

На правах рукописи



Сатин Яков Александрович

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ
ПРЕДЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ**

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Вологодский государственный университет».

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Зейфман Александр Израилевич

Официальные оппоненты:

Дудин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, научно-исследовательская лаборатория прикладного вероятностного анализа, заведующий лабораторией

Гайдамака Юлия Васильевна, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», кафедра теории вероятностей и кибербезопасности, профессор

Моисеева Светлана Петровна, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра теории вероятностей и математической статистики, заведующий кафедрой

Барабанова Елизавета Александровна, доктор технических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, лаборатория 49 «Инфраструктурных систем», заведующий лабораторией

Защита диссертации состоится 24 апреля 2025 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.1.2.01», созданного на базе Института прикладной математики и компьютерных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 104).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/8dde69f7-0dd7-4e5e-bbfd-82dee9ea6e92>

Автореферат разослан « _____ » февраля 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
доцент



Пауль Светлана Владимировна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи, связанные с обслуживанием большого объема однородных требований, возникают в самых разнообразных направлениях исследований: технике, экономике, организации производства. Первые исследования по этой тематике, как известно, были проведены датским ученым А.К. Эрлангом в начале двадцатого века. Для решения проблем такого рода в середине 20-го века была создана ветвь прикладной теории вероятностей, известная как теория массового обслуживания (ТМО, англоязычный термин – теория очередей). Основные цели исследований этой науки заключаются в оптимальном выборе структуры системы и организации обслуживания.

В наше время ТМО применяется, в частности, для прогнозирования показателей производительности больших предприятий; для построения локальных сетей, связывающих компьютеры в офисах средних размеров; для проектирования компьютерных архитектур высокого уровня; для анализа производительности и планирования задач стохастического разветвления в мультимедийных системах; для анализа распределения процессоров в многопрограммных системах параллельной обработки и для моделирования политики обслуживания в распределенных системах, для оценки параметров и оптимизации современных сетей связи.

В частности, модели ТМО применяются для реализации облачной сети радиодоступа, поддерживающей обработку основной полосы частот нескольких распределенных антенн, решения проблемы оптимального планирования поступающего задания в наборе однородных односерверных очередей, анализа времени ожидания и времени ответа в параллельных системах массового обслуживания с непрерывным временем. Такие модели изучались в работах ряда авторов, в том числе N.J. Dingle, F. Gullemin, P.G. Harrison, L. Huang, W.J. Knottenbelt, A.S. Lebrecht, R. Nelson, V.Q. Rodriguez, A.N. Tantawi, D. Towsley, Q. Xu, Z. Zang, S. Zertal. В системах массового обслуживания такого типа есть узлы, через которые в процессе обработки проходят запросы (требования). Требования могут различаться по назначению и характеристикам. Они могут накапливаться (находиться в очередях) и ожидать обслуживания, или покидать необслуженными очередь и затем повторно поступать. Количество запросов обычно весьма велико. Они могут приходить неравномерно. Различные узлы могут обслуживать различные типы требований за разное время. Все это делает такие системы сложными для изучения и управления, и проследить все причинно-следственные связи в них не представляется возможным. Помимо этого, в ситуациях, приближенных к реальности, интенсивности поступления и обслуживания требований во многих ситуациях зависят от времени (в частности, являются периодическими), такие ситуации начали изучаться еще в 1930-х годах (начиная с работ А.Н. Колмогорова), а в последние десятилетия исследуются особенно активно.

Такие системы могут быть описаны с помощью нестационарных марковских моделей, которые в свою очередь описываются неоднородными марковскими цепями с непрерывным временем.

Как известно, вероятности состояний неоднородной марковской цепи в явном виде можно найти только в исключительных случаях. Одной из наиболее важных задач при изучении таких моделей является исследование асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ вероятностных характеристик системы и, в частности, определение скорости сходимости к предельному режиму. Другой важной задачей является изучение устойчивости вектора распределения вероятностей при изменениях интенсивностей. Третья важная задача состоит в замене модели со счетным числом состояний на аналогичную модель с конечным числом состояний. Решение этих задач позволяет с необходимой точностью найти предельный вектор распределения вероятностей и получить исчерпывающую и достоверную информацию о исходной системе.

Степень изученности проблемы. Термин «теория систем массового обслуживания» принадлежит А. Я. Хинчину. Он изложил основные понятия теории массового обслуживания в своей монографии и является создателем оснований теории массового обслуживания. Первые исследования по этой тематике были проведены в работах А. К. Эрланга. В частности, им были рассмотрены $M/D/1$ и $M/D/k$ модели. Необходимость решения такого рода задач была связана прежде всего с практическими приложениями. Модель $M(t)/M/c$ была введена А.Н. Колмогоровым в 1931 году. Лишь в 1991 году L. Zhang, используя теорию производящих функций, нашел основные вероятностные характеристики для модели $M(t)/M(t)/1$. Примерно в это время W. Stadje аналогично рассмотрел модель $M(t)/M(t)/2$. В 1999 году В.Н. Margolius, применяя подобный подход, смогла построить основные вероятностные характеристики для модели $M(t)/M(t)/c$. Данный подход позволял получать численное решение, но имел низкую точность.

В числе математиков, заложивших основы теории и приложений этой области и сформировавших ее современный облик (в части, близкой к тематике настоящего исследования), следует отметить Л. Г. Афанасьеву, В. В. Анисимова, Г. П. Башарина, А. А. Боровкова, П. П. Бочарова, В. М. Вишневого, Ю. В. Гайдамака, Б. В. Гнеденко, Р. Л. Добрушина, А. Н. Дудина, А. И. Зейфмана, В. В. Калашникова, Н. В. Карташова, А. Н. Моисеева, С. П. Моисееву, Е. В. Морозова, А. А. Назарова, А. В. Печинкина, В. В. Рыкова, К. Е. Самуйлова, О. В. Семенову, В. Г. Ушакова, С. Г. Фосса, M. Neuts, R. L. Tweedie, E. Van Doorn'a, W. Whitt и других.

Развитие вычислительной техники в начале 21 века позволило расширить число изучаемых моделей и применить для их анализа изложенные в диссертации методы. Многие авторы сводили вычисление характеристик моделей к цепям с постоянными или кусочно-постоянными интенсивностями. Ряд авторов исследуют характеристики с помощью имитационного моделирования. Другой численный подход построения характеристик –

«униформизация». Еще один метод построения вероятностных характеристик моделей состоит в решении линейных систем дифференциальных уравнений по известным численным схемам: Рунге-Кутта, Адамса и т.д. Этот подход отличается высокой скоростью вычисления характеристик, и, что очень важно, высокой точностью вычисления. Поэтому он часто выбирается в качестве эталонного в численных экспериментах. Теоретическими аспектами (нуль эргодичность, оценки скорости сходимости, устойчивость) авторы, как правило, не интересуются. А вопрос *самой возможности* построения предельного режима и его непосредственного построения остается открытым.

Отметим, что в диссертации для описания одних и тех же ситуаций употребляются равноправно оба термина: марковская цепь и марковский процесс.

В диссертации основным инструментом при построении предельных характеристик является оценка скорости сходимости к предельному режиму и устойчивости для нестационарных систем обслуживания. Первые исследования в этом направлении инициированы Б. В. Гнеденко. Исследование свойств эргодичности и устойчивости для неоднородных марковских цепей с непрерывным временем, а также приложение этих результатов к моделям массового обслуживания можно найти в работах Н. В. Карташова, А. И. Зейфмана, А. Ю. Митрофанова, Б. Л. Грановского и др.

К настоящему времени существует большое число работ, посвященных усечениям марковских процессов. Попытки усечений связаны с тем, что процессы с конечным числом состояний гораздо лучше изучены, и можно их характеристики численно построить.

Можно выделить следующую особенность марковских цепей со *счётным* числом состояний. Среди них есть, так называемые, нуль эргодичные процессы. Вероятности всех состояний этих процессов стремятся к нулю. Исследования нуль эргодичности можно найти, например, в работе А. И. Зейфмана.

Вышеизложенное определяет актуальность создания теоретических основ для исследования нестационарных марковских моделей, которые в свою очередь описываются неоднородными марковскими цепями с непрерывным временем, и тем самым определяет цель диссертационной работы.

Целью данной работы является разработка математических методов исследования и построения предельных характеристик нестационарных систем массового обслуживания.

Задачи исследования:

1. разработать оригинальные нестационарные математические модели систем массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований;
2. разработать новые и модифицировать существующие алгоритмы и методы построения оценок скорости сходимости к предельному режиму;

3. разработать новые алгоритмы и методы построения оценок двусторонних усечений (аппроксимаций) процессов со счетным или большим конечным числом состояний процессами с меньшим числом состояний;

4. исследовать нестационарные системы обслуживания, описываемые многомерными процессами рождения и гибели; получить оценки для проекций этих процессов, включая оценки скорости сходимости в случаях слабой эргодичности и нуль эргодичности;

5. получить условия и оценки скорости сходимости в нуль эргодическом случае для нестационарных моделей, описываемых процессами со счетным числом состояний;

6. разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа систем массового обслуживания, описываемых неоднородными марковскими процессами, а также для вычисления их основных вероятностных характеристик.

Научная новизна и значимость диссертационной работы.

1. Предложены оригинальные математические модели теории массового обслуживания, позволяющие изучать реальные системы, в которых возможно одновременное поступление и обслуживание произвольного количества требований.

2. Для нестационарных математических моделей модифицированы методы, позволяющие оценивать скорость сходимости к предельному режиму с помощью исключения одного из уравнений прямой системы Колмогорова.

3. Для нестационарных математических моделей впервые разработаны и использованы три новых метода исследования прямой системы Колмогорова: метод «С-матрицы» и две модификации метода логарифмической нормы.

4. Для изучаемых систем массового обслуживания с помощью разработанных методов и модификаций впервые подобраны «весовые» последовательности, позволяющие строить оценки скорости сходимости.

5. Для неоднородных марковских процессов со счётным или большим конечным числом состояний, описывающих нестационарные марковские модели обслуживания, впервые разработаны алгоритмы и методы, позволяющие получать равномерные по времени оценки аппроксимации процессами с меньшим числом состояний. В диссертации данный подход явно продемонстрирован при изучении моделей, описываемых процессами рождения и гибели, моделей с групповым поступлением и обслуживанием требований, моделей с повторным поступлением необслуженных требований, а также ряда других нестационарных систем обслуживания.

6. Предложено использовать понятие модифицированной логарифмической нормы для изучения многомерных процессов путем сведения их к одномерным процессам рождения и гибели. Впервые получены новые условия нуль эргодичности, слабой эргодичности, оценки скорости сходимости к предельному режиму для нелинейных процессов рождения и гибели,

являющихся проекциями многомерных процессов. Показано применение этой методики к изучению систем массового обслуживания.

7. Для новых классов систем массового обслуживания с использованием разработанных методов и модификаций впервые получены условия нуль эргодичности. Эти условия позволяют на практике подбирать параметры систем массового обслуживания так, чтобы избегать ситуаций, при которых число необслуженных требований будет неограниченно расти.

8. С использованием разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов найдены численные значения и построены графики основных вероятностных характеристик рассматриваемых марковских моделей.

Методы исследования. Для проведения диссертационного исследования использовался аппарат следующих дисциплин: математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, дифференциальные уравнения и численные методы.

В диссертации исследуются решения прямой системы Колмогорова, лежащие во множестве стохастических векторов Ω , то есть во множестве векторов с неотрицательными координатами и единичной l_1 -нормой. Для получения оценок основным инструментом является логарифмическая норма оператора и её модификации. Используя эти нормы и перенормировки, доказываются существование предельных характеристик и получаются оценки скорости сходимости к этим характеристикам. Затем, используя эти оценки скорости сходимости, рассматривается возможность аппроксимации процессами с меньшим числом состояний, а также получаются оценки такой аппроксимации. После чего, решая численными методами систему Колмогорова с конечным числом уравнений, приближенно строятся искомые предельные характеристики.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные методы, их модификации и алгоритмы позволяют выполнять анализ широкого класса систем массового обслуживания, которые описываются неоднородными марковскими цепями с непрерывным временем.

В диссертационной работе сделан вклад в теоретические основы методов исследования систем массового обслуживания, описываемых процессами рождения и гибели, процессами с групповым поступлением и обслуживанием требований, процессами с попарным обслуживанием требований, процессами с повторным поступлением необслуженных требований.

С целью широкого применения полученных результатов в научно-исследовательских, проектных организациях и в телекоммуникационных компаниях, на основании теоретических исследований разработаны алгоритмы и программные средства для расчета важнейших для планирования сетей показателей качества обслуживания и показателей качества восприятия пользователей. На отдельные модули программных средств получены свидетельства о государственной регистрации.

Полученные в диссертационном исследовании формулы, в том числе оценки скорости сходимости и аппроксимаций, могут быть использованы при анализе функционирования реальных потоков и телекоммуникационных систем.

Приведенные алгоритмы построения вероятностных характеристик исследуемых математических моделей позволяют оценить параметры систем и, как следствие, дают возможность обоснованного выбора значения параметров сетей, обслуживающих серверов и рабочих станций. Разработанный комплекс программ позволяет строить предельные характеристики этих исследуемых моделей.

Часть результатов диссертационной работы получена при выполнении ряда крупных научно-исследовательских проектов, где автор диссертационной работы являлся руководителем или исполнителем, в том числе, при исследованиях по грантам РФФИ и РНФ.

Положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Математические модели нестационарных систем обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований.

2. Теорема о скорости сходимости для процессов рождения и гибели (теорема 1).

3. Построение специальных весовых последовательностей для оценки скорости сходимости нестационарной системы обслуживания с несколькими серверами (формулы 20 - 24).

4. Теорема о скорости сходимости для нестационарной системы обслуживания с одним сервером и с только попарным обслуживанием требований (теорема 14).

5. Теорема о скорости сходимости к предельному режиму для нестационарной системы обслуживания с несколькими серверами, катастрофами и возможностью дополнительного поступления требований (теоремы 3 и 4).

6. Теоремы об усечениях для процессов рождения и гибели, а также для системы с только попарным обслуживанием требований (теоремы 2, 15).

7. Теорема об усечении для марковской модели системы с повторным поступлением необслуженных требований (теоремы 7 и 8).

8. Теорема об усечении для нестационарной системы обслуживания с несколькими серверами, катастрофами и возможностью дополнительного поступления требований (теорема 5).

9. Теоремы о слабой и нуль эргодичности нестационарной модели с двумя различными классами требований (теоремы 10, 11, 12, 13).

10. Теорема о нуль эргодичности нестационарной модели с повторным поступлением необслуженных требований (теорема 6).

11. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа нестационарных марковских моделей.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается математически корректными формулировками, выводами и доказательствами

теорем, представленными в диссертационной работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей, и большим количеством компьютерных экспериментов.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Автор лично участвовал в получении всех результатов, представленных в диссертационной работе, а именно в разработке и применении методов исследования марковских моделей различной конфигурации, выводе всех формул, доказательстве всех полученных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и написании соответствующих алгоритмов, выполнении численного анализа полученных результатов. Направления исследований диссертационной работы и постановки задач обсуждались с научным консультантом доктором физико-математических наук, профессором А.И. Зейфманом, что отражено в совместных публикациях с автором диссертационной работы.

Связь работы с крупными научными проектами. Значительная часть результатов, изложенных в работе, получена в рамках выполнения проектов:

1. РФФИ 15-01-01698 «Исследование аппроксимации марковских цепей и построение предельных режимов» (2015-2017, руководитель Я. А. Сатин).

2. РНФ № 19-11-00020 «Количественные методы исследования марковских цепей и моделей, и их приложения» (2019-2021, руководитель А.И.Зейфман).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 73 работы, в том числе 46 статей в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 27 статей в зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science и / или Scopus; 3 статьи в российских научных журналах, переводные версии которых входят в Web of Science; 5 статей в российском научном журнале, входящем в Scopus; 2 статьи в российских научных журналах, входящих в Russian Science Citation Index), 21 статья в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях, входящих в Web of Science и / или Scopus; получено 6 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на

- семинарах кафедры прикладной математики Вологодского государственного университета,
- заседаниях научно - исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном университете,
- международных семинарах по проблемам устойчивости стохастических моделей (International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models), 2004, 2005, 2006, 2021 годы,
- объединенных научных семинарах Средневолжского математического общества,

- международном конгрессе по ультрасовременным телекоммуникациям и системам управления (International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems), 2010, 2016, 2018 годы,
- европейской конференции по разработке моделей и моделированию (European Conference on Modelling and Simulation), 2013-2017 годы,
- Белорусском семинаре по теории массового обслуживания (Belarusian Workshop on Queueing Theory), 2013, 2017 годы,
- международной конференции по численному анализу и прикладной математике (International conference of numerical analysis and applied mathematics, ICNAAM), 2016, 2017, 2019, 2021 годы,
- международной конференции по теории автоматизированных систем (International Conference on Computer Aided Systems Theory Eurocast), 2017, 2019 годы,
- международной конференции по дифференциальным и разностным уравнениям и их приложениям (International Conference on Differential & Difference Equations and Applications), 2019,
- международной конференции по методологиям и инструментам оценки эффективности (International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools), 2008, 2009 годы,
- международной конференции по математическому моделированию и вычислениям в биологических науках (Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences BIOCOMP), 2012,
- международном семинаре по прикладным задачам теории вероятностей и математической статистики (International Workshop on Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics), 2012, 2017 годы,
- международной конференции по аналитическим и вычислительным методам в теории вероятностей и ее приложениях (Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications), 2017.

Объем и структура диссертации. Материалы диссертационного исследования изложены на 217 страницах. Работа состоит из введения, шести глав, заключения, приложений и списка использованной литературы из 225 наименований. Текст иллюстрирован 58 рисунками.

Благодарности. Автор выражает благодарность коллегам-математикам за полезную критику и конструктивные замечания, и особую признательность – научному консультанту доктору физико-математических наук профессору Зейфману А.И. за помощь на всех этапах работы и ценные рекомендации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность диссертационного исследования, поставлена цель и определены задачи исследования, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** приводятся основные определения и рассматриваются общие вопросы исследования марковских процессов. В *разделах 1.2, 1.3* показано, что наличие достижимого состояния для конечных процессов с периодическими интенсивностями достаточно для наличия предельного режима. Указаны способы его получения, роль и строение оператора Коши, оценка скорости сходимости к предельному режиму. В *разделе 1.4* даётся классификация рассмотренных и сводящихся к ним моделей. Приводятся основные нормы и связь между ними, приводятся примеры точных оценок. Даётся описание способов получения характеристик для каждого типа. В *разделе 1.5* дается утверждение об усечении. В *разделе 1.6* даётся обзор вопросов устойчивости, и приводятся два утверждения.

Основные определения и теоремы

Пусть $X(t)$ – вообще говоря, неоднородная марковская цепь с непрерывным временем $t \geq 0$ и конечным или счетным пространством состояний $E_S = \{0, 1, \dots, S\}$, где $S \leq \infty$. Далее вероятность перехода из состояния i в состояние j обозначена через $p_{ij}(s, t) = \Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$, где $t \geq s \geq 0$, и вероятность нахождения системы в состоянии i в момент t обозначена через $p_i(t) = \Pr \{X(t) = i\}$. Соответственно, вектор $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$ есть вектор распределения вероятностей в момент t .

Всюду далее будем предполагать, что при достаточно малых $h > 0$ выполняется следующее условие:

$$\Pr \{X(t+h) = j | X(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}(t)h + \alpha_{ij}(t, h), & \text{если } j \neq i, \\ 1 - \sum_{k \neq i} q_{ik}(t)h + \alpha_i(t, h), & \text{если } j = i, \end{cases}$$

где $\alpha_i(t, h) = o(h)$ равномерно по i , т.е., если $\alpha = \sup_i |\alpha_i(t, h)|$, то $\alpha = o(h)$.

Кроме того, все функции интенсивностей $q_{ij}(t)$ считаем локально интегрируемыми неотрицательными на $[0, \infty)$ (т.е., интегрируемыми по t на любом отрезке $[a, b]$, $0 \leq a \leq b$).

Положим $a_{ij}(t) = q_{ji}(t)$ для $j \neq i$ и $a_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} a_{ji}(t) = -\sum_{j \neq i} q_{ij}(t)$. Матрица, составленная из функций $q_{ij}(t)$ для процесса $X(t)$, называется матрицей интенсивностей и будет обозначаться через $Q(t)$. Транспонированная матрица интенсивностей будет обозначаться через $A(t) = (Q(t))^T$.

Кроме того, всюду в диссертации предполагается, что почти при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$|a_{ii}(t)| \leq L < \infty. \quad (1)$$

Затем, l_1 – норма вектора определяется по формуле $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$, и соответствующая норма матрицы $B = (b_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ по формуле $\|B\| = \sup_j \sum_i |b_{ij}|$. Пусть $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in l_1^+ \ \& \ \|\mathbf{x}\| = 1\}$ – множество всех векторов с единичной нормой и неотрицательными координатами.

Тогда прямую систему Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}(t) \quad (2)$$

можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение в пространстве l_1 с ограниченным оператором, применяя к нему теорию, разработанную в книге Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна.

Как известно, задача Коши для такого уравнения имеет, причем единственное, решение при любом начальном условии. Это решение имеет вид

$$\mathbf{p}(t) = V(t, s) \cdot \mathbf{p}(s), \quad (3)$$

где $V(t, s)$ – соответствующий оператор Коши.

Определение 1 *Функция*

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|V(t, t+h)\| - \|V(t, t)\|}{h}$$

называется *логарифмической нормой матрицы* $A(t)$.

Утверждение 1 *При всех $t > 0$ существует $\gamma(A(t))$, причем справедлива формула:*

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|I + h \cdot A(t)\| - 1}{h} \quad (4)$$

Следствие:

$$\gamma(A(t)) = \sup_j \left(a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ji}(t)| \right)$$

Утверждение 2 *Для любых $t, s (t \geq s \geq 0)$ выполняется неравенство:*

$$e^{-\int_s^t \gamma(-A(\tau))d\tau} \leq \|V(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \gamma(A(\tau))d\tau}$$

С помощью этого утверждения получают оценки глав 2-4, основанные на логарифмической норме. Справочные сведения по дифференциальным уравнениям, логарифмической норме и сопутствующим оценкам оператора Коши представлены в приложении А диссертации. В диссертации для удобства приведён ряд известных результатов. Они сформулированы без доказательств. Все новые результаты приведены с доказательствами.

Определение 2 *Марковскую цепь $X(t)$ будем называть нуль эргодичной, если при любом начальном распределении вероятностей $\mathbf{p}(0)$ и любом $i \geq 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0. \quad (5)$$

Определение 3 Марковскую цепь $X(t)$ будем называть сильно эргодичной, если существует вектор $\pi \in \Omega$ такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{p}^{(1)}(t) - \pi \right\| = 0 \quad (6)$$

при любом начальном распределении вероятностей состояний $\mathbf{p}^{(1)}(0)$. В этом случае вектор π называется стационарным распределением марковской цепи $X(t)$.

Определение 4 Марковскую цепь $X(t)$ будем называть слабо эргодичной, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{p}^{(1)}(t) - \mathbf{p}^{(2)}(t) \right\| = 0 \quad (7)$$

при любых начальных распределениях вероятностей состояний $\mathbf{p}^{(1)}(0)$, $\mathbf{p}^{(2)}(0)$. В этом случае **любое** решение системы (2) называется квазистационарным распределением или предельным режимом марковской цепи $X(t)$.

В частности, при некоторых дополнительных условиях предельный режим может быть постоянным или периодическим (например, в случае постоянных или, соответственно, периодических интенсивностей).

Если есть слабая эргодичность, то система со временем практически «забывает» свое начальное состояние.

Определение 5 Будем называть функцию $\phi(t)$ предельным средним для цепи $X(t)$, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |E\{X(t) | X(0) = k\} - \phi(t)| = 0 \quad (8)$$

для любого $k \geq 0$. Здесь $E\{X(t) | X(0) = k\}$ – среднее для процесса в момент времени t при условии, что $X(0) = k$.

Список моделей из первой главы

Как было указано ранее, здесь $X(t)$ – процесс с транспонированной матрицей интенсивностей $A(t) = (a_{ij})_{i,j=0}^k$, где k может быть бесконечностью.

(I) $a_{ij}(t) = 0$ при всех $t \geq 0$ когда $|i - j| > 1$; здесь $a_{i,i+1}(t) = \mu_{i+1}(t)$ и $a_{i+1,i}(t) = \lambda_i(t)$ интенсивности поступления и обслуживания требования соответственно;

(II) поступление нескольких требований и обслуживание одного; $a_{ij}(t) = 0$ для всех $t \geq 0$, когда $i < j - 1$; все интенсивности поступления требований не зависят от числа требований в системе; интенсивности поступления k требований $a_{i+k,i}(t) = a_k(t)$ при $k \geq 1$; интенсивность обслуживания требования $a_{i,i+1}(t) = \mu_{i+1}(t)$;

(III) обслуживание нескольких требований и поступление одного; $a_{ij}(t) = 0$ для всех $t \geq 0$, когда $i > j + 1$, интенсивности обслуживания не зависят от числа требований в системе; интенсивности обслуживания k

требований $a_{i,i+k}(t) = b_k(t)$ при $k \geq 1$; интенсивность поступления требования $a_{i+1,i}(t) = \lambda_i(t)$;

(ГУ) обслуживание и поступление нескольких требований; интенсивности не зависят от числа требований в системе; $a_{i+k,i}(t) = a_k(t)$ и $a_{i,i+k}(t) = b_k(t)$ при $k \geq 1$ интенсивности поступления и обслуживания k требований соответственно.

Число классов марковский цепей, которые можно изучать с помощью методов, рассмотренных в данной диссертации, не ограничивается представленным здесь списком.

Во **второй главе** рассмотрены процессы рождения и гибели, а также модели, сводящиеся к ним. Далее приведены теоремы, позволяющие строить различные характеристики. В частности, с их помощью находится оценка скорости сходимости и строится оценка двустороннего усечения.

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$ – неоднородный ПРГ с пространством состояний $S = \{0, 1, \dots\}$ и интенсивностями рождения $\lambda_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_n(t)$, $t \geq 0$, $n \in S$.

Далее $\lambda_i(t)$ и $\mu_i(t)$ – локально интегрируемые функции на $[0, \infty)$. Кроме того интенсивности ограничены $\lambda_n(t) \leq \Lambda_n \leq L < \infty$, $\mu_n(t) \leq \Delta_n \leq L < \infty$, при всех $t \geq 0$.

Для получения оценок нужно подобрать последовательности $\{d_k\}$ и $\{d_k^*\}$.

Пусть для последовательности $\{d_k\}$ существуют числа M и α для которых верно

$$e^{-\int_s^t \alpha(\tau) d\tau} \leq M e^{-\alpha(t-s)}, \quad (9)$$

при всех $0 \leq s \leq t$, где

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} \mu_k(t), & k < i-1, \\ \lambda_{i-1}(t) + \mu_i(t) - \frac{d_{i+1}}{d_{i-1}} \lambda_i(t) - \frac{d_{i-2}}{d_{i-1}} \mu_{i-1}(t), & k = i-1, \\ \lambda_i(t) + \mu_{i+1}(t) - \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}} \lambda_{i+1}(t) - \frac{d_{i-1}}{d_{i+1}} \mu_i(t), & k = i, \\ \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+2}}{d_{k+1}} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_k}{d_{k+1}} \mu_k(t), & k > i \end{cases} \quad (10)$$

и
$$\alpha(t) = \inf_{k \geq 0} \alpha_k(t). \quad (11)$$

Пусть для последовательности $\{d_k^*\}$ существуют числа M^* и α^* , для которых верно

$$e^{-\int_s^t \alpha^*(\tau) d\tau} \leq M^* e^{-\alpha^*(t-s)} \quad (12)$$

для всех $0 \leq s \leq t$, где
$$\alpha^*(t) = \inf \alpha_k^*(t) \quad (13)$$

и

$$\alpha_k^*(t) = \begin{cases} \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}^*}{d_k^*} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}^*}{d_k^*} \mu_k(t), & k < i-1, \\ \lambda_{i-1}(t) + \mu_i(t) - \frac{d_{i+1}^*}{d_{i-1}^*} \lambda_i(t) - \frac{d_{i-2}^*}{d_{i-1}^*} \mu_{i-1}(t), & k = i-1, \\ \lambda_i(t) + \mu_{i+1}(t) - \frac{d_{i+2}^*}{d_{i+1}^*} \lambda_{i+1}(t) - \frac{d_{i-1}^*}{d_{i+1}^*} \mu_i(t), & k = i, \\ \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+2}^*}{d_{k+1}^*} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_k^*}{d_{k+1}^*} \mu_k(t), & k > i. \end{cases} \quad (14)$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{j=k}^{i-1} d_j, & G_k &= \sum_{j=i+1}^k d_j, \\ g_k^* &= \sum_{j=k}^{i-1} d_j^*, & G_k^* &= \sum_{j=i+1}^k d_j^*, \\ d &= \min(d_{i-1}, d_{i+1}), & W &= \inf_k \left(\frac{g_k}{k}, \frac{d}{i}, \frac{G_k}{k} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 1 Пусть задан ПРГ $X(t)$ с интенсивностями $\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$. Пусть существует последовательность $\{d_k\}$, для которой выполнено условие (9). Тогда процесс $X(t)$ слабо эргодичен в $1D$ норме, справедливо неравенство

$$\|\mathbf{z}^{(1)}(t) - \mathbf{z}^{(2)}(t)\|_{1D} \leq M e^{-\alpha(t-s)} \|\mathbf{z}^{(1)}(s) - \mathbf{z}^{(2)}(s)\|_{1D}, \quad t \geq s \geq 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{z}^{(1)}(s), \mathbf{z}^{(2)}(s)$ соответствуют произвольным начальным состояниям процесса. И верна оценка

$$p_k(t) \leq \begin{cases} \frac{M(d_{i-1}\Delta_i + d_{i+1}\Lambda_i)}{\alpha g_k}, & k < i \\ \frac{M(d_{i-1}\Delta_i + d_{i+1}\Lambda_i)}{\alpha G_k}, & k > i \end{cases}, \quad (17)$$

для любого k .

Теорема 2 Пусть процессы $X(t)$ и $X^*(t)$ удовлетворяют (9) и (12). Пусть $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^*(0) = \mathbf{e}_i$ (т.е., $X(0) = X^*(0) = i$). Тогда верны оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| &\leq \\ \frac{4M M^* (\Delta_i d_{i-1}^* + \Lambda_i d_{i+1}^*)}{d \alpha \alpha^*} &\left(\frac{g_{N_1-1} \Delta_{N_1}}{g_{N_1}^*} + \frac{G_{N_2+1} \Lambda_{N_2}}{G_{N_2}^*} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\|_{1E} &\leq \\ \frac{4M M^* (\Delta_i d_{i-1}^* + \Lambda_i d_{i+1}^*)}{W \alpha \alpha^*} &\left(\frac{g_{N_1-1} \Delta_{N_1}}{g_{N_1}^*} + \frac{G_{N_2+1} \Lambda_{N_2}}{G_{N_2}^*} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим $M_t | M_t | S$ модель с S серверами. Интенсивности поступления и обслуживания требований $\lambda_k(t) = \lambda(t)$ и $\mu_k(t) = \mu(t) \min(k, S)$ соответственно.

Берем произвольно неотрицательные c_1, c_2, i_1, i . Пусть $i_1 < i < S - 1 < S$. Положим $d_k = 1$ при $i_1 \leq k \leq S$, $d_k = \zeta_k d_{k-1}$ при $k > S$ и $d_{k-1} = \xi_k d_k$ при $k < i_1$. Берем начальные значения

$$\zeta_{S+1} = 1 + \frac{m - c_1}{\Lambda}, \quad \xi_{i_1-1} = \frac{m(i_1 + 1) - c_2}{i_1 m}. \quad (20)$$

И далее рекурсивно получаем

$$\zeta_k = 1 + \frac{mS - c_1}{\Lambda} - \frac{mS}{\zeta_{k-1}\Lambda}, \quad k > S + 1, \quad (21)$$

и

$$\xi_{k-1} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{l(\xi_k - 1) - c_2 \xi_k}{km \xi_k}, \quad k < i_1 - 1, \quad (22)$$

при $\xi_{k-1} < 1 + \frac{1}{k}$, т. е. $l(\xi_k - 1) - c_2 \xi_k < 0$,

$$\xi_{k-1} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{l(\xi_k - 1) - c_2 \xi_k}{k \Delta \xi_k}, \quad k < i_1 - 1, \quad (23)$$

при $\xi_{k-1} > 1 + \frac{1}{k}$, т. е. $l(\xi_k - 1) - c_2 \xi_k > 0$.

Если хотя бы один член последовательностей $\{\xi_k\}, \{\zeta_k\}$ получился неположительным, то надо уменьшить c_1, c_2 или изменить i_1, i .

Далее можно взять

$$\alpha_k \geq \min(c_1, m, c_2) \quad (24)$$

и использовать ранее указанные теоремы.

Таким образом, указан способ построения последовательности $\{d_k\}$ для модели $M_t | M_t | S$.

В **третьей главе** рассматриваются процессы с групповым поступлением и обслуживанием требований.

В **разделе 3.1** изучена модель системы обслуживания типа $M_t / M_t / S$ с катастрофами и возможностью поступления произвольного количества требований в случае полного отсутствия требований в системе.

Число требований в системе массового обслуживания описывается марковской цепью $X(t), t \geq 0$ с непрерывным временем и пространством состояний $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. Интенсивности возможных переходов предполагаются детерминированными функциями, зависящими как от времени, так и от текущего состояния процесса. Возможны переходы из нулевого состояния в произвольное с интенсивностью $r_i(t)$. Кроме того, возможен переход из произвольного состояния в нулевое (катастрофа) с интенсивностью $\beta_i(t)$. А также возможно поступление или обслуживание ровно одного требования с интенсивностью $\lambda_i(t)$ и $\mu_i(t)$ соответственно. Процессы такого рода активно применяются при описании систем массового обслуживания с катастрофическими сбоями и групповым поступлением требований, при этом для описания переходов из нулевого состояния и в него используются термины «mass arrivals when empty» и «mass exodus».

Положим $\beta_*(t) = \inf_i \beta_i(t)$.

Теорема 3 Пусть интенсивности катастроф существенны, т.е.

$$\int_0^{\infty} \beta_*(t) dt = \infty. \quad (25)$$

Тогда процесс $X(t)$ слабо эргодичен и имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 2e^{-\int_0^t \beta_*(\tau) d\tau}. \quad (26)$$

Введём

$$\beta_{**} = -\inf_j \sum_i \frac{d_i}{d_j} a_{ij}^*(t), \quad (27)$$

где

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{0j}(t) - \beta_*(t), & \text{если } i = 0, \\ a_{ij}(t), & \text{если } i > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Теорема 4 Пусть для некоторой последовательности d_i выполнено условие

$$\int_0^{\infty} \beta_{**}(t) dt = \infty. \quad (29)$$

Тогда при любых интенсивностях поступления и обслуживания требований процесс $X(t)$ слабо эргодичен, и справедлива следующая оценка скорости сходимости к предельному режиму

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_0^t \beta_{**}(s) ds} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}, \quad (30)$$

при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(0)$, $\mathbf{p}^{**}(0)$ и любом $t \geq 0$.

Рассмотрим «усечённый» процесс $X_N(t)$ с пространством состояний $E_N = \{0, 1, \dots, N\}$ с соответствующей редуцированной матрицей интенсивностей $A_N(t)$. Ниже мы будем отождествлять конечный вектор $\mathbf{p}_N = (p_0^N, p_1^N, \dots, p_N^N)^T$ и бесконечный вектор с теми же начальными N координатами и остальными нулями.

Далее полагаем существование чисел M_1, a_1, M, a , при которых для любых $s, t, 0 \leq s \leq t$ верны неравенства

$$e^{-\int_s^t \beta_{**}(s) ds} \leq M_1 e^{-a_1(t-s)}, \quad e^{-\int_s^t \beta_*(s) ds} \leq M e^{-a(t-s)}. \quad (31)$$

Кроме того, считаем, что для $\beta_*(t) \leq \theta$, $2 \sum_{n \geq N+1} r_n(t) \leq R$ почти для всех $t \geq 0$.

Теорема 5 Пусть выполняются условия теорем 3 и 4. Тогда следующая оценка усечения выполняется для любых начальных условий $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_N(0)$ и всех $t \geq 0$

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \frac{MR}{a} + \frac{2MM_1L}{ad_N} \left(\frac{\theta}{a_1} + e^{-a_1 t} \|\mathbf{p}(0)\|_{1D} \right). \quad (32)$$

В разделе 3.2 изучены модели $M^X(t)/M^X(t)/1$ и $M^X(t)/M^X(t)/1/S$ с групповым поступлением и обслуживанием требований.

Интенсивности поступления и обслуживания групп требований не зависят от числа требований в системе. Здесь $\lambda_k(t)$ – интенсивность поступления группы из k требований, $\mu_k(t)$ – интенсивность обслуживания группы из k требований.

Число требований в системе массового обслуживания описывается марковской цепью $X(t), t \geq 0$ с непрерывным временем и пространством состояний $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ или $E_r = \{0, 1, 2, \dots, r\}$, где $r = S$. Интенсивности возможных переходов предполагаются функциями, не зависящими от текущего состояния процесса.

Предполагается что $\lambda_{k+1}(t) \leq \lambda_k(t)$ и $\mu_{k+1}(t) \leq \mu_k(t)$ при $k > 0$ и при $t \geq 0$. Интенсивности локально интегрируемы на $[0, \infty)$.

В случае конечного числа состояний транспонированная матрица интенсивностей имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \cdots & \mu_r(t) \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \cdots & \mu_{r-1}(t) \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \cdots & \mu_{r-2}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \lambda_{r-2}(t) & \cdots & \cdots & a_{rr}(t) \end{pmatrix},$$

и $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^i \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{r-i} \lambda_k(t)$.

В случае счетного числа состояний транспонированная матрица интенсивностей имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \cdots & \mu_r(t) & \cdots \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \cdots & \mu_{r-1}(t) & \cdots \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \cdots & \mu_{r-2}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \lambda_{r-2}(t) & \cdots & \cdots & a_{rr}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

и $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^i \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t)$.

В диссертации получен метод построения верхней оценки для скорости сходимости $X(t)$ к предельному режиму при произвольных (не обязательно периодических) локально интегрируемых ограниченных интенсивностях. И получена теорема об усечении.

В разделе 3.3 изучена модель $M/M/1$ с политикой пропуска.

Требования поступают группами, но обслуживаются по одному в произвольном порядке. Размер группы (число поступивших требований)

становится известен в момент её поступления. Также известно общее число требований в системе. В соответствии с «политикой пропуска очереди» (the adopted queue skipping policy), если общее число требований поступившей группы больше, чем число требований в системе в текущий момент, то все требования, находящиеся в системе, удаляются и вместо них помещается эта прибывшая группа. В противном случае поступившая группа требований теряется.

Когда сервер свободен, новое требование из очереди начинает обслуживаться сервером. Поскольку далее не изучаются вопросы времени ожидания обслуживания, то характер обслуживания требований из очереди не важен (FIFO, LIFO, RANDOM).

Здесь $\lambda(t)b_k$ – интенсивность поступления группы из k требований, $\mu(t)$ – интенсивность обслуживания одного требования.

Поскольку важны не сами требования, а только их число, иногда дается другая интерпретация такой модели, а именно: $\lambda(t)b_k$ рассматривается как интенсивность поступления группы из $k - j$ требований в то время, когда в системе ровно j требований. При этом эти старые j требований не отбрасываются.

Пусть $X(t)$ – число требований в системе в момент времени t . Из приведённого ранее описания модели следует, что $X(t)$ является марковской цепью с непрерывным временем и дискретным пространством состояний $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots, b^*\}$, где b^* максимально возможное число требований в системе. Здесь b^* может быть счётно или конечно.

Запишем $Q(t)$ – матрицу интенсивностей $X(t)$:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \lambda(t)b_1 & \lambda(t)b_2 & \dots \\ \mu(t) & -(\mu(t) + \lambda(t)B_2) & \lambda(t)b_2 & \dots \\ 0 & \mu(t) & -(\mu(t) + \lambda(t)B_3) & \dots \\ 0 & 0 & \mu(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В диссертации получен метод построения верхней оценки для скорости сходимости $X(t)$ к предельному режиму при произвольных (не обязательно периодических) локально интегрируемых ограниченных интенсивностях. Для периодических интенсивностей показано, как вычислять t^* , начиная с которого достигается практически периодический режим $X(t)$. Другими словами, система практически «забывает» $X(0)$. И значит, характеристики, полученные при $t > t^*$, можно рассматривать как предельные.

В **четвёртой главе** рассмотрены процессы с особенностями организации очереди и обслуживания.

В **разделе 4.1** изучена модель $M/M/1$ с повторным поступлением необслуженных требований.

Требования поступают в систему с интенсивностями λ . Требование обслуживается с интенсивностью μ . При поступлении в систему требование переходит на «орбиту», если все серверы заняты. Требования с орбиты обслуживаются в порядке их поступления в систему. Требование с орбиты пытается поступить на обслуживание с интенсивностью μ_0 . В системе один сервер.

В диссертации показано, что для решения вопроса о сильной или нуль эргодичности достаточно сравнить дробь $\frac{\mu\mu_0}{\lambda(\lambda+\mu_0)}$ с единицей. Если эта дробь меньше единицы, процесс нуль эргодичен. Если дробь больше единицы, процесс сильно эргодичен.

Пусть $\nu(t) \in \{0, 1\}$ – число обслуживаемых требований, $N(t)$ – число требований на орбите.

Модель задаётся двумерным процессом $\{\nu(t), N(t), t \geq 0\}$ с пространством состояний $\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$ (см. рис. 1) и может быть преобразована в одномерный $X(t) = \{0, 1, 2, \dots\}$ (см. рис. 2). В этом случае состояния $\{0, n\}$ двумерного процесса будут состояниями $2n + 1$ одномерного процесса и состояния $\{1, n\}$ будут состояниями $2n + 2$.

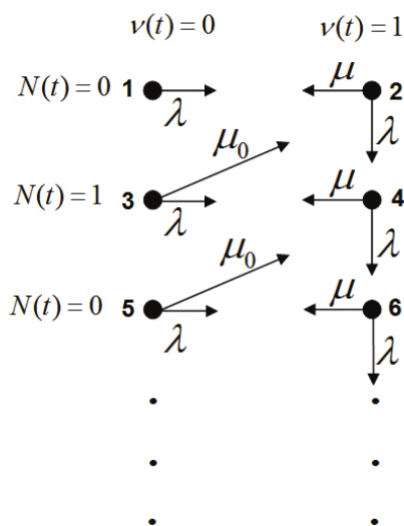


Рисунок 1 – Граф процесса системы с одним сервером

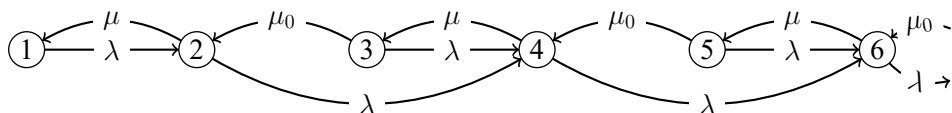


Рисунок 2 – Граф процесса системы с одним сервером в строку

Теорема 6 Пусть верно неравенство

$$\frac{\mu\mu_0}{\lambda(\lambda + \mu_0)} < 1. \quad (33)$$

Тогда процесс $X(t)$ нуль эргодичен и справедлива оценка:

$$\sum_{i=0}^N p_i(t) \leq \frac{\delta_k}{\delta_N} e^{-\zeta^* t}, \quad (34)$$

для любого $t \geq 0$, любого начального состояния $X(0) = k$, и любого N , где

$$\zeta^* = \min(\lambda(1 - ab) - \mu(b^{-1} - 1), \lambda(1 - b) - \mu_0(a^{-1} - 1)) > 0.$$

В теореме числа a и b можно подбирать следующим способом. Пусть $b^* := \frac{\mu(\lambda + \mu_0)}{\lambda(\lambda + \mu + \mu_0)} < 1$. Далее берем любые $b \in (b^*, 1)$ и $a \in \left(\frac{\mu_0}{\lambda(1-b) + \mu_0}, \frac{\lambda - \mu(b^{-1} - 1)}{b\lambda}\right)$.

Теорема 7 Пусть выполняется неравенство

$$\frac{\mu\mu_0}{\lambda(\lambda + \mu_0)} > 1. \quad (35)$$

Тогда процесс $X(t)$ сильно эргодичен и справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi\|_1 \leq 4e^{-\alpha^* t} \sum_{i \geq 2} g_i |p_i(0) - \pi_i|, \quad (36)$$

для любого $t \geq 0$ и любого начального условия $\mathbf{p}(0)$, где

$$\alpha^* = \min(\lambda + \mu_0 - \mu b^{-1}, \lambda + \mu - \lambda(b + ab) - \mu_0 a^{-1}) > 0,$$

и $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)^T$ – стационарное распределение.

Здесь $g_i = \sum_{n=2}^i d_n$, где $\{d_i\}, i = 2, 3, \dots$ – это последовательность положительных чисел вида: $d_2 = 1, d_{2k+1} = b d_{2k}, d_{2k+2} = a d_{2k+1}$.

В диссертации показано, что для подбора a и b можно поступить следующим образом. Возьмём произвольный $x \in \left(1, \frac{\mu\mu_0}{\lambda(\lambda + \mu_0)}\right)$. Выберем произвольное b из интервала $\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu_0}, \frac{\lambda + \mu - x\lambda}{\lambda + \mu_0/x}\right)$ и положим $a := x/b$.

Возьмём усечённый процесс X_N с $N = 2k$ состояниями. Для него аналогично подбираем \tilde{a} и \tilde{b} . Вычисляем

$$\tilde{\alpha} = \min(\lambda + \mu_0 - \mu \tilde{b}^{-1}, \lambda + \mu - \lambda(\tilde{b} + \tilde{a}\tilde{b}) - \mu_0 \tilde{a}^{-1}) > 0.$$

Положим $\{\tilde{d}_i\}, i = 2, 3, \dots$, последовательность положительных чисел вида: $\tilde{d}_2 = 1, \tilde{d}_{2k+1} = b \tilde{d}_{2k}, \tilde{d}_{2k+2} = \tilde{a} \tilde{d}_{2k+1}$.

Теорема 8 Пусть процесс $X(t)$ удовлетворяет теореме 7. Тогда для процессов $X(t)$ и $X_N(t)$ можно подобрать соответственно α^* и $\tilde{\alpha}$. Кроме того при $X(0) = X_N(0) = 0$ верно неравенство

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \frac{4\lambda^2 \sum_{i=2}^{N+2} d_i}{\tilde{\alpha}\alpha^* \sum_{i=2}^N \tilde{d}_i}. \quad (37)$$

В разделе 4.2 изучена модель $M/M/2$ с повторным поступлением необслуженных требований. В отличие от предыдущей модели в системе два сервера. При изучении этой модели впервые был применен метод C – матрицы. Были получены условия нуль эргодичности и сильной эргодичности.

В разделе 4.3 изучена модель $M_t/M_t/2$ с различной производительностью процессоров.

Требования поступают в систему с интенсивностями λ . Требование обслуживается с интенсивностью μ_1 или μ_2 в зависимости от используемого процессора. Полагаем $\mu_2 \leq \mu_1$ (логично загружать большей нагрузкой быстрый процессор). На обслуживание требования отводится ровно один процессор. При поступлении требования оно сразу начинает обслуживаться первым процессором, если он свободен. Если первый процессор занят, требование начинает обслуживаться вторым сервером при условии, что тот свободен. Если оба процессора заняты, требование встаёт в конец очереди. Требования поступают на обслуживание из очереди в порядке их поступления (первый пришёл, первый обслужен) на первый освободившийся процессор.

Граф процесса представлен на рисунке 3.

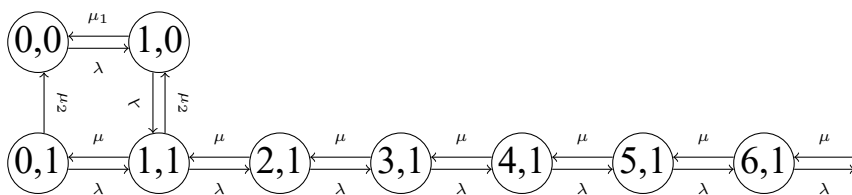


Рисунок 3 – Граф процесса системы с различной производительностью процессоров

Состояния, отображенные на графе:

$q_{0,0}$ – в системе нет требований и очередь пуста,

$q_{1,0}$ – занят только первый процессор и очередь пуста,

$q_{0,1}$ – занят только второй процессор и очередь пуста,

$q_{j,1}$ – заняты оба процессора и в очереди $j - 1$ требований ($j > 0$).

Процесс описывается прямой системой Колмогорова вида (2) с транспонированной матрицей интенсивностей $A(t)$ вида:

$$\begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu_1(t)) & 0 & \mu_2(t) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -(\lambda(t) + \mu_2(t)) & \mu_1(t) & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(t) & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & \mu(t) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$, $A(t) = Q^T(t)$.

Были получены условия слабой эргодичности и оценка скорости сходимости.

В пятой главе показаны методы исследования марковских цепей с помощью неравенств.

Предыдущие модели изучались с помощью метода логарифмической нормы. К сожалению, для многих классов моделей хорошие оценки с помощью логарифмической нормы получить не удастся. В пятой главе рассмотрены только такие модели.

Первый метод неравенств основан на том, что линейные дифференциальные уравнения можно переписать в виде неравенств, добавив модули с сохранением знаков на главной диагонали. Получается своеобразное обобщение логарифмической нормы. При применении данного метода к ряду моделей получилось несколько интересных результатов. Многомерные процессы рождения и гибели, при некоторых условиях, через большой промежуток времени можно рассматривать как одномерные процессы рождения и гибели (при отсутствии информации о состоянии модели в течении этого времени). Показано применение этого метода для модели $M_t/M_t/1$ с двумя различными классами требований.

Второй метод неравенств является более универсальным и включает в себя возможности всех предыдущих методов. В отличие от метода с логарифмической нормой и подбором одной положительной последовательности для получения оценок скорости сходимости, во втором методе подбирается несколько последовательностей с разными знаками. В диссертации этот метод используется для исследования модели $M_t/M_t/1$ с только попарным обслуживанием требований. В этой модели для получения оценки скорости сходимости достаточно взять две различные последовательности, а для оценки погрешности усечения достаточно взять четыре последовательности.

В разделе 5.1 приводится первый метод неравенств. Пусть матрица $H = (h_{ij})$, причем её элементы могут зависеть как от t , так и от $\mathbf{y}(t)$. Рассмотрим общее (линейное или нелинейное) дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = H\mathbf{y}(t), \quad (39)$$

в пространстве l_1 , предполагая, что условия существования и единственности решения для любого начального условия $\mathbf{y}(0)$ выполнены. Тогда справедливо следующее утверждение

Теорема 9 Для всех решений уравнения (39) справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq e^{\int_0^t \beta^*(u) du} \|\mathbf{y}(0)\|, \quad (40)$$

где

$$\beta^* = \sup_i \left(h_{ii} + \sum_{j \neq i} |h_{ji}| \right). \quad (41)$$

Если H является ограниченным при всех $t \geq 0$ линейным оператором из l_1 в себя, то $\beta^*(t) = \gamma(H(t))$ совпадает с логарифмической нормой. Таким образом, $\beta^*(t)$ представляет собой обобщение логарифмической нормы для нелинейной системы уравнений.

В разделе 5.1.2 изучена модель $M_t/M_t/1$ с двумя различными классами требований.

При прямолинейном подходе число уравнений в прямой системе Колмогорова, описывающей цепь с конечным числом состояний, очень велико даже при небольшом числе мест в очереди. В диссертации показано, что оценку скорости сходимости получить возможно, причем как для исходной модели, так и для процесса, описывающего только общее число требований в системе.

Предполагается, что требования первого и второго классов поступают с интенсивностями соответственно $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$; обслуживаются с интенсивностями $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ соответственно. Требования из очереди обслуживаются в порядке их поступления в систему.

Для наглядности приведён граф с начальными состояниями процесса и нумерацией состояний (см. рисунок 4). Вершина 0 – требований нет. Вершины 1, 2 – требования соответствующих типов на обслуживании. Остальные вершины дают дополнительно описание очереди.

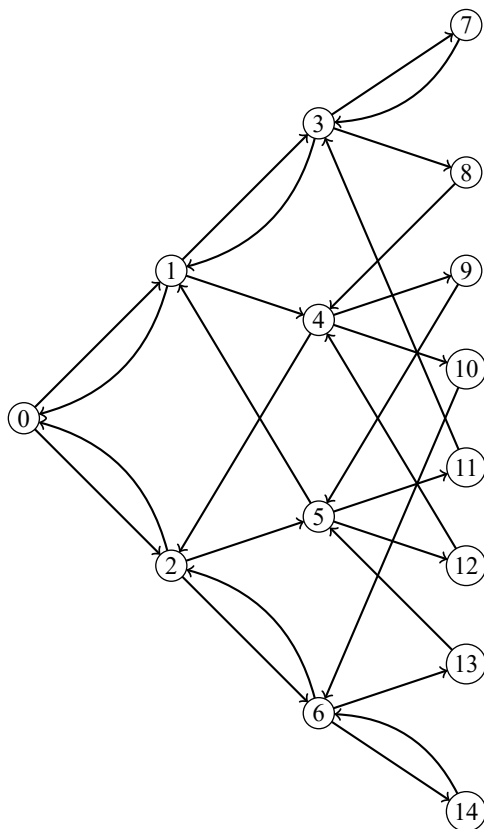


Рисунок 4 – Граф модели $M_t/M_t/1$ с двумя различными классами требований

Следующие две теоремы дают условия нуль эргодичности и слабой эргодичности, а также оценку скорости сходимости для исходной модели.

Теорема 10 Пусть

$$\alpha(t) = \min \left(-(k-1)(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) - \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \max(\mu_1(t), \mu_2(t)) \right). \quad (42)$$

Если существует такое положительное $k < 1$, что $\int_0^{\infty} \alpha(t) dt = +\infty$ при всех t , то процесс нуль эргодичен.

Теорема 11 Пусть

$$\alpha(t) = \frac{(1-k^2)(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) + (k-1) \min(\mu_1(t), \mu_2(t))}{k+1} \quad (43)$$

Если существует такое положительное $k > 1$, что $\int_0^{\infty} \alpha(t) dt = +\infty$ при всех t , то процесс слабо эргодичен и верна оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \quad (44)$$

Далее в диссертации данный процесс сводится к процессу рождения и гибели следующим образом.

Задаются новые функции

$$\tilde{\mu}_1(t) = \frac{\mu_1(t)p_1(t) + \mu_2(t)p_2(t)}{p_1(t) + p_2(t)}, \quad (45)$$

$$\tilde{\mu}_2(t) = \frac{\mu_1(t)p_3(t) + \mu_1(t)p_4(t) + \mu_2(t)p_5(t) + \mu_2(t)p_6(t)}{p_3(t) + \dots + p_6(t)}. \quad (46)$$

Аналогично задаются остальные $\tilde{\mu}_k(t)$ и $\tilde{\lambda}_k(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$.
Делается замена

$$x_0(t) = p_0(t), \quad (47)$$

$$x_1(t) = p_1(t) + p_2(t), \quad (48)$$

$$x_2(t) = p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) + p_6(t), \quad (49)$$

$$\dots \quad (50)$$

И от исходной системы переходим к следующей системе

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{A}\mathbf{x}(t), \quad (51)$$

где

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \tilde{\mu}_i = \frac{\mu_1 \sum_{k=2^i-1}^{2^i+2^{i-1}-2} p_i + \mu_2 \sum_{k=2^i+2^{i-1}-1}^{2^{i+1}-2} p_i}{\sum_{k=2^i-1}^{2^{i+1}-2} p_i}, \quad (52)$$

и соответствующий процесс обозначаем $\tilde{X}(t)$.

Смысл уравнения (51) состоит в том, что оно показывает динамику изменения числа требований в системе $\tilde{X}(t)$ без учета класса обслуживаемого требования и порядка расположения требований в очереди. Нужно отметить, что $\tilde{A}(t)$ зависит от начального вектора $\mathbf{p}(0)$ для исходной системы. Однако следующие теоремы показывают, какими закономерностями обладает процесс, описывающий общее число требований для исходной системы – условие нуль эргодичности, условие слабой эргодичности, а также оценки скорости сходимости.

Положим
$$l \leq \tilde{\lambda}_k(t) \leq L, \quad m \leq \tilde{\mu}_k(t) \leq M, \quad (53)$$

для любых k, t и любого начального условия.

В диссертации доказаны теоремы 12 и 13 для $\tilde{X}(t)$.

1. Пусть $\tilde{X}(t)$ имеет счётное число состояний и

$$M < l. \quad (54)$$

Пусть $\sigma = \sqrt{M/l} < 1$, $\alpha^* = (\sqrt{l} - \sqrt{M})^2$, $\delta_n = \sigma^n$, $n \geq 0$, $\tilde{x}_n = \delta_n x_n$, и $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots)$. Пусть $\Lambda = \text{diag}(\delta_0, \delta_1, \dots)$.

Теорема 12 Пусть верно (54). Тогда $\tilde{X}(t)$ нуль эргодичен и верны оценки

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq e^{-\alpha^* t} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|, \quad (55)$$

и
$$\Pr\left(\tilde{X}(t) \leq n / \tilde{X}_j(0) = k\right) \leq \sigma^{k-n} \cdot e^{-\alpha^* t}. \quad (56)$$

Здесь
$$\Pr\left(\tilde{X}(t) > n / \tilde{X}(0) = k\right) > 1 - \sigma^{k-n} \cdot e^{-\alpha^* t}, \quad (57)$$

и $\Pr\left(\tilde{X}(t) > n / \tilde{X}(0) = k\right) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, для любых n, k .

2. Пусть
$$L < m, \quad \alpha_* = l + m - 2\sqrt{LM} > 0. \quad (58)$$

Теорема 13 Пусть верно (58). Тогда $\tilde{X}(t)$ слабо эргодичен и верна оценка

$$\|D\mathbf{w}(t)\| \leq e^{-\alpha_* t} \|D\mathbf{w}(0)\|, \quad (59)$$

для любых $t \geq 0$ и любого соответствующего начального условия.

Здесь $\mathbf{w}(t) = \mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)$, где $\mathbf{z}^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots)^\top$ и $\mathbf{z}^{**}(t) = (x_1^{**}(t), x_2^{**}(t), \dots)^\top$. Стоит отметить изначальный вид векторов $\mathbf{x}^*(t) = (x_0^*(t), x_1^*(t), x_2^*(t), \dots)^\top$ и $\mathbf{x}^{**}(t) = (x_0^{**}(t), x_1^{**}(t), x_2^{**}(t), \dots)^\top$, соответствующим двум различным решениям системы, и вид матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (60)$$

В разделе 5.2 изучена модель $M_t/M_t/1$ с только попарным обслуживанием требований. Требование поступает на обслуживание с интенсивностью $\lambda(t)$. Требования обслуживаются только парами. С интенсивностью $\mu(t)$ обслуживается сразу два требования. Граф процесса представлен на рисунке 5.

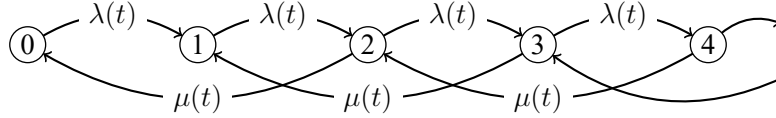


Рисунок 5 – Граф процесса с только попарным обслуживанием требований

Транспонированная матрица интенсивностей $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & 0 & \mu(t) & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t) & -\lambda(t) & 0 & \mu(t) & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t) & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Положим

$$\alpha^*(t) \leq \min [\lambda(t) (1 - \delta^{-1}), \mu(t) (1 + \delta) - \lambda(t) (\delta^2 - 1), \mu(t) (1 - \delta^{-1}) - \lambda(t) (\delta - 1)]. \quad (62)$$

Пусть T – треугольная матрица ($t_{ij} = 1$ при $j \geq i$ и 0 в противном случае), $D = \text{diag}(1, \delta_i, \delta_i^2, \delta_i^3, \dots)$.

Теорема 14 Пусть

$$\int_0^\infty \alpha^*(t) dt = +\infty \quad (63)$$

для некоторого $\delta > 1$. Тогда процесс $X(t)$ слабо эргодичен и верна оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 4\delta e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \|\mathbf{w}(0)\|, \quad (64)$$

для любого начального условия, где $\|\mathbf{w}(0)\|$ – постоянное число, зависящее от начальных векторов $\mathbf{p}^*(0)$ и $\mathbf{p}^{**}(0)$.

Зададим усеченный процесс, заменив на нули столбцы с $N + 1$ и строки с $N + 1$ в матрице $A(t)$. Заменим еще $a_{N,N}$ на $-\mu(t)$. Далее будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ исходный процесс и его усеченный аналог находятся в нулевом состоянии, то есть в системе нет требований. Будем считать далее, что при всяком t верно $\lambda(t) \leq L$.

Суть сводится к поиску двух чисел δ_i больше единицы для которых верна следующая теорема.

Теорема 15 Пусть найдутся числа $1 < \delta_2 < \delta_1$, такие что при $i = 1, 2$

$$\int_0^1 \alpha_i^*(t) dt \leq \int_0^1 \min(\lambda(t)(1 - \delta_i^{-1}), \mu(t)(1 + \delta_i) - \lambda(t)(\delta_i^2 - 1), \mu(t)(1 - \delta_i^{-1}) - \lambda(t)(\delta_i - 1)) dt > 0. \quad (65)$$

Тогда верны оценки

$$\|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| \leq 4 \frac{L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_1 a_2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k}, \quad (66)$$

$$|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)| \leq \frac{2}{W} \frac{L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_1 a_2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k}, \quad (67)$$

где $W = \min_{k \geq 1} \frac{\delta_2^{k-2}}{k}$, $e^{-\int_0^t \alpha_i^*(\tau) d\tau} \leq M_i e^{-a_i t}$, $\phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i$, $\tilde{\phi}(t) = \sum_{i=0}^N i \tilde{p}_i$.

Замечание 1 Можно показать, что для 1-периодической $\alpha^*(t)$ можно подобрать такие M и a , что будет верно неравенство $e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \leq M e^{-at}$.

Например, можно взять $M = \exp\left(\sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \alpha^*(s) ds\right)$, $a = \int_0^1 \alpha^*(s) ds$.

Замечание 2 Если интенсивности постоянны, то $\alpha^*(t)$ постоянна, и, взяв $M = 1$, $a = \alpha^*(s)$, получаем неравенство $e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \leq M e^{-at}$.

В шестой главе исследованы конкретные модели систем обслуживания, для которых полученные в предыдущих главах оценки применены для построения предельных характеристик этих моделей.

Далее в качестве иллюстрации рассмотрен конкретный случай только что исследованной модели ($M_t/M_t/1$ с только попарным обслуживанием требований).

Пример. Пусть $\lambda(t) = 2 + \sin(2\pi t)$, $\mu(t) = 4 - \cos(2\pi t)$.

Положим $\delta_1 = \frac{11}{10}$. Тогда по (62) получается $\alpha_1^* \geq \frac{1}{22}$ и можно взять $a_1 = \frac{1}{22}$, $M_1 = 1$.

Положим $\delta_2 = \frac{101}{100}$. Тогда по (62) получается $\alpha_2^* \geq 0,005$ и можно взять $a_2 = 0,005$, $M_2 = 1$, $W > 0,02$.

По теореме 14 получаем оценку скорости сходимости

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 4.4 e^{-\frac{1}{22}t} \|\mathbf{w}(0)\|. \quad (68)$$

С учетом оценки скорости сходимости по теореме 15 получаем, что при $N = 300$ справедливы неравенства:

$$\|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| \leq 10^{-5} \quad (69)$$

и

$$|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)| \leq 10^{-4}. \quad (70)$$

Соответствующие графики среднего приведены на рис. 6 и 7.



Рисунок 6 – Среднее число требований в системе $E(t, 0)$ и $E(t, 300)$ на отрезке $[0, 75]$

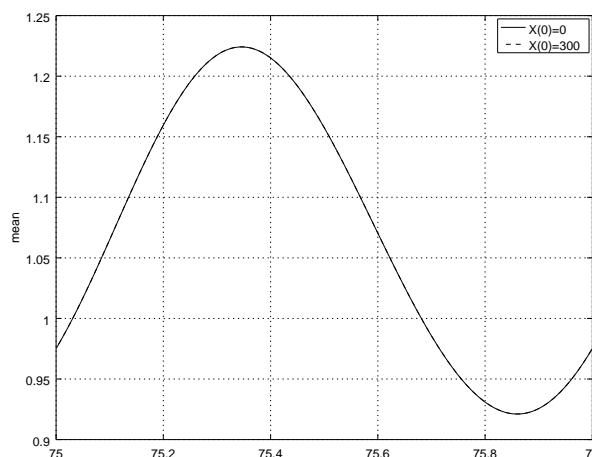


Рисунок 7 – Среднее число требований в системе $E(t, 0)$ и $E(t, 300)$ «в предельном режиме» на отрезке $[75, 76]$

Приложение содержит базовые определения, вспомогательные теоремы и неравенства.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

1. Зейфман А. И. О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами / А. И. Зейфман, **Я. А. Сатин**, А. В. Коротышева, Н. А. Терёшина // Информатика и ее применения. – 2009. – Т. 3, вып. 3. – С. 16–22. – 0.6 / 0.15 а.л.

2. Зейфман А. И. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами / А. И. Зейфман, **Я. А. Сатин**, А. В. Чегодаев // Информатика и ее применения. – 2009. – Т. 3, вып. 1. – С. 47–54. – 0.7 / 0.23 а.л.

3. Зейфман А. И. Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами / А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, **Я. А. Сатин**, С. Я. Шоргин // Информатика и ее применения. – 2010. – Т. 4, вып. 3. – С. 9–15. – 0.6 / 0.15 а.л.

4. **Сатин Я. А.** Об одном классе марковских систем обслуживания / Я. А. Сатин, А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, С. Я. Шоргин // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5, вып. 4. – С. 18–24. – 0.6 / 0.15 а.л.

5. Зейфман А. И. Оценки в нуль-эргодическом случае для некоторых систем обслуживания / А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, **Я. А. Сатин**, С. Я. Шоргин // Информатика и ее применения. – 2012. – Т. 6, вып. 4. – С. 27–33. – 0.6 / 0.15 а.л.

6. **Сатин Я. А.** О скорости сходимости и усечениях для одного класса марковских систем обслуживания / **Я. А. Сатин**, А. И. Зейфман, А. В. Коротышева // Теория вероятностей и ее применения. – 2012. – Т. 57, вып. 3. – С. 611–621. – DOI: 10.4213/tvp4469. – 1 / 0.33 а.л.

в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:

Satin Y. A. On the Rate of Convergence and Truncations for a Class of Markovian Queueing Systems / Y. A. Satin, A. V. Korotysheva, A. I. Zeifman // Theory of Probability and its Applications. – 2013. – Vol. 57, is. 3. – P. 529–539. – DOI: 10.1137/S0040585X97986151.

7. Разумчик Р. В. Анализ энергоэффективности вычислительного комплекса, моделируемого с помощью системы обслуживания с пороговым управлением и интенсивностями, зависящими от времени / Р. В. Разумчик, А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, **Я. А. Сатин** // Системы и средства информатики. – 2015. – Т. 25, № 4. – С. 19–30. – DOI: 10.14357/08696527150402. – 1.1 / 0.27 а.л.

8. Зейфман А. И. О классе систем обслуживания, описываемых неоднородными процессами рождения и гибели с дополнительными переходами / А. И. Зейфман, **Я. А. Сатин**, А. В. Коротышева, В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг // Доклады академии наук. – 2016. – Т. 470, № 2. – С. 129–132. – DOI: 10.7868/S0869565216210088. – 0.3 / 0.06 а.л.

в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:

Zeifman A. I. On a class of Markovian queueing systems described by inhomogeneous birth-and-death processes with additional transitions / A. I. Zeifman, **Y. A. Satin**, A. V. Korotysheva, V. Yu. Korolev, V. E. Bening // Doklady Mathematics. – 2016. – Vol. 94, No. 2. – P. 502–505. – DOI: 10.1134/S1064562416040177.

9. Зейфман А. И. Оценки погрешности аппроксимаций неоднородных марковских цепей с непрерывным временем / А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, В. Ю. Королев, **Я. А. Сатин** // Теория вероятностей и ее применения. – 2016. – Т. 61, вып. 3. – С. 563–569. – 0.6 / 0.15 а.л.

в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:

Zeifman A. I. Truncation bounds for approximations of inhomogeneous continuous-time Markov chains / A. I. Zeifman, A. V. Korotysheva, V. Y. Korolev,

Y. A. Satin // Theory of Probability and its Applications. – 2017. – Vol. 61, is. 3. – P. 513–520. – DOI: 10.1137/S0040585X97T988320.

10. Зейфман А. И. Оценки погрешности аппроксимации для марковских систем обслуживания, описываемых процессами рождения и гибели с дополнительными переходами / А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, **Я. А. Сатин**, К. М. Киселева, Р. В. Разумчик, В. Ю. Королев, С. Я. Шоргин // Системы и средства информатики. – 2017. – Т. 27, № 3. – С. 37–51. – DOI: 10.14357/08696527170304. – 1.4 / 0.18 а.л.

11. Зейфман А. И. Об оценках скорости сходимости для некоторых моделей массового обслуживания с неполно заданными интенсивностями / А. И. Зейфман, **Я. А. Сатин**, К. М. Киселева // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13, № 3. – С. 14–19. – DOI: 10.14357/19922264190303. – 0.5 / 0.15 а.л.

Scopus: On the bounds of the rate of convergence for some queueing models with incompletely defined intensities / A. I. Zeifman, **Y. A. Satin**, K. M. Kiseleva // Informatika i ee Primeneniya. – 2019. – Vol. 13, № 3. – P. 14–19.

12. **Сатин Я. А.** О подходах к построению предельных режимов для некоторых моделей массового обслуживания / **Я. А. Сатин**, А. И. Зейфман, Г. Н. Шилова // Информатика и ее применения. – 2020. – Т. 14, вып. 2. – С. 3–9. – DOI 10.14357/19922264200201. – 0.6 / 0.2 а.л.

Scopus: **Satin Y.** On approaches to constructing limiting regimes for some queueing models / **Y. A. Satin**, A. I. Zeifman, G. N. Shilova // Informatika i ee Primeneniya. – 2020. – Vol. 14, № 2. – P. 3–9.

13. Зейфман А. И. Об одной нестационарной модели обслуживания с катастрофами и тяжелыми хвостами / А. И. Зейфман, **Я. А. Сатин**, И. А. Ковалев // Информатика и ее применения. – 2021. – Т. 15, вып. 2. – С. 20–25. – DOI: 10.14357/19922264210203. – 0.5 / 0.15 а.л.

Scopus: **Satin Y.** On one nonstationary service model with catastrophes and heavy tails / A. Zeifman, **Y. Satin**, I. Kovalev // Informatika i ee Primeneniya. – 2021. – Vol. 15, is. 2. – P. 20–25.

14. **Сатин Я. А.** Исследование модели типа $M_t/M_t/1$ с двумя различными классами требований / Я. А. Сатин // Системы и средства информатики. – 2021. – Т. 31, № 1. – С. 17–27. – DOI: 10.14357/08696527210102. – 1.0 а.л.

15. **Сатин Я. А.** О монотонности некоторых классов марковских цепей / Я. А. Сатин, А. Л. Крюкова, В. С. Ошушкова, А. И. Зейфман // Информатика и ее применения. – 2022. – Т. 16, № 2. – С. 27–34. – DOI: 10.14357/19922264220204. – 0.7 / 0.17 а.л.

Scopus: **Satin Y.** On monotonicity of some classes of Markov chains / **Y. A. Satin**, A. L. Kryukova, V. S. Oshushkova, A. I. Zeifman // Informatika i ee Primeneniya. – 2020. – Vol. 16, № 2. – P. 27–34.

16. Ковалев И. А. Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания / И. А. Ковалев, **Я. А. Сатин**, А. В. Синицина, А. И. Зейфман // Информатика и ее применения. – 2022. – Т. 16, № 3. – С. 75–82. – DOI: 10.14357/19922264220310. – 0.7 / 0.17 а.л.

Scopus: **Satin Y.** On an approach for estimating the rate of convergence for nonstationary Markov models of queueing systems / I. A. Kovalev, **Y. A. Satin**, A. V. Sinitcina, A. I. Zeifman // *Informatika i ee Primeneniya*. – 2022. – Vol. 16, № 3. – P. 75–82.

17. **Сатин Я. А.** Об аппроксимации с помощью усечений для одной нестационарной модели массового обслуживания / Я. А. Сатин // *Системы и средства информатики*. – 2021. – Т. 31, № 1. – С. 28–36. – DOI: 10.14357/08696527210103. – 0.8 а.л.

18. Зейфман А. И. О предельных характеристиках для систем обслуживания с исчезающими возмущениями / А. И. Зейфман, В. Ю. Королев, Р. В. Разумчик, **Я. А. Сатин**, И. А. Ковалев // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. – 2022. – Т. 506, № 1. – С. 83–88. – DOI: 10.31857/S2686954322050186. – 0.5 / 0.1 а.л. (*Russian Science Citation Index*).

19. Ковалев И. А. Оценки скорости сходимости и устойчивости для одного класса нестационарных марковских моделей систем с нетерпеливыми клиентами / И. А. Ковалев, **Я. А. Сатин**, А. И. Зейфман // *Системы и средства информатики*. – 2022. – Т. 32, № 4. – С. 21–31. – DOI: 10.14357/08696527220403. – 1.0 / 0.33 а.л. (*Russian Science Citation Index*).

20. Zeifman A. Perturbation bounds and truncations for a class of Markovian queues / A. Zeifman, **Y. Satin**, A. Korotysheva, V. Korolev, V. Bening // *Queueing Systems*. – 2014. – Vol. 76, is. 2. – P. 205–221. – DOI: 10.1007/s11134-013-9388-0. – 1.6 / 0.32 а.л. (*Web of Science*).

21. Zeifman A. On truncations for weakly ergodic inhomogeneous birth and death processes / A. Zeifman, **Y. Satin**, V. Korolev, S. Shorgin // *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. – 2014. – Vol. 24, is. 3. – P. 503–518. – DOI: 10.2478/amcs-2014-0037. – 1.5 / 0.37 а.л. (*Web of Science*).

22. **Satin Y. A.** On Certain Average Characteristics of Finite Continuous-Time Markov Chains / Y. A. Satin, A. I. Zeifman // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2015. – Vol. 205, № 1. – P. 100–104. – DOI: 10.1007/s10958-015-2234-7. – 0.4 / 0.2 а.л. (*Scopus*).

23. Zeifman A. Ergodicity and perturbation bounds for inhomogeneous birth and death processes with additional transitions from and to the origin / A. Zeifman, A. Korotysheva, **Y. Satin**, V. Korolev, S. Shorgin, R. Razumchik // *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. – 2015. – Vol. 25, № 4. – P. 787–802. – DOI: 10.1515/amcs-2015-0056. – 1.5 / 0.24 а.л. (*Web of Science*).

24. Zeifman A. I. Estimation of Probabilities for Multidimensional Birth-Death Processes / A. I. Zeifman, A. S. Sipin, A. V. Korotysheva, T. Panfilova, **Y. A. Satin**, V. Korolev, S. Shorgin, R. Razumchik // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – Vol. 218, No. 2. – P. 238–244. – DOI: 10.1007/s10958-016-3025-5. – 0.6 / 0.08 а.л. (*Scopus*).

25. Zeifman A. Ergodicity and truncation bounds for inhomogeneous birth and death processes with additional transitions from and to origin / A. Zeifman,

A. Korotysheva, **Y. Satin**, R. Razumchik, V. Korolev, S. Shorgin // Stochastic Models. – 2017. – Vol. 33, is. 4. – P. 598–616. – DOI: 10.1080/15326349.2017.1362654. – 1.8 / 0.29 а.л. (*Web of Science*).

26. Kiseleva K. M. On Truncations for a Retrial Queueing Model / K. M. Kiseleva, **Y. A. Satin**, A. I. Zeifman // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 234, № 6. – P. 786–792. – DOI: 10.1007/s10958-018-4045-0. – 0.6 / 0.18 а.л. (*Scopus*).

27. Zeifman A. Bounds on the rate of convergence for one class of inhomogeneous Markovian queueing models with possible batch arrivals and services / A. Zeifman, R. Razumchik, **Y. Satin**, K. Kiseleva, A. Korotysheva, V. Korolev // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. – 2018. – Vol. 28, № 1. – P. 141–154. – DOI: 10.2478/amcs-2018-0011. – 1.3 / 0.21 а.л. (*Web of Science*).

28. Sinitcina A. On the bounds for a two-dimensional birth-death process with catastrophes / A. Sinitcina, **Y. Satin**, A. Zeifman, G. Shilova, A. Sipin, K. Kiseleva, T. Panfilova, A. Kryukova, I. Gudkova, E. Fokicheva // Mathematics. – 2018. – Vol. 6, is. 5. – Article number 80. – 17 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/6/5/80> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math6050080. – 0.6 / 0.06 а.л. (*Web of Science*).

29. Zeifman A. I. Lower bounds for the rate of convergence for continuous-time inhomogeneous Markov chains with a finite state space / A. I. Zeifman, V. Y. Korolev, **Y. A. Satin**, K. M. Kiseleva // Statistics & Probability Letters. – 2018. – Vol. 137. – P. 84–90. – DOI: 10.1016/j.spl.2018.01.001. – 0.6 / 0.15 а.л. (*Web of Science*).

30. **Satin Y.** Upper bounds on the rate of convergence for constant retrial rate queueing model with two servers / Y. Satin, E. Morozov, R. Nekrasova, A. Zeifman, K. Kiseleva, A. Sinitcina, A. Sipin, G. Shilova, I. Gudkova // Statistical Papers. – 2018. – Vol. 59, № 4. – P. 1271–1282. – DOI: 10.1007/s00362-018-1014-0. – 1.1 / 0.11 а.л. (*Web of Science*).

31. Zeifman A. I. On the Rate of Convergence for a Characteristic of Multidimensional Birth-Death Process / A. I. Zeifman, **Ya. A. Satin**, K. M. Kiseleva, V. Korolev // Mathematics. – 2019. – Vol. 7, is. 5. – Article number 477. – 10 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/7/5/477> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math7050477. – 0.4 / 0.1 а.л. (*Web of Science*).

32. Zeifman A. On limiting characteristics for a non-stationary two-processor heterogeneous system / A. Zeifman, **Y. Satin**, K. Kiseleva, V. Korolev, T. Panfilova // Applied Mathematics and Computation. – 2019. – Vol. 351. – P. 48–65. – DOI: 10.1016/j.amc.2019.01.032. – 1.7 / 0.34 а.л. (*Web of Science*).

33. **Satin Ya.** On the Rate of Convergence and Limiting Characteristics for a Nonstationary Queueing Model / Ya. Satin, A. Zeifman, A. Kryukova // Mathematics. – 2019. – Vol. 7, is. 8. – Article number 678. – 11 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/7/8/678> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math7080678. – 0.5 / 0.16 а.л. (*Web of Science*).

34. Zeifman A. Two Approaches to the Construction of Perturbation Bounds for Continuous-Time Markov Chains / A. Zeifman, V. Korolev, **Y. Satin** // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, is. 2. – Article number 253. – 25 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/2/253> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math8020253. – 1.0 / 0.33 а.л. (*Web of Science*).

35. **Satin Y.** On Probability Characteristics for a Class of Queueing Models with Impatient Customers / Y. Satin, A. Zeifman, A. Sipin, S. I. Ammar, J. Sztrik // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, is. 4. – Article number 594. – 15 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/4/594> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math8040594. – 0.5 / 0.1 а.л. (*Web of Science*).

36. Markova E. Queuing System with Unreliable Servers and Inhomogeneous Intensities for Analyzing the Impact of Non-Stationarity to Performance Measures of Wireless Network under Licensed Shared Access / E. Markova, **Y. Satin**, I. Kochetkova, A. Zeifman, A. Sinitcina // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, is. 5. – Article number 800. – 13 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/800> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/MATH8050800. – 0.5 / 0.1 а.л. (*Web of Science*).

37. Zeifman A. I. On obtaining sharp bounds of the rate of convergence for a class of continuous-time Markov chains / A. I. Zeifman, **Y. A. Satin**, K. M. Kiseleva // Statistics & Probability Letters. – 2020. – Vol. 161. – Article number 108730. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S016771522030033X?via%3Dihub> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1016/j.spl.2020.108730. – 0.2 / 0.06 а.л. (*Web of Science*).

38. Zeifman A. On three methods for bounding the rate of convergence for some continuous-time Markov chains / A. Zeifman, **Y. Satin**, A. Kryukova, R. Razumchik, K. Kiseleva, G. Shilova // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. – 2020. – Vol. 30, № 2. – P. 251–266. – DOI: 10.34768/amcs-2020-0020. – 1.5 / 0.25 а.л. (*Web of Science*).

39. Zeifman A. Facilitating numerical solutions of Inhomogeneous Continuous Time Markov Chains Using Ergodicity Bounds Obtained with Logarithmic Norm Method / A. Zeifman, **Y. Satin**, I. Kovalev, R. Razumchik, V. Korolev // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, is. 1. – Article number 42. – 20 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/1/42> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math9010042. – 1.9 / 0.38 а.л. (*Web of Science*).

40. Zeifman A. I. Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy / A. I. Zeifman, R. V. Razumchik, **Y. A. Satin**, I. A. Kovalev // Applied Mathematics and Computation. – 2021. – Vol. 395. – Article number 125846. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0096300320307992?via%3Dihub> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1016/j.amc.2020.125846. – 0.4 / 0.1 а.л. (*Scopus*).

41. Ammar S. I. On limiting characteristics for a non-stationary two-processor heterogeneous system with catastrophes, server failures and repairs / S. I. Ammar, A. Zeifman, **Y. Satin**, K. Kiseleva, V. Korolev // Journal of Industrial and

Management Optimization. – 2021. – Vol. 17, № 3. – P. 1057–1068. – DOI: 10.3934/jimo.2020011. – 1.1 / 0.22 а.л. (*Web of Science*).

42. Zeifman A. Ergodicity and perturbation bounds for $M_t/M_t/1$ queue with balking, catastrophes, server failures and repairs / A. Zeifman, **Y. Satin**, I. Kovalev, S. I. Ammar // RAIRO-Operations Researche. – 2021. – Vol. 55, № 4. – P. 2223–2240. – DOI: 10.1051/ro/2021101. – 1.7 / 0.42 а.л. (*Web of Science*).

43. Zeifman A. Bounds on the Rate of Convergence for $M_{xt}/M_{Xt}/1$ Queueing Models / A. Zeifman, **Y. Satin**, A. Sipin // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, is. 15. – Article number 1752. – 11 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/15/1752> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math9151752. – 0.6 / 0.2 а.л. (*Web of Science*).

44. Kochetkova I. Convergence Bounds for Limited Processor Sharing Queue with Impatience for Analyzing Non-Stationary File Transfer in Wireless Network / I. Kochetkova, **Y. Satin**, I. Kovalev, E. Makeeva, A. Chursin, A. Zeifman // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, is. 1. – Article number 30. – 16 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/1/30> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math10010030. – 1.0 / 0.16 а.л. (*Web of Science*).

45. **Satin Y. A.** Upper bound on the rate of convergence and truncation bound for non-homogeneous birth and death processes on Z / Y. A. Satin, R. V. Razumchik, A. I. Zeifman, I. A. Kovalev // Applied Mathematics and Computation. – 2022. – Vol. 423. – Article number 127009. – 12 p. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0096300322000959?via%3Dihub> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1016/j.amc.2022.127009. – 0.4 / 0.1 а.л. (*Web of Science*).

46. Usov I. Ergodicity Bounds and Limiting Characteristics for a Modified Prendiville Model / I. Usov, **Ya. Satin**, A. Zeifman, V. Korolev // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, is. 23. – Article number 4401. – 14 p. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/23/4401> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.3390/math10234401. – 0.4 / 0.1 а.л. (*Web of Science*).

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

47. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018662507. Программа для построения предельных характеристик марковских цепей с непрерывным временем (Visual C++) / **Сатин Я. А.** (RU), Зейфман А. И. (RU), Киселева К. М. (RU); правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет» (RU). Заявка № 2018619678, дата поступления – 11.09.2018; опубли. 09.10.2018, Бюл. № 10.

48. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018662506. Программа для построения предельных средних характеристик марковских цепей с непрерывным временем (Octave), описывающих схемы для беспроводной сети в рамках LSA-полосы как системы массового обслуживания с конечной пропускной способностью и ненадежными серверами / **Сатин Я. А.** (RU), Зейфман А. И. (RU), Киселева К. М. (RU); правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Вологодский государственный университет» (RU). Заявка № 2018619680, дата поступления – 11.09.2018; опубл. 09.10.2018, Бюл. № 10.

49. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018662505. Программа для построения предельных средних характеристик двумерного процесса рождения и гибели (ППГ) (Octave) / **Сатин Я. А.** (RU), Зейфман А. И. (RU), Киселева К. М. (RU); правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет» (RU). Заявка № 2018619685, дата поступления – 11.09.2018; опубл. 09.10.2018, Бюл. № 10.

50. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018662924. Программа для построения предельных характеристик марковских цепей с непрерывным временем (Delphi) / **Сатин Я. А.** (RU), Зейфман А. И. (RU), Киселева К. М. (RU); правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет» (RU). Заявка № 2018619664, дата поступления – 11.09.2018; опубл. 17.10.2018, Бюл. № 10.

51. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666755. Программа для решения задачи Коши для системы однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом Рунге-Кутты 4-го порядка / Ошушкова В. С. (RU), **Сатин Я. А.** (RU), Крюкова А. Л. (RU), Зейфман А. И. (RU); правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет» (RU). Заявка № 2019665776, дата поступления – 04.12.2019; опубл. 13.12.2019, Бюл. 12.

52. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615415. Программа для решения задачи Коши для системы однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом Адамса-Мултона 4-го порядка / Ковалёв И. А. (RU), **Сатин Я. А.** (RU), Зейфман А. И. (RU); правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет» (RU). Заявка № 2020614560, дата поступления – 21.05.2020; опубл. 22.05.2020, Бюл. № 6.

Статьи в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях, входящих в Scopus и / или Web of Science:

53. Zeifman A. On stability for $M_t/M_t/N/N$ queue / A. Zeifman, A. Korotysheva, **Y. Satin** // 2010 International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, ICUMT 2010. Moscow, Russia, October 18–20, 2010. – 2010. – P. 1102–1105. – DOI: 10.1109/ICUMT.2010.5676515. – 0.3 / 0.09 а.л. (*Scopus*).

54. Zeifman A. On a queueing model with group services / A. Zeifman, A. Korotysheva, **Y. Satin**, G. Shilova, T. Panfilova // Communications in Computer and Information Science. – 2013. – Vol. 356 : Proceedings of the Belarusian Winter Workshops in Queueing Theory, BWWQT 2013. Minsk, Belarus, January 28–31,

2013. – P. 198–205. – DOI: 10.1007/978-3-642-35980-4_22. – 0.7 / 0.14 а.л. (*Scopus*).

55. Zeifman A. On Mt/Mt/S type queue with group services / A. Zeifman, **Y. Satin**, G. Shilova, V. Korolev, V. Bening, S. Shorgin // Proceedings of the 27th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2013. Aalesund, Norway, May 27–30, 2013. – 2013. – 6 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2013/2013-0604.htm> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.7148/2013-0604. – 0.5 / 0.07 а.л. (*Scopus*).

56. Zeifman A. Limiting characteristics for finite birth-death-catastrophe processes / A. Zeifman, **Y. Satin**, T. Panfilova // Mathematical Biosciences. – 2013. – Vol. 245, is. 1 : 4th International Conference on BIOCAMP – Mathematical Modeling and Computational Topics in Biosciences Dedicated to the Memory of Luigi M. Ricciardi (1942–2011). Vietri sul Mare, Italy, June 04–08, 2012. – P. 96–102. – DOI: 10.1016/j.mbs.2013.02.009. – 0.6 / 0.2 а.л. (*Web of Science*).

57. Zeifman A. On truncations for SZK model / A. Zeifman, **Y. Satin**, G. Shilova, V. Korolev, V. Bening, S. Shorgin // Proceedings of the 28th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2014, Brescia, May 27–30, 2014. – 2014. – 6 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2014/2014-0577.htm> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.7148/2014-0577. – 0.5 / 0.08 а.л. (*Scopus*).

58. Satin Y. On truncations for a class of finite Markovian queuing models / **Y. Satin**, A. Zeifman, A. Korotysheva, K. Kiseleva, V. Korolev // Proceedings of the 29th European Conference on Modelling and Simulation (ECMS 2015). Albena (Varna), Bulgaria, May 26–29, 2015. – 2015. – 5 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2015/2015-0626.htm> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.7148/2015-0626. – 0.5 / 0.08 а.л. (*Scopus*).

59. Zeifman A. I. Ergodicity bounds for birth-death processes with particularities / A. I. Zeifman, **Y. Satin**, A. Korotysheva, G. Shilova, K. Kiseleva, V. Korolev, V. Bening, S. Shorgin // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1738 : proceedings of the international conference on numerical analysis and applied mathematics 2015 (ICNAAM- 2015). Rhodes, Greece, September 23–29, 2015. – Rhodes, 2016. – Article number 220006. – 4 p. – URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1738/1/220006/581831/Ergodicity-bounds-for-birth-death-processes-with> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1063/1.4952005. – 0.24 / 0.03 а.л. (*Web of Science*).

60. **Satin Y.** Two-sided truncations of inhomogeneous birth-death processes / Y. Satin, A. Korotysheva, K. Kiseleva, G. Shilova, E. Fokicheva, A. Zeifman, V. Korolev // Proceedings of the 30th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2016. Regensburg, Germany, May 31 – June 03, 2016. – 2016. – 6 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2016/2016-0663.htm> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.7148/2016-0663. – 0.5 / 0.07 а.л. (*Web of Science*).

61. Zeifman A. Uniform in time bounds for «no-wait» probability in queues of Mt/Mt/S type / A. Zeifman, A. Korotysheva, **Y. Satin**, G. Shilova, R. Razumchik, V. Korolev, S. Shorgin // Proceedings of the 30th European Conference on Modelling

and Simulation, ECMS 2016. Regensburg, Germany, May 31 – June 03, 2016. – 2016. – 9 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2016/2016-0676.htm> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.7148/2016-0676. – 0.8 / 0.11 а.л. (*Web of Science*).

62. Zeifman A. On the ergodicity bounds for a constant retrial rate queueing model / A. Zeifman, **Y. Satin**, E. Morozov, R. Nekrasova, A. Gorshenin // 8th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Lisbon, Portugal, October 18–20, 2016. – 2016. – P. 269–272. – DOI: 10.1109/ICUMT.2016.7765369. – 0.3 / 0.06 а.л. (*Web of Science*).

63. Kiseleva K. On the null ergodicity bounds for a retrial queueing model / K. Kiseleva, **Y. Satin**, A. Korotysheva, A. Zeifman, V. Korolev, S. Shorgin // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1863, is. 1 : International conference of numerical analysis and applied mathematics (ICNAAM 2016). Rhodes, Greece, September 19–25, 2016. – 2017. – Article number 090007. – 4 p. – URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1863/1/090007/580560/On-the-null-ergodicity-bounds-for-a-retrial> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1063/1.4992272. – 0.2 / 0.03 а.л. (*Web of Science*).

64. Zeifman A. On Sharp Bounds on the Rate of Convergence for Finite Continuous- Time Markovian Queueing Models / A. Zeifman, A. Sipin, V. Korolev, G. Shilova, K. Kiseleva, A. Korotysheva, **Y. Satin** // Lecture Notes in Computer Science. – 2018. – Vol. 10672 : Computer aided systems theory – EUROCAST 2017, PT II. Proceedings of the 16th International Conference. Revised Selected Papers, Pt. II. Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 19–24, 2017. – P. 20–28. – DOI: 10.1007/978-3-319-74727-9_3. – 0.8 / 0.1 а.л. (*Web of Science*).

65. Zeifman A. Bounds for Markovian queues with possible catastrophes / A. Zeifman, A. Korotysheva, **Y. Satin**, K. Kiseleva, V. Korolev, S. Shorgin // Proceedings of 31st European Conference on Modelling and Simulation ECMS 2017. Budapest, Hungary, May 23–26, 2017. – 2017. – 7 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2017/2017-0628.htm> DOI: 10.7148/2017-0628 (access date: 20.03.2024). – 0.6 / 0.09 а.л. (*Web of Science*).

66. **Satin Y.** Two-sided truncations for the $M_t|M_t|S$ queueing model / Y. Satin, A. Korotysheva, G. Shilova, A. Sipin, E. Fokicheva, A. Zeifman, K. Kiseleva, V. Korolev, S. Shorgin // Proceedings of 31st European Conference on Modelling and Simulation ECMS 2017. Budapest, Hungary, May 23–26, 2017. – 2017. – 7 p. – URL: <https://www.scs-europe.net/dlib/2017/2017-0635.htm> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.7148/2017-0635. – 0.6 / 0.06 а.л. (*Web of Science*).

67. **Satin Y.** Two-Sided Truncations for a Class of Continuous-Time Markov Chains / Y. Satin, A. Zeifman, A. Korotysheva, K. Kiseleva // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 800 : Proceedings of the 16th International Conference, ITMM 2017, Named After A. F. Terpugov. Kazan, Russia, September 29 – October 03, 2017. – P. 312–323. – DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_25. – 1.1 / 0.27 а.л. (*Scopus*).

68. Zeifman A. Applications of differential inequalities to bounding the rate of convergence for continuous-time Markov chains / A. Zeifman, **Y. Satin**, K. Kiseleva,

A. Kryukova // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2116 : International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM). Rhodes, Greece, September 13–18, 2018. – 2019. – Article number 090009. – 4 p. – URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/2116/1/090009/755026/Applications-of-differential-inequalities-to> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1063/1.5114074. – 0.2 / 0.04 а.л. (*Web of Science*).

69. Zeifman A. On a Method of Bounding the Rate of Convergence for Finite Markovian Queues / A. Zeifman, K. Kiseleva, **Y. Satin**, A. Kryukova, V. Korolev // 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. Moscow, Russia, November 05–09, 2018. – 2018. – 5 p. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8631216> (access date: 20.03.2024). – DOI: 10.1109/ICUMT.2018.8631216. – 0.2 / 0.04 а.л. (*Web of Science*).

70. Zeifman A. Bounds on the Rate of Convergence for Nonstationary $M^X/M_n/1$ Queue with Catastrophes and State-Dependent Control at Idle Time / A. Zeifman, **Y. Satin**, K. Kiseleva, A. Kryukova, G. Shilova, A. Sipin, E. Fokicheva // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – Vol. 12013 : Computer aided systems theory – EUROCAST 2019. Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 17–22, 2019. – P. 143–149. – DOI: 10.1007/978-3-030-45093-9_18. – 0.6 / 0.06 а.л. (*Scopus*).

71. Zeifman A. Convergence Rate Estimates for Some Models of Queuing Theory, and Their Applications / A. Zeifman, **Y. Satin**, A. Kryukova, G. Shilova, K. Kiseleva // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – Vol. 333 : Proceedings of the 4th International Conference on Differential & Difference Equations and Applications. Lisbon, Spain, July 01–05, 2019. – P. 41–51. – DOI: 10.1007/978-3-030-56323-3_4. – 1.0 / 0.2 а.л. (*Scopus*).

72. Kryukova A. Application of Method of Differential Inequalities to Bounding the Rate of Convergence for a Class of Markov Chains / A. Kryukova, V. Oshushkova, A. Zeifman, **Y. Satin** // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – Vol. 333 : Proceedings of the 4th International Conference on Differential & Difference Equations and Applications. Lisbon, Spain, July 01–05, 2019. – P. 95–103. – DOI: 10.1007/978-3-030-56323-3_8. – 0.8 / 0.2 а.л. (*Scopus*).

73. Zeifman A. Bounding the Rate of Convergence for One Class of Finite Capacity Time Varying Markov Queues / A. Zeifman, **Y. Satin**, A. Kryukova, G. Shilova // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – Vol. 12039 : 16th European Workshop, EPEW 2019. Revised Selected Papers. Milan, Italy, November 28–29, 2019. – P. 148–159. – DOI: 10.1007/978-3-030-44411-2_10. – 1.1 / 0.22 а.л. (*Scopus*).

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 7742 от «17» февраля 2025 г. Тираж 100 экз.
г. Томск, Московский тр. 8, тел. (3822) 53-15-28
publish.tsu.ru