НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2023)

МАТЕРИАЛЫ
XXII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
4–9 декабря 2023 г.

Часть 2

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2024

УДК 519
ББК 22.17
И74
Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (4–9 декабря 2023 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2024. — Часть 2. — 102 с.

ISBN 978–5–907722–70–5

Сборник содержит пленарные доклады и статьи молодых учёных, представленные на XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование экономических систем, прикладной вероятностный анализ и др.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

ISBN 978–5–907722–70–5

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY

PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL
SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

KARSHI STATE UNIVERSITY

INFORMATIONAL TECHNOLOGIES AND MATHEMATICAL MODELLING (ITMM-2023)

PROCEEDINGS
of the 22th International Conference
named after A. F. Terpugov
2023 December, 4–9

Part 2

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2024

UDC 519
LBC 22.17
I60
Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2023): Proceedings of the 22th International Conference named after A. F. Terpugov (2023 December, 4–9). — Tomsk: Tomsk State University Publishing, 2024. — Part 2. — 102 p.

ISBN 978–5–907722–70–5

This volume presents plenary talks and papers of young scientists selected from the 22th International Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new results in the following areas: queuing theory and its applications, information technology and software engineering, mathematical and computer modeling of economical processes, applied probabilistic analysis, etc.

UDC 519
LBC 22.17

ISBN 978–5–907722–70–5

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРОТОКОЛОМ МНОЖЕСТВЕННОГО СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

Я. Е. Измайлова, А. Т. Исаев

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Авторами рассмотрена система с повторными вызовами (RQ-system) со специальным протоколом множественного случайного доступа. Под специальным протоколом множественного доступа подразумевается, что с заданной вероятностью заявки, заставшие прибор занятым, могут вытеснять обслуживаемые заявки или вступать с ними в конфликт. Был разработан и реализован (в пакете Mathcad) численный алгоритм для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите и состояний прибора. А также для заданных значений параметров системы были проведены численные эксперименты и построены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Ключевые слова: *RQ-система, конфликт заявок, вытеснение заявок, численный алгоритм.*

Введение

Все больше и больше бизнес-процессов связаны с большими данными. Поэтому разработка соответствующих математических моделей современных телекоммуникационных систем и модификация существующих очень актуальны. Подходящими моделями являются системы массового обслуживания с повторными вызовами (Retrial Queueing System). Проблему исследования RQ-систем можно внести в список наиболее актуальных задач теории массового обслуживания. Они характеризуются ситуациями повторных обращений заявок из ИПВ (источника повторных вызовов) к обслуживающему прибору.

Существует множество работ, посвященных исследованию систем массового обслуживания с ИПВ. Например такие системы были рассмотрены Wilkinson R.I. [1] и Cohen J. [2]. В работах Goshtoni G., Elldin A. рассмотрены подходы к описанию систем с ИПВ. Исследование различных процессов в RQ-системах можно изучить в работах Falin G.I. и Artolejo J.R. [3, 4].

В реальных системах очень часто наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки классических СМО (систем массового обслуживания). За счет чего интерес к рассмотрению таких, более реальных систем возрастает. В несинхронизированной системе связи с ограниченным количеством ресурсов, например, каналов связи, существует значительная вероятность коллизии запросов. В этом случае передача теряется, и прерванные запросы необходимо передать повторно; следовательно, производительность системы неоптимальна. Большое значение имеет разработка методов, процедур и протоколов. которые способны предотвратить конфликты системы с клиентами или хотя бы попытаться оптимизировать ее производительность. Некоторые недавние результаты в этом направлении можно найти в [5-12].

В данной работе рассмотрим RQ-систему со специальным протоколом множественного случайного доступа. Для исследования такой системы авторами предлагается допредельный метод, который позволяет получить распределение вероятностей состояний системы.

1. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим систему массового обслуживания с ИПВ (орбитой), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ.

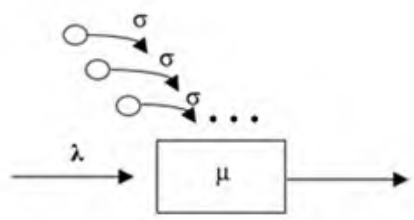

Рис. 1. RQ-система M|M|1

Считается, что требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Если прибор занят, то заявка, которая поступила, с вероятностью r_0 переходит в ИПВ. С вероятностью r_1 поступившая заявка вытесняет обслуживаемую заявку в приборе и сама занимает его для обслуживания, а обслуживаемая заявка переходит в ИПВ. С вероятностью r_2 возникает конфликт между поступившей заявкой и исходной вследствие чего они обе переходят в ИПВ.

Заявки в ИПВ осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявки вновь обращаются к прибору с повторной попыткой его захвата. Дисциплина обращения заявок из ИПВ аналогична дисциплине обращения вновь прибывших заявок.

После успешного обслуживания заявка покидает систему.

Необходимо найти распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и состояний прибора.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим

$$P\left\{k(t), i(t)\right\} = P\left\{k(t) = k; i(t) = i\right\} = P(k, i, t)$$

как вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P(k, i, t)$, используя формулу полной вероятности, запишем допредельные равенства Δt-методом:

$$\begin{cases} P(0, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P(0, i, t)(1 - i\sigma\Delta t) + \mu\Delta t P(1, i, t) + \\ + r_2\lambda\Delta t P(1, i - 2, t) + r_2(i - 1)\sigma\Delta t P(1, i - 1, t) + o(\Delta t), \\ P(1, i, t + \Delta t) = \lambda\Delta t P(0, i, t) + (i + 1)\sigma\Delta t P(0, i + 1, t) + \\ + (1 - \lambda\Delta t)P(1, i, t)(1 - \mu\Delta t)(1 - i\sigma\Delta t) + \\ + r_0\lambda\Delta t P(1, i - 1, t) + r_0 i\sigma\Delta t P(1, i, t) + \\ + r_1\lambda\Delta t P(1, i - 1, t) + r_1 i\sigma\Delta t P(1, i, t) + o(\Delta t). \end{cases}$$

Переходим к пределу при $\Delta t \to 0$ и получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P(0,i,t) + \mu P(1,i,t) + \\ +r_2\lambda P(1,i-2,t) + r_2(i-1)\sigma P(1,i-1,t), \\ \dfrac{\partial P(1,i,t)}{\partial t} = \lambda P(0,i,t) + (i+1)\sigma P(0,i+1,t) + \\ -(\lambda+\mu+i\sigma)P(1,i,t) + r_0\lambda P(1,i-1,t) + r_0\lambda P(1,i-1,t) + \\ +r_0 i\sigma P(1,i,t) + r_1\lambda P(1,i-1,t) + r_1 i\sigma P(1,i,t). \end{cases}$$

Обозначим $P(k,i) = \lim\limits_{t\to\infty} P(k,i,t)$. Тогда в стационарном режиме наша система будет иметь вид:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P(0,i) + \mu P(1,i) + \\ +r_2\lambda P(1,i-2) + r_2(i-1)\sigma P(1,i-1) = 0, \\ \lambda P(0,i) + (i+1)\sigma P(0,i+1) + \\ -(\lambda+\mu+i\sigma)P(1,i) + r_0\lambda P(1,i-1) + r_0\lambda P(1,i-1) + \\ +r_0 i\sigma P(1,i) + r_1\lambda P(1,i-1) + r_1 i\sigma P(1,i) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Переходим к численному анализу.

3. Численный анализ

Чтобы получить распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов, следует рассмотреть систему (3) уравнений Колмогорова для стационарного распределения $P(k,i)$.

Найдем решение $V(k,i)$ системы (3) в виде алгоритма численной реализации.

1. Полагаем что $V(0,0) = 1$.
2. Находим значение $V(1,0)$:

$$V(1,0) = \frac{\lambda V(0,0)}{\mu}.$$

3. Выбираем достаточно большое целое N и полагаем, что $i = \overline{1,N}$, а $V(0,i)$ определяются реккурентным соотношением:

$$V(0,i) = \frac{(\lambda+\mu+(i-1)\sigma r_2)V(1,i-1)}{i\sigma} - \\ - \frac{\lambda(V(0,i-1) + (r_0+r_1)V(1,i-2))}{i\sigma}$$

4. Находим значения $V(1,i)$ для всех $i=\overline{1,N}$:

$$V(1,i)=\frac{(\lambda+i\sigma)V(0,i)-r_2\lambda V(1,i-2)-r_2(i-1)\sigma V(1,i-1)}{\mu}.$$

Определяем нормирующую величину:

$$d=\sum_{i=0}^{N}(V(0,i)+V(1,i)).$$

Двумерное распределение вероятностей полагаем равным:

$$P(k,i)=\frac{1}{d}V(k,i).$$

Величина N выбирается из условия, что нормированное значение вероятности $P(N)$ достаточно мало, например, равняется величине машинного нуля.

Далее одномерное распределение $P(i)$, можно определить равенством:

$$P(i)=P(0,i)+P(1,i)$$

которое численно решает поставленную задачу нахождения распределения вероятностей числа заявок в источник повторных вызовов.

Для заданных параметров, а именно $\mu=1,\lambda=0.7,N=1000,r_0=0.8,r_1=0.1,r_2=1-(r_0+r_1)$ распределение вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ для $\sigma=\{0.1,0.05\}$ имеет вид

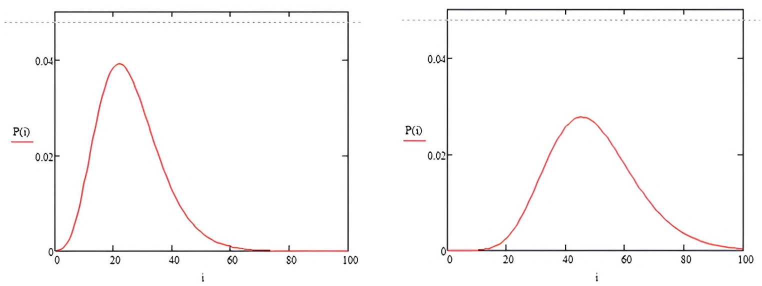

Рис. 2. Распределения вероятностей числа заявок в ИПВ для $\sigma=\{0.1,0.05\}$

Заключение

В предложенной работе рассмотрена RQ-система (retrial queue) со специальным протоколом случайного множественного доступа. Найдено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Получен алгоритм численной реализации и построены графики распределения вероятностей числа заявок в ИПВ для заданных значений параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilkinson R. I.* Theories for toll traffic engineering in the USA. The Bell System Technical Journal. 1956. №. 2. P. 421–507.
2. *Эллдин А.* Подход к теоретическому описанию повторных попыток вызова. Ericssion Technics 1967. №. 3. P. 345–407.
3. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997.
4. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach, Springer, 2008.
5. *Balsamo S., Dei Rossi G. L., Marin A.* Modelling retrial-upon-conflict systems with productform stochastic petri nets. In: International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications, Springer, 2013. P. 52–66.
6. *Kim J. S.* Retrial queueing system with collision and impatience. Commun. Korean Math. Soc., 2010. V. 25. №. 4. P. 647–653.
7. *Kim J., Kim B.* A survey of retrial queueing systems. Ann. Oper. Res., 2016. V. 247. №. 1. P. 3-–36.
8. *Kvach A., Nazarov A.* Sojourn time analysis of finite source markov retrial queuing system with collision. Commun. Comput. Inform. Sci., 2015. V. 564. P. 64–72.
9. *Lyubina T. V., Nazarov A. A.* Research of the non-Markov dynamic retrial queue system with collision. Herald Kemerovo State Univ., 2012. V. 1. №. 49. P. 38–44.
10. *Nazarov A., Kvach A., Yampolsky V.* Asymptotic analysis of closed Markov retrial queuing system with collision. Commun. Comput. Inform. Sci., 2014. V. 487. P. 334–341.
11. *Назаров А. А., Измайлова Я. Е.* Исследование RQ-системы с вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием //Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24. № 2. С. 331–342.
12. *Назаров А. А., Измайлова Я. Е.* Асимптотический анализ системы с повторными вызовами, вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием // Вестник Томского государственного университета. Управление,

вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 29–34. DOI: 10.17223/19988605/49/4

Измайлова Яна Евгеньевна — кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории вероятностей и математической статистики. E-mail: *evgenevna.92@mail.ru*

Исаев Актан Токтобекович — студент 3 курса; институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: *aktanisaev350@gmail.com*