)=1 \Leftrightarrow 2a^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=-1. \end{array}\right.$$

Проверим, действительно ли система при найденных значениях a имеет единственное решение.

1. Если $a = 1$, то система имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4y^2+2)=\log_2(1-x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2=2-2x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4+2x^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (т.к. } y>0).$$

Тогда $y=e^0=1$.

2. Если $a = -1$, то система имеет три решения:

$$\log_2(x^4y^2+2)=\log_2(1+x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2=2+2x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4-2x^2)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2=0 \text{ (т.к. } y>0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\sqrt{2}, \\ x=-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Каждому из найденных значений x соответствует единственное значение $y=e^{2|x|}$.

Ответ: система имеет единственное решение (0; 1) при $a = 1$.

Заключение

В диссертации был систематизирован материал по применению свойств функций для решения уравнений, неравенств и их систем. Часть приведенных в работе утверждений имеют авторские формулировки. Было разработано около 50 задач. К другим задачам, преимущественно предлагавшимся в качестве задач высокого уровня сложности на ЕГЭ, даны подробные обоснованные решения.

Описываемые в работе методы прошли апробацию в классах физико-математического профиля лицея при ТПУ. Материал по функциональным методам решения уравнений и неравенств был включен как в основную часть курса математики 10 класса, так и в программу специального курса «Элементы теории функций. Задачи с параметрами» для 11 класса. Следует отметить, что школьники, прошедшие подготовку по данной теме, успешно справились с заданиями высокого уровня сложности (задание № 18) на едином государственном экзамене профильного уровня по математике 2019 г. Из 53 человек (два класса) на максимальные 4 балла выполнили задание 33 человека (62 %), 2 балла получили 9 человек (17 %), 1 балл — 10 человек (19 %), 0 баллов — 1 человек (2 %). При этом средний процент выполняемости этого задания на ЕГЭ по математике в 2019 году в России составил 4,2 %.

Результаты диссертационной работы были представлены на:

– Всероссийской молодежной научной конференции «Все грани математики и механики» (2019, 2020 гг.), в апреле 2019 г. вышла статья «Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем» (авторы Киреенко С.Г., Гриншпон Я.С.) в сборнике материалов конференции;

– Региональном семинаре для учителей Томской области «Технологии формирования современных образовательных результатов старшеклассников средствами учебных (ключевых) задач» (20 февраля 2020 г.);

– LXXIII Всероссийской конференции с международным участием «Герценовские чтения» (апрель 2020 г.), статья «Развитие гибкости мышления учащихся при решении задач с параметрами путем применения различных свойств функций» (авторы Гриншпон Я.С., Киреенко С.Г.) принята в печать.

Кроме того, опыт по применению функциональных методов решения задач был неоднократно представлен на курсах повышения квалификации для учителей Томской области, в частности 23 и 24 марта 2020 г. — для учителей математики г. Северска, 25 марта 2020 г. — для учителей г. Томска и Томского района (дистанционно).

По результатам исследования готовится методическое пособие, которое окажет помощь в образовательном процессе как ученикам старших классов, так и учителям.

Список литературы

1. Азаров А.И., Гладун О.М., Кремень Ю.А., Федосенко В.С. Алгебраические уравнения и неравенства: Учебное пособие. – Минск: ООО «Тривиум», 1997. – 128 с.
2. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. – Минск: ООО «Асар», 2002. – 464 с.
3. Киреенко С.Г., Гриншпон Я.С. Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сборник статей / Под ред. А.В. Старченко. – Томск: Издательский дом ТГУ, 2019. – С. – 249–257.
4. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2009. – 368 с.
5. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10–11 классы: Учебно-методическое пособие. – М.: Дрофа, 2002. – 192 с.
6. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2012. Функция и параметр // http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.html
7. Шестаков С.А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2020. – 288 с.
8. Диагностические работы и тексты пробных ЕГЭ по математике 2013–2020 гг. [Электронный ресурс] // URL: http://alexlarin.net/
9. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] // URL: http://ege.sdamgia.ru

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: grinshpon@mail.ru / ID: 5795560
Проверяющий: (grinshpon@mail.ru / ID: 5795560)

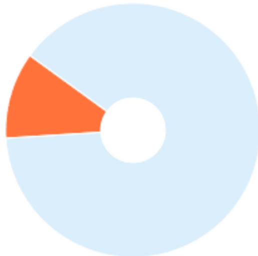
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 16
Начало загрузки: 13.06.2020 06:49:51
Длительность загрузки: 00:00:02
Имя исходного файла: Dissertation_.pdf
Название документа: Dissertation_
Размер текста: 1 кБ
Символов в тексте: 75547
Слов в тексте: 10148
Число предложений: 549

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 13.06.2020 06:49:54
Длительность проверки: 00:00:02
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ 11,46%

САМОЦИТИРОВАНИЯ 0%

ЦИТИРОВАНИЯ 0%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ 88,54%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	4,92%	5,43%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/acce...	http://vital.lib.tsu.ru	18 Ноя 2019	Модуль поиска Интернет	35	40
[02]	1,86%	3,2%	Типовые задания С5	http://abiturient.ru	24 Сен 2018	Модуль поиска Интернет	17	31
[03]	0,01%	1,46%	скачать	http://nashaucheba.ru	26 Ноя 2017	Модуль поиска Интернет	1	17

Еще источников: 17
Еще заимствований: 4,67%