

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
XI-й Международной молодёжной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 24–27 мая 2024 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2024

ББК 22.17– 22.19
УДК 519.2, 519.7, 519.8
Т78

**ЧЛЕНЫ КОЛЛЕГИИ, РУКОВОДИТЕЛИ НАУЧНЫХ РЕДАКЦИЙ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ:**

д-р физ.-мат. наук, проф. **А.А. Глазунов** – научная редакция «Механика, математика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **Э.Р. Шрагер** – научная редакция «Механика, математика»; д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко** – научная редакция «Информатика и кибернетика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **В.Г. Багров** – научная редакция «Физика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.И. Потекаев** – научная редакция «Физика»; д-р биол. наук, проф. **С.П. Кулижский** – научная редакция «Биология»; д-р геол.-минер. наук, проф. **В.П. Парначев** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; канд. хим. наук, доц. **Ю.Г. Слизов** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; д-р филол. наук, проф. **Т.А. Демешкина** – научная редакция «История, филология»; д-р ист. наук, проф. **В.П. Зиновьев** – научная редакция «История, филология»; д-р экон. наук, проф. **В.А. Уткин** – научная редакция «Юридические и экономические науки»; д-р ист. наук, проф. **Э.И. Черняк** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствоведение»; д-р психол. наук, проф. **Э.В. Галажинский** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствоведение»

НАУЧНАЯ РЕДАКЦИЯ ТОМА:

д-р техн. наук, проф. **А.В. Замятин**, д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Л.А. Нежелская**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.Н. Моисеев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **С.П. Моисеева**, канд. техн. наук, доц. **Н.Л. Ерёмкина**, канд. техн. наук, доц. **С.А. Останин**, канд. техн. наук **И.С. Шмырин**.

Т78 Труды Томского государственного университета. – Т. 309. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы XI-й Международной молодёжной научной конференции. Томск, 24–27 мая 2024 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2024. – 324 с.

ISBN 978-5-907890-15-2

Сборник содержит материалы XI-й Международной молодёжной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», проводившейся 24–27 мая 2024 г. на базе Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

УДК 539.3.004
ББК 22.17-22.19

ISBN 978-5-907890-15-2

© Томский государственный университет, 2024

Архитектура прототипа приложения спроектирована таким образом, чтобы в будущем можно было бы достаточно легко пополнять банк использующихся распределений, а также метрик для оценки близости между распределениями вероятностей. В итоге прототип приложения был реализован и протестирован.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокудина Ю.А., Оруджов Э.А., Моисеев А.Н. Концепция архитектуры программного комплекса SimQ // Материалы X-й Международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем". Томск, 26–29 мая 2023 г. – Труды Томского государственного университета. – Т. 308: Серия физико-математическая. – Томск, 2023. – С. 155–159.
2. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: учебное пособие, – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.
3. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влссидес Дж. Паттерны объектно-ориентированного проектирования. – СПб.: Питер, 2020 — 448 с.: ил.
4. Прокудина Ю.А., Моисеев А.Н. Распределение числа заявок в системах массового обслуживания с неограниченным числом приборов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): материалы XXII Международной конференции им. А.Ф. Терпугова, 4–9 декабря 2023 г. – Томск: Изд-во ТГУ, 2023. – С. 145–150.
5. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.
6. Лебедев А.В., Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Эксмо, 2010 – 496 с.
7. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере: учебное пособие. 4-е изд., перераб. – М.: ИД Форум, 2008 – 368 с., ил.
8. Fedorova E.A. Quasi-geometric and Gamma Approximation for Retrial Queueing Systems // Communications in Computer and Information Science. – 2014. – V. 487. – P. 123–136.
9. Назаров А.А., Любина Т.В. Немарковская динамическая RQ-система с входящим ММР-потокм заявок // Автоматика и телемеханика. – 2013. № 7. – С. 89–101.

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ УСТРОЙСТВ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Тарасенко А.В., Моисеев А.Н.

Томский государственный университет
lsa328@yandex.ru

Введение

В данной работе рассматривается применение математических моделей, параметры которых меняются со временем случайным образом в зависимости от состояния внешнего случайного процесса. Такие модели находят широкое применение в различных приложениях. В частности, бесконечнолинейные системы массового обслуживания используются для аппроксимации систем с большим числом обслуживающих приборов [1]. Примерами таких систем могут быть сети банков, супермаркетов, call-центров и сервисов цифровой дистрибуции [2]. Важно отметить, что такие системы часто подвергаются внешним возмущениям, которые влияют на интенсивность входящего потока заявок и длительность времени обслуживания заявок. В зависимости от этих условий поток клиентов может быть более или менее интенсивным, а срок обработки заявки будет длиннее или короче. Таким образом, математические модели с учетом случайных изменений параметров позволяют анализировать и оптимизировать процессы в подобных системах.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) $M/M/\infty$ (рис. 1), в которой входящий простейший поток и экспоненциальное время обслуживания зависят от "случайных сред", под которыми мы понимаем цепи Маркова $k(t)$ и $n(t)$ соответственно с непрерывным временем, принимающие значения $k(t) = \overline{1, K}$ и $n(t) = \overline{1, N}$. Параметр

входящего простейшего потока $\lambda = \lambda_k$ зависит от состояния среды $k(t)$, а параметр экспоненциального времени обслуживания $\mu = \mu_n$ – от состояния среды $n(t)$. Система ведёт себя как $M(\lambda_k)/M(\mu_n)/\infty$. Среда $n(t)$ и $k(t)$ определяются матрицами инфинитезимальных характеристик Q_1 и Q_2 соответственно. Случайный процесс $S\{i(t), k(t), n(t)\}$ является цепью Маркова. Обозначим через $P(i, k, n) = P\{i(t) = i, k(t) = k, n(t) = n\}$, $i \geq 0$, $k = \overline{1, K}$, $n = \overline{1, N}$ распределение вероятностей состояний рассматриваемого случайного процесса. В системе переход среды в новое состояние может повлиять на закон обслуживания заявок, находящихся в системе, или на параметры входящего потока и интенсивность обслуживания. Тогда для исследования такой системы предполагаем пять вариантов функционирования при переходе в новое состояние случайной среды:

1. Изменяется интенсивность обслуживания заявок, все заявки в системе начинают обслуживаться по новому закону.
2. Изменяется интенсивность обслуживания заявок, все текущие заявки в системе продолжают обслуживаться по старому закону.
3. Изменяется интенсивность входящего потока, все заявки в системе продолжают обслуживаться по старому закону.
4. Изменяется интенсивность входящего потока и интенсивность обслуживания заявок, все заявки в системе начинают обслуживаться по новому закону.
5. Изменяется интенсивность входящего потока и интенсивность обслуживания заявок, все заявки в системе продолжают обслуживаться по старому закону.

В данной работе будет рассмотрено решение задачи для пятого варианта функционирования (рис. 2). Вместо двух случайных сред $k(t)$ и $n(t)$ рассмотрим одну – $s(t)$, принимающую значения $s(t) = \overline{1, S}$. Цепь Маркова $s(t)$ определяется матрицей инфинитезимальных характеристик Q .

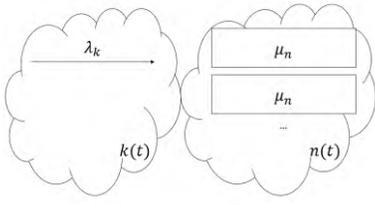


Рис. 1. СМО в случайных средах

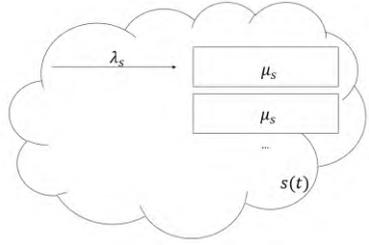


Рис. 2. Частный случай СМО с одной случайной средой

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Сначала составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для данной модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, s, t)}{\partial t} = -P(0, s, t)\lambda_s + P(1, s, t)\mu_s + \sum_{v=0}^{\infty} q_{vs} P(0, v, t), \\ \frac{\partial P(1, s, t)}{\partial t} = -P(1, s, t)(\lambda_s + \mu_s) + \lambda_s P(0, s, t) + 2P(2, s, t)\mu_s + \sum_{v=0}^{\infty} q_{vs} P(1, v, t), \\ \dots \\ \frac{\partial P(i, s, t)}{\partial t} = -P(i, s, t)(\lambda_s + i\mu_s) + \lambda_s P(i-1, s, t) + (i+1)P(i+1, s, t)\mu_s + \sum_{v=0}^{\infty} q_{vs} P(i, v, t), \\ \dots \end{array} \right. \quad (1)$$

Будем полагать, что в рассматриваемой СМО существует стационарный режим.

Обозначим через $H(u, S) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P(i, s)$ частичную характеристическую функцию стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе. Также введем следующие обозначения: $\mathbf{H}(u)$ – вектор, состоящий из элементов $H(u, 1), H(u, 2), \dots, H(u, S)$, $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_S$ на главной диагонали, \mathbf{M} – диагональная матрица с элементами μ_1, \dots, μ_S на главной диагонали. Тогда систему (1) можно записать в векторно-матричном виде

$$j(e^{-ju} - 1) \frac{d\mathbf{H}(u)}{du} \mathbf{M} = \mathbf{H}(u) [(e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}]. \quad (2)$$

Начальное условие для решения векторно-матричного уравнения возьмём в виде

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{r}, \quad (3)$$

где \mathbf{r} – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний случайной марковской среды $s(t)$.

3. Решение задачи методом асимптотического анализа

Для решения задачи (2)–(3) воспользуемся методом асимптотического анализа. Решение будем искать в условии высокой интенсивности входящего потока и частой смены состояний среды [3]. Для этого введем следующие замены: $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}N$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}N$, где $N \rightarrow \infty$ – параметр, характеризующий высокую интенсивность входящего потока и частую смену состояний случайной среды.

Применяя метод асимптотического анализа, введем следующие обозначения: $\varepsilon = 1/N$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)$, подставим в (2), получим

$$j(e^{-j\varepsilon w} - 1)N \frac{d\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)}{dw} \mathbf{M} = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) [(e^{j\varepsilon w} - 1) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}]. \quad (4)$$

Теорема 1. Асимптотическое решение $\mathbf{F}_1(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)$ уравнения (4) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{r} \exp\{jwk_1\}, \quad k_1 = \frac{\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}}{\mathbf{r}\mathbf{M}\mathbf{e}}.$$

Отсюда можно записать выражение для характеристической функции числа заявок в системе в первом приближении в виде $\mathbf{H}(u) \approx \mathbf{F}_1(w) = \mathbf{r} \exp\{juk_1N\}$.

Найдём асимптотику второго порядка. Обозначим через $\mathbf{H}_2(u)$ векторную функцию, удовлетворяющую выражению $\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u) \exp\{juk_1N\}$. Подставляя это выражение в (2), получим

$$\frac{1}{N} j(e^{-ju} - 1) \frac{d\mathbf{H}_2(u)}{du} \mathbf{M} = \mathbf{H}_2(u) [(e^{-ju} - 1)k_1\mathbf{M} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}].$$

Выполним здесь следующие замены: $1/N = \varepsilon^2$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_2(u) = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)$. Получим

$$\varepsilon^2 j(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{M} = \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) [(e^{-j\varepsilon w} - 1)k_1 \mathbf{M} + (e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}]. \quad (5)$$

Теорема 2. Асимптотическое решение уравнения (5) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} N k_2 \right\}, \quad k_2 = \frac{\mathbf{r} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} - k_1 \mathbf{g} \mathbf{M} \mathbf{e} + \mathbf{g} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}}{\mathbf{r} \mathbf{M} \mathbf{e}}.$$

Здесь вектор-строка \mathbf{g} является решением системы
$$\begin{cases} \mathbf{g} \mathbf{Q} = k_1 \mathbf{r} \mathbf{M} - \mathbf{r} \mathbf{\Lambda}, \\ \mathbf{g} \mathbf{e} = 1. \end{cases}$$

В результате получаем выражение для характеристической функции числа заявок в системе во втором приближении в виде:
$$\mathbf{H}(u) \approx \mathbf{F}_2(w) = \exp \left\{ ju k_1 N + \frac{(ju)^2}{2} k_2 N \right\}.$$

Таким образом, в условии высокой интенсивности входящего потока и частого изменения состояний случайной среды стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе можно аппроксимировать гауссовским распределением с математическим ожиданием $a = M\{i(t)\} = k_1 N$ и дисперсией $\sigma^2 = M\{(i(t) - a)^2\} = k_2 N$.

4. Дискретизация распределения

Полученный результат в работе является функцией распределения нормальной величины. Для получения из нормального распределения закона распределения дискретной случайной величины числа заявок в системе следует выполнить его преобразование на аргумент из множества неотрицательных целых чисел. Для этого воспользуемся [1]

$$F_i = \frac{1}{1 - G(-1/2)} [G(i + 1/2) - G(i - 1/2)], \quad (6)$$

где $i = \overline{0, \infty}$ и $G(x)$ – функция распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 .

5. Численный анализ области применения асимптотических результатов

Смоделируем реализацию поведения системы с помощью имитационной модели. Для анализа точности полученных аппроксимаций законов распределения вероятностей числа занятых приборов смоделируем реализацию поведения модели с помощью дискретно-событийного подхода. Т.к. асимптотический анализ был проведен в условиях высокой интенсивности входящего потока и высокой частоты смены состояний случайной среды, то нужно определить погрешность аппроксимации при заданных значениях N параметра, характеризующего интенсивность. Для сравнения законов распределения вероятностей используем количественную метрику расстояние Колмогорова
$$d = \sup_x \left| \sum_{i=0}^x [P_i - F_i] \right|,$$
 где $x = 0, \dots, \infty$, P_i – относительные частоты эмпирического распределения, построенного на основе имитационного моделирования, а F_i – закон распределения, построенный на основе соответствующей аппроксимации (6). В качестве примера зададим следующие параметры модели:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Согласно аппроксимации, при параметрах (7) математическое ожидание будет равно 1. На рис. 3 показаны графики сравнения эмпирического и асимптотического распределений числа заявок для различных значений N . В табл. 1 представлены значения расстояния Колмогорова между эмпирическим и асимптотическим распределением. По таблице можно определить, что начиная с $N = 50$ погрешность распределения составляет менее 0.05, что будем считать приемлемым результатом.

Таблица 1

Расстояние Колмогорова d между эмпирическим и асимптотическим распределениями при различных N

N	1	5	10	30	50	100
d	0.227	0.113	0.090	0.060	0.043	0.028

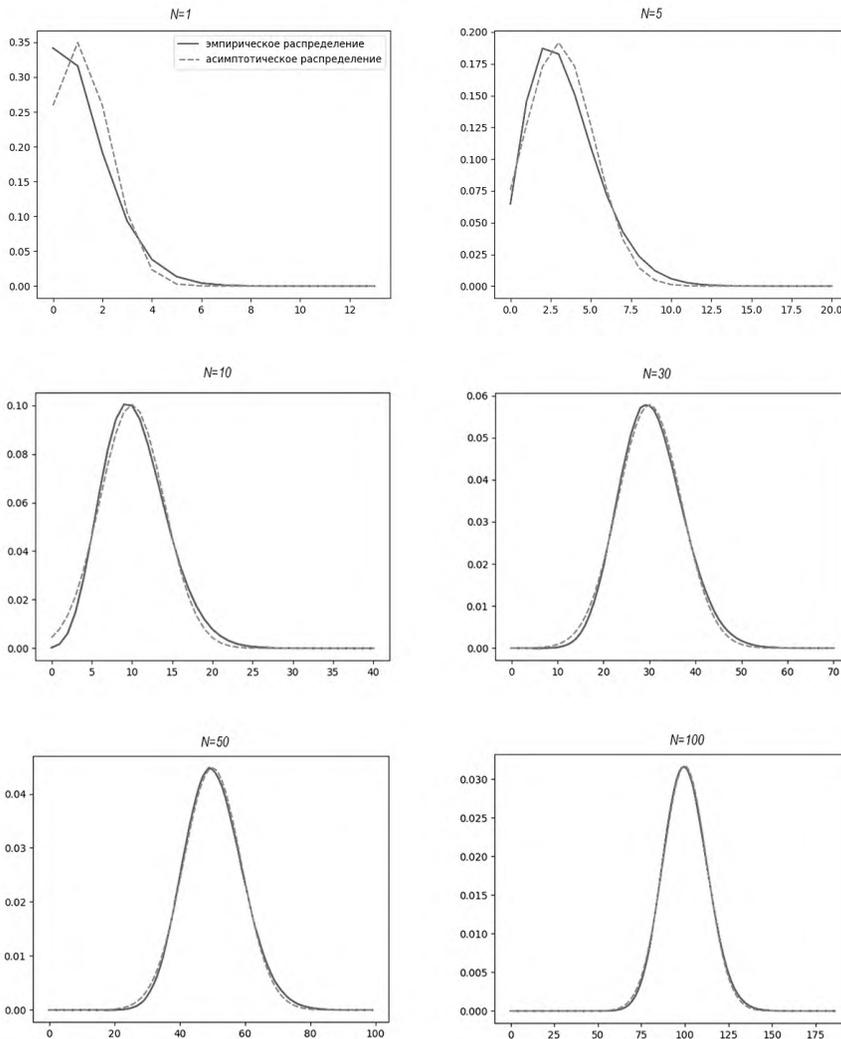


Рис. 3. Сравнение эмпирического и асимптотического распределений числа заявок в системе

Заключение

В работе рассмотрена система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, функционирующая в случайной среде. В результате получено приближенное распределение вероятностей числа заявок в системе в асимптотическом условии высокоинтенсивного входящего потока и частой смены состояний среды. Была построена

имитационная модель и определено, при каких значениях N асимптотическое распределение достигает приемлемого результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.
2. *Wilkinson R.I.* Theories for toll traffic engineering in the USA. // *The Bell System Technical Journal*. – 1956. – № 2. – P. 421–507.
3. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.