ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 59, № 11 ФИЗИКА 2016

УДК 530.2; 537.8

Т.К. АДОРНО[1,3]*, Д.М. ГИТМАН*[1,2,3]*, А.Е. ШАБАД*[1,2]*, А.А. ШИШМАРЕВ*[1,3]

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ, СОЗДАВАЕМАЯ ЗАРЯДАМИ И ДИПОЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ*

Вследствие нелинейности квантовой электродинамики статический заряд, помещенный в магнитное поле, становится магнитным диполем, а на фоне комбинации постоянных электрического и магнитного полей становится магнитным монополем. Уже в отсутствие внешнего поля кубичное уравнение Максвелла для поля точечного заряда имеет солитонное решение с конечной энергией поля и конечным потенциалом, а вектор энергии-импульса движущегося солитона – такой же, как для массивной точечной частицы. Получены уравнения для самодействующих дипольных моментов. Утверждается, что любое теоретически найденное значение мультипольного момента бариона или мезона подвержено нелинейной перенормировке.

Ключевые слова: *нелинейная квантовая электродинамика, самодействие дипольных моментов, магнитоэлектрический эффект, магнитный монополь, полевая масса.*

Введение

В работе дан обзор результатов, представленных в [1–10]. Ранее неопубликованные результаты содержатся в пп. 1.2.

Статические нелинейные уравнения Максвелла, порожденные лагранжианом Эйлера – Гейзенберга $\mathcal{L}$, при удержании членов тейлоровского разложения до четвертого порядка по полю имеют вид [1]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=j_0^{\mathrm{lin}}+j_0^{\mathrm{nl}},\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{j}^{\mathrm{lin}}+\boldsymbol{j}^{\mathrm{nl}}. \tag{1}$$

Здесь j_0^{lin} и $\boldsymbol{j}^{\mathrm{lin}}$ – компоненты внешнего тока, а нелинейный ток j_μ^{nl} индуцирован самими электрическим и магнитным полями $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно:

$$j_0^{\mathrm{nl}}=\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\nabla\big(\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\big)-\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}\big(\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\big)\mathfrak{G}(\boldsymbol{x}); \tag{2}$$

$$\boldsymbol{j}^{\mathrm{nl}}=\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\big(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\big)\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})+\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}\big(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\big)\mathfrak{G}(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}$ – вторые производные $\mathcal{L}$ по инвариантам поля $\mathfrak{F}=(\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2)/2$, $\mathfrak{G}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$, вычисленные при постоянных значениях полей, по которым сделано разложение лагранжиана. В квантовой электродинамике (КЭД) $\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}$ по крайней мере квадратичны по постоянной тонкой структуры α. В отличие от цитированных работ, мы пренебрегаем здесь третьей производной $\mathcal{L}_{\mathfrak{FFG}},$ поскольку она более высокого порядка малости по α. Операторы дифференцирования ∇ в (2), (3) действуют всегда на все, что справа от них.

Уравнения (1) должны быть дополнены «первой парой» статических уравнений Максвелла $\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0$.

1. Сферический заряд в статическом и однородном поле

Рассмотрим уравнения Максвелла (1) пертурбативно, с правой частью, линеаризованной по внешнему полю. Нелинейный ток $\boldsymbol{j}^{\mathrm{nl}}$ и входящие в него величины $\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}$ вычисляются при $\mathfrak{G}=\overline{\mathfrak{G}}\equiv\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}=\mathrm{const}$, $2\mathfrak{F}=2\overline{\mathfrak{F}}\equiv\overline{\boldsymbol{B}}^2-\overline{\boldsymbol{E}}^2=\mathrm{const}$. Они зависят только от однородных стационарных электрического $\left(\overline{\boldsymbol{E}}\right)$ и магнитного $\left(\overline{\boldsymbol{B}}\right)$ полей. Эти постоянные поля тождественно удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) без внешних токов, поскольку последние не нужны для их поддержа-

* Работа поддержана РФФИ (грант № 14-02-01171) и Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров (НИР 8.1.01.2015). Д.М. Гитман выражает благодарность бразильским фондам FAPESP и CNPq, а А.А. Шишмарев – фонду CAPES за постоянную поддержку.

ния: это является проявлением калибровочной инвариантности. В качестве электрического поля $\boldsymbol{E}$ рассматривается поле, порожденное сферически-симметричным зарядом $j_0^{\text{lin}} \neq 0$. Его самодействием j_0^{nl} пренебрегаем. Магнитное поле порождается только электрическим зарядом, то есть его внешний источник $\boldsymbol{j}^{\text{lin}}$ в этом разделе считается нулевым.

1.1. Магнитное дипольное решение, порожденное электрическим зарядом в магнитном поле [2–4]

Пусть постоянное электрическое поле равно нулю, $\overline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0}$. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ порождается только несамодействующим внешним сферически-симметричным распределением заряда. Тогда нелинейный ток (2), (3) равен $j_0^{\text{nl}}(\boldsymbol{x}) = 0,\ j_k^{\text{nl}}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ijk}\nabla_i \mathfrak{h}_k$,

где
$$\mathfrak{h}_i(\boldsymbol{x}) = -\frac{\overline{B}_i}{2}\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}E^2 + E_i\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{E}\mathcal{L}_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}} \tag{4}$$

– вспомогательное магнитное поле. В этом токе часть, содержащая магнитное поле $\delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - \overline{\boldsymbol{B}}$, порожденное электрическим полем, опущена, поскольку содержит поправки высшего порядка по α. Уравнения (1) вместе с $\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = 0$ приводят к следующему изменению фонового магнитного поля:

$$\delta B_i(\boldsymbol{x}) = \left(\delta_{ik} - \frac{\nabla_i\nabla_k}{\nabla^2}\right)\mathfrak{h}_k(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{h}_i(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial_i\partial_k}{4\pi}\int d^3y\frac{\mathfrak{h}_k(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}. \tag{5}$$

Пусть теперь электрическое поле $\boldsymbol{E}$ является (если пренебречь линейной электризацией в магнитном поле как эффектом высшего порядка) полем распределения заряда с постоянной плотностью $j_0^{\text{lin}}(\boldsymbol{x}) = \rho(r) = \left(3q/4\pi R^3\right)\theta(R-r)$ внутри сферы радиуса R. На большом расстоянии асимптотическое поведение поля (5) оказывается таким же, как у магнитного диполя:

$$\delta B_i^{\text{LR}}(\boldsymbol{x}) = \frac{3(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{M})x_i}{r^5} - \frac{M_i}{r^3}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{M}$ – эквивалентный магнитный дипольный момент. Это и не могло бы быть иначе, поскольку (6) является единственным аксиально-симметричным магнитным полем, удовлетворяющим свободным уравнениям Максвелла при том, что вклад электрического поля в (3) спадает на больших расстояниях как r^{-5}, а любое отличное от (6) аксиально-симметричное поле дает добавку в ток порядка r^{-4}. Магнитный момент вычислен в [3, 4] и равен

$$M_i = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2\frac{1}{5R}\left(3\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}} - 2\mathcal{L}_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}\right)\overline{B}_i. \tag{7}$$

Имеется также обобщение на случай сферически-несимметричного электрического поля [4].

1.2. Решение в форме магнитного монополя, создаваемого электрическим зарядом, помещенным в магнитное плюс электрическое внешнее поле [5]

Рассматривается та же ситуация, что и в пп. 1.1, за исключением того, что теперь обе компоненты постоянного фонового поля – электрическая и магнитная – отличны от нуля и $\overline{\boldsymbol{B}} \parallel \overline{\boldsymbol{E}}$ в лоренцевой системе отсчета, в которой заряд покоится. Общее направление электрического и магнитного полей задано единичным вектором $\boldsymbol{\mu}$, $\mu = 1$. Будем рассматривать отклонения электрического, $\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, и магнитного, $\delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$, полей, малые по сравнению с их постоянными частями $\delta\boldsymbol{E} \ll \overline{\boldsymbol{E}}$ и $\delta\boldsymbol{B} \ll \overline{\boldsymbol{B}}$. Если опустить квадраты отклонений и пренебречь $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$

и $-\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\overline{B}^2+\overline{E}^2\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}$ по сравнению с единицей* (что сводится к отбрасыванию в токе (3) вклада $\delta\boldsymbol{B}$ аналогично тому, как это сделано выше при переходе к (4)), то уравнение (1) примет вид

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})-\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\left(\overline{\boldsymbol{B}}\times\nabla(\overline{\boldsymbol{E}}\cdot\delta\boldsymbol{E})\right)+\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}\times\nabla\left(\delta\boldsymbol{E}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}\right)\right)=0\,. \tag{8}$$

Для сферически-симметричного кулоновского поля $\delta\boldsymbol{E}=q\boldsymbol{x}/4\pi r^3$ (вне заряда) это уравнение согласовано с анзацем $\delta\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{r^3}f\left(\dfrac{z}{r}\right)$, где $z=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}=r\cos\theta$ – координата вдоль общего направления постоянных полей, $r\equiv|\boldsymbol{x}|$. Вне заряда этот анзац формально удовлетворяет другому уравнению Максвелла, не включенному в (1), $\nabla\cdot\delta\boldsymbol{B}=0$, которое может нарушаться только внутри заряда или в точке $r=0$, где находится заряд, если он точечный. Уравнение (8) сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка на функцию $f(z/r)$, которое легко решить. Таким образом, находим магнитное поле

$$\delta\boldsymbol{B}=-\frac{q}{8\pi}(\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}+\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}})\overline{\mathfrak{G}}\frac{\boldsymbol{x}}{r^5}z^2=-\frac{q}{8\pi}(\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}+\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}})\overline{\mathfrak{G}}\frac{\boldsymbol{x}\cos^2\theta}{r^3}\,,$$

силовые линии которого направлены вдоль радиус-вектора $\boldsymbol{x}$. Заметим, что в пределе $\overline{\boldsymbol{E}}=0$ это решение не превращается в решение пп. 1.2, которое имеет совершенно другой характер. Для определения магнитного заряда q_M необходимо проинтегрировать $\delta\boldsymbol{B}$ по поверхности сферы произвольного радиуса r:

$$q_M=\iint\delta\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{q}{6}(\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}+\mathcal{L}_{\mathfrak{GG}})\overline{\mathfrak{G}}\,.$$

Эта величина, как и положено магнитному заряду, является псевдоскаляром. В данном случае он составлен из электромагнитных полей, что стало возможным благодаря нелинейности уравнений. Окончательно, плотность магнитного заряда точечного электрического заряда в постоянном фоновом поле равна $\nabla\cdot\delta\boldsymbol{B}=q_M\delta^3(\boldsymbol{x})$.

1.3. Поправки к кулоновскому полю

Конечно, когда заряд находится в постоянном внешнем электромагнитном поле, он порождает не только магнитный монополь, но и обычное (то есть такое, дивергенция которого равна нулю всюду) магнитное поле и, в первую очередь, модифицируется создаваемое им кулоновское поле. Эти модификации, а также распределение индуцированного заряда рассмотрены в работе [6].

2. Кубичное самодействие статических электромагнитных полей в пустом вакууме [1, 7]

Пусть внешнего поля нет. В отличие от п. 1, нелинейность уравнений Максвелла не будем считать малой. Рассмотрим случай, когда имеется только электрическое или только магнитное поле, но не оба поля одновременно. Тогда нелинейный ток (2), (3) равен

$$j_0^{\mathrm{nl}}(x)=\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\partial_i\left[\left(B^2-E^2\right)E_i\right],\qquad j_i^{\mathrm{nl}}(x)=-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\partial_j\left[\left(B^2-E^2\right)B_k\right]\varepsilon_{ijk}\,. \tag{9}$$

Производная $\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\equiv\gamma$ вычисляется при $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}=0$.

2.1. Самодействие заряда. Конечность энергии электростатического поля точечного заряда

Пусть точечный заряд e находится в начале координат $r=0$. Будем искать сферически-симметричное решение уравнения Максвелла (1) с $B=0$, которое для заданного нелинейного тока (9) принимает вид

$$\nabla\left(1+\gamma E^2/2\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{10}$$

* Это приближение не является необходимым. Решения можно найти и без этих предположений в рамках того же анзаца (см. ниже). Однако это несколько сложнее.

(всюду, кроме начала координат $\boldsymbol{x}=0$, где $j_0=0$). Подразумевается, что при больших r стандартное кулоновское поле точечного заряда q,

$$\frac{q}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{x}}{r}, \tag{11}$$

является граничным условием. Тогда сферически-симметричный анзац $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=E(r)\boldsymbol{x}/r$ для уравнения (10) приводит к уравнению

$$\left(1+\frac{\gamma}{2}E^2(r)\right)E(r)=\frac{q}{4\pi r^2}. \tag{12}$$

Это кубическое уравнение легко решается по формуле Кардано (см. явный вид решения в [7]), однако самое важное обстоятельство ясно и без этого: при $r\to 0$ поле E бесконечно растет, так что можно пренебречь единицей в выражении в скобках в левой части (12) и непосредственно получить $E(r)\sim(q/2\pi\gamma)^{1/3}r^{-2/3}$. Такое поведение электростатического поля, порождаемого точечным зарядом q в рамках нелинейных полевых уравнений, существенно менее сингулярно в окрестности заряда, чем стандартное кулоновское поле $q/4\pi r^2$. Это расширение электродинамики на область коротких расстояний совместимо с традиционной теорией электромагнетизма, твердо установленной на больших расстояниях.

Покажем, что данного ослабления сингулярности достаточно для сходимости интегралов, задающих энергию конфигурации поля, являющегося решением уравнения (10). Для этого заметим, что на подклассе рассматриваемых здесь электромагнитных полей уравнения движения (10) порождаются лагранжианом четвертой степени

$$-\mathfrak{F}(x)+\mathcal{L}=-\mathfrak{F}(x)+\gamma\left(\mathfrak{F}(x)\right)^2/2. \tag{13}$$

Плотность энергии, вычисленная по теореме Нетер для этого лагранжиана для сферически-симметричной конфигурации электрического поля, равна

$$T^{00}=E^2/2+3\gamma E^4/8. \tag{14}$$

Полученное поведение $E(r)\sim r^{-2/3}$ вблизи $|\boldsymbol{x}|=0$ обеспечивает сходимость электростатической энергии $\int T^{00}d^3x$ точечного заряда. Что касается сходимости этого интеграла при $|\boldsymbol{x}|\to\infty$, то она обеспечивается стандартным кулоновским поведением (11) решения уравнения (10), которое получается при пренебрежении вторым слагаемым в скобках по сравнению с единицей вдали от заряда.

Явное использование формулы Кардано в (14) позволяет вычислить интеграл для энергии поля. Если принять (на основании лагранжиана Эйлера – Гейзенберга), что $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}=e^4/45\pi^2m^4$, где e и m – заряд и масса электрона, то «масса электрона», понимаемого как точечный заряд $q=e$, оказывается примерно в 2 раза больше массы электрона: $\int T^{00}d^3x=2.09m$.

Аналитическое вычисление дает для энергии поля значение

$$\int T^{00}\mathrm{d}^3x=4|q|^{3/2}\left(2/\gamma\right)^{1/4}K(2^{-1/2})/(3\sqrt{4\pi}), \tag{15}$$

где $K(2^{-1/2})=\left[\Gamma(1/4)\right]^2/(4\sqrt{\pi})=1.85407468$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Потенциал $V(r)=\int\limits_r^\infty E(r)dr$, убывающий при $r=\infty$, выражается через электрическое поле $E(r)$, которое является решением уравнения (12) по формуле Кардано, как

$$V(r)=-rE(r)+2(\operatorname{sgn}E)\sqrt{|q|/4\pi}(2/\gamma)^{1/4}\left[K(2^{-1/2})-\frac{1}{2}F\left(\arccos\frac{\sqrt{\gamma/2}E(r)-1}{\sqrt{\gamma/2}E(r)+1},2^{-1/2}\right)\right], \tag{16}$$

где $F(\varphi,k)$ – эллиптический интеграл первого рода [9]. Заметим, что E имеет тот же знак, что и q, как следует уже из (12). Значение потенциала в начале координат конечно:

$$V(0) = (\operatorname{sgn} q)\sqrt{|q|/\pi}\left(2/\gamma\right)^{1/4} K(2^{-1/2}). \tag{17}$$

Поведение в ультрафиолетовой области $r \sim 0$ имеет вид $V(r) \sim V(0) - 3\left(q/2\pi\gamma\right)^{1/3} r^{1/3}$.

2.1.1. Общее условие конечности потенциала и энергии поля точечного заряда

Как отмечено в [8], заключение о конечности энергии точечного заряда можно распространить на любую нелинейную электродинамику с лагранжианом, растущим быстрее $\mathfrak{F}^{3/2}$, что включает полином любой степени по инвариантам поля, тем самым также лагранжиан КЭД, обрезанный на любом члене тейлоровского разложения по степеням поля, вместо (1) [7]. Для доказательства будем следовать [10] (см. также [11]).

Рассмотрим вместо (13) общий лагранжиан для чисто электрического или для чисто магнитного случая ($\mathfrak{G} = 0$)

$$L(x) = -\mathfrak{F}\left(x\right) + \mathfrak{L}(\mathfrak{F}(x)). \tag{18}$$

Уравнение поля

$$\partial_\mu\left[(1 - \mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}(x))F^{\mu\nu}\right] = 0, \quad r \neq 0, \tag{19}$$

где $L_{\mathfrak{F}}(x) = \partial L/\partial\mathfrak{F}(x)$, в сферически-симметричном случае принимает вид $(\mathfrak{F} = -E^2/2)$

$$(1 - \mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}(r))E(r) = \frac{q}{4\pi r^2}, \tag{20}$$

вместо (10). E и q снова имеют одинаковые знаки, поскольку $\mathfrak{F}$ четно по E. В отличие от (12), это уравнение нельзя в общем случае решить явно для E как функции от r. Тем не менее условия конечности энергии можно установить. Допустим, что асимптотическое поведение эффективного действия для больших полей имеет вид

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \sim \left(-\mathfrak{F}\right)^w, \; w > 0. \tag{21}$$

Тогда решение уравнения (2), растущее (предполагается, что $w > 1/2$) вблизи $r = 0$, растет как $E \sim r^{-2/(2w-1)}$. Плотность энергии равна

$$T^{00} = (1 - \mathfrak{L}_{\mathfrak{F}})E^2 - L = -\mathfrak{F} + 2\mathfrak{F}\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}} - \mathfrak{L}. \tag{22}$$

С учетом полевого уравнения (20) это можно иначе переписать в виде

$$T^{00} = \mathfrak{F} + \frac{qE}{4\pi r^2} - \mathfrak{L}. \tag{23}$$

Вклад слагаемых $2\mathfrak{F}L_{\mathfrak{F}}$ и L в энергию $4\pi\int\limits_0^\infty T^{00} r^2 \mathrm{d}r$ вблизи нижнего предела $r = 0$ конечен при условии, что интеграл $\int\limits_0 E^{2w} r^2 \mathrm{d}r \simeq \int\limits_0 r^{-2/(2w-1)} \mathrm{d}r$ сходится вблизи этой точки. Это выполняется, если и только если

$$w > \frac{3}{2}. \tag{24}$$

Выполнение условия (24) также гарантирует (быструю) сходимость вклада интеграла $\int\limits_0 \mathfrak{F} r^2 dr$ на нижнем пределе. Предполагая несингулярность L при конечном $\mathfrak{F}$, остается убедиться, что энергия не содержит никаких бесконечных вкладов на верхнем пределе, то есть при $r = \infty$. Для этого дополнительно предположим, что для слабых полей не должно быть поправок в классический лагранжиан Максвелла, $L(x) = -\mathfrak{F}\left(x\right)$ в (18) (принцип соответствия). Это значит, что $L_{\mathfrak{F}} = L = 0$ при $\mathfrak{F} = 0$. Тогда из уравнения (20) следует, что $E(r)$ убывает как r^{-2} при $r \to \infty$ и, следовательно, все интегралы для энергии $4\pi\int_0^\infty T^{00}r^2dr$ сходятся на верхнем пределе. Для завершения доказательства конечности энергии поля точечного заряда необходимо убедиться, что в сделанном выше анализе поведения решений вблизи пределов интегрирования $r=0$ и $r=\infty$ (соответственно $E=\infty$ и $E=0$) мы имели дело с одним и тем же вещественным решением, непрерывным на интервале $0\leqslant r<\infty$ (соответственно $\infty>E\geqslant 0$). Записывая решение уравнения (20) в виде

$$r(E)=\sqrt{\frac{|q|}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}})|E|}}>0\,, \tag{25}$$

видим, что для этого достаточно выполнение условия $1-L_{\mathfrak{F}}>0$. Важно заметить, что это требование – положительность диэлектрической проницаемости – совпадает с установленным в [12] условием причинности и унитарности нелинейной электродинамики.

Другим следствием этих общих свойств является выпуклость эффективного лагранжиана, то есть положительность второй производной $L_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}>0$. При выполнении этого условия решение уравнения (20) будет монотонной функцией $E(r)$. Чтобы убедиться в этом, продифференцируем уравнение (20) по r. Получаем

$$\left(\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}E^2+1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=-\frac{q}{2\pi r^3}$$

и убеждаемся, что производная $\mathrm{d}E/\mathrm{d}r$ имеет постоянный (отрицательный) знак. Имея это в виду, можно использовать (25) для замены переменных в интегралах по r, определяющих энергию. Таким образом можно получить следующие альтернативные выражения для энергии покоя солитона, соответствующего покоящемуся заряду:

$$W=4\pi\int_0^\infty T^{00}r^2\mathrm{d}r=\sqrt{\frac{|q|^3}{4\pi}}\int_0^\infty\left(-\mathfrak{F}+2\mathfrak{F}\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}-\mathfrak{L}\right)\frac{\left[\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}E^2+1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}\right]\mathrm{d}E}{\left((1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}})E\right)^{5/2}} \tag{26}$$

из (22) или

$$W=4\pi\int_0^\infty T^{00}r^2\mathrm{d}r=\sqrt{\frac{|q|^3}{4\pi}}\left(-\int_0^\infty\left(\frac{E^2}{2}+\mathfrak{L}\right)\frac{\left[\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}E^2+1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}\right]\mathrm{d}E}{\left((1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}})E\right)^{5/2}}+\int_0^\infty\frac{\left[\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}E^2+1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}\right]\mathrm{d}E}{\sqrt{(1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}})^3E}}\right) \tag{27}$$

из (23). Здесь эффективный лагранжиан L и его производные $L_{\mathfrak{F}}$ и $L_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}$ выражаются как функции переменной интегрирования E, а также $\mathfrak{F}=-E^2/2$. Непосредственно видно, что при выполнении условий (21), (24) все интегралы сходятся на верхнем пределе $E=\infty$. Если также принять во внимание, что при $E\to 0$ L стремится к нулю быстрее, чем E^2, вследствие упомянутого выше принципа соответствия, становится очевидным, что интегралы на нижнем пределе ведут себя как $\int_0 dE/\sqrt{E}$, то есть тоже сходятся.

Можно получить более тонкие условия конечности энергии, если использовать критерий Бертрана: интегралы (26) и (27) сходятся, если

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{F})\sim\left(-\mathfrak{F}\right)^{3/2}\ln^u\left(-\mathfrak{F}\right),\quad u>2. \tag{28}$$

В общем случае (18) интегрированием по частям можно представить потенциал в виде

$$V(r)=\int_r^\infty E(r)dr=-\int_0^{E(r)}E(r)\frac{\mathrm{d}r(E)}{\mathrm{d}E}dE=\int_0^{E(r)}r(E)dE-rE(r)\,. \tag{29}$$

Используя (25), для интегрального члена имеем (до конца пп. 2.1.1 считаем, для определенности, что $q>0$)

$$\int_0^{E(r)}r(E)\mathrm{d}E=\sqrt{\frac{q}{4\pi}}\int_0^{E(r)}\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{(1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}(-E^2/2))E}}=2\sqrt{\frac{q}{4\pi}}\int_0^{\sqrt{E}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}(-x^4/2)}}\;.$$

Требование сходимости интеграла при $r = 0$, когда верхний предел бесконечен, $E(0) = \infty$, сводится к тем же условиям (21), (24), которые обеспечивают сходимость энергии. При тех же требованиях внеинтегральный член $rE(r)$ в (29) стремится к нулю при $r \to 0$, то есть

$$\lim_{E\to\infty} r(E)E = \sqrt{q/4\pi}\lim_{E\to\infty} E/\sqrt{(1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}(-E^2/2))E} = 0\,.$$

Мы заключаем, что конечность энергии (26) или (27) и конечность потенциала в начале координат $V(0) = 2\sqrt{q/4\pi}\int\limits_0^\infty [1-\mathfrak{L}_{\mathfrak{F}}(-x^4/2)]^{-1/2}\mathrm{d}x$ обеспечиваются одними и теми же условиями возрастания лагранжиана, хотя сами эти две конечные величины различны.

2.1.2. Работа по переносу заряда

Вернемся к специальному случаю лагранжиана четвертого порядка (13). Для правильного определения величины работы, необходимой для переноса заряда q_1 из точки, где находится заряд q_2, в точку, находящуюся от q_2 на расстоянии R, необходимо отказаться от идеи, заимствованной из линейной теории, что энергия взаимодействия $W(q_1,q_2;R)$ двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии R друг от друга, равна заряду одного из них, скажем q_1, умноженному на потенциал $V(q_2,R)$ поля другого заряда. Вместо этого, работа по переносу заряда $W(q_1,q_2;R) = W(q_2,q_1;R)$ должна определяться как нетеровская энергия, вычисленная на решении нелинейного уравнения Максвелла для электрического поля, порожденного двумя точечными зарядами:

$$\nabla\left(1+\gamma E^2/2\right)\boldsymbol{E} = q_1\delta(\boldsymbol{r}) + q_2\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\,. \qquad (30)$$

Однако вычисление работы, необходимой для разделения двух зарядов, можно свести к использованию уже полученных результатов, без явного решения этих уравнений.

Разность ΔW между энергией точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на бесконечном расстоянии $R = \infty$, и их энергией в совпадающих точках равна

$$\Delta W = W(q_1,q_2;\infty) - W(q_1,q_2;0) = W(q_1) + W(q_1) - W(q_1+q_2)\,, \qquad (31)$$

где $W(q)$ – энергия поля частицы, вычисленная выше в уравнении (15) в частном случае нелинейности четвертого порядка, и в уравнениях (26), (27) в общем случае. Мы учли, что энергия двух зарядов, помещенных в одну точку, в точности равна энергии одного суммарного заряда: $W(q_1,q_2;0) = W(q_1+q_2)$; это очевидно из уравнения (30). Используя (15), имеем

$$\Delta W = \left(2/3\sqrt{\pi}\right)\left(2/\gamma\right)^{\frac{1}{4}} K(2^{-1/2})\left(|\,q_1\,|^{3/2} + |\,q_2\,|^{3/2} - |\,q_1+q_2\,|^{3/2}\right). \qquad (32)$$

Очевидно, что энергия разделения зарядов расходится в линейном пределе $\gamma = 0$.

Рассмотрим в качестве q_2 пробный заряд, много меньший заряда q_1. В пределе $q_2/q_1 \to 0$ энергия разделения (32) имеет вид

$$\Delta W = \left(2/3\sqrt{\pi}\right)\left(2/\gamma\right)^{1/4} K(2^{-1/2})\left(\frac{3}{2}|\,q_1\,|^{1/2}(\operatorname{sgn} q_1)q_2 - |\,q_2\,|^{3/2} + \ldots\right).$$

Здесь ведущий член равен $q_2V(0)$, где $V(0)$ задан уравнением (17) с подстановкой q_1 вместо q. Поэтому в нелинейной теории разность потенциалов равна работе по переносу только для бесконечно малого заряда.

2.1.3. Движущийся солитон [8]

Любую полевую конфигурацию с конечным значением функционала энергии из рассмотренных выше можно называть солитоном. Эту полевую конфигурацию легко обобщить для описания солитона, движущегося с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$. Мы определим сохраняющийся вектор энергии-импульса поля, который оказывается частице-подобным в том смысле, что параллелен четыре-вектору u_μ скорости точечного заряда, создающего поле, и имеет (конечную) длину, равную полевой массе.

Решение полевых уравнений и тождеств Бианки можно записать в ковариантной форме

$$F_{\mu\nu} = (u_\mu x_\nu - u_\nu x_\mu) g\left(W^2\right), \tag{33}$$

где $g\left(W^2\right)$ – некоторая функция переменной $W^2 = \left(xu\right)^2 - x^2$, которая является единственной комбинацией двух лоренцевских скаляров, обеспечивающая независимость электрического поля F_{0i} от времени, когда $u_0 = 1$, $\boldsymbol{u} = 0$, то есть для покоящейся частицы. Эта функция удовлетворяет кубическому уравнению, похожему на (12):

$$g^3 + \frac{2g}{\gamma \boldsymbol{x}^2} - \frac{e}{2\pi\gamma\, |\,\boldsymbol{x}\,|^5} = 0 . \tag{34}$$

В правую часть уравнения (19) подставим ток (здесь выписываем скорость света c явно)

$$j^\mu = ceu^\mu \delta^3\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}x_0\right), \tag{35}$$

полученный из тока в сопутствующей заряду (штрихованной) системе отсчета $j'^0(x') = ce\delta^3(\boldsymbol{x}')$, $\boldsymbol{j}'(x') = 0$, лоренцевским бустом. Ток (35) записан в терминах четыре-вектора скорости $u^\mu = \gamma\left(1, \boldsymbol{v}/c\right)$, $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. В дальнейшем полагаем $v_i = \delta_{i1} v$.

Стандартное построение тензора энергии-импульса не обеспечивает его сохранения, поскольку электромагнитное поле само по себе не является консервативной системой вследствие взаимодействия с источником, который еще необходимо эффективно исключить. Вместо уравнения непрерывности формально получаем уравнение [8]

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^\mu_\nu = -\frac{1}{c} F_{\nu\lambda} j^\lambda , \tag{36}$$

которое можно назвать «частичным сохранением нетеровского тока». Правая часть (36) не равна нулю. Однако сохранение тензора энергии-импульса имеет место в «слабой» форме

$$u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^\mu_\nu = 0 . \tag{37}$$

Для доказательства заметим, что четыре-ток (35) точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью, параллелен четыре-вектору скорости. Тогда правая часть (36) обращается в нуль при свертке с четыре-скоростью, $u^\nu F_{\nu\lambda} j^\lambda \sim u^\nu F_{\nu\lambda} u^\lambda = 0$. Слабый закон сохранения (37) будет достаточен для доказательства сохранения вектора энергии-импульса.

Определим вектор энергии-импульса как интеграл по пространственно-подобной гиперплоскости, ортогональной четыре-скорости и пересекающей ось времени в точке $x_0 = s\sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$P^\mu = \int u^\nu T^\mu_\nu \delta\left(ux - s\right) \mathrm{d}^4 x . \tag{38}$$

В силу равенства нулю четырехмерной дивергенции (37) из теоремы Гаусса следует, что если интеграл P^μ существует, то он не зависит от s и, тем самым, от времени наблюдателя x_0, поскольку гиперплоскость можно сдвигать вдоль вектора u^ν без изменения значения интеграла. Последнее верно при предположении (обоснованном ниже), что на решениях уравнений движения компоненты вектора $u^\nu T^\mu_\nu$ при $x^2 \to \infty$ убывают быстрее, чем $(x^2)^{-3/2}$, вдоль любой гиперплоскости, ортогональной u^ν. Это предположение позволяет пренебречь интегралами по удаленным дугам, соединяющим различные параллельные гиперплоскости и гарантирует сходимость (38) при $x_\mu \to \infty$. С физической точки зрения это верно, поскольку поля убывают на пространственно-временной бесконечности так же, как в линейной электродинамике. Однако нельзя задать пространственно-подобную гиперплоскость, наклоненную иначе, чем это сделано в определении вектора энергии-импульса (38), поскольку закона сохранения (37) с вектором u^ν, не параллельным четыре-скорости, не существует.

Если поле $F_{\nu\lambda}$, от которого зависит тензор энергии-импульса T^{μ}_{ν}, создается равномерно движущимся или покоящимся точечным зарядом, то интеграл (38) обычно расходится (в точках пересечения $x_1 = vs/(c \pm v)$, $x_{2,3} = 0$ указанной выше гиперплоскости с гиперболоидом $x^2 = s^2$) и, следовательно, не имеет смысла. Ниже будет показано, что в рассматриваемой нелинейной теории это не так и поэтому вектор энергии-импульса (38) можно понимать буквально.

Принимая во внимание, что s – лоренцевский скаляр (более того, далее полагаем, что $s = 0$), а T^{μ}_{ν} – тензор, видим, что интеграл (38) определяет вектор в пространстве Минковского. Он может быть направлен только вдоль u^{ν}, так как это единственный внешний вектор в подынтегральном выражении (38). Следовательно, можем записать

$$P^{\mu} = u^{\mu} M_{\rm f} c^2 , \tag{39}$$

где $M_{\rm f}$ – полевая масса. Из (38), (39) следует, что $M_{\rm f}c^2 = P^{\nu}u_{\nu} = \int u_{\nu} T^{\mu\nu} u_{\mu} \delta(ux) \mathrm{d}^4 x$. Масса $M_{\rm f}$ совпадает с энергией покоящегося заряда (26), (27): $P^0(\boldsymbol{u} = 0) = \int T^{00} d^3 x = W$.

Подчеркнем, что обычный объемный интеграл $\int T^{\mu 0} d^3 x$ не является четыре-вектором, определяемым исключительно вектором u_{μ}, поскольку неявно содержит скалярное произведение $T^{\mu\nu}$ с дополнительным четыре-вектором, ортогональным гиперповерхности, натянутой на $\boldsymbol{x}$. Его нельзя приравнять выражению (38) из-за отсутствия уравнения непрерывности для $T^{\mu\nu}$; по той же причине не удается доказать независимость интеграла $\int T^{\mu 0} d^3 x$ от времени. Поэтому $\int T^{\mu 0} d^3 x$ не годится для определения вектора энергии-импульса поля точечного заряда, в отличие от случая свободного электромагнитного поля.

2.2. Самодействие магнитного и электрического диполей

Рассмотрим сначала магнитный диполь. Это значит, что в нелинейном токе (9) удерживается только B, так что $j_0^{\rm nl} = 0$. Что касается нелинейного трехмерного тока, то он выражается как

$$j_i^{\rm nl}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ijk} \nabla_j \eta_k(\boldsymbol{x}), \qquad \eta_i(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}} B_i(\boldsymbol{x}) B^2(\boldsymbol{x}) \tag{40}$$

в терминах вспомогательного магнитного поля $\eta = \mathfrak{h}$, по аналогии с (4). Для магнитного поля, индуцированного нелинейным током, снова справедливо уравнение (5), на этот раз без оговорок о пренебрежении линейной магнетизацией, как в п. 1. Это поле добавляется к исходному магнитному полю, линейно порожденному током $\boldsymbol{j}$.

Пусть задана сфера радиуса R и стационарный ток $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ сконцентрирован на ее поверхности:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \frac{[\boldsymbol{M}^{(0)} \times \boldsymbol{x}]}{r^4} \delta(r - R) . \tag{41}$$

Здесь $\boldsymbol{M}^{(0)}$ – постоянный вектор, направленный, скажем, вдоль оси x_3. Плотность тока (41) удовлетворяет уравнению непрерывности $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$, соответствующие линии тока являются окружностями, параллельными плоскости (x_1, x_2). Магнитное поле, порождаемое этим током в соответствии с уравнениями Максвелла $\nabla \times \boldsymbol{h}^{\rm lin}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$, равно

$$\boldsymbol{h}^{\rm lin}(\boldsymbol{x}) = \theta(R - r) \frac{2\boldsymbol{M}^{(0)}}{R^3} + \theta(r - R) \left(-\frac{\boldsymbol{M}^{(0)}}{r^3} + 3 \frac{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{M}^{(0)})}{r^5} \boldsymbol{x} \right). \tag{42}$$

Вне сферы – это магнитное поле диполя с постоянной векторной плотностью $\boldsymbol{M}^{(0)}$, играющей роль магнитного момента. Используя это выражение в правой части уравнения (5), после длинных вычислений нелинейной поправки к полю (42) получаем поле магнитного диполя (41). Это проделано в [1] как внутри, так и вне сферы. На больших расстояниях результирующее магнитное поле воспроизводит поведение обычного магнитного диполя:

$$\boldsymbol{h}^{\rm tot}(\boldsymbol{x})\Big|_{r>>R} = \boldsymbol{h}^{\rm lin}(\boldsymbol{x}) \left(1 - 7 \mathcal{L}_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}} \left(M^{(0)} \right)^2 / \left(5R^6 \right) \right). \tag{43}$$

Если мы хотим рассматривать эту нелинейность буквально, а не пертурбативно, то для самосогласованности нужно потребовать, чтобы магнитное поле, создающее нелинейный ток (40), было равно не (40), а своему окончательному выражению. Последнее является снова полем магнитного диполя, для которого голое значение магнитного момента $\boldsymbol{M}^{(0)}$ заменяется на магнитный момент, обозначаемый $\boldsymbol{M}$. Тогда для полного поля на больших расстояниях получаем

$$-\frac{\boldsymbol{M}}{r^3}+3\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{M}}{r^5}\boldsymbol{x}=-\frac{\boldsymbol{M}^{(0)}}{r^3}+3\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{M}^{(0)}}{r^5}\boldsymbol{x}-\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r^3}+3\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{M}}{r^5}\boldsymbol{x}\right)\left(\frac{7}{5}\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\frac{M^2}{R^6}\right). \tag{44}$$

Отсюда следует уравнение на самодействующий магнитный момент:

$$\boldsymbol{M}\left(1+\frac{7}{5}\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\frac{M^2}{R^6}\right)=\boldsymbol{M}^{(0)}. \tag{45}$$

Аналогичное уравнение на электрический момент имеет вид

$$\boldsymbol{p}\left(1+\frac{1}{10}\mathcal{L}_{\mathfrak{FF}}\frac{p^2}{R^6}\right)=\boldsymbol{p}^{(0)}. \tag{46}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Costa C.V., Gitman D.M., and Shabad A.E. // Phys. Rev. D. – 2013. – V. 88. – P. 085026.
2. Gitman D.M. and Shabad A.E. // Phys. Rev. D. – 2012. – V. 86. – P. 125028.
3. Adorno T.C., Gitman D.M., and Shabad A.E. // Eur. Phys. J. C. – 2014. – V. 74. – P. 2838.
4. Adorno T.C., Gitman D.M., and Shabad A.E. // Phys. Rev. D. – 2014. – V. 89. – P. 047504.
5. Adorno T.C., Gitman D.M., and Shabad A.E. // Phys. Rev. D. – 2015. – V. 92. – P. 041702.
6. Adorno T.C., Gitman D.M., and Shabad A.E. // Phys. Rev. D. – 2016. – V. 93. – P. 125031.
7. Costa C.V., Gitman D.M., and Shabad A.E. // Phys. Scr. – 2015. – V. 90. – P. 074012.
8. Gitman D.M., Shabad A.E., and Shishmarev A.A. // [arXiv:1509.06401[hep-th]] – 2015.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. // Таблицы интегралов, рядов и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963.
10. Шабад А.Е. // Лекция, прочитанная в Университете Дюссельдорфа 14 марта 2016 г. и в Томском государственном университете 13 июня 2016.
11. Эпендиев М.Б. // ТМФ. – 2016 (в печати).
12. Shabad A.E. and Usov V.V. // Phys. Rev. D. – 2011. – V. 83. – P. 105006.

[1] Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
[2] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, г. Москва, Россия
[3] Институт физики Университета Сан-Паулу, г. Сан-Паулу, Бразилия

Поступила в редакцию 24.08.16.

Адорно Тьяго Карлос, Ph.D., ст. науч. сотр. лаб. квантовой теории интенсивных полей НИ ТГУ, Институт физики Университета Сан-Паулу;

Гитман Дмитрий Максимович, д.ф.-м.н., профессор, гл. науч. сотр. лаб. квантовой теории интенсивных полей НИ ТГУ, гл. науч. сотр. лаб. теории фундаментальных взаимодействий ФИАН, профессор Института физики Университета Сан-Паулу, e-mail: gitman@if.usp.br;

Шабад Анатолий Ефимович, д.ф.-м.н., гл. науч. сотр. лаб. квантовой теории интенсивных полей НИ ТГУ, гл. науч. сотр. отделения теоретической физики ФИАН, e-mail: anshabad@yahoo.com;

Шишмарев Алексей Александрович, инженер-исследователь лаб. квантовой теории интенсивных полей НИ ТГУ, аспирант Института физики Университета Сан-Паулу.