НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2023)

МАТЕРИАЛЫ
XXII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
4–9 декабря 2023 г.

Часть 2

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2024

УДК 519
ББК 22.17
И74
Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (4–9 декабря 2023 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2024. — Часть 2. — 102 с.

ISBN 978–5–907722–70–5

Сборник содержит пленарные доклады и статьи молодых учёных, представленные на XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование экономических систем, прикладной вероятностный анализ и др.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Р е д к о л л е г и я:
А.Н. Моисеев, доктор физико-математических наук, профессор
Д.В. Семенова, кандидат физико-математических наук, доцент
Е.А. Фёдорова, кандидат физико-математических наук
Е.Ю. Лисовская, кандидат физико-математических наук
О.Д. Лизюра

ISBN 978–5–907722–70–5

© Авторы. Текст, 2024
© Томский государственный университет. Оформление. Дизайн, 2024

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY

PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

KARSHI STATE UNIVERSITY

INFORMATIONAL TECHNOLOGIES AND MATHEMATICAL MODELLING (ITMM-2023)

PROCEEDINGS
of the 22th International Conference
named after A. F. Terpugov
2023 December, 4–9

Part 2

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2024

UDC 519
LBC 22.17
I60
Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2023): Proceedings of the 22th International Conference named after A. F. Terpugov (2023 December, 4–9). — Tomsk: Tomsk State University Publishing, 2024. — Part 2. — 102 p.

ISBN 978–5–907722–70–5

This volume presents plenary talks and papers of young scientists selected from the 22th International Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new results in the following areas: queuing theory and its applications, information technology and software engineering, mathematical and computer modeling of economical processes, applied probabilistic analysis, etc.

UDC 519
LBC 22.17

E d i t o r s:

A.N. Moiseev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

D.V. Semenova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor.

E.A. Fedorova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

E.Y. Lisovskaya, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

O.D. Lizyura.

ISBN 978–5–907722–70–5

© Authors. Text, 2024
© Tomsk State University Publishing. Design, 2024

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИ RQ-СИСТЕМЫ С ОЖИДАНИЕМ ЗАЯВОК В БУНКЕРЕ И НА ОРБИТЕ

А. В. Подгайнов, А. А. Назаров

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В статье рассматривается RQ-система с ожиданием заявок в бункере и на орбите, простейшим входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания. Исследование данной математической модели проводится методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Была построена аппроксимация дискретного распределения состояний системы на основе полученных результатов асимптотического анализа. Определена точность асимптотической аппроксимации путем сравнения с результатами имитационного моделирования. **Ключевые слова:** *RQ-система, бункер, орбита, метод асимптотического анализа.*

Введение

Исследование систем с источником повторных вызовов (RQ-системы) [1] имеет большую ценность, так как при их помощи можно изучать процессы, протекающие в различных сферах: call-центры, системы сотовой связи и т.д. Исследование различных RQ-систем без использования бункера методом асимптотического анализа [2] рассмотрены в работах [3, 4, 5, 6]. В работе [7] рассматривается RQ-система с буфером, который используется для хранения одной заявки, которая не смогла закончить обслуживание по причине поломки обслуживающего устройства. В данной работе мы рассмотрим модель с конечным бункером, который будем использовать для ожидания заявок, поступающих из внешнего источника и с орбиты. В такой модели некоторое количество заявок не будет уходить на орбиту, а будет дожидаться своей очереди, тем самым тратя меньше времени на ожидание перед обслуживанием.

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему с очередью в конечном бункере и орбитой (Рисунок 1). На вход поступает простейший поток заявок с параметром λ. Время обслуживания заявки на приборе является экспоненциально

распределенной случайной величиной с параметром μ. Если заявка, поступившая в систему, застает прибор занятым, то она встает в бункер длины N-1. Если бункер заполнен полностью, то заявка уходит на орбиту, где ожидает время, распределенное экспоненциально с параметром σ, для повторного обращения к прибору. Если после ожидания на орбите заявка при обращении к прибору застает его занятым и в бункере отсутствуют свободные места, то она вновь уходит на орбиту и ожидает время, распределенное экспоненциально с параметром σ.

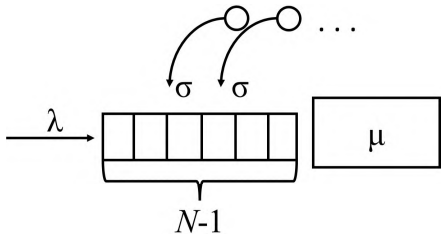

Рис. 1. RQ-система с бункером и орбитой

Пусть $n(t)$ – число заявок в системе без орбиты в момент времени t, $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t. Обозначим $P(n,i,t)$ – вероятность того, что в момент времени t в бункере вместе с обслуживающим прибором находится n заявок и на орбите находится i заявок.

Ставится задача найти двумерное стационарное распределение вероятностей $P(n,i)$. Исследование системы проведено методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите, когда $\sigma \to 0$. Исследование данным методом представляется в двух этапах, асимптотика первого порядка и асимптотика второго порядка.

Составим систему уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(n,i,t)$ и перейдем к системе уравнений в стационарном виде

$$\begin{cases} -(\lambda+i\sigma)P(0,i)+\mu P(1,i)=0, \\ -(\lambda+i\sigma+\mu)P(n,i)+\lambda P(n-1,i)+ \\ +(i+1)\sigma P(n-1,i+1)+\mu P(n+1,i)=0, n=\overline{1,N-1}, \\ -(\lambda+\mu)P(N,i)+\lambda P(N-1,i)+ \\ +(i+1)\sigma P(N-1,i+1)+\lambda P(N,i-1)=0. \end{cases} \quad (1)$$

2. Метод асимптотического анализа

Для решения системы (1) введем частичные характеристические функции:

$$H(n,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(n,i), n=\overline{0,N}, \tag{2}$$

где $j=\sqrt{-1}$. Систему уравнений (1) перепишем для частичных характеристических функций (2)

$$\begin{cases} -\lambda H(0,u)+\sigma j\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}+\mu H(1,u)=0, \\ -(\lambda+\mu)H(n,u)+\sigma j\dfrac{\partial H(n,u)}{\partial u}+\lambda H(n-1,u)- \\ -\sigma je^{-ju}\dfrac{\partial H(n-1,u)}{\partial u}+\mu H(n+1,u)=0, n=\overline{1,N-1}, \\ -(\lambda+\mu)H(N,u)+\lambda H(N-1,u)- \\ -\sigma je^{-ju}\dfrac{\partial H(N-1,u)}{\partial u}+\lambda e^{ju}H(N,u)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Суммируя все уравнения системы (3), получим согласованное уравнение вида

$$e^{-ju}\sigma j\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\partial H(n,u)}{\partial u}+\lambda H(N,u)=0. \tag{4}$$

2.1 Асимптотика первого порядка

Теорема 1. При выполнении предельного условия $\sigma\to 0$, частичные характеристические функции можно аппроксимировать в виде

$$H(n,u)=R(n)e^{jw\varkappa_1},$$

где $w=\dfrac{u}{\sigma}$, $n=\overline{0,N}$. Здесь $\varkappa_1$ является корнем уравнения

$$-x\sum_{n=0}^{N-1}R(n,x)+\lambda R(N,x)=0.$$

Формулы для $R(0,x)$ и $R(n,x)$ при $x=\varkappa_1$ представлены в виде

$$R(0)=\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\lambda+\varkappa_1}{\mu}\right)^n\right)^{-1},\ R(n)=R(0)\left(\frac{\lambda+\varkappa_1}{\mu}\right)^n, n=\overline{1,N}. \tag{5}$$

Полученные результаты асимптотики первого порядка показывают, что аппроксимация среднего значения числа заявок на орбите в исследуемой RQ-системе с ожиданием заявок в бункере и на орбите является величиной равной $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$. Проведем асимптотику второго порядка для построения распределения вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите.

2.2 Асимптотика второго порядка

В системе (3) и согласованном уравнении (4) выполним следующую замену:

$$H(n,u) = e^{j\frac{u}{\sigma}\varkappa_1} H_2(n,u). \tag{6}$$

Теорема 2. При выполнении предельного условия $\sigma \to 0$, частичные характеристические функции вида (6) можно аппроксимировать в виде $H_2(n,u)=F_2(n,w)$, где $w=\frac{u}{\sigma}$ и $F_2(n,w)$ имеет следующий вид

$$F_2(n,w) = R(n)e^{\frac{(jw)^2}{2}\varkappa_2}.$$

Формула, определяющая $R(n)$, имеет вид (3). Выражение для $\varkappa_2$ имеет следующий вид:

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1\left(1-\sum\limits_{n=0}^{N} g(n)\right) - \varkappa_1 R(N) + (\lambda+\varkappa_1)g(N)}{\varkappa_1 \sum\limits_{n=0}^{N}\varphi(n) + 1 - R(N) - (\lambda+\varkappa_1)\varphi(N)},$$

где $\varphi(n)$ определяется рекуррентной процедурой вида

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(n) = \frac{(\lambda+\varkappa_1)\varphi(n-1) - R(n-1)}{\mu},$$
$$\varphi(N) = \frac{(\lambda+\varkappa_1)\varphi(N-1) - R(N-1) + \lambda R(N)}{\mu},$$

и $g(n)$ также определяется рекуррентой процедурой вида

$$g(0)=0,\ g(1)=0,\ g(n) = \frac{(\lambda+\varkappa_1)g(n-1) + \varkappa_1 \sum\limits_{\gamma=0}^{n-2} R(\gamma)}{\mu},$$
$$g(N) = \frac{\lambda R(N) - \varkappa_1 R(N-1) + (\lambda+\varkappa_1)g(N-1)}{\mu}.$$

Возвращаясь к частичных характеристическим фукнциям $H(n,u)$, выполним обратные замены вида (6) и $u=\sigma w$. Получим аппроксимацию $h(u)=\sum\limits_{n=0}^{N} H(n,u)$ для характеристической фукнции числа заявок на орбите вида

$$h(u) = exp\Big\{ju\frac{\varkappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\varkappa_2}{\sigma}\Big\}.$$

Полученные результаты асимптотики второго порядка показывают, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе является гауссовским с асимптотическим средним $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\varkappa_2}{\sigma}$.

3. Аппроксимация дискретного распределения

Построим аппроксимацию дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе с ожиданием в бункере и на орбите. Для перехода от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, воспользуемся формулой

$$PG(i) = \frac{F(i+0.5) - F(i-0.5)}{1 - F(-0.5)}, \tag{7}$$

где $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$ и $\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\sigma}}$. Зададим следующие параметры системы: N=3, λ=0.8, μ=1, σ=0.1. На Рисунке 2 представлен график распределения вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе.

4. Оценка точности асимптотических результатов

Для оценки точности полученных асимптотических результатов будем использовать расстояние Колмогорова вида

$$\Delta = \max_{0\leqslant i<\infty} \mid \sum_{m=0}^{i} (P_{im}(m) - PG(m)) \mid,$$

где $P_{im}(m)$ – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное с помощью имитационного моделирования, $PG(m)$ – определяется формулой вида (7). На Рисунке 3 представлены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученные при помощи асимптотического анализа (красный график) и имитационного моделирования (синий график), при заданных параметрах системы: N=3, λ=0.8, μ=1.

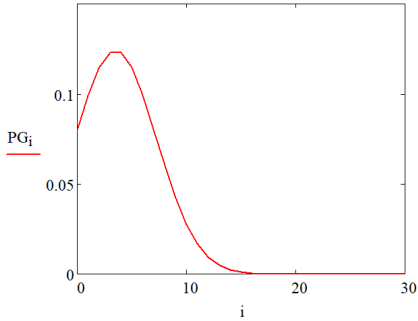

Рис. 2. Распределение вероятностей числа заявок на орбите

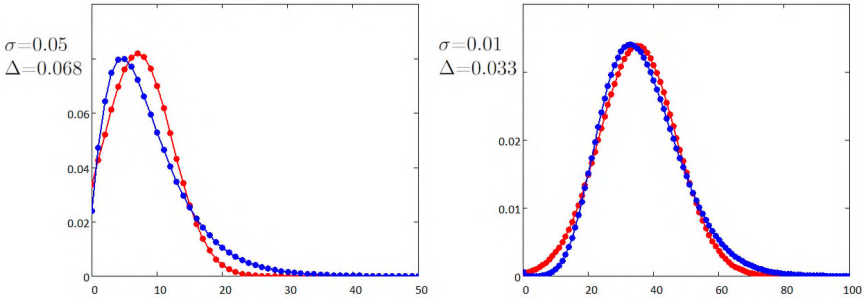

Рис. 3. Распределение вероятностей числа заявок на орбите для различных σ

Из полученных данных, можем сказать, что точность построенной аппроксимации растет с уменьшением параметра σ. При значении $\Delta < 0.05$ результаты будем считать приемлемыми.

Заключение

В работе представлены результаты исследования RQ-системы с ожиданием заявок в бункере и на орбите методом асимптотического анализа. Была построена аппроксимация дискретного распределения вероятностей на основе полученных асимптотических результатов и проведена оценка точности асимптотических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach Berlin: Springer-Verlag, 2008. 267 p.

2. *Назаров А А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
3. *Мелошникова Н. П., Федорова Е. А.* Асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с отрицательными заявками в условии большой задержки // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование. 2022. Т. 1. С. 219–227.
4. *Моисеев А. Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP|GI|∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3(32). С. 56–65.
5. *Данилюк Е. Ю., Моисеева С. П., Фёдорова Е. А.* Асимптотический анализ RQ-системы M|M|1 с конфликтами и нетерпеливыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 44–56.
6. *Полховская А. В., Моисеева С. П.* Асимптотический анализ RQ-системы M|M|1 с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022): Материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Томск, 2023. С. 136–142.
7. *Фёдорова Е. А., Фархадов М. П.* Характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе M/M/1 с отрицательными заявками и буфером // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022): Материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Ч. 2. 2022. С. 277–280.

Подгайнов Артем Владимирович — магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: *artem.podgaynov1414@gmail.com*

Назаров Анатолий Андреевич — доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: *nazarov.tsu@gmail.com*