

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН  
КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
(ИТММ-2023)**

**МАТЕРИАЛЫ  
XXII Международной конференции  
имени А. Ф. Терпугова  
4–9 декабря 2023 г.**

**Часть 2**

ТОМСК  
Издательство Томского  
государственного университета  
2024

УДК 519  
ББК 22.17  
И74

Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (4–9 декабря 2023 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2024. — Часть 2. — 102 с.

ISBN 978–5–907722–70–5

Сборник содержит пленарные доклады и статьи молодых учёных, представленные на XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование экономических систем, прикладной вероятностный анализ и др.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

**УДК 519**  
**ББК 22.17**

Р е д к о л л е г и я:

**А.Н. Моисеев**, доктор физико-математических наук, профессор  
**Д.В. Семенова**, кандидат физико-математических наук, доцент  
**Е.А. Фёдорова**, кандидат физико-математических наук  
**Е.Ю. Лисовская**, кандидат физико-математических наук  
**О.Д. Лизюра**

ISBN 978–5–907722–70–5

© Авторы. Текст, 2024  
© Томский государственный университет. Оформление.  
Дизайн, 2024

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY  
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA  
V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL  
SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES  
KARSHI STATE UNIVERSITY

**INFORMATIONAL TECHNOLOGIES  
AND MATHEMATICAL MODELLING  
(ITMM-2023)**

**PROCEEDINGS  
of the 22th International Conference  
named after A. F. Terpugov  
2023 December, 4–9**

**Part 2**

TOMSK  
Tomsk State  
University Publishing  
2024

UDC 519  
LBC 22.17  
I60

Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2023):  
Proceedings of the 22th International Conference named after A. F.  
Terpugov (2023 December, 4–9). — Tomsk: Tomsk State University  
Publishing, 2024. — Part 2. — 102 p.

ISBN 978–5–907722–70–5

This volume presents plenary talks and papers of young scientists selected from the 22th International Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new results in the following areas: queuing theory and its applications, information technology and software engineering, mathematical and computer modeling of economical processes, applied probabilistic analysis, etc.

**UDC 519**  
**LBC 22.17**

E d i t o r s:

**A.N. Moiseev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor.

**D.V. Semenova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor.

**E.A. Fedorova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

**E.Y. Lisovskaya**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

**O.D. Lizyura**.

ISBN 978–5–907722–70–5

© Authors. Text, 2024  
© Tomsk State University  
Publishing. Design, 2024

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Я. А. Тюленина, Е. А. Фёдорова

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
г. Томск, Россия*

В работе предлагается математическая модель гибридной энергосистемы (совмещающей два источника электроэнергии) в виде бесконечнолинейной системы массового обслуживания с переключением. Будем рассматривать системы  $M/M/\infty$  с двумя блоками обслуживающих приборов и случайным временем работы каждого блока. В произвольный момент времени может работать только один из блоков, при переключении все обрабатываемые заявки переходят на работающий блок. Получено распределение вероятностей числа заявок в системе. Проведен численный анализ показателей системы, в том числе функции затрат, при различных параметрах модели.

**Ключевые слова:** *гибридная энергосистема, математическое моделирование, теория массового обслуживания.*

## Введение

В современном мире все больше стран и компаний обращаются к альтернативным источникам энергии. К альтернативным источникам относят ту энергию, которую можно взять из восполняемых природных ресурсов, таких как солнце, ветер [1]. Такая энергетика бережно относится к экологии, однако имеет ряд недостатков: малая единичная мощность и большие затраты на постройку и содержание оборудования. Становится очевидным необходимость использования гибридных систем энергоснабжения, сочетающих альтернативные источники энергии (например, солнечные батареи) и традиционные (центральное энергоснабжение) [2, 3].

Работ, посвященных теоретическим исследованиям эффективности гибридных энергосистем, не так много. Моделирование с помощью математической физики и технической стороны описано в работах [4, 5]. Мы предлагаем применить теорию массового обслуживания для моделирования гибридных энергосистем. В работе предлагается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с

переключением  $M/M/\infty$ . Электроприборы, подключаемые в сеть электропитания образуют входящий поток заявок. В системе имеется два блока с бесконечным числом обслуживающих приборов (количество устройств, одновременно подключенных к сети неограничено). Предполагаем, что включение первого блока характеризует использование городской энергоснабжения, а второго - использование альтернативной электроэнергии. Данные блоки работают попеременно: при включении блока, использующего альтернативную энергию, блок, использующий городскую сеть выключается, а когда накопленная альтернативная энергия заканчивается, использующий её блок выключается и вновь используется городская электрическая сеть. Описанная модель СМО может быть также интерпретирована как СМО с переменной интенсивностью обслуживания или СМО, функционирующее в случайной среде [6, 7].

### 1. Описание модели

Как упоминалось выше, в качестве математической модели системы предлагается бесконечнолинейная система массового обслуживания  $M/M/\infty$  с переключением. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . В системе имеется два блока с бесконечным числом обслуживающих приборов. Время работы блоков распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\gamma_1$  для первого блока и  $\gamma_0$  для второго. В произвольный момент времени может работать только один из блоков, при переключении все обрабатываемые заявки переходят на работающий блок. При поступлении заявки в систему, заявка начинает обслуживание на работающем блоке. Время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_1$  на первом блоке и с параметром  $\mu_2$  на втором. Схема функционирования системы представлена на рисунке 1.

Введем процессы  $i(t)$  — число заявок в системе,  $i = \overline{0, \infty}$ ,  $k(t)$  — состояние блока обслуживания,  $k = 1, 2$ . Обозначим:

- $P(1, i, t)$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  в системе работает первый блок и находится  $i$  заявок,
- $P(2, i, t)$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  в системе работает второй блок и находится  $i$  заявок.

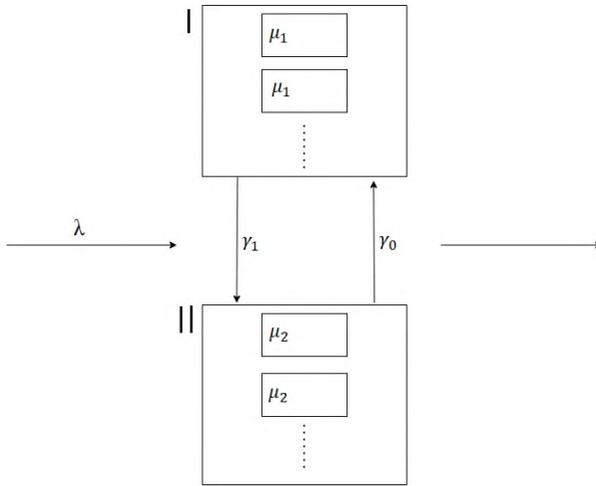


Рис. 1. Бесконечнолинейная СМО с переключением

Двумерный процесс  $\{k(t), i(t)\}$  является марковским. Запишем систему уравнений дифференциальных Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} = -P(1, i, t)(\lambda + i\mu_1 + \gamma_1) + P(2, i, t)\gamma_0 + \\ + P(1, i - 1, t)\lambda + P(1, i + 1, t)(i + 1)\mu_1, \\ \frac{\partial P(2, i, t)}{\partial t} = -P(2, i, t)(\lambda + i\mu_2 + \gamma_0) + P(1, i, t)\gamma_1 + \\ + P(2, i - 1, t)\lambda + P(2, i + 1, t)(i + 1)\mu_2. \end{cases} \quad (1)$$

Перейдем к стационарным уравнениям:

$$\begin{cases} -P(1, i)(\lambda + i\mu_1 + \gamma_1) + P(2, i)\gamma_0 + P(1, i - 1)\lambda + \\ + P(1, i + 1)(i + 1)\mu_1 = 0, \\ -P(2, i)(\lambda + i\mu_2 + \gamma_0) + P(1, i)\gamma_1 + P(2, i - 1)\lambda + \\ + P(2, i + 1)(i + 1)\mu_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Искомые вероятности  $P(k, i)$  удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (P(1, i) + P(2, i)) = 1. \quad (3)$$

## 2. Матричный метод

Для решения данной задачи запишем уравнений Колмогорова в матричном виде. Пусть  $\mathbf{P}$  вектор вероятностей  $P(k, i)$ ,  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов системы уравнений (2)–(3),  $\mathbf{V}$  – вектор свободных членов,

состоящий из последнего единичного элемента и остальных нулевых. Тогда система (2)–(3) может быть записана матричным уравнением:

$$\mathbf{P} * \mathbf{A} = \mathbf{V}.$$

Вектор-строка  $\mathbf{P}$  может быть найдена с помощью обратной матрицы:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} * \mathbf{A}^T * (\mathbf{A} * \mathbf{A}^T)^{-1}.$$

Вообще говоря, введенные матрицы бесконечной размерности ( $i = 0, \dots, \infty$ ). Для того, чтобы получить числовые характеристики, необходимо ограничить  $i \leq N$ , при этом выберем  $N$  достаточно большим, таким, что  $P(k, N) < 10^{-14}$ . При этом краевые уравнения для  $i = N$  будут отличаться:

$$\begin{cases} -P(1, N)(N\mu_1 + \gamma_1) + P(2, N)\gamma_0 + P(1, N - 1)\lambda = 0, \\ -P(2, N)(N\mu_2 + \gamma_0) + P(1, N)\gamma_1 + P(2, N - 1)\lambda = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько численных примеров. Пусть  $\lambda = 10$ ;  $\mu_1 = 2$ ;  $\mu_2 = 1$ ;  $\gamma_0 = 0.5$ ;  $\gamma_1 = 1$ . На рисунке 2 представленно полученное с помощью описанного метода распределения вероятностей числа заявок в системе при указанных параметрах. Среднее число заявок в системе  $M\{i(t)\} = 7.917$ . Стационарные вероятности нахождения блока обслуживания в первом и втором состоянии равны:  $R_1 = 0.333$ ,  $R_2 = 0.667$ .

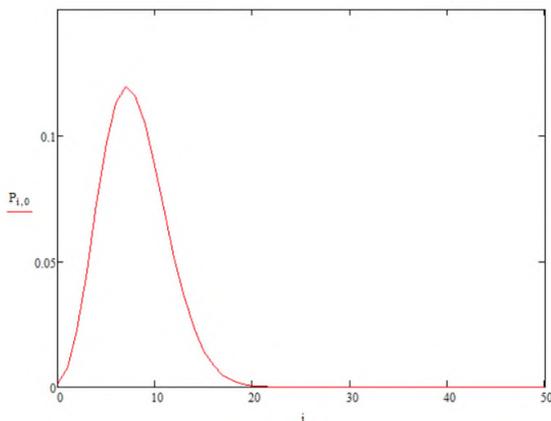


Рис. 2. Стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе  $\lambda = 10$ ;  $\mu_1 = 2$ ;  $\mu_2 = 1$ ;  $\gamma_0 = 0.5$ ;  $\gamma_1 = 1$

Рассмотрим случай  $\lambda = 50$ ;  $\mu_1 = 2$ ;  $\mu_2 = 1$ ;  $\gamma_0 = 0.1$ ;  $\gamma_1 = 0.1$ . На рисунке 3 представлено распределение вероятностей числа заявок в системе при указанных параметрах. Как видим, наблюдается двумодальное распределение. Это можно объяснить тем, что частота переключения блоков достаточно мала, и две части распределения отражают распределения вероятностей числа заявок при интенсивностях обслуживания  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Стационарные вероятности нахождения блока обслуживания в первом и втором состоянии в данном случае равны:  $R_1 = 0.5$ ,  $R_2 = 0.5$ .

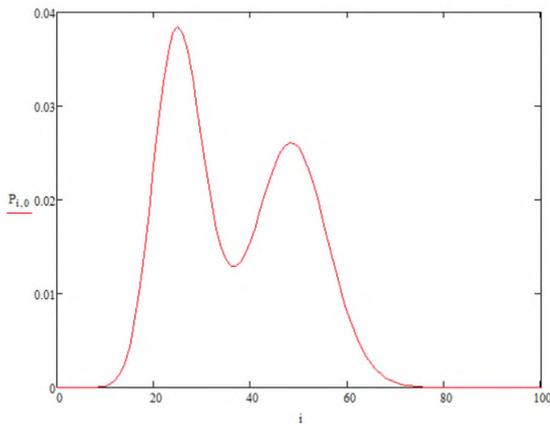


Рис. 3. Стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе  $\lambda = 50$ ;  $\mu_1 = 2$ ;  $\mu_2 = 1$ ;  $\gamma_0 = 0.1$ ;  $\gamma_1 = 0.1$

### 3. Анализ эффективности использования гибридной системы

Для того, чтобы сделать вывод о том, сокращает ли расходы гибридная система энергоснабжения по сравнению с системой, использующей традиционную энергию, проведем численный анализ текущих затрат. Введем  $L_1$  и  $L_2$  — функции затрат для системы с переключением и без переключения блоков обслуживания соответственно. Будем предполагать, что единичная стоимость электроэнергии городской сети  $c_1 = 1$ , при использовании альтернативной энергии мы не несем расходы, но переключение между источниками тоже требует некоторых затрат  $c_2 = 0.01$ . Тогда  $L_1$  и  $L_2$  определяются следующим образом:

$$L_1 = c_1 \cdot R_1 M\{i(t)\} + c_2(\gamma_0 + \gamma_1),$$

$$L_2 = c_1 \cdot M^*\{i(t)\},$$

где  $M^*\{i(t)\}$  – среднее число заявок для классической СМО  $M/M/\infty$  (то есть при  $\gamma_1 = 0$ ).

В таблице 1 представлено сравнение значений функций затрат при заданных параметрах ( $\lambda = 10$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.5$ ). Таким образом, целесообразность использования альтернативных источников энергии зависит от частоты переключения и их мощности.

Таблица 1

Значения функций затрат в зависимости от значений параметров  $\mu_1$  и  $\gamma_1$

	$\mu_1 = 2,$ $\gamma_1 = 0.5$	$\mu_1 = 2,$ $\gamma_1 = 0.1$	$\mu_1 = 4,$ $\gamma_1 = 0.5$	$\mu_1 = 4,$ $\gamma_1 = 0.1$
$L_1$	3.581	4.755	2.702	2.875
$L_2$	5	5	2.5	2.5

Стоит отметить, что в проведенном анализе мы не учитывали инвестиции, потраченные на установку альтернативных источников энергии. Здесь мы приводим лишь модель и алгоритм анализа эффективности гибридных энергетических систем с помощью аппарата теории массового обслуживания. Более подробные исследования (в том числе численные расчеты на реальных данных) планируется провести в будущих работах.

### Заключение

В работе предложена математическая модель гибридной энергосистемы в виде системы массового обслуживания  $M/M/\infty$  с переключением. С помощью матричного метода записано распределение вероятностей числа заявок в системе. Приведены численные примеры, в которых сравнены значения функций затрат предложенной модели с классической СМО без переключения. Рассмотренная в работе модель является начальным этапом исследования, в будущем предполагается построение более точной математической модели (в частности, с ММРР входящим потоком) и провести численный анализ целесообразности использования альтернативных источников энергии на реальных экономических и статистических данных.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукутин Б.В., Муравлев И.О., Плотников И.А.* Системы электросбережения с ветровыми и солнечными электростанциями: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. 128 с.

2. *Новокрещенов О. В., Отмахов Г. С., Хуаде М. Ю.* Комбинированные системы электроснабжения на возобновляемых источниках энергии // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2017. № 132(08). С. 1–12.
3. *Удалов С.Н., Захаров А.А.* Гибридная система электроснабжения для автономного дома // Научно-практическая конференция «Энерго- и ресурсоэффективность малоэтажных жилых зданий». Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2013. С. 111–115.
4. *Митрофанов С.В., Перепелкин К.А.* Математическое моделирование гибридной ветро-солнечной станции для электроснабжения собственных нужд // Вестник ЮУрГУ. Серия: Энергетика. 2022. № 3. С. 18–26.
5. *Марченко О.В., Соломин С.В., Лебедев А. В.* Математическое моделирование энергосистем с возобновляемыми источниками энергии // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2017. № 2(6). С. 57–64.
6. *Полин Е.П., Моисеева С.П., Рожкова С.В.* Асимптотический анализ неоднородной системы массового обслуживания  $M|M|\infty$  в марковской случайной среде // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 47. С. 75–83.
7. *Коротяев И. А.* Системы массового обслуживания с переменными параметрами. Томск: Изд-во Том. ун-та им. В. В. Куйбышева, 1991. 166 с.

---

**Тюленина Яна Андреевна** — магистр Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: [yanccch@gmail.com](mailto:yanccch@gmail.com)

**Фёдорова Екатерина Александровна** — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета. E-mail: [moiskate@mail.ru](mailto:moiskate@mail.ru)