МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

XI-й Международной молодёжной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 24–27 мая 2024 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2024

ББК 22.17– 22.19
УДК 519.2, 519.7, 519.8
Т78

ЧЛЕНЫ КОЛЛЕГИИ, РУКОВОДИТЕЛИ НАУЧНЫХ РЕДАКЦИЙ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ:

д-р физ.-мат. наук, проф. **А.А. Глазунов** – научная редакция «Механика, математика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **Э.Р. Шрагер** – научная редакция «Механика, математика»; д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко** – научная редакция «Информатика и кибернетика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **В.Г. Багров** – научная редакция «Физика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.И. Потекаев** – научная редакция «Физика»; д-р биол. наук, проф. **С.П. Кулижский** – научная редакция «Биология»; д-р геол.-минер. наук, проф. **В.П. Парначев** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; канд. хим. наук, доц. **Ю.Г. Слижов** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; д-р филол. наук, проф. **Т.А. Демешкина** – научная редакция «История, филология»; д-р ист. наук, проф. **В.П. Зиновьев** – научная редакция «История, филология»; д-р экон. наук, проф. **В.А. Уткин** – научная редакция «Юридические и экономические науки»; д-р ист. наук, проф. **Э.И. Черняк** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствознание»; д-р психол. наук, проф. **Э.В. Галажинский** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствознание»

НАУЧНАЯ РЕДАКЦИЯ ТОМА:

д-р техн. наук, проф. **А.В. Замятин**, д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Л.А. Нежельская**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.Н. Моисеев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **С.П. Моисеева**, канд. техн. наук, доц. **Н.Л. Ерёмина**, канд. техн. наук, доц. **С.А. Останин**, канд. техн. наук **И.С. Шмырин**.

Т78 Труды Томского государственного университета. – Т. 309. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы XI-й Международной молодѐжной научной конференции. Томск, 24–27 мая 2024 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2024. – 324 с.

ISBN 978-5-907890-15-2

Сборник содержит материалы XI-й Международной молодѐжной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», проводившейся 24–27 мая 2024 г. на базе Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

УДК 539.3.004
ББК 22.17-22.19

ISBN 978-5-907890-15-2
© Томский государственный университет, 2024

ВЫВОД. Из численных и графических результатов видно, что с увеличением значения параметра α_2 значение $\hat{M}(\hat{\eta}_2)$ в обоих случаях уменьшается. Это связано с тем, что параметр α_2 определяет длительность интервала пребывания процесса $\lambda(t)$ во 2-м состоянии.

Заключение

В данной работе исследован полусинхронный поток событий второго порядка с двумя состояниями, функционирующий в условиях продлевающегося мѐртвого времени фиксированной длительности. Построена имитационная модель данного потока в виде программного кода на языке программирования Python с использованием различных библиотек (numpy, tkinter, matplotlib и т.д.).

Анализ корректности результатов проведѐнных статистических экспериментов 1−4 даѐт возможность утверждать, что получена работоспособная модель, не противоречащая математической модели потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Erlang A.K.* The theory of probabilities and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. Seria B. – 1909. – Vol 20, is. B. – P. 33–39.
2. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.
3. *Нежельская Л.А.* Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2020. – 210 с.
4. *Тумашкина Д.* Оценка состояний, длительности мертвого времени и параметров распределения в полусинхронном потоке событий второго порядка // дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.01. – Томск, 2021. – 154 с.
5. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. − М.: Наука, 1973. – 312 с.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЁРТВОГО ВРЕМЕНИ В РЕКУРРЕНТНОМ ОБОБЩЁННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Нежельская Л.А., Пономаренко В.Д.
Томский государственный университет
ludne@mail.ru, valya.ponomarenko.00@mail.ru

Введение

В данной работе рассматривается обобщѐнный асинхронный поток событий с продлевающимся мѐртвым временем и выводится уравнение моментов для оценки длительности мѐртвого времени. Математическая модель рассматриваемого потока является наиболее приближенной к реальности моделью потоков заявок, запросов, сообщений, протекающих в компьютерных сетях, телекоммуникационных сетях и сетях связи. Для дважды стохастического потока характерно следующее: сопровождающий случайный процесс является принципиально ненаблюдаемым и моменты наступления событий случайны. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1], ко второму – потоки с интенсивностью в виде кусочно-постоянного случайного процесса с конечным числом состояний [2−4].

В большом количестве работ по теории массового обслуживания решаются задачи, когда все события входящего потока доступны для наблюдения, однако такая ситуация далеко не всегда соответствует реальности, т.к. в реальных системах входящее событие способно породить период мѐртвого времени для регистрирующего прибора. В течение этого периода другие события входящего потока становятся ненаблюдаемыми, говоря иначе − теряются [5]. Мѐртвое время, порождаемое наступившим событием, является в некотором роде искажающим фактором при решении различного рода задач оценива-

ния состояний потока или же его параметров по моментам наступления событий в наблюдаемом потоке.

В работах [6,7] решены задачи оценивания длительности мѐртвого времени, когда наступившие в течение периода мѐртвого времени события не вызывают его продления (непродлевающееся мѐртвое время). Мѐртвое время может иметь фиксированную длительность, либо быть случайным.

Поток, рассматриваемый в данной работе, относится ко второму классу дважды стохастических потоков, и предполагается, что событие, наступившее в течение периода мѐртвого времени, хотя и не наблюдается, всѐ же способно продлить общий период ненаблюдаемости исходного потока (продлевающееся мѐртвое время). При этом принимается, что мѐртвое время имеет фиксированную длительность.

В настоящей работе, являющейся продолжением исследования, начатого в [8], выводится уравнение моментов для решения задачи оценивания длительности мѐртвого времени в обобщѐнном асинхронном потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мѐртвого времени.

1. Математическая модель потока

Рассматривается обобщѐнный асинхронный поток событий, обладающий следующими свойствами: 1) стационарность – вероятностные свойства потока не зависят от выбранного интервала времени на временной оси; 2) ординарность – невозможность наступления двух или более событий в один и тот же момент времени; 3) наличие последействия – выражает собой взаимную зависимость поведения потока в непересекающихся между собой промежутках времени.

Сопровождающий процесс данного потока $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями S_1 и S_2; будем говорить, что имеет место состояние S_i процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$, $\lambda_1>\lambda_2\geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i является случайной величиной с функцией распределения $F_i(t)=1-e^{-\alpha_i t}$, $t\geq 0$, $i=1,2$ В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_1; в течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 − пуассоновский поток событий с параметром λ_2.

В момент перехода сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью p ($0\leq p\leq 1$) инициируется дополнительное событие потока в состоянии S_2 (сначала переход из S_1 в S_2, затем наступление дополнительного события в S_2). Аналогично при переходе сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 с вероятностью q ($0\leq q\leq 1$) инициируется дополнительное событие потока в состоянии S_1 (сначала переход из S_2 в S_1, затем наступление дополнительного события в S_1).

В момент наступления каждого события потока наступает период ненаблюдаемости событий фиксированной длительности T (мѐртвое время), так что другие события, наступившие в течение времени T, недоступны наблюдению. Каждое событие, ненаблюдаемое в течение мѐртвого времени, вызывает продление периода ненаблюдаемости на величину T; наблюдаться будет лишь то событие, которое наступило после окончания последнего периода ненаблюдаемости.

На рис. 1 приведена схема формирования наблюдаемого потока событий и одна из реализаций сопровождающего процесса $\lambda(t)$, где λ_i – значения процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i, $i=1,2$; $t_1,t_2,...$ – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке. Наблюдаемые события обозначены незакрашенными кружками, а ненаблюдаемые события, т.е. недоступные наблюдению из-за наличия мѐртвого времени, обозначены за-

крашенными кружками. Штриховкой обозначен период ненаблюдаемости. Общий период ненаблюдаемости ξ – случайная величина.

Матрицы инфинитезимальных характеристик сопровождающего процесса $\lambda(t)$ имеют вид [9]:

$$\mathbf{D_0} = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p)\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2) \end{Vmatrix}, \ \mathbf{D_1} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & p\alpha_1 \\ q\alpha_2 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события потока. Недиагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

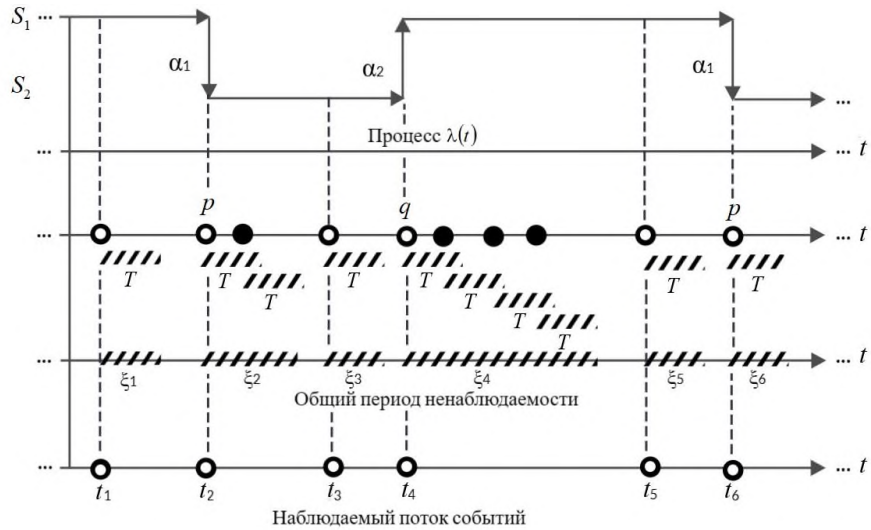

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

2. Двумерная плотность вероятности длительностей двух смежных интервалов. Условия рекуррентности

Пусть $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты времени наступления событий в потоке.

Лемма 1. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, образуемая совокупностью моментов наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, является вложенной цепью Маркова [9].

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, – значение длительности *k*-го интервала между соседними событиями t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, ...$ наблюдаемого потока. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому для плотности вероятности значений η_k справедливо $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau_k \geq 0$, $\forall k$. Это позволяет без ограничения общности считать момент наступления события t_k равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Теорема 1. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в обобщѐнном асинхронном потоке имеет вид [10]:

$$p(\tau)=\gamma z_1 e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2 e^{-z_2\tau},\ \tau\ge 0,$$

$$\gamma=\frac{1}{z_2-z_1}\left[-z_1+\lambda_1+\lambda_2-\frac{(\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2}\right],$$

$$z_1=\frac{1}{2}\left[\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2-\sqrt{(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right], \tag{1}$$

$$z_2=\frac{1}{2}\left[\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2+\sqrt{(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right],$$

$$z_2>z_1>0,\ z_2-z_1\ne 0.$$

Теорема 2. Совместная плотность вероятности $p(\tau_1,\tau_2)$ длительностей двух соседних интервалов для обобщѐнного асинхронного потока событий имеет вид [10]:

$$p(\tau_1,\tau_2)=p(\tau_1)\,p(\tau_2)+\gamma(1-\gamma)\frac{\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2}{z_1z_2}\left(z_1e^{-z_1\tau_1}-z_2e^{-z_2\tau_1}\right)\left(z_1e^{-z_1\tau_2}-z_2e^{-z_2\tau_2}\right),$$

$$\tau_1\ge 0,\ \tau_2\ge 0,$$

$$\gamma(1-\gamma)=\frac{\alpha_1\alpha_2z_1z_2(\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2)(\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2)}{(z_2-z_1)^2(\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2)^2}, \tag{2}$$

$$z_2>z_1>0,\ z_2-z_1\ne 0,$$

где z_1, z_2 определены в (1); $p(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau=\tau_k$, $k=1,2$.

Из анализа (2) вытекают условия рекуррентности и соответствующие плотности $p(\eta)$:

1. Если $\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2=0$, то $\gamma(1-\gamma)=0$ и $p(\tau_1,\tau_2)$ факторизуется. Подставляя условие $\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2=0$ в (1), находим плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями $p(\eta)$ в виде $p(\tau)=(p\alpha_1+\lambda_1)e^{-(p\alpha_1+\lambda_1)\tau}$, $\tau\ge 0$. В этом случае обобщѐнный асинхронный поток вырождается в простейший.

2. Если $\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2=0$, то $\gamma(1-\gamma)=0$ и $p(\tau_1,\tau_2)$ факторизуется. Подставляя условие $\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2=0$ в (1), находим плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями $p(\eta)$ в виде $p(\tau)=(q\alpha_1+\lambda_1)e^{-(q\alpha_1+\lambda_1)\tau}$, $\tau\ge 0$. Как и в предыдущем случае, обобщѐнный асинхронный поток вырождается в простейший.

3. Если $\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2=0$, то совместная плотность вероятности $p(\tau_1,\tau_2)$ факторизуется. Подставляя условие $\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2=0$ в (1), находим плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями $p(\eta)$:

$$p(\tau)=\gamma z_1e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2e^{-z_2\tau},\ \tau\ge 0,\ \gamma=\frac{z_2-\lambda_1-\lambda_2}{z_2-z_1},\ z_2-z_1\ne 0. \tag{3}$$

Далее рассматривается рекуррентный поток в случае 3.

3. Преобразование Лапласа плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости

Пусть ξ – длительность общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном потоке. Последовательность $t_1,t_2,\ldots$ моментов наступления событий в наблюдаемом потоке образует вложенную цепь Маркова, и рекуррентность наблюдаемого потока сохраняется.

Переобозначим в (3) плотность $p(\eta)$ на $\tilde{p}(x)$; получим

$$\tilde{p}(x) = \gamma z_1 e^{-z_1 x} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 x}, \ x \geq 0. \quad (4)$$

Теорема 3. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщѐнном асинхронном потоке с продлевающимся мѐртвым временем в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \left[1 - \left[(1 - e^{-(s+z_1)T}) z_1 \frac{z_2 - \lambda_1 - \lambda_2}{(s+z_1)(z_2 - z_1)} + \left(1 - e^{-(s+z_2)T}\right) z_2 \frac{-z_1 + \lambda_1 + \lambda_2}{(s+z_2)(z_2 - z_1)} \right] \right]^{-1}. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Пальма $\varphi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(x)dx$ – вероятность того, что на интервале $(0,T)$ событий рекуррентного потока не наступит при условии, что в начальный момент времени интервала $(0,T)$ событие наступило. Вычислив интеграл, находим

$$\varphi_0(T) = \gamma e^{-z_1 T} + (1-\gamma) e^{-z_2 T}, \quad (6)$$

где величина γ определена в (3), z_1, z_2 определены в (1).

Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мѐртвого времени, имеет вид [10]:

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \left[1 - \int_0^T e^{-sx} \tilde{p}(x)dx \right]^{-1}. \quad (7)$$

Подставляя (4), (6) в (7) и вычисляя интеграл, получаем (5). *Теорема доказана.*

Лемма 2. Математическое ожидание длительности общего периода ненаблюдаемости **ξ** в рекуррентном обобщѐнном асинхронном потоке событий с продлевающимся мѐртвым временем имеет вид

$$M\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{z_1 z_2 \varphi_0(T)} \left[\gamma z_2 + (1-\gamma) z_1 - \gamma z_2 e^{-z_1 T} - (1-\gamma) z_1 e^{-z_2 T} \right]. \quad (8)$$

Доказательство. Нетрудно показать, что с использованием вида $g_\xi(s)$, определѐнного в (7), математическое ожидание **ξ** запишется в виде

$$M\boldsymbol{\xi} = -g'_\xi(s)\Big|_{s=0} = T + \frac{1}{\varphi_0(T)} \int_0^T x\tilde{p}(x)dx. \quad (9)$$

Подставляя (4) и (6) в (9), находим (8). *Лемма доказана.*

4. Преобразование Лапласа плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке

Рассмотрим интервал времени (t_k, t_{k+1}), значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. С другой стороны, длительность этого интервала равна $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$, где **η** – длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом t_{k+1}. Величины **η** и **ξ** являются зависимыми. Тогда плотность вероятности $p(\eta)$ запишется в виде

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(\xi) p(\eta | \xi) d\xi = \int_0^\tau p(\xi) p(\tau - \xi | \xi) d\xi. \quad (10)$$

Теорема 4. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщѐнном асинхронном потоке с продлевающимся мѐртвым временем в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид

$$g_\tau(s)=\left(z_1+s\right)^{-1}\left(z_2+s\right)^{-1}\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^{-1}\Big[z_1z_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)g_\xi(s)+$$
$$+s\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2}\left(\lambda_1+p\alpha_1-\lambda_2-q\alpha_2\right)g_\xi\left(\lambda_1+\lambda_2+s\right)\Big], \tag{11}$$

где функция $g_\xi(s)$ определена формулой (5), $g_\xi\left(\lambda_1+\lambda_2+s\right)$ определена формулой (5), в которой нужно заменить s на $\lambda_1+\lambda_2+s$.

Доказательство. Пусть момент наступления события в наблюдаемом потоке есть $\tau=0$. Рассмотрим интервал $(0,\tau)=(0,\xi+\eta)$. Зафиксируем ξ. В формуле (10) условная плотность $p\left(\tau-\xi\,|\,\xi\right)$, $\tau\ge\xi$, по смыслу совпадает с плотностью $p_T(\tau)=p\left(\tau\,|\,T\right)$, $\tau\ge T$ для обобщѐнного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мѐртвого времени T [10]. Выполнив достаточно трудоѐмкие преобразования и учитывая условие рекуррентности $\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2=0$, находим $p\left(\tau-\xi\,|\,\xi\right)$ в виде

$$p(\tau-\xi|\xi)=\begin{cases}0,\ 0\le\tau<\xi,\\ \Gamma(\xi)z_1e^{-z_1(\tau-\xi)}+(1-\Gamma(\xi))z_2e^{-z_2(\tau-\xi)},\ \tau\ge\xi,\end{cases}$$
$$\Gamma(\xi)=\frac{1}{z_2-z_1}\left[z_2-\left(\lambda_1+p\alpha_1\right)\pi_1(\xi)-\left(\lambda_2+q\alpha_2\right)\pi_2(\xi)\right],\ z_2-z_1\ne0,$$
$$\pi_1(\xi)=\pi_1\left[1+\alpha_1\frac{\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2}{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2+(p+q)\alpha_1\alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi}\right], \tag{12}$$
$$\pi_2(\xi)=\pi_2\left[1-\alpha_1\frac{\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2}{\alpha_2\lambda_1+\alpha_1\lambda_2+(p+q)\alpha_1\alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi}\right].$$

Найдѐм преобразование Лапласа плотности $p(\eta)$, используя (10) и (12). Имеем

$$g_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}p(\tau)d\tau=$$
$$=\int_0^\infty e^{-s\tau}\left[\int_0^\tau p(\xi)p(\tau-\xi|\xi)d\xi\right]d\tau=\int_0^\infty p(\xi)[\int_\xi^\infty e^{-s\tau}p(\tau-\xi|\xi)d\tau]d\xi=$$
$$=\int_0^\infty p(\xi)[\int_\xi^\infty e^{-s\tau}\Gamma(\xi)z_1e^{-z_1(\tau-\xi)}d\tau+\int_\xi^\infty e^{-s\tau}(1-\Gamma(\xi))z_2e^{-z_2(\tau-\xi)}d\tau]d\xi.$$

В выражении для $g_\tau(s)$ выполним замену переменных: $\tau-\xi=\eta$, $\tau=\xi+\eta$; при этом $\tau:(\xi;\infty)$, $\eta:(0;\infty)$. Тогда

$$g_\tau(s)=\int_0^\infty p(\xi)\left[\int_0^\infty e^{-s(\eta+\xi)}z_1\Gamma(\xi)e^{-z_1\eta}d\eta+\int_0^\infty e^{-s(\eta+\xi)}z_2(1-\Gamma(\xi))e^{-z_2\eta}d\eta\right]d\xi.$$

Подставляя явный вид $\Gamma(\xi)$, определѐнный в (12), и выполняя интегрирование, приходим к (11). *Теорема доказана.*

5. Вывод уравнения моментов

Преобразование (11) позволяет получить начальные моменты $M\left(\boldsymbol{\tau}^l\right)=(-1)^l g_\tau^{(l)}(s)\big|_{s=0}$, $l=1,2...$. Вычисляя производную от (11) по s в точке $s=0$, взятую со знаком минус, получаем

$$M(\boldsymbol{\tau})=\frac{1}{z_1z_2}\left(z_1+z_2-\frac{z_1z_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)-\frac{\alpha_1\alpha_2\left(\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2\right)\left(\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2\right)}{\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(z_1z_2\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\gamma e^{-(z_1+\alpha_1+\alpha_2)T}+(1-\gamma)e^{-(z_2+\alpha_1+\alpha_2)T}}{\left[1-\frac{\gamma z_1}{z_1+\alpha_1+\alpha_2}\left(1-e^{-(z_1+\alpha_1+\alpha_2)T}\right)-\frac{(1-\gamma)z_2}{z_2+\alpha_1+\alpha_2}\left(1-e^{-(z_2+\alpha_1+\alpha_2)T}\right)\right]}+M\xi. \tag{13}$$

Будем решать задачу оценивания длительности мѐртвого времени T методом моментов. Введѐм статистику $C_l=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k^l$, , $k=\overline{1,n}$, где $\tau_k=t_{k+1}-t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} наступления событий в рекуррентном обобщѐнном асинхронном потоке с продлевающимся мѐртвым временем.

Предположим, что параметры α_1, α_2, λ_1, λ_2, p, q являются известными. При количестве наблюдений $n\to\infty$ выборочный момент C_1 стремится к теоретическому моменту $M(\boldsymbol{\tau})$ [11]. Тогда для оценки длительности мѐртвого времени T имеем уравнение моментов

$$M(\boldsymbol{\tau})=C_1, \tag{14}$$

где функция $M(\boldsymbol{\tau})$ определена в (13).

Обозначим левую часть (14) через $f(T)$. Численно можно показать, что функция $f(T)$, $T\ge 0$, является возрастающей. Уравнение $f(T)=C_1$ решается численно на интервале $0\le T\le\tau_{\min}$, $\tau_{\min}=\min\{\tau_k\}$, $k=\overline{1,n}$.

Возможные ситуации поведения функции $f(T)$ приведены на рис. 2–5.

1. $f(T=0)>C_1$; в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ выбирается $\hat{T}=0$ (рис. 2).

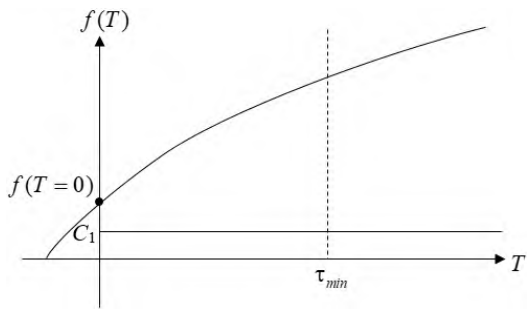

Рис. 2. Поведение функции $f(T)$, $f(0)>C_1$

2. $f(T=0)=C_1$; в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ выбирается $\hat{T}=0$ (рис. 3).

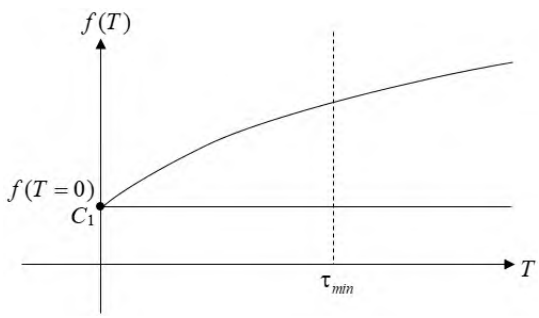

Рис. 3. Поведение функции $f(T)$, $f(0)=C_1$

3. $f(T=0)<C_1$; возможны случаи:

a) корень уравнения моментов (14) попадает в полуинтервал $\left(0, \tau_{\min}\right]$, тогда в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ выбирается $\hat{T} = \hat{T}^*$ (рис. 4).

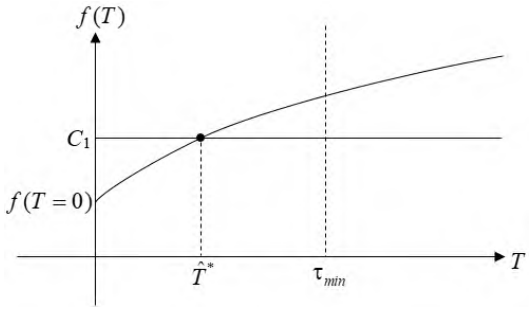

Рис. 4. Поведение функции *f*(*T*), $f(0) < C_1$, $\tau_{\min} > \hat{T}^*$

b) корень уравнения (14) больше, чем $\eta_{\min}$, тогда в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ выбирается $\hat{T} = \tau_{\min}$ (рис. 5).

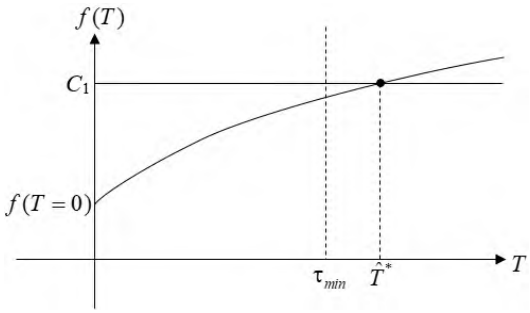

Рис. 5. Поведение функции *f*(*T*), $f(0) < C_1$, $\tau_{\min} \le \hat{T}^*$

Заключение

В данной работе рассмотрен дважды стохастический обобщѐнный асинхронный поток случайных событий с двумя состояниями, функционирующий в стационарном режиме в условиях продлевающегося мѐртвого времени фиксированной длительности. Построена математическая модель данного потока. Получено преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности интервалов между соседними событиями в рекуррентном обобщѐнном асинхронном потоке (11), с использованием которого выведено уравнение моментов (14) для решения задачи оценивания длительности мѐртвого времени *T*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cox D.R.* The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – V. 51. – No. 3. – P. 433–441.

2. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.

3. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. – 1979. –V. 16. – P. 764–779.

4. *Lucantoni D.M.* New results on single server with a bath Markovian arrival process // Stochastic Models. – 1991. – V. 7. – P. 1–46.

5. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.

6. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 32–42.

7. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мѐртвого времени в обобщѐнном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (25). – С. 27–37.

8. *Нежельская Л.А., Пономаренко В.Д.* Имитационное моделирование обобщѐнного асинхронного потока событий с продлевающимся мѐртвым временем // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. – 2023. – Т. 308. – С. 27 − 35.

9. *Нежельская Л.А.* Оценка состояний дважды стохастических потоков событий: учебное пособие. – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2020. – 210 с.

10. *Нежельская Л.А.* Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. – 341 с.

11. *Малинковский Ю.В.* Теория вероятностей и математическая статистика (Часть 2. Математическая статистика). – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 146 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНКИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В РЕКУРРЕНТНОМ ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Нежельская Л.А., Степаненко И.Д.
Томский государственный университет
ludne@mail.ru, 97step@mail.ru

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) являются широко распространенными математическими моделями реальных физических, технических, экономических, информационных систем и сетей. СМО включают: 1) множество входящих потоков событий; 2) множество обслуживающих приборов; 3) множество бункеров (накопителей, очередей); 4) дисциплины обслуживания.

Первый элемент, определяющий СМО, включает в себя множество различных типов потоков. Первым из таких потоков для исследования и применения в теории массового обслуживания (ТМО) был простейший (стационарный пуассоновский) поток событий. Однако в настоящее время модель простейшего потока является непригодной для описания реальных информационных потоков сообщений (запросов, заявок, событий) в телекоммуникационных сетях. Это связано с тем, что математическая модель простейшего потока не учитывает разнородность передаваемых данных и их возможную взаимную корреляцию [1]. Таким образом, требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков (коррелированных потоков) [2−4], которые являются широко используемой математической моделью реальных потоков сообщений в телекоммуникационных системах, глобальных компьютерных сетях, спутниковых сетях связи.

Авторы работ по ТМО исследуют, как правило, математические модели потоков событий, когда все события потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие может создать период мертвого времени для регистрирующего прибора (период ненаблюдаемости) [5], в течение которого другие события потока становятся недоступными для регистрирующего прибора (теряются). При этом наступившее в течение периода мертвого времени событие может как продлить общий период ненаблюдаемости исходного потока (продлевающееся мертвое время), так и не продлевать его (непродлевающееся мертвое время).

Таким образом, мертвое время выступает искажающим фактором при решении задач оценивания как состояний потока [6], так и его параметров [7−9].

В данной работе находится оценка длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем в особом случае соотношения параметров потока как решение уравнения моментов. На имитационной модели потока проводятся статистические эксперименты с целью уста-