На правах рукописи

**Чирков Артём Олегович**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО РАЗВИТИЯ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРОЦЕССА НА РАЗЛИЧНЫХ СТАДИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В НИЗКОУГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЯХ И АРМКО-ЖЕЛЕЗЕ

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук
**Еремин Михаил Олегович**

**Официальные оппоненты:**

**Пономарев Сергей Васильевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», отдел 20 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики, заведующий отделом

**Уцын Григорий Евгеньевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра механики и графики, доцент

**Пантелеев Иван Алексеевич**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория цифровизации горнотехнических процессов «Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук» – филиала ПФИЦ УрО РАН, заведующий лабораторией

Защита состоится 28 ноября 2025 года в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.1.1.01», созданного на базе физико-технического факультета федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 10 ТГУ, аудитория 407).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/ea77dcb5-1a47-472b-812d-58102eab08a4

Автореферат разослан « ____ » октября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Усанина Анна Сергеевна

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность и степень разработанности темы диссертации.**

При производстве деталей машин и механизмов, качество конечной продукции значительно снижается за счет неоднородного развития пластической деформации в пределах изготавливаемых деталей. Так, например, при штамповке деталей из низкоуглеродистых сталей зачастую формируются области локализации пластической деформации, известные как «деформации растяжения», которые становятся областями формирования трещин при эксплуатации. Эксперименты, выполненные отдельными коллективами как российских, так и зарубежных ученых убедительно свидетельствуют о том, что неоднородное развитие пластической деформации наблюдается на различных стадиях пластического течения. Хотя данная точка зрения поддерживается не всеми учеными, занятыми в области физики и механики пластического течения, неоднородность развития пластической деформации обуславливает актуальность изучения закономерностей, присущих различным стадиям. Актуальность темы диссертации также обеспечивается необходимостью разработки практических методов контроля неоднородного и неустойчивого развития пластической деформации.

Значительный вклад в исследование процессов неоднородного развития пластической деформации внесли научные коллективы таких российских учёных как А.А. Ильюшин, Ю.Н. Работнов, В.Е. Панин, С.Г. Псахье, В.И. Баженов, А.А. Колесников, Ю.В. Петров и др., чьи работы заложили фундамент для понимания закономерностей пластического течения на различных масштабных уровнях. Также значительный вклад в развитие физики и механики пластического течения внесли коллективы российские ученых М.А. Лебедкина, А. Шибкова, В. Вильдемана, М. Кришталла, О.Б. Наймарка, О.А. Плехова, И.А. Пантелеева, С.В. Панин, Л.Б. Зуева, С.А. Баранниковой, В.И. Данилова, В.А. Скрипняка, П.В. Макарова, Романовой В.А., Балохонова Р.Р., Смолина И.Ю. и др. Существенное развитие теории и экспериментальных исследований локализации деформации выполнены в работах зарубежных исследователей — Г. Людерса, впервые описавшего появление фронтов локализованной пластической деформации при деформировании мягких сталей; Е.О. Холла и Н. Петча, установивших зависимость напряжения течения от размера зерна; А. Портевена и Ф. Ле Шателье, установивших закономерности динамического деформационного старения; А. Коттрелла, разработавшего дислокационную теорию взаимодействия примесных атомов и дефектов кристаллической решётки, а также Д. Тэйлора, Э. Орована, Н. Кабреры, Ф. Набарро, А. Келли и Р. Хирша и др., внёсших существенный вклад в развитие дислокационной теории пластичности. Работы этих авторов оказали значительное влияние на формирование современных представлений о природе неустойчивости пластического течения и механизмах локализации деформации в металлах.

В диссертационной работе поставлены актуальные научные задачи исследования закономерностей неустойчивого развития пластической деформации в сплавах железа на основе численного моделирования различных стадий пластического течения на различных масштабных уровнях. Решение данных задач позволит углубить понимание фундаментальных механизмов пластичности и существенно дополнить экспериментальные данные.

**Предметом** исследования в диссертационной работе является эволюция напряженно-деформированного состояния (далее, НДС) в нагруженных образцах низкоуглеродистых сталей и армко-железа, демонстрирующих неоднородное развитие пластического течения при одноосном растяжении, в том числе, при различных скоростях деформирования с применением современных методов математического моделирования.

**Объектом** исследования являются низкоуглеродистые стали и армко-железа на различных стадиях пластического течения. Отдельный интерес представляют моделирование поздних стадий пластического течения (линейное, параболическое упрочнение, предразрушение) для выявления закономерностей и механизмов формирования очагов разрушения.

**Целью работы** является выявление закономерностей неоднородного развития деформационных процессов при пластическом деформировании низкоуглеродистых сталей и армко-железа методами математического моделирования и влияния неоднородности на формирование критических состояний в твердых телах.

В работе были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Выполнить моделирование распространения фронтов Людерса в образцах низкоуглеродистой стали в условиях одноосного растяжения на макроуровне. Определить характер зависимости длины площадки текучести и скорости распространения фронтов Людерса от параметров определяющего уравнения вида «up-down-up». Сравнить полученные результаты с экспериментальными данными.

2. Разработать модификации математических моделей (на основе ряда ранее опубликованных работ) для описания неоднородного развития деформационного процесса на мезоуровне на стадиях площадки текучести и поздних стадиях пластического течения в образцах из низкоуглеродистых сталей и армко-железа с явным учетом микроструктуры, в том числе, при различных скоростях деформирования.

3. Разработать структурные модели представительных мезообъемов рассматриваемых материалов, в которых распределение зерен по размеру будет соответствовать экспериментальному.

4. Провести серии численных экспериментов по моделированию пластического течения в образцах из низкоуглеродистых сталей и армко-железа с явным учетом микроструктуры, в том числе, при различных скоростях деформирования.

5. Проанализировать результаты моделирования с целью выявления

закономерностей неоднородного развития деформационного процесса на стадиях площадки текучести и поздних стадиях пластического течения на мезоуровне.

**На защиту выносятся:**

1. Совокупность результатов численного моделирования, связывающих длину площадки текучести и скорость распространения фронтов Людерса с параметрами определяющего соотношения вида «up-down-up» (п. 1, 11, 12 паспорта специальности паспорта специальности).

2. Модификация математической модели, позволяющая описывать формирование паттернов локализованного пластического течения, соответствующих различным стадиям пластического течения в низкоуглеродистых сталях и выявляющая механизм распространения фронтов локализованной пластической деформации на мезоуровне (п. 1, 5, 11, 12 паспорта специальности).

3. Модификация математической модели для описания скоростной чувствительности в армко-железе в определенном диапазоне скоростей деформации на основе упрощенного определяющего соотношения релаксационного типа на мезоуровне (п. 1, 5, 11, 12 паспорта специальности).

**Научная новизна:**

1) установлены зависимости скорости фронтов Людерса, длины площадки текучести от параметров определяющего уравнения «up-down-up» на макроуровне;

2) выполнены модификация и синтез ряда ранее опубликованных математических моделей для описания формирования паттернов локализованного пластического течения на различных стадиях в низкоуглеродистых сталях, в том числе показан механизм распространения фронтов Людерса на мезоуровне;

3) предложено упрощенное определяющее уравнение релаксационного типа, позволяющее сократить вычислительные затраты для описания скоростной чувствительности в армко-железе при одноосном растяжении.

**Методы исследований.** Разработанные модификации математических моделей основаны на методах и подходах континуальной механики – теориях упругости и пластичности. Основное внимание уделено неоднородному развитию пластической деформации при деформировании образцов низкоуглеродистых сталей и армко-железа на различных масштабных уровнях. Основным методом решения поставленных задач является трехмерная реализация конечно-разностного метода Уилкинса. Для дизайна модели мезообъемов поликристаллических материалов применен метод пошагового заполнения. В работе также применен ряд стандартных методов математической статистики для обработки результатов моделирования.

**Обоснованность и достоверность** результатов подтверждается серией проведенных тестовых расчетов, верификацией результатов тестовых расчетов по данным других исследователей, валидацией параметров

математических моделей по экспериментальным данным, корректностью физической и математической постановок задач, использованием проверенных численных методов.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость заключается в: 1) установлении зависимости скорости фронтов Людерса и длины площадки текучести от параметров определяющего уравнения; 2) разработанных модификациях и синтезе существующих математических моделей механического поведения низкоуглеродистых сталей и армко-железа в поле приложенных воздействий; 3) установленных закономерностях неоднородного развития пластического течения на различных стадиях на основе математического моделирования отклика представительных мезообъемов с явным учетом микроструктуры при одноосном растяжении, в том числе, при различных скоростях деформирования.

Разработанные модификации математических моделей могут быть напрямую использованы в прикладных пакетах инженерного анализа напряженно-деформированного состояния для расчета механического поведения под нагрузкой образцов из низкоуглеродистых сталей и армко-железа, демонстрирующих неоднородное развитие процесса пластического течения.

**Публикации и гранты.** Представленные в работе результаты получены соискателем при выполнении в качестве основного исполнителя и исполнителя проекта РНФ и проекта РФФИ. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, в том числе 6 статьях в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 4 статьи в зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science, 1 статья в зарубежном научном журнале, входящем в Scopus; 1 статья в российском научном журнале, переводная версия которого входит в Web of Science), 1 статье в сборнике материалов конференции, представленном в издании, входящем в Web of Science; 5 публикациях в сборниках материалов международных и всероссийской научных конференций.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 5 конференциях международного уровня, проходивших на территории РФ и за ее пределами. Среди них: Международная конференция «Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии» (Томск, 2020, 2021); 2nd International Workshop on Plasticity, Damage and Fracture of Engineering Materials (Анкара, Турция, 2021); Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2020); XI Международный онлайн симпозиум «Материалы во внешних полях» (Новокузнецк, 2022).

**Личный вклад автора** заключается в проведении расчетов, обработке результатов расчетов; формулировке основных результатов и выводов по работе. Постановка задач и обсуждения результатов проводились совместно с научным руководителем. В статьях, написанных в соавторстве с научным руководителем, автором выполнен полный объем численного эксперимента, а также обработки, в том числе статистической, результатов моделирования.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка использованной литературы из 123 источников. Работа изложена на 117 страницах, в том числе содержит 47 иллюстраций, 7 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В первой главе** произведен обзор публикаций, посвященных исследованиям неустойчивого развития пластической деформации с помощью различных методов.

Обсуждаются модели, описанные в работах Венмана и Чард-Таки, Халлай и Кириакидес, Романовой и соавт., Шваба и Раффа, Сарма и Анантакришна, Мазьера и соавт., Мао и Ляо. По результатам экспериментальных исследований установлено, что каждая стадия пластического течения демонстрирует определенный характер локализации деформации – существуют специфические закономерности, соответствующие разным стадиям пластического течения. Участок кривой нагружения для низкоуглеродистой стали показан на рисунке 1.

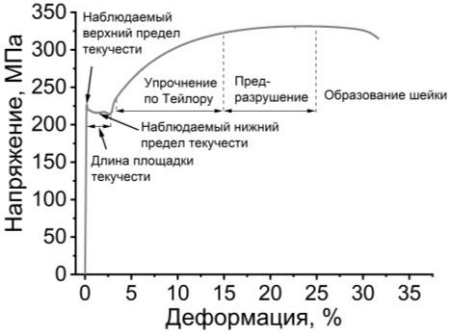



Рисунок 1 – Диаграмма нагружения и стадии пластического течения

Литературный обзор позволил выявить ряд пробелов в существующих теориях, которые не исследованы в полном объеме, и наметить задачи для данной диссертационной работы.

В частности, основными недостатками ранее опубликованных моделей являются следующие:

1) уравнение типа «up-down-up», как правило, задается в виде кусочно-линейной функции с резкими изменениями наклона, при переходе от роста к релаксации напряжений и обратно;

2) не учитывается микроструктура материалов, либо если учитывается, то релаксация напряжений от верхнего до нижнего истинных пределов текучести делается мгновенно, что физически не совсем обоснованно, поскольку существует временной лаг в отклике напряжений на движение дислокаций;

В работе сделана попытка модифицировать и объединить модели, с целью устранения вышеперечисленных недостатков ранее опубликованных математических моделей неустойчивого развития пластического течения.

**Во второй главе** представлена полная математическая постановка краевых задач, сформулированных во введении, включающая решаемые уравнения, начальные и граничные условия. Обсужден метод решения системы уравнений механики деформируемого твердого тела.

В основе математической модели лежит полная система уравнений механики деформируемого твердого тела. Основные уравнения задаются законами сохранения массы (2.1) и импульса (2.2). Система также включает геометрические соотношения для тензоров скоростей деформации (2.3) и завихренности (2.4):

$$\rho_0 V_0 = \rho V, \tag{2.1}$$

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.2}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

$$2\dot{\omega}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{2.4}$$

где $\rho_0$, $\rho$, $V_0$, $V$ – начальные и текущие значения плотностей и объемов, соответственно, $v_i$ – компоненты вектора скорости, $\sigma_{ij}$ – компоненты тензора напряжений Коши, $x_i$ – декартовы координаты.

Уравнения изотропной гипоупругой среды используются в качестве определяющих соотношений. В рамках допущения об изотропном континууме, только две константы входят в уравнение состояния – модуль объемного сжатия, $K$ и модуль сдвига, $\mu$. Значения данных констант могут быть напрямую взяты из эксперимента. Независимо рассчитываются приращения шаровой части (2.5) и девиатора (2.6) тензора напряжений.

$$\dot{P} = -K\dot{\theta}^T, \dot{\theta}^T = \dot{\varepsilon}_{ii}^T \tag{2.5}$$

$$\dot{S}_{ij} + S_{ik}\dot{\omega}_{kj} - S_{kj}\dot{\omega}_{ik} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\dot{V}}{V}\delta_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^P\right) \tag{2.6}$$

где $P$ – гидростатическое давление, $\theta$ – объемная деформация, $S_{ij}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\varepsilon_{ij}^p$ – компоненты тензора пластических деформаций, точка над символами обозначает производную по времени.

Определяющие уравнения для пластических деформаций представлены ниже. Приращение деформаций делится на две части (2.7), где индексы T, E, P – полная, упругая и пластическая деформация, соответственно:

$$d\varepsilon_{ij}^{T} = d\varepsilon_{ij}^{E} + d\varepsilon_{ij}^{P} \quad (2.7)$$

В расчетах применяется критерий текучести Мизеса (2.8) для расчета приращений пластических деформаций (в формуле 2.8 приведен с точностью до численного коэффициента перед параметром Y).

$$f\left(S_{ij}, \gamma^{P}\right) = \tau - Y \quad (2.8)$$

где $f\left(S_{ij}, \gamma^{P}\right)$ – функция текучести, $\tau = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}$ – второй инвариант девиатора тензора напряжений, $Y$ – значение критического напряжения, при котором в среде появляются остаточные деформации. Параметр Y, в общем случае, не является константой, и изменяется в ходе нагружения по определенным законам.

Принимая во внимание определяющее уравнение вида «up-down-up», текущее значение параметра $Y$ в точке континуума задается кусочной функцией (2.9):

$$Y = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{Uy}} & , \quad \gamma^{P} = 0 \\ \sigma_{\mathrm{Uy}} - \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon_{\mathrm{Drop}}} \gamma^{P} & , 0 < \gamma^{P} \leq \varepsilon_{\mathrm{Drop}} \\ \sigma_{\mathrm{Ly}} + k\left(\gamma^{P} - \varepsilon_{\mathrm{Drop}}\right), & \gamma^{P} > \varepsilon_{\mathrm{Drop}} \end{cases} \quad (2.9)$$

где $\sigma_{U_y}$ – истинный верхний предел текучести, $\sigma_{L_y}$ – истинный нижний предел текучести, $\Delta\sigma$ – разница между ними, $\varepsilon_{Drop}$ – значение интенсивности пластической деформации, ограничивающее ширину стадии сброса напряжений от верхнего до нижнего предела текучести, $k$ – коэффициент деформационного упрочнения.

В качестве расширения теории Тейлора Армстронг предложил следующее уравнение для напряжения течения в материале:

$$\sigma(\varepsilon) = m_T \left[\tau_0(\varepsilon) + k_s(\varepsilon) l^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (2.10)$$

где $m_T$ – коэффициент ориентации Тейлора, $\tau_0(\varepsilon)$ – среднее напряжение сдвига на действующих системах скольжения, $k_s(\varepsilon)$ микроструктурное сдвиговое напряжение для передачи пластического течения через границы зерен, и $l^{-\frac{1}{2}}$ средний размер зерна. Выражение в скобках закон Холла-Петча. Модель Армстронга предполагает, что составляющие уравнения являются функциями деформации $\varepsilon$, в частности, пластической деформации $\varepsilon^{P}$. В модели, представленной в диссертации, используется эта идея и также предполагается, что напряжение течения каждого зерна в пределах элемента представительного объема согласуется с законом Холла-Петча. В таком случае в критерии текучести по Мизесу (2.8) напряжение течения описывается уравнением (2.11).

$$Y = Y_1(\gamma^{P}) + k_y(\gamma^{P}) d^{-\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

где $d$ – размер зерна.

Формула для расчета интенсивности пластической деформации $\gamma^{p}$ дана в 2.12а, 2.12б:

$$\dot{\gamma}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (2.12а)$$

$$\gamma^p = \int_0^t \dot{\gamma}^p dt, \quad (2.12б)$$

Компоненты тензора скорости пластической деформации определяются в соответствии с основным уравнением теории пластичности (2.13). Используется ассоциированный закон пластического течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda}\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda}\frac{S_{ij}}{2\tau} \quad (2.13)$$

Множитель $\dot{\lambda}$ определяется в расчетах при выполнении (2.8). В случае динамической формулировки скорости изменения компонентов тензоров используются для вычисления их приращений на каждом временном шаге численного интегрирования. Это дает определенное преимущество динамической постановки задачи – нет необходимости использовать постановку больших деформаций для изучения более поздних стадий пластического течения. Численный код выполняет несколько сотен тысяч шагов по времени, пока не будет достигнута большая макроскопическая деформация образцов.

Кроме того, динамическая постановка позволяет использовать значительно большее количество элементов расчетной сетки, чем в статической, за счет особенностей схемы интегрирования. Последнее дает более подробное описание структурных элементов, таких как границы зерен.

Скорость пластической деформации определяется известным уравнением Орована (2.14), связанным с плотностью подвижных дислокаций $N_m$ и их скоростью $v$:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = gN_m bv \quad (2.14)$$

где $g$ — ориентационный множитель, обычно равный 0,5, $b$ — вектор Бюргерса железа. В работе предложено выполнить свертку компонент тензора девиаторных напряжений во второй инвариант, тем самым снизив число решаемых уравнений с шести до одного:

$$\dot{\tau} = 3\mu(\dot{\gamma}^T - \dot{\gamma}^P) \quad (2.15)$$

где $\dot{\gamma}^P = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P} = \sqrt{\frac{2}{3}}gN_m bv$. В случае ненулевого $\dot{\gamma}^P$, все компоненты девиатора тензора напряжений корректируются так же, как и интенсивность напряжений. В противном случае интенсивность напряжений продолжает расти.

Использовались следующие функции для плотности дислокаций $N_m$, и доли подвижных дислокаций $f$:

$$N = N^* + (N^0 - N^*)\exp\left(-\frac{A}{gb}\gamma^P\right) \quad (2.16)$$

$$f = f^* + (f^0 - f^*)\exp\left(-\frac{B}{gb}\gamma^P\right) \quad (2.17)$$

где $N^0$, $N^*$ — начальная и предельная плотности подвижных дислокаций, соответственно, $f^0$, $f^*$ начальная и предельная доли подвижных дислокаций, соответственно, константа $A$ — средний пробег дислокации до

ее размножения, $B$ обозначает средний путь дислокации до ее остановки. Плотность подвижных дислокаций $N_m = Nf$.

Для описания изменения скорости дислокаций используется эмпирическое соотношение, аппроксимирующее известное уравнение для скорости термоактивированного движения дислокаций:

$$v = v_0 \frac{q^2}{1+q^2} \quad (2.18а)$$

$$q = \frac{\tau_{eff}}{\beta} = \frac{\tau - \tau_{CSS}}{\beta} \quad (2.18б)$$

где $v_0$ —скорость звука, $\beta$ — коэффициент торможения дислокации, его физический смысл — уровень действующего напряжения $\tau_{eff}$, при котором скорость дислокации $v$ асимптотически приближается к скорости звука. Он становится ненулевым, как только τ превышает критическое касательное напряжение сдвига $\tau_{CSS}$. Для описания закономерностей пластического течения необходимо определить функцию вид функции $\tau_{CSS}$. Используется следующее соотношение для критического касательного напряжения:

$$\tau_{CSS} = Y(\gamma^P) + k(\gamma^P) d^{-1/2} \quad (2.19а)$$

$$Y(\gamma^P) = Y_0 + \alpha \mu b \sqrt{N} \quad (2.19б)$$

$$k(\gamma^P) = k_y \left[1 + 4\left\{\left(\frac{\gamma_L}{\gamma_L + \gamma^P}\right)^{2n} - \left(\frac{\gamma_L}{\gamma_L + \gamma^P}\right)^{n}\right\}\right] \quad (2.19в)$$

слагаемые, входящие в уравнения (2.19), учитывают напряжение $Y_0$ как некоторое среднее критическое сдвиговое напряжение на базисных плоскостях скольжения, вклад деформационного упрочнения за счет размножения дислокаций $\alpha \mu b \sqrt{N}$, а также вклад в напряжение течения от границ зерен, через функцию $k(\gamma^P)$. Новизной предлагаемой модели является вид функции $k(\gamma^P)$. Так, на наш взгляд недостатком ранее опубликованных моделей неустойчивого развития пластического течения (которые используются и в данной работе) является то, что уравнение типа «up-down-up» задается в виде кусочной функции. Соотношение 2.19в позволяет описать как стадию сброса напряжений после достижения верхнего предела текучести, так и последующее деформационное упрочнение в рамках единого уравнения. По своей форме соотношение 2.19в соответствует потенциалу межчастичного взаимодействия Леннарда-Джонса.

Моделирование нагружения образцов в данной работы выполнялось в рамках трехмерного конечно-разностного метода Уилкинса.

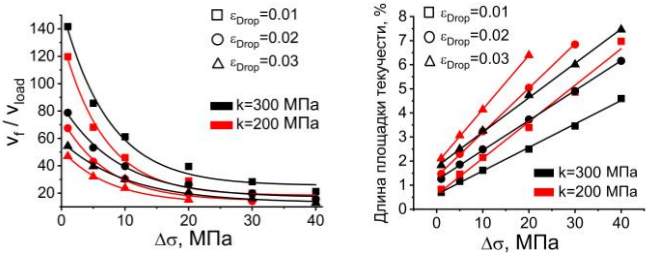
**В третьей главе** проведено численное исследование некоторых закономерностей неустойчивого развития пластического течения при одноосном растяжении образцов

Результатом исследования влияния параметров определяющего уравнения вида «up-down-up» на длину площадки текучести и скорость распространения фронтов Людерса представляются следующие выводы.

Можно отметить, что чем выше $\Delta\sigma$, тем выше значение сброса макроскопических напряжений и длиннее площадка текучести на макроскопической кривой нагружения.

Полученные значения также удовлетворяют эмпирическому правилу $\Sigma v_f/v_l \approx 1/\varepsilon_L$, предложенному Батлером.

Можно отметить, что длина площадки текучести увеличивается с увеличением $\varepsilon_{Drop}$ и с уменьшением коэффициента деформационного упрочнения $k$ при фиксированных значениях параметра $\Delta\sigma$. Другими словами, чем больше происходит локальное падение прочности на сдвиг, тем дольше будет восстанавливаться прочность из-за деформационного упрочнения.



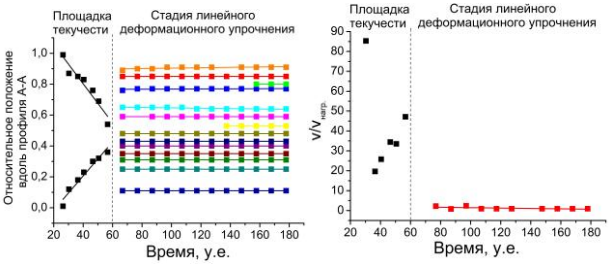

а б

Рисунок 2 – Кривые зависимости отношения $v_f/v_l$ от $\Delta\sigma$ (а), кривые зависимости дли2ны площадки текучести от $\Delta\sigma$ (б) для разных значений $k$ $и$ $\varepsilon_{Drop}$

В результате численного исследования кинетических закономерностей неустойчивого развития пластического течения на стадиях площадки текучести и стадии линейного деформационного упрочнения получены следующие выводы.

Поскольку распределение зерен по размерам играет ключевую роль в закономерностях пластического течения, рассматривается представительный объем с заданным распределением зерен по размерам. Зависимость предела текучести от размера зерна соответствует уравнению Холла-

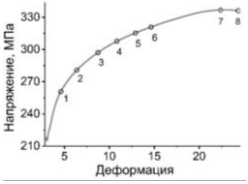
Судя по кинетической диаграмме (рисунок 3а), расчет скорости распространения левого фронта Людерса свидетельствует о ее нестационарности. Среднее интегральное отношение скорости распространения левого фронта к скорости нагружения ≈40 (рисунок 3б). Согласно кинетической диаграмме, скорость второго фронта приблизительно соответствует скорости первого. Следовательно, суммарная скорость их распространения равна ≈80, что согласуется с эмпирическим соотношением Батлера и другими экспериментальными данными, для длины площадки текучести, наблюдаемой на диаграмме нагружения.




а б

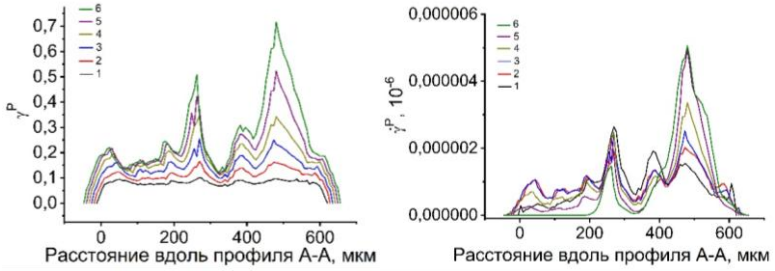
Рисунок 3 – Кинетическая диаграмма, полученная при моделировании (а), отношение максимумов скоростей пластической деформации к скорости нагружения для одного из фронтов (левого) (б)

На пространственной картине распределения компоненты тензора деформации, действующей вдоль направления нагружения, видно постоянство положения максимумов и минимумов. Неподвижность указывает на то, что подводимая энергия уходит на накачку имеющихся зон локализации деформации, а не на их перемещение. Аналогичный характер наблюдается при численном моделировании




а

б




в г

Рисунок 4 – Деформационное упрочнение на кривой нагружения (а), картины пластической деформации для моментов 1, 3, 5 (б), $\gamma^P$ - профиль для моментов 1–6 (в), $\dot{\gamma}^P$ -профиль для моментов 1–6 (г)

Анализ распределения пластических деформаций на поздних стадиях пластического течения важен по причине становления некоторых максимумов ведущими максимумами. Последнее создает предпосылки для раннего выявления потенциального очага макроскопического разрушения

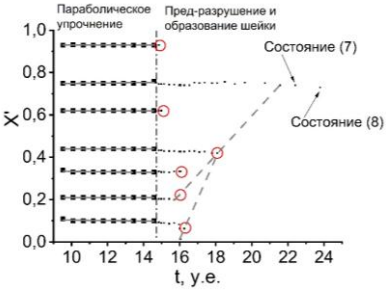



Рисунок 5 – Диаграмма относительное смещение-время для стадии параболического деформационного упрочнения, пред-разрушения и образования шейки

Полученные результаты численного моделирования хорошо согласуются как с экспериментальными данными, так и с аналитическими и численными исследованиями.

**В четвертой главе** проведено численное исследование закономерностей неустойчивого развития пластического течения в низкоуглеродистых сталях и армко-железе с явным учетом микроструктуры при различных скоростях деформирования

В разделе были интерпретированы экспериментальные данные, полученные Надежкиным М.А., и модифицированы методы для валидации параметров определяющего уравнения в точке, позволяющие согласовать результаты моделирования с экспериментом на макроскопическом уровне.

Модель представительного мезообъема поликристаллической стали была разработана с использованием метода пошагового заполнения с законом роста зерен 4й степени (бисферический).

Стандартный метод пошагового заполнения несколько дополняется. Каждая группа зерен выращивается отдельно от остальных со своей скоростью роста. Когда зерна с некоторой скоростью роста (из одной группы) полностью выращены, часть зерен могут выходить за диапазон размеров этой группы. Эти зерна удаляются из мезообъема, освобождая пространство для роста зерен из других групп и т.д.

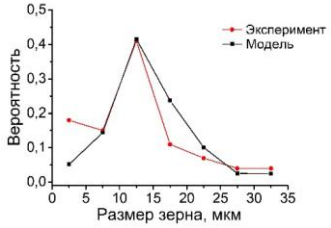



Рисунок 6 – Сравнение экспериментального и модельного распределений зерен по размерам

Таблица 1 – Параметры модели

| $\rho_0$, г/см$^3$ | $E$, ГПа | $\nu$ | $k_{yUp}$, МПа$\sqrt{\text{м}}$ | $k_{yLow}$, МПа$\sqrt{\text{м}}$ | $\gamma_L$ | $\theta$, МПа | $Y_0$, МПа |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7.846 | 210 | 0.3 | 0.488 | 0 | 0.0124 | 316 | 50.11 |

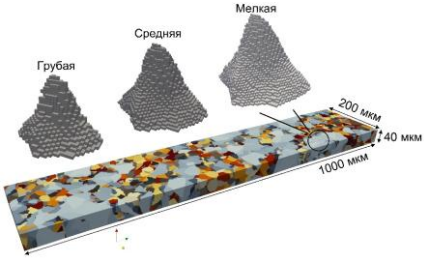



Рисунок 7 – Расчетная область с размерами и увеличенной вставкой одного из зерен в модели, аппроксимированной грубой, средней и мелкой сетками, соотношение сторон в модели сохраняется таким же, как и для лабораторного образца; размеры представлены на рисунке, общее количество зерен 3230.

Когда деформирующее напряжение на макроскопически еще упругой стадии кривой нагружения близко к уровню будущего наблюдаемого нижнего предела текучести, можно ожидать, что некоторые зерна перейдут в пластическое состояние. Данный эффект обнаруживается экспериментально, когда первые линии скольжения в зернах появляются существенно раньше, чем зарождается фронт Людерса. Это происходит из-за неизбежных концентраций напряжений и обычно находится в диапазоне деформирующего напряжения $\approx 0.7\sigma_L - 0.9\sigma_L$

В случае микромасштабного моделирования закономерности пластического течения сильнее обусловлены особенностями зеренного строения.

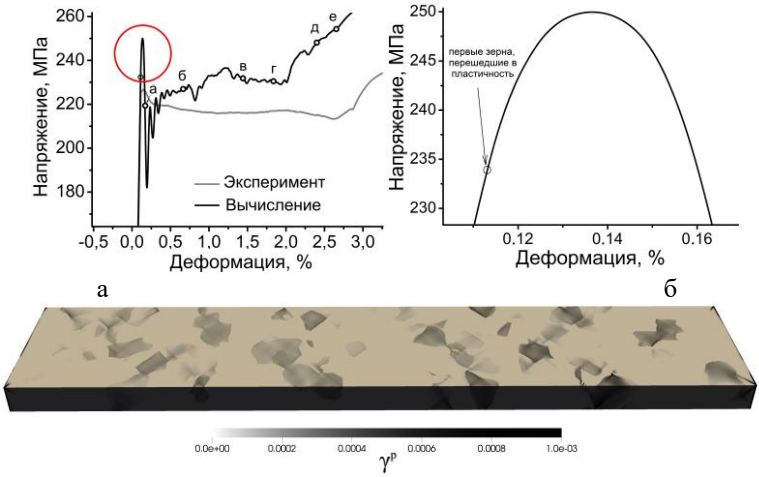



Рисунок 8 – Участок кривой нагружения, соответствующий стадии площадки текучести (а), увеличенная кривая нагружения в области верхнего предела (б), распределение пластической деформации в момент времени незадолго до достижения верхнего предела текучести (в).

Пластическая деформация распространяется через сеть более крупных зерен, и только после этого более мелкие зерна вовлекаются в процесс пластического деформирования. Этот механизм также в целом объясняет неравномерность фронтов Людерса и возможность образования сложных полос.

По наблюдаемому распределению $\sigma_{zz}$-компоненты можно сделать следующий вывод. Фронт полосы Людерса можно рассматривать как узкую область, при переходе через которую производная от напряжения по деформации $\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma}$ дважды меняет свой знак. Последнее обстоятельство представляет собой необходимое условие для распространения фронта Людерса как волны переключения. Достаточным условием является восстановление напряжения сразу за фронтом за счет деформационного упрочнения до уровня напряжения наблюдаемого нижнего предела текучести перед фронтом;

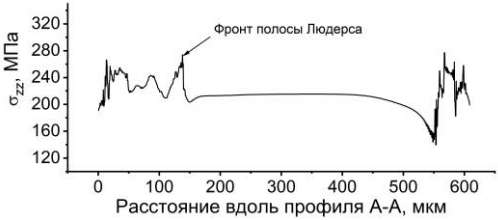
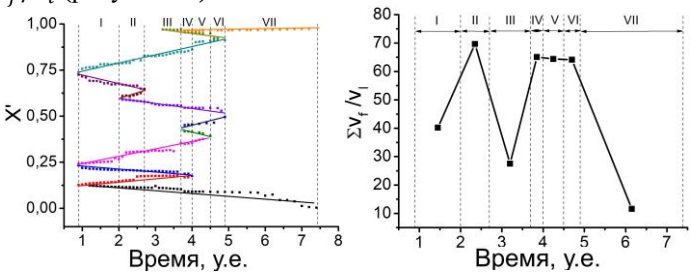



Рисунок 9 – Распределение $\sigma_{zz}$-компоненты тензора напряжений вдоль профиля А–А сразу после состояния (в) на рисунке 8.

Для изучения кинетики распространения фронта были вычислены «мгновенные» значения отношений скорости фронтов Людерса к скорости нагружения $v_f/v_l$ (рисунок 10).




а б

Рисунок 10 – $X' - t$ диаграмма фронтов полос Людерса на стадии площадки текучести (а), отношения интегральных скоростей фронтов полос Людерса к скорости $\sum v_f/v_l$ на разных подэтапах I-VII (б).

Как только полосы Людерса проходят через весь образец, их движение полностью прекращается с началом макроскопической стадии деформационного упрочнения по Тейлору.

Результаты численного исследования скоростной чувствительность армко-железа в условиях одноосного растяжения

Экспериментальная часть исследования в данном разделе выполнена Даниловым В.И.

Метод пошагового заполнения с бисферическим законом роста был использован для дизайна представительного мезообъема армко-железа.

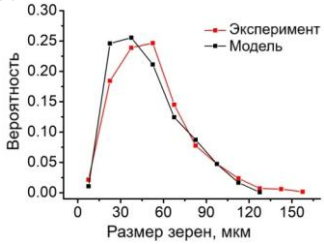



Рисунок 11 –Сравнение экспериментального и модельного распределений зерен по размерам (б)

В таблице 2 приведены параметры модели. Параметры имеют ясный физический смысл и связывают макроскопическое пластическое течение с динамикой дислокаций. Моделирование скоростной чувствительности без использования уравнения релаксационного типа невозможно.

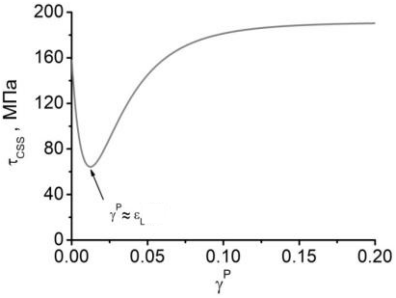



Рисунок 12 – Функция $\tau_{CSS}$ в точке со средним размеров зерна в процессе развития пластического течения

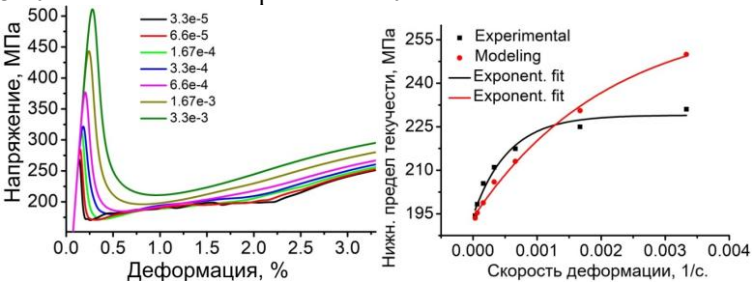
Таблица 2 – Параметры модели

| | |
|---|---|
| $\rho_0$, г/см$^3$ | 7.84 |
| $K$, ГПа | 172 |
| $\mu$, ГПа | 79 |
| $N^0$, 1/см$^2$ | $10^8$ |
| $N^*$, 1/см$^2$ | $2.5 \cdot 10^{10}$ |
| $f^0$ | 1 |
| $f^*$ | 0.75 |
| $\frac{A}{gb}$ | 30 |
| $\frac{B}{gb}$ | 190 |
| $\gamma_L$ | 0.085 |
| $k_y$, МПа$\sqrt{\text{м}}$ | 0.8 |
| $Y_0$, МПа | 53 |
| n | 6 |
| $v_0$, км/с | 3230 |
| $\beta$, ГПа | 4 |
| $\alpha$ | 0.1 |

При повышении скорости деформации, каждая последующая кривая напряжение-деформация идет выше предыдущей. Это свидетельствует о качественном согласии результатов с более ранними моделями. При этом видно, что чем выше скорость деформации, тем более гладкой является кривая напряжения-деформации.

В диапазоне скоростей деформации от $3 \cdot 10^{-5}$ 1/с до $1.67 \cdot 10^{-3}$ 1/с наблюдается согласие результатов моделирования с экспериментом. Разница в оценке не превышает 5%, для первых двух скоростей деформации составляет менее 2% (таблица 3). Дальнейшее увеличение скорости деформации приводит к более значительному отклонению результатов

моделирования от экспериментальных данных. При скоростях деформации выше $3 \cdot 10^{-3}$ 1/с отклонение превышает 10%.




а б

Рисунок 13 – Набор кривых напряжение-деформация на стадии площадки текучести для различных скоростей деформации, полученных с помощью численного моделирования (а), сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными (б).

Таблица 3 – Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными. Доверительный интервал для экспериментальных значений составляет +/- 10 %

| Скорость деформации, 1/с | Нижний предел текучести (экспер.), МПа | Нижний предел текучести (модель) , МПа |
|---|---|---|
| $3.3 \cdot 10^{-5}$ | 194.3 | 193.5 |
| $6.6 \cdot 10^{-5}$ | 198.3 | 195.3 |
| $1.6 \cdot 10^{-4}$ | 205.4 | 198.7 |
| $3.3 \cdot 10^{-4}$ | 211 | 205.9 |
| $6.6 \cdot 10^{-4}$ | 217.4 | 213 |
| $1.67 \cdot 10^{-3}$ | 225 | 230.5 |
| $3.33 \cdot 10^{-3}$ | 231 | 249.9 |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведен комплекс численных исследований, цель которых заключалась в установлении закономерностей неоднородного развития пластического течения в низкоуглеродистых сталях и армко-железе.

В результате решения сформулированных зада получены следующие результаты и выводы:

1. Представлена модель, объединяющая и дополняющая известные ранее подходы в описании закономерностей пластического течения на разных стадиях.

2. Значение отношения v_f/v_l уменьшается с увеличением Δσ. Длина площадки текучести увеличивается с увеличением ε_Drop и

уменьшением коэффициента деформационного упрочнения k при фиксированных значениях параметра Δσ.

3. Взаимное расположение максимумов скорости пластической деформации не меняется на стадии деформационного упрочнения.

4. Численно выявлен механизм распространения фронтов Людерса при нагружении мезообъемов с явным учетом зеренной структуры материала.

5. Необходимым и достаточным условием распространения фронта Людерса является падение напряжения в области, только что перешедшей в пластичность, и его дальнейшее восстановление до наблюдаемого нижнего предела текучести на некотором расстоянии от фронта.

6. Стадия пред-разрушения характеризуется последовательным переключением деформационной активности на место будущего макроскопического разрушения. Более сильные максимумы скоростей пластической деформации становятся более явными, более слабые максимумы при этом затухают.

Будущие направления работы связаны со статистической обработкой результатов моделирования методами теории нелинейных динамических систем, в частности, построение амплитудно-частотных характеристик, анализ распределений с тяжелыми хвостами, построение фазовых портретов системы. Также планируется привлечение методов термодинамики необратимых процессов для исследования динамики производства энтропии при неустойчивом развитии пластического течения в сплавах железа и смежных материалах.

## СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:*

1. Макаров П. В. Автосолитонная концепция сейсмического процесса. Часть 2. Численные исследования генерации и распространения медленных деформационных автосолитонных возмущений / П. В. Макаров, И. Ю. Смолин, Ю. А. Хон, М. О. Еремин, Р. А. Бакеев, А. Ю. Перышкин, В. А. Зимина, А. Чирков, А. А. Казакбаева, А. Ж. Ахметов // Физическая мезомеханика. – 2021. – Т. 24, № 1. – С. 18–36. – DOI: 10.24412/1683-805X-2021-1-18-36. – 1.33 / 0.24 а.л.

*в переводной версии журнала, входящей в Web of Science*:

Makarov P. V. Autosoliton View of the Seismic Process. Part 2. Possibility of Generation and Propagation of Slow Deformation Autosoliton Disturbances in Geomedia / P. V. Makarov, I. Y. Smolin, Y. A. Khon, M. O. Eremin, R. A. Bakeev, A. Y. Peryshkin, V. A. Zimina, **A. Chirkov**, A. A. Kazakbaeva, A. Z. Akhmetov // Physical Mesomechanics. – 2021. – Vol. 24, is. 4. – P. 375–390. – DOI: 10.1134/S1029959921040044.

2. Eremin M. Mesomechanical Aspects of the Strain-Rate Sensitivity of Armco-Iron Pulled in Tension / M. Eremin, **A. Chirkov**, V. Danilov // Crystals. – 2023. – № 13 (6). – Article number 866. – 14 p. – URL: https://www.mdpi.com/2073-4352/13/6/866 (access date: 29.09.2025). – DOI: 10.3390/cryst13060866. – 1.6 / 0.53 а.л. (*Web of Science*).

3. Eremin M. O. Mesoscale Computational Study of the Parabolic Hardening Stage of Plastic Flow in a Low-Carbon Steel / M. O. Eremin, **A. O. Chirkov** // Russian Physics Journal. – 2023. – Vol. 65, № 11. – P. 2010–2015. – DOI: 10.1007/s11182-023-02863. – 0.76 / 0.32 а.л. (*Web of Science*).

4. **Chirkov A. O.** Influence of Up-down-up Constitutive Equation Parameters on Yield Plateau Stage of Mild Steel Samples Subjected to Stretching / **A. O. Chirkov**, M. O. Eremin // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8, is. 4. – P. 1315–1323. – DOI: 10.22055/jacm.2022.39944.3492. – 0.79 / 0.39 а.л. (*Web of Science*).

5. Eremin M. O. Microstructure-based finite-difference analysis of the plastic flow in low-carbon steel / M. O. Eremin, **A. O. Chirkov**, M. V. Nadezhkin, L. B. Zuev // European Journal of Mechanics – A /Solids. – 2022. – Vol. 93, is. 4. – Article number 104531. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2022.104531. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0997753822000249?via%3Dihub (access date: 29.09.2025). – 1.53 / 0.38 а.л. (*Web of Science*).

6. **Chirkov A.** Numerical modeling of kinetic regularities of yield plateau and linear work hardening stages during tension of mild steel samples / **A. Chirkov**, A. Pazhin, M. Eremin // Procedia structural integrity. – 2021. – Vol. 31. – P. 80–85. – DOI: 10.1016/J.PROSTR.2021.03.013. – 0.39 / 0.13 а.л. (*Scopus*).

*Статья в сборнике материалов конференции, представленном в издании, входящем в Web of Science*:

7. **Chirkov A. O.** Dependence of a Lüders band propagation rate and Lüders elongation on model parameters in a low carbon steel sample / **A. O. Chirkov** // AIP Conference Proceedings. – 2020. – Vol. 2310, is. 1 : Proceedings of the International conference on physical mesomechanics. Materials with multilevel hierarchical structure and intelligent manufacturing technology. Tomsk, Russia, October 05–09, 2020. – Article Number 020062. – 4 p. – URL: https://pubs.aip.org/aip/acp/article-abstract/2310/1/020062/781594/Dependence-of-a-Luders-band-propagation-rate-and?redirectedFrom=fulltext (access date: 29.09.2025). – DOI: 10.1063/5.0034254. – 0.31 а.л.

*Статьи в сборниках материалов конференций:*

8. **Чирков А.** Конечно-разностный анализ стадии площадки текучести и поздних стадий деформационного упрочнения в низкоуглеродистой стали с учетом микроструктуры / А. Чирков, М. О. Ерёмин // Физическая мезомеханика материалов. Физические принципы формирования многоуровневой структуры и механизмы нелинейного поведения : тезисы докладов международной конференции. Томск, 05–08 сентября 2022 г. – Новосибирск, 2022. – С. 369–370. – DOI: 10.25205/978-5-4437-1353-3-221. – 0.08 / 0.03 а.л.

9. **Чирков А. О.** Моделирование кривой течения стали 08пс с явным учетом структуры материала на мезоуровне / А. О. Чирков, М. О. Еремин, М. В. Надежкин // Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии : тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения основателя и первого директора ИФПМ СО РАН академика В. Е. Панина в рамках Международного междисциплинарного симпозиума «Иерархические материалы: разработка и приложения для новых технологий и надежных конструкций». Томск, 05–09 октября 2020. – Томск, 2020. – С. 56. – 0.06 / 0.02 а.л.

10. **Чирков А. О.** Кинетические закономерности стадий площадки текучести и линейного упрочнения при растяжении стальных образцов. Численное моделирование / А. О. Чирков, М. О. Ерёмин // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос: тезисы докладов. Сочи, 03–12 сентября 2021 г. – Москва, 2021. – С. 152. – 0.1 / 0.04 а.л.

11. **Чирков А. О.** Investigation of the dependence of the lüders band front slope on the parameters of up-down-up equation / А. О. Чирков, М. О. Ерёмин, A. Pazhin // Актуальные вопросы прочности : сборник тезисов LXIV Международной конференции. Екатеринбург, 04 апреля 2022 г. – Екатеринбург, 2022. – С. 152–154. – 0.12 / 0.04 а.л.

12. Еремин М.О. Моделирование скоростной чувствительности армко-железа при растяжении // М. О. Еремин, **А. О. Чирков**, В. И. Данилов // Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии : тезисы докладов международной конференции. Томск, 11–14 сентября 2023 г. – Томск, 2023. – С. 260. – 0.07 / 0.02 а.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 7904 от «02» октября 2025 г. Тираж 100 экз.
г. Томск, Московский тр. 8, тел. (3822) 53-15-28
publish.tsu.ru