УДК 530.12:530.145

В.Г. КРЕЧЕТ, В.Б. ОШУРКО, М.Н. ЛОДИ

ВОЗМОЖНЫЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В РАМКАХ АФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

Рассматривается гравитационное взаимодействие скалярного поля с конформной связью $n\frac{R}{6}\varphi^2$ $(n = \text{const})$ в рамках афинно-метрической теории гравитации при учете взаимодействия с кручением и неметричностью. Показано, что при различных значениях константы n индуцируются различные виды нелинейностей у скалярного поля, и, в частности, при $n = -1$ индуцируется нелинейность, соответствующая потенциалу аксионного поля. Рассматриваются возможные астрофизические следствия такого эффекта.

Ключевые слова: *астрофизика, аксионное поле, неметричность, галактика, темная материя.*

Рассматривается гравитационное взаимодействие скалярного поля в рамках афинно-метрической теории гравитации, в которой кроме кривизны пространства-времени учитываются также кручение и неметричность вейлевского типа:

$$Q^m_{ik} = \Gamma^m_{[ik]}, \quad \nabla_k g_{in} = 2W_k g_{im} . \tag{1}$$

Здесь Q^m_{ik} – тензор кручения; W_k – вектор неметричности Вейля; Γ^m_{ik} – коэффициенты связности афинно-метрического пространства:

$$\Gamma^m_{ik} = \{^{\,m}_{ik}\} + Q^m_{ik.} + Q^m_{.ik} + Q^m_{.ki} + W^m g_{ik} - \delta^m_i W_m - \delta^m_k W_i , \tag{2}$$

где $\{^{\,m}_{ik}\}$ – символы Кристоффеля, т.е. коэффициенты связности Риманова пространства.

В качестве материального источника гравитационного поля выбираем скалярное поле с конформной связью, описываемое лагранжианом

$$L(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{,k}\varphi^{,k} + n\frac{\tilde{R}}{6}\varphi^2 - \mu^2\varphi^2\right) \qquad (n = \text{const}) . \tag{3}$$

Здесь $\tilde{R}$ – скалярная кривизна афинно-метрического пространства с кривизной, кручением и неметричностью, вычисляемая с использованием коэффициентов связности (2).

Для случая Риманова пространства и при $\mu = 0$ и $n = 1$ соответствующее уравнение скалярного поля, как известно, будет конформно-инвариантным.

Гравитационный лагранжиан выбираем в форме скаляра кривизны, являющейся ближайшим обобщением соответствующего лагранжиана в ОТО на случай рассматриваемого здесь афинно-метрического пространства:

$$L_g = -\tilde{R}/2æ . \tag{4}$$

Уравнения теории гравитационного взаимодействия рассматриваемого скалярного поля с конформной связью получаются при варьировании действия с лагранжианом $L_g + L_\varphi$ по переменным $g_{ik}, Q^m_{ik}, W_k, \varphi$. Здесь сразу надо отметить, что при варьировании отдельно по кручению и неметричности получаем два совершенно одинаковых уравнения:

$$\left(\frac{æ}{6}\varphi^2 + n\right)(3W_k + 2Q_k) = -\frac{æ}{2}\varphi\cdot\varphi,k ; \tag{5}$$

$$\left(\frac{æ}{6}\varphi^2 + n\right)(3W_k + 2Q_k) = -\frac{æ}{2}\varphi\cdot\varphi,k . \tag{6}$$

* Работа выполнена при поддержке НИР № 1678 госзадания № 2014/105.

Здесь $Q_k = Q^m_{km}$ – след тензора кручения. Отсюда следует, что рассматриваемое скалярное поле (3) взаимодействует только со следовой составляющей тензора кручения и что это взаимодействие совершенно аналогично взаимодействию скалярного поля с вейлевской неметричностью W_k, так как уравнения для обоих взаимодействий совпадают.

Поэтому при дальнейшем рассмотрении гравитационного взаимодействия данного скалярного поля в рамках афинно-метрической теории гравитации достаточно учитывать лишь одно кручение или одну неметричность. Здесь ниже будем учитывать лишь неметричность, поскольку она в связность и кривизну входит более простым образом, чем кручение.

Сначала упростим лагранжиан (4) взаимодействующих гравитационного и скалярного полей, учитывая в нем, как условлено выше, лишь неметричность W_k и исключая ее с помощью уравнения (6). В результате получим

$$L(g,\varphi) = \left\{\frac{-R}{2\rceil} - \frac{3}{4\rceil}\left[16\varphi^2\varphi_{,k}\varphi^{,k} + \left(2\mu^2 + \frac{R}{3}\right)2\varphi^2\right]\right\}\frac{1}{\varphi^2 + n}. \tag{7}$$

Здесь R – скаляр кривизны Риманова пространства. Далее интересный результат получается для случая,когда $n = -1$. Тогда, произведя замену $\varphi = \sin\theta/2$, лагранжиан (7) приведется к виду

$$L(g,\varphi) = \frac{-R}{2æ} + \frac{3}{2æ}\left[-\frac{1}{2}\theta_{,k}\theta^{,k} + \left(\mu^2 + \frac{R}{6}\right)(\cos\theta - 1)\right]. \tag{8}$$

Варьируем лагранжиан (8) по θ, получим следующее уравнение для поля $\theta(x^k)$:

$$\Box\theta + \mu^2\frac{R}{6}\sin\theta = 0, \tag{9}$$

где $\Box\theta$ – ковариантный даламбериан поля, т.е. получили нелинейное уравнение синус-гордон, допускающее солитоноподобное решение.

Отсюда следует вывод, что в рамках афинно-метрической теории гравитации неметричность пространства-времени может индуцировать у скалярного поля вышеуказанную нелинейность.

С другой стороны выражение в квадратных скобках лагранжиана (3) совпадает с лагранжианом аксионного поля $\theta(x^k)$, взаимодействующего неминимальным образом с гравитационным полем [3]. Но, как известно, аксионное поле является одним из главных кандидатов на роль «темной материи», обеспечивающей гравитационную устойчивость Галактики [4]. Масса «темной материи» примерно в 6 раз превышает суммарную массу всех звезд Галактики, т.е. основной вклад в гравитационное поле Галактики дает «темная материя», которая, возможно, представляет собой распределение самогравитирующего аксионного поля, причем, как показывают результаты астрофизических наблюдений, распределение «темной материи» имеет шарообразную форму, образуя гало Галактики, выступая примерно на полдиаметра за ее пределы [3].

Учитывая этот факт, целесообразно рассмотреть стационарное сферически-симметричное распределение самогравитирующего аксионного поля, индуцированного неметричностью и определяемого лагранжианом (7) или (8).

Метрику стационарного сферически-симметричного пространства-времени выбираем в стандартном виде:

$$dS^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dx^2 - e^\mu(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2). \tag{10}$$

Здесь метрические коэффициенты зависят лишь от радиальной координаты x, причем в качестве скалярной функции будем использовать исходное скалярное поле φ и полагать $n = -1$, что соответствует индуцированному аксионному полю.

Совместная система уравнений гравитационного и скалярного полей в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$1)\ \frac{\mu'\lambda'}{2} - \frac{3}{4}\mu'^2 - e^{\lambda-\mu} = -\frac{3\varphi'^2}{(\varphi^2-1)^2} - \lambda'\varphi'\varphi;$$

$$2)\ \mu'' + \frac{3}{2}\mu'^2 - \mu'\lambda' = \frac{8\varphi'^2}{(\varphi^2-1)^2} + \frac{2(\lambda'-\mu')\varphi'\varphi}{(\varphi^2-1)};$$

$$3)\ \frac{\lambda''}{2}+\frac{3}{2}\mu'^{\,2}-\mu'\lambda'=\frac{9\varphi'^{\,2}}{(\varphi^2-1)^2}+\frac{\lambda'\varphi'\varphi}{\varphi^2-1)}\,; \tag{11}$$

$$4)\ \frac{\varphi''+\varphi\varphi'^{\,2}}{\varphi^2-1}=0\,.$$

Здесь мы уже исключили неметричность с помощью уравнения (6), выразив ее через скалярное поле $\varphi(x)$. Кроме того, здесь использовано гармоническое координатное условие $\lambda=\nu+2\mu$.

Последнее уравнение системы (11) – уравнение для скалярного аксионного поля – сразу интегрируется, и в результате имеем

$$\varphi'=g/\sqrt{\varphi^2-1}\quad (q=\mathrm{const})\,, \tag{12}$$

где константа g имеет смысл скалярного заряда центрального источника поля φ.

Затем, комбинируя уравнения (11.2), (11.3), получим уравнение

$$\frac{\lambda''}{2}-\mu''=\varphi'^{\,2}/(\varphi^2-1)^2+(2\mu'-\lambda')\varphi'\varphi/(\varphi^2-1)\,. \tag{13}$$

Далее удобней перейти к новой радиальной координате r путем преобразования

$$\frac{\mathrm{sh}\,2r}{2}-r=2qx,\quad 0\le r<\infty\,. \tag{14}$$

В результате уравнение (13) примет вид

$$\frac{d^2\left(\frac{\lambda}{2}-\mu\right)}{dr^2}=\frac{1}{\mathrm{sh}^2 r} \tag{15}$$

Оно легко интегрируется и в результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}-\frac{d\mu}{dr}=-\frac{\mathrm{ch}\,r}{\mathrm{sh}\,r}+C,\quad \frac{1}{2}\lambda-\mu=-\ln\mathrm{sh}\,r+Cr,\quad C=\mathrm{const}\,. \tag{16}$$

При использовании новой радиальной переменной r для функции $\mu(r)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\mu}{dr^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2-\frac{d\mu}{dr}\left(\frac{2\,\mathrm{ch}\,r}{\mathrm{sh}\,r}+C\right)=\frac{4}{\mu^2 r}+\frac{2C\mathrm{ch}\theta}{\mu\theta}+4\,. \tag{17}$$

Его решение следующее:

$$e^{\mu}=A\frac{e^{Br}}{\mathrm{sh}^2 r},\quad 0<r<\infty,\quad A,B=\mathrm{const}\,.$$

После этого, используя формулы (16) и условие гармоничности, находим остальные неизвестные функции:

$$e^{\lambda}=\frac{A^2e^{2(B+C)r}}{{}^6(r)},\quad e^{\nu}=\frac{e^{2Cr}}{\mathrm{sh}^2 r},\quad \varphi(r)=\mathrm{ch}\,r \tag{18}$$

с учетом соотношения между константами: $B=\sqrt{C^2+12}-C.$

Из решения (18) видно, что угловой метрический коэффициент e^{μ} при $B>2$ нигде во всем интервале $(0<r<\infty)$ области определения в нуль не обращается и на обоих концах этого интервала $e^{\mu}\to\infty$, что соответствует наличию двух пространственных бесконечностей на этих концах. Но это соответствует геометрии пространства-времени «кротовой норы». При этом при больших значениях радиальной координаты r имеем «вход» в «кротовую нору», а при $r\to 0$ – «выход». «Горловина кротовой норы», т.е. ее самое узкое место, находится в точке минимума функции $e^{\mu(x)}$. Эта точка $r=r_0$ определяется из соотношения $\frac{\mathrm{sh}r_0}{\mathrm{ch}r_0}=\frac{2}{B}$. Кроме того, при $C=1$ получается, что метрический коэффициент $g_{tt}=e^{\nu(r)}\to 1$, когда $r\to\infty$, что соответствует отсутствию гравитационной силы при «входе» в «кротовую нору».

Таким образом, мы получили результат, что сферически-симметричная конфигурация аксионного поля, индуцируемого взаимодействием самогравитирующего скалярного поля с неметричностью или кручением пространства-времени, может образовать «кротовую нору».

Заметим, что самогравитирующее скалярное поле с конформной связью в рамках ОТО рассматривалось ранее, где также получались решения с «кротовыми норами» [4].

Но поскольку сферически-симметричная конфигурация самогравитирующего аксионного поля рассматривается в астрофизике как один из кандидатов на распределение «темной материи» в Галактике, то возможно, что в ядре Галактики находится не «черная дыра», а «кротовая нора».

Астрофизический интерес представляет также рассмотрение цилиндрически-симметричных распределений индуцированного аксионного поля.

Цилиндрически-симметричные конфигурации материи могут, например, образовываться в окрестности «космических струн», возможности существования которых предсказывают некоторые варианты ТВО (теории Великого объединения физических взаимодействий).

Метрику стационарного цилиндрически-симметричного пространства-времени выбираем в виде

$$dS^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\alpha}dx^2 - e^{\beta}d\varphi^2 - e^{\lambda}dz^2 . \tag{19}$$

При использовании гармонического координатного условия, $-\alpha = \beta + \lambda + \nu$, уравнения системы гравитационного и индуцированного аксионного полей запишутся в виде

$$1)\ \frac{\nu'\beta'}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'\beta'}{4} = -\frac{3\varphi'^2}{(\varphi^2-1)^2} - \frac{\varphi\varphi'}{\varphi^2-1}(\beta'+\nu'+\lambda');$$

$$2)\ \beta'' = \frac{2\varphi'^2}{(\varphi^2-1)^2} - \frac{2\varphi'\varphi}{\varphi^2-1}\beta';\ \ 3)\ \nu'' = \frac{2\varphi'^2}{(\varphi^2-1)^2} - \frac{2\varphi'\varphi}{\varphi^2-1}\nu'; \tag{20}$$

$$4)\ \lambda'' = \frac{2\varphi'^2}{(\varphi^2-1)^2} - \frac{2\varphi'\varphi}{\varphi^2-1}\lambda';\ \ 5)\ \varphi'' - \frac{\varphi'^2\varphi}{\varphi^2-1} = 0 .$$

Система уравнений (20) легко приводится к системе первых интегралов для метрических коэффициентов и скалярного поля φ соответственно:

$$1)\ \beta' - \nu' = \frac{C_1}{\varphi^2-1};\ \ 2)\ \beta' - \lambda' = \frac{C_2}{\varphi^2-1}; \tag{21}$$

$$3)\ \varphi' = \frac{q}{\sqrt{\varphi^2-1}},\quad C_1, C_2, q = \mathrm{const} .$$

Для дальнейшего исследования удобно перейти к новой радиальной координате r по формуле

$$\mathrm{ch}r\cdot\mathrm{sh}r - \ln(\mathrm{ch}\,r + \mathrm{sh}\,r) = 2qx,\quad 0 < r < \infty,\quad 0 < x < \infty . \tag{22}$$

При новой радиальной координате 1-е интегралы (21) примут вид

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{d\beta}{dr} - \frac{C_1}{q},\quad \frac{d\lambda}{dr} = \frac{d\beta}{dr} - \frac{C_2}{q} . \tag{23}$$

Отсюда можно выразить функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ через функцию $\beta(r)$:

$$\nu = \beta - \frac{C_1}{q}r,\quad \lambda = \beta - \frac{C_2}{q}r , \tag{24}$$

и для функции $\beta(r)$ уравнение (20.2) примет вид

$$\frac{d^2\beta}{dr^2} = \frac{2}{\mathrm{ch}^2\,r} . \tag{25}$$

Оно легко интегрируется, и в результате получим

$$\frac{d\beta}{dr} = -2\frac{\mathrm{ch}\,r}{\mathrm{sh}\,r} + C_3,\quad \beta = -2\ln\mathrm{sh}\,r + C_3 r,\quad C_3 = \mathrm{const} . \tag{26}$$

Теперь, используя полученные формулы (24), (25) и условие гармоничности, можно выписать полное решение задачи:

$$e^{\beta} = \frac{e^{C_3 r}}{\operatorname{sh}^2 r}, \quad e^{\nu} = \frac{e^{\left(c_3 - \frac{C_1}{q}\right) r}}{\operatorname{sh}^2 r}, \quad e^{\lambda} = \frac{e^{\left(c_3 - \frac{C_2}{q}\right) r}}{\operatorname{sh}^2 r}, \tag{27}$$

$$e^{\alpha} = \frac{e^{\left(3C_3 - \frac{C_1}{q} - \frac{C_2}{q}\right) r}}{\operatorname{sh}^6 r}, \quad \varphi(r) = \operatorname{ch} r, \quad 0 < r < \infty .$$

Далее, подставляя формулы (26) и (23) в уравнение первого порядка (20.1), дающее ограничение на граничные условия, получим соотношение между константами C_1, C_2, C_3, q :

$$3C_3^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{q^2} = 12 + 2C_3 \frac{(C_1 + C_2)}{q} \tag{28}$$

Из решения (27) видно, что при $C_3 > 2$ угловой коэффициент $e^{\beta} \to \infty$ при $r \to 0$ и $r \to \infty$, т.е. имеем две пространственных бесконечности на обоих концах области изменения радиальной координаты r, и e^{β} нигде внутри интервала $0 < r < \infty$ в нуль не обращается. Это означает, что в результате получилась геометрия пространства-времени «кротовой норы», причем «вход» в «кротовую нору» соответствует большим значениям r $(r \to \infty)$.

Кроме того, при $C_1 = C_2$ и при $\dfrac{C_1}{q} = C_3 - 2$, получается, что $e^{\nu} \to 1, e^{\lambda} \to 1, e^{\alpha} \to 1$ при $r \to \infty$, т.е. на правом «входе» в «кротовую нору» получается асимптотически-плоское пространство-время.

Таким образом, мы показали, что в рамках афинно-метрической теории гравитации индуцированное гравитационным взаимодействием аксионное поле может образовывать сферически-симметричные и цилиндрические «кротовые норы» с асимптотически-плоским пространством на правом «входе» $(r >> 1)$, т.е. со стороны наблюдателя.

А с учетом того, что аксионное поле рассматривается как один из кандидатов на роль «темной материи», обеспечивающей гравитационную устойчивость Галактики, можно вполне обоснованно выдвинуть гипотезу, что в центре Галактики находится «кротовая нора», а наша Солнечная система находится достаточно далеко от «входа», так как в этом районе Галактики мы имеем с хорошим приближением плоское пространство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кречет В.Г. Нелинейные волновые поля и геометрия пространства-времени // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц: сб. – М.: Энергоатомиздат, 1982.
2. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука, 1990.
3. Коганов А.В., Кречет В.Г. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 12. – С. 35–39.
4. Bronnikov K.A. // Acta Phys. Polonika. – 1973. – V. B4. – P. 251.

Московский государственный технологический университет «Станкин», г. Москва, Россия

Поступила в редакцию 17.03.16.

Кречет Владимир Георгиевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор, e-mail: krechetvg@yandex.ru;
Ошурко Вадим Борисович, д.ф.-м.н., профессор, профессор, e-mail: vbo08@yandex.ru;
Лоди Маргарита Никитична, к.т.н., доцент, доцент, e-mail: lodimn@yandex.ru.