ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 530.12:531.51

В.В. ЛАСУКОВ

СТРУННЫЙ ФОРМАЛИЗМ В СВЕРХПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Показано, что математический аппарат теории струн можно сформулировать в двумерном сверхпространстве-времени без использования идеи о многомерности пространственно-временного мира, что автоматически устраняет необходимость компактификации лишних пространственных измерений.

Ключевые слова: *концепция первоатома Леметра в сверхпространстве-времени, теория струн.*

Введение

Существует мнение, что для построения квантовой теории гравитации необходим переход от точечных к одномерным протяженным объектам – струнам, длина которых порядка планковских масштабов. Фундаментальная теория релятивистских струн, претендующая на описание квантовой гравитации, содержит единственную константу размерности квадрата длины, имеющую смысл масштаба, на котором становятся существенными струнные эффекты. Теория струн формулируется в 10-мерном фоновом пространстве-времени Минковского, шесть измерений которого компактифицированы до планковских размеров, так что моды возбуждений 6-мерного пространства с $n \neq 0$ имеют планковский порядок энергии и не проявляются в каких-либо процессах с участием элементарных частиц в современную космологическую эпоху. Теория струн включает в себя суперсимметрию (избавляет теорию от тахионов и понижает критическую размерность с $d = 26$ до $d = 10$), необходимую для согласования теории струн с квантовой механикой, идею о многомерности пространственно-временного мира (топологические свойства 6-мерного компактного многообразия, которое не меняется в ходе эволюции Вселенной, определяют основные черты современной физики элементарных частиц), а также идею о пространственной протяженности носителей фундаментальных взаимодействий (введение струн обеспечивает естественную геометрическую регуляризацию на малых расстояниях) [1–7].

Эти идеи порождают в теории струн проблему динамического обоснования компактификации (при этом из-за компактности и планковского размера 6-мерного пространства могут возникать пространственно-временные сингулярности классической теории, а введение процедур квантования не гарантирует устранение классических сингулярностей), проблему отличия трех пространственных измерений от шести остальных и проблему наблюдаемой метрики пространства-времени (возбуждения струны содержат гравитоны, так что наблюдаемая метрика должна определяться динамически путем решения уравнений теории гравитации, а не постулироваться в форме пространства-времени Минковского).

В связи с отмеченной проблематичностью струнных теорий исследуем возможность использования математического формализма классической и квантовой теории открытой релятивистской струны без идеи о многомерности пространственно-временного мира.

Формализм Лагранжа

Исследование проведем в плоском двумерном сверхпространстве-времени $\{a, t\}$, «пространственной координатой» которого является так называемый масштабный фактор a, умноженный на единицу измерения длины. Метрика сверхпространства-времени постулируется в плоском виде $d\sigma^2 = c^2 dt^2 - da^2$, так как кривизна-гравитация эффективного (в подходе Логунова) риманова пространства уже учитывается в сверхпространстве-времени структурой гамильтониана свободного гравитационного поля [8]. Координатные преобразования в сверхпространстве-времени, подобные преобразованиям Лоренца, исследованы в работах [9, 10].

Рассмотрим действие, инвариантное относительно выбора времени t и пространственной координаты a двумерного сверхпространства-времени $\{a,t\}$:

$$S = -M_p^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{a_0} \sqrt{\left(\Phi^\circ \Phi'\right)^2 - \Phi^{\circ 2} \Phi'^2}\, da\,, \tag{1}$$

где для начала предполагается, что $\Phi_\mu(a,t) = \{\Phi_0(a,t), \Phi_1(a,t), \Phi_2(a,t), \Phi_3(a,t)......\}$ – четырехкомпонентная полевая функция; каждая компонента определена и принимает значения в двумерном пространстве $\{a,t\}$, так что число компонент не является размерностью пространства-времени (в классической теории число компонент может быть любым; в квантовой же теории возникает ограничение на число компонент функции; для наглядности по аналогии с конфигурационным или фазовым пространством число компонент функции можно интерпретировать как число планковских частиц); M_p – константа размерности массы, а параметр $\frac{1}{M_p}$ имеет размерность длины, который в теории струн, претендующей на описание квантовой гравитации, равен планковской длине $\frac{1}{M_p} \approx 10^{-33}$ см $(\hbar = c = 1)$;

$$\overset{\circ}{\Phi}_\mu \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t}, \quad \Phi'_\mu \equiv \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial a}, \quad \Phi^\circ \Phi' \equiv \overset{\circ}{\Phi}_\mu \Phi'^\mu\,,$$

свертка определена стандартным образом:

$$\Phi^{\circ 2} = \overset{\circ}{\Phi}_\mu \Phi^{\circ\mu} = \Phi_0^2 - \overset{\circ}{\Phi}{}_1^2 - \overset{\circ}{\Phi}{}_2^2 - \overset{\circ}{\Phi}{}_3^2, \quad \Phi'^2 = \Phi'_\mu \Phi'^\mu = -\Phi_1'^2 - \Phi_2'^2 - \Phi_3'^2\,.$$

Здесь лагранжиан имеет вид

$$L\left(\Phi^\circ, \Phi'\right) = \sqrt{\left(\Phi^\circ \Phi'\right)^2 - \Phi^{\circ 2} \Phi'^2}\,, \tag{2}$$

параметр t является эволюционным параметром, а вместо внутренней переменной струны выступает масштабный фактор a, который нумерует точки вдоль пространственного измерения сверхпространства-времени $\{a,t\}$. Стандартные преобразования Лоренца будем рассматривать не на пространстве-времени Минковского, а постулируем группу преобразований Лоренца на функциональном пространстве

$$\Phi_\mu(a,t) = \{\Phi_0(a,t), \Phi_1(a,t), \Phi_2(a,t), \Phi_3(a,t)...\},$$

где возможна так называемая лабораторная параметризация, при которой $\Phi_0(a,t) = t$.

Найдем изменение действия (1) при произвольной вариации $\delta\Phi_\mu(a,t)$ $\left(\delta\Phi_\mu(t_i) = \delta\Phi_\mu(t_f) = 0\right)$:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \int_0^{a_0} da \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{\Phi}_\mu} + \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial L}{\partial \Phi'_\mu} \right] \delta\Phi_\mu - \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi'_\mu} \delta\Phi_\mu \right)_{a=0}^{a=a_0} \right\}.$$

В силу репараметризационной инвариантности действия (1) относительно преобразований вида (которые описывают так называемые конформные преобразования)

$$\tilde{t} = t_0 + t + g(t+a) + g(t-a),\ \tilde{a} = a + g(t+a) - g(t-a) \tag{3}$$

на динамические переменные $\left(\Phi^\circ, \Phi'\right)$ можно наложить условия

$$\Phi^\circ \Phi' = 0,\ \Phi^{\circ 2} = -\Phi'^2 \tag{4}$$

или, эквивалентно, $\left(\Phi^\circ \pm \Phi'\right)^2 = 0$. Здесь $g(v)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям $g(v + 2a_0) = g(v)$, $\frac{\partial(\tilde{t},\tilde{a})}{\partial(t,a)} = 2\frac{dg}{dv} + 1 \neq 0$. Тогда лагранжиан можно представить в виде

$$L=-M_p^2\sqrt{\left(\Phi^\circ\Phi'\right)^2-\Phi^{\circ 2}\Phi'^2}=-1+\overset{\circ}{\Phi}{}_1^2+\overset{\circ}{\Phi}{}_2^2+\overset{\circ}{\Phi}{}_3^2=-\Phi^{\circ 2}=-\Phi_1'^2-\Phi_2'^2-\Phi_3'^2=\Phi'^2$$

или, эквивалентно,

$$\tilde{L}=\frac{M_p^2}{2}\left[\Phi^{\circ 2}-\Phi'^2\right]. \tag{5}$$

С учетом (5) уравнения эволюции Лагранжа и граничные условия принимают простой вид

$$\overset{\circ\circ}{\Phi}_\mu-\Phi''_\mu=0; \tag{6}$$

$$\Phi'_\mu(0,t)=\Phi'_\mu(a_0,t)=0. \tag{7}$$

Частное решение уравнения (6) с граничными условиями (7) и начальными условиями

$$\Phi_\mu(0,a)=\frac{W_\mu}{k_n}\cos(k_n a),\ \overset{\circ}{\Phi}_\mu(0,a)=V_\mu+U_\mu\cos(k_n a), \tag{8}$$

$$k_n=\frac{\pi n}{a_0},\ \nu_n=k_n c$$

имеет известный вид

$$\Phi_\mu(t,a)=V_\mu t+\frac{\cos(k_n a)}{k_n}\left[W_\mu\cos(\nu_n t)+U_\mu\sin(\nu_n t)\right].$$

Вещественное общее решение уравнения эволюции (6), удовлетворяющее граничным условиям (7) и начальным условиям (8), представимо в виде ряда Фурье

$$\Phi_\mu(t,a)=\Psi_\mu+\frac{i}{M_p\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_\mu^n e^{-i\nu_n t}-C_\mu^{n*}e^{i\nu_n t}\right)\frac{\cos(k_n a)}{n}\right], \tag{9}$$

где в силу действительности $\Phi_\mu(t,a)$ амплитуды подчинены условию $C_\mu^{n*}=C_\mu^{-n}$, $\Psi_\mu=\varphi_\mu+\dfrac{tP_\mu}{M_p^2 a_0}$, φ_μ – константа, которую можно интерпретировать как центр тяжести одномерного резонатора; P_μ – импульс резонатора.

Гамильтонов формализм

Для канонического квантования необходимо найти гамильтониан, соответствующий физическому времени t [8], переписать уравнения движения в форме Гамильтона и ввести алгебру квантовых скобок Пуассона – коммутаторов.

Найдем сопряженный к функции-координате $\Phi_\mu(t,a)$ канонический импульс

$$p^\mu=\frac{\partial L}{\partial\overset{\circ}{\Phi}_\mu}=M_p^2\frac{\left(\overset{\circ}{\Phi}\Phi'\right)\Phi'^\mu-\Phi^{\circ\mu}\Phi'^2}{\sqrt{\left(\Phi^\circ\Phi'\right)^2-\Phi^{\circ 2}\Phi'^2}}. \tag{10}$$

В выбранной калибровке линейная плотность импульса также представима в виде ряда Фурье

$$p_\mu(t,a)=M_p^2\overset{\circ}{\Phi}_\mu=\frac{1}{a_0}\left[P_\mu+M_p\sqrt{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}C_\mu^n e^{-i\nu_n t}\cos(\nu_n a)\right]. \tag{11}$$

Лагранжиан $L(\Phi^\circ,\Phi')=\sqrt{\left(\Phi^\circ\Phi'\right)^2-\Phi^{\circ 2}\Phi'^2}$ представляет собой однородную функцию первого порядка от скоростей Φ°, т.е. $L(\lambda\Phi^\circ,\Phi')=\lambda L(\Phi^\circ,\Phi')$. Тогда в полном согласии с теоремой Эйлера

$$p^\mu\overset{\circ}{\Phi}_\mu=L. \tag{12}$$

Так как импульсы $p^{\mu} = M_p^2 \frac{\left(\Phi^{\circ}\Phi'\right)\Phi'^{\mu} - \Phi^{\circ\mu}\Phi'^2}{\sqrt{\left(\Phi^{\circ}\Phi'\right)^2 - \Phi^{\circ 2}\Phi'^2}}$ являются однородными функциями нулевого порядка от скоростей Φ°, т.е. $p\left(\lambda\Phi^{\circ}\right) = p\left(\Phi^{\circ}\right)$, то должна существовать, по крайней мере, одна связь. Действительно, из (10) следует

$$p^{\mu}\Phi'_{\mu} = M_p^2 \frac{\left[\Phi^{\circ}\Phi' - \Phi^{\circ}\Phi'\right]\Phi'^2}{\sqrt{\left(\Phi^{\circ}\Phi'\right)^2 - \Phi^{\circ 2}\Phi'^2}} = 0, p^2 = -M_p^4\Phi'^2, \tag{13}$$

так что соотношение (13) приводит к так называемым связям

$$\varphi_{\pm}\left(\Phi, p\right) \equiv \left(p^{\mu} \pm M_p^2\Phi'^{\mu}\right)^2 = p^2 + M_p^4\Phi'^2 \pm 2M_p^2 p^{\mu}\Phi'_{\mu} = 0. \tag{14}$$

В соответствии с теорией Дирака [11] и с учетом (14) плотность гамильтониана определяется только связями

$$h\left(\Phi, p\right) = \overset{\circ}{\Phi}_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{\Phi}_{\mu}} - L + \lambda_{+}\varphi_{+} + \lambda_{-}\varphi_{-} = \lambda_{+}\varphi_{+} + \lambda_{-}\varphi_{-},$$

где $\lambda_{\pm}\left(a\right)$ – множители Лагранжа. Множители Лагранжа выберем таким образом, чтобы уравнения Гамильтона были эквивалентны уравнениям (6). Нетрудно убедиться, что при $\lambda_{+} = \lambda_{-} = -\frac{1}{4M_p^2}$ гамильтониан равен

$$H = \int_0^{a_0} h\left(\Phi, p\right) da = -\frac{1}{2}\int_0^{a_0}\left(\frac{p^2}{M_p^2} + M_p^2\Phi'^2\right) da = -\frac{1}{2}\int_0^{a_0}\left(\frac{p^2}{M_p^2} - 2M_p^2\Phi''_{\mu}\Phi^{\mu}\right) da, \tag{15}$$

а уравнения Гамильтона имеют вид

$$\overset{\circ}{\Phi}_{\mu} = \frac{\delta H}{\delta p^{\mu}} = -\frac{p_{\mu}}{M_p^2}, \quad \overset{\circ}{p}_{\mu} = -\frac{\delta H}{\delta \Phi^{\mu}} = -M_p^2\Phi''_{\mu}. \tag{16}$$

Уравнения Гамильтона (16) в калибровке $\lambda_{+} = \lambda_{-} = -\left(4M_p^2\right)^{-1}$ приводят к уравнениям $\overset{\circ\circ}{\Phi}_{\mu} - \Phi''_{\mu} = 0$, так что указанная калибровка эквивалентна условиям $\Phi^{\circ}\Phi' = 0, \Phi^{\circ 2} = -\Phi'^2$.

Вторичное квантование основывается на разложении решения дифференциального уравнения в ряд Фурье. Для использования стандартной процедуры разложения гамильтониана в ряд Фурье введем новые динамические переменные Z_{μ}, такие, чтобы плотность гамильтониана имела квадратичную форму $h = Z^2$, а пределы интегрирования были симметричны. Для этого вместо переменной a введем независимую переменную $\theta, -a_0 \le \theta \le a_0$. Связи (15) подсказывают, что динамические переменные Z_{μ} можно выбрать следующим образом:

$$Z_{\mu}\left(t, \theta\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[p_{\mu} + M_p^2\Phi'_{\mu}\left(t, a\right)\right], \theta = +a, \\ \frac{1}{2}\left[p_{\mu} - M_p^2\Phi'_{\mu}\left(t, a\right)\right], \theta = -a. \end{cases}$$

В этих переменных гамильтониан равен

$$H = -\frac{1}{M_p^2}\int_{-a_0}^{a_0} Z^2\left(\theta\right) d\theta, \tag{17}$$

а связи (15) задаются уравнением

$$Z^2\left(\theta\right) = 0. \tag{18}$$

Разложим $Z_\mu(t,\theta)$ в ряд Фурье

$$Z_\mu(t,\theta)=\frac{M_p\sqrt{\pi}}{a_0}\left[\frac{C^0}{2}+\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left\{C_\mu^m(t)e^{i\nu_m\theta}+\left(C_\mu^m(t)\right)^* e^{-i\nu_m\theta}\right\}\right]\right], \qquad (19)$$

где $C_\mu^m(t)=C_\mu^m e^{-i\nu_m t}$; $\left(C_\mu^m\right)^*=C_\mu^{-m}$; $\nu_m=\dfrac{\pi m}{a_0}$; $C_\mu^0=\dfrac{2P_\mu}{M_p\sqrt{\pi}}$; $P_\mu=\int\limits_{-a_0}^{a_0} Z_\mu(t,\theta)d\theta$.

Подставляя (19) в (17) с учетом $\int\limits_{-a_0}^{a_0} e^{i(\nu_m+\nu_n)\theta}d\theta=2a_0\delta_{m+n,0}$, получим условие, определяющее связь:

$$H=\frac{\pi}{a_0}\left[-\frac{P^2}{2\pi M_p^2}-\sum_{n=1}^{\infty}C^{-n}C^n\right]\equiv\frac{\pi}{a_0}L_0=0, \qquad (20)$$

где $P^2=P_\mu P^\mu=M^2$; $C_\mu^{-n}C^{\mu n}=C_0^{-n}C_0^n-C_1^{-n}C_1^n-C_2^{-n}C_2^n-C_3^{-n}C_3^n$.

С учетом (20) из (18) следует

$$2\pi M_p^2\left[\frac{P}{M_p\sqrt{\pi}}\sum_m C^m e^{i\nu_m(\theta+t)}+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l C^k C^l e^{i(\nu_k+\nu_l)(\theta+t)}\right]=$$

$$=2\pi M_p^2\sum_m\left[\frac{P}{M_p\sqrt{\pi}}C^m+\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0.m}C^kC^{m-k}\right]e^{i\nu_m(\theta+t)}=0,$$

так что второе условие связи имеет вид

$$\frac{P}{M_p\sqrt{\pi}}C^m+\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0,m}C^kC^{m-k}=0. \qquad (21)$$

Следуя Дираку, покажем, что определяемые условиями (21) величины

$$L_m=\frac{P}{M_p\sqrt{\pi}}C^m+\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0,m}C^{m-k}C^k$$

линейно выражаются через эти же величины, т.е. условия (21) по терминологии Дирака определяют связи первого рода. Учитывая разложения Фурье (9) и (11), нетрудно выразить скобку Пуассона $\left\{p_\mu(a_1),\Phi_\nu(a_2)\right\}$ в переменных C_μ^n:

$$\left\{p_\mu(a_1),\Phi_\nu(a_2)\right\}=\frac{1}{a_0}\left\{P_\mu,X_\nu\right\}-\frac{1}{a_0}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left\{C_\mu^m,C_\nu^n\right\}\frac{\cos(\nu_m a_1)\cos(\nu_n a_2)}{in}+$$

$$+\frac{1}{a_0M_p\sqrt{\pi}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left\{P_\mu,C_\nu^n\right\}\frac{\cos(\nu_n a_2)}{in}+\frac{M_p\sqrt{\pi}}{a_0}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\left\{C_\mu^m,X_\nu\right\}\cos(\nu_m a_1).$$

Из известного условия $\left\{p_\mu(a_1),\Phi_\nu(a_2)\right\}\underset{a_0\to\infty}{\longrightarrow}-\gamma_{\mu\nu}\delta(a_1-a_2)$ следует, что скобка Пуассона для переменных C_μ^n должна иметь вид

$$\left\{C_\mu^m,C_\nu^n\right\}=-im\gamma_{\mu\nu}\delta_{m+n,0}, \qquad (22)$$

где использовано известное представление Фурье для дельта-функции:

$$\frac{1}{a_0}\sum_{n>0}\cos(\nu_n a_1)\cos(\nu_n a_2)\underset{a_0\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos(\nu a_1)\cos(\nu a_2)d\nu=\frac{1}{2}\left[\delta(a_1+a_2)+\delta(a_1-a_2)\right]=\frac{1}{2}\delta(a_1-a_2),$$

$\gamma_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1....)$. Тогда с учетом свойств классических скобок Пуассона находим

$$\left\{C_\mu^m, L_n\right\} = \frac{P}{M_p\sqrt{\pi}}\left\{C^m, C^n\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq n}\left\{C^m, C^k C^{n-k}\right\} = \frac{-imP}{M_p\sqrt{\pi}}\gamma_{\mu\nu}\delta_{m+n,0} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k\neq m}\left[\left\{C^m, C^k\right\}C^{n-k} + C^k\left\{C^m, C^{n-k}\right\}\right] = \frac{-imP}{M_p\sqrt{\pi}}\gamma_{\mu\nu}\delta_{m+n,0} - im\gamma_{\mu\nu}C^{m+n} = -imC_\mu^{m+n}. \tag{23}$$

Используя (23), получим

$$\left\{L_m, L_n\right\} = \frac{P}{M_p\sqrt{\pi}}\left\{C^m, L_n\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq m}\left\{C^k C^{m-k}, L_n\right\} = \frac{-imP}{M_p\sqrt{\pi}}C^{m+n} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k\neq m}\left[C^k\left\{C^{m-k}, L_n\right\} + \left\{C^k, L_n\right\}C^{m-k}\right] = \frac{-imP}{M_p\sqrt{\pi}}C^{m+n} - \frac{i}{2}\sum_{k\neq m}\left[(m-k)C^k C^{m+n-k}\right] -$$
$$-\frac{i}{2}\sum_{k\neq m}\left[kC^{n+k}C^{m-k}\right] = \frac{-imP}{M_p\sqrt{\pi}}C^{m+n} + \frac{i}{2}nC^{m+n}C^0 - \frac{i}{2}\sum_{k\neq m+n}\left[(m-k)C^k C^{m+n-k}\right] - \tag{24}$$
$$-\frac{i}{2}\sum_{k\neq m}\left[kC^{n+k}C^{m-k}\right] = -i(m-n)\frac{P}{M_p\sqrt{\pi}} - \frac{i}{2}(m-n)\sum_{k\neq m+n}C^k C^{m+n-k} +$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{k\neq m+n}(k-n)C^k C^{m+n-k} - \frac{i}{2}\sum_{l\neq m+n}(l-n)C^{m+n-l}C^l = -i(m-n)L_{m+n},$$

что и требовалось показать.

Каноническое квантование

Для простоты будем использовать вместо современного метода функциональных интегралов старый канонический метод квантования. Переход к квантовой теории совершим путем замены классических скобок Пуассона на коммутаторы $-i\hbar\{....\}\to[....]$, так что условия квантования для полного набора переменных P_μ, Ψ_μ, C_μ^n принимают вид

$$\left[\hat{P}_\mu, \hat{\Psi}_\nu\right] = i\hbar\gamma_{\mu\nu}, \left[C_\mu^m, C_\nu^n\right] = -\hbar m\gamma_{\mu\nu}\delta_{m+n,0}. \tag{25}$$

Таким образом, $\hat{b}_k = \frac{\hat{C}_k^m}{\sqrt{m}}$ $(k = 1,2,3;\ m > 0)$ является понижающим, а $\hat{b}_k^+ = \frac{\hat{C}_k^{-m}}{\sqrt{m}}$ – повышающим оператором для m-го осциллятора:

$$\hat{C}^m f(N) = \sqrt{mN_m}f(N-1),\ \hat{C}^{-m}f(N) = \sqrt{m(N_m+1)}f(N+1),\ \hat{C}^{-m}\hat{C}^m f(N) = mN_m f(N),$$

$\hat{C}^m\hat{C}^{-m}f(N) = m(N_m+1)f(N)$, $\frac{1}{2m}\left(\hat{C}^{-m}\hat{C}^m + \hat{C}^m\hat{C}^{-m}\right)f(N) = \left(N_m + \frac{1}{2}\right)f(N)$, N_m – числа заполнения, $\sum_m N_m = N$.

Для нулевых компонент $\hat{C}_0^m$ знак в правой части коммутационных соотношений противоположный $\left[\hat{C}_0^m, \hat{C}_0^{-m}\right] = -\hbar m$, и поэтому состояние $\hat{C}_0^{-m}|0\rangle$ имеет отрицательную норму, так как

$$\langle 0|\left[\hat{C}_0^m, \hat{C}_0^{-m}\right]|0\rangle = \langle 0|\hat{C}_0^m\hat{C}_0^{-m}|0\rangle - \langle 0|\hat{C}_0^{-m}\hat{C}_0^m|0\rangle = \langle 0|\hat{C}_0^m C_0^{-m}|0\rangle = -\hbar m,$$

где основное состояние $|0\rangle$ определяется как состояние, которое аннулируется оператором $\hat{C}^m$ при $m > 0$, т.е. $\hat{C}^m|0\rangle = 0$.

Найдем коммутатор $\left[\hat{L}_m, \hat{L}_n\right]$. С учетом коммутаторов (25) последние два слагаемые $\frac{i}{2}\sum_{k\neq m+n}(k-n)C^k C^{m+n-k} - \frac{i}{2}\sum_{l\neq m+n}(l-n)C^{m+n-l}C^l$ в классической формуле (24) при квантовании сводятся к выражению

$$\frac{1}{2}\sum_{k\neq m+n}(k-n)\hat{C}^k\hat{C}^{m+n-k}-\frac{1}{2}\sum_{l\neq m+n}(l-n)\hat{C}^{m+n-l}\hat{C}^l=\frac{\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k-n)\left[\hat{C}^k,\hat{C}^{m+n-k}\right]=$$

$$=\frac{\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k(k-n)=-\frac{d}{12}n\left(n^2-1\right)\delta_{m+n,0}=\frac{d}{12}m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0},$$

так что окончательно

$$\left[\hat{L}_m,\hat{L}_n\right]=(n-m)\hat{L}_{m+n}+\frac{d}{12}m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}. \qquad (26)$$

Здесь введено стандартное обозначение $d=\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$, которое согласно используемой в данной статье интерпретации определяет число компонент полевых функций, а не число пространственных измерений. Появление в (26) аномального швингеровского члена $\frac{d}{12}m\left(m^2-1\right)\delta_{m+n,0}$ означает, что конформная симметрия функционального пространства в квантовой теории оказывается нарушенной.

Так как $\left[C_\mu^n,C_\nu^{-n}\right]=-\hbar n\gamma_{\mu\nu}\neq 0$, то при квантовании связи $L_0=\left[-\frac{P^2}{2\pi M_p^2}-\sum_{n=1}^{\infty}C^{-n}C^n\right]$ соответствующий ей оператор определен с точностью до константы $\hat{\hat{L}}_0=\hat{L}_0-\alpha_0=\left[-\frac{\hat{P}^2}{2\pi M_p^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\hat{C}^{-n}\hat{C}^n\right]-\alpha_0$, где α_0 – константа связи, введение которой обусловлено неоднозначностью, связанной с упорядочением операторов $\hat{C}_\mu^n,\hat{C}_\nu^{-n}$ (обычно используется так называемый нормальный порядок этих операторов $\hat{C}_\mu^{-n}\cdot\hat{C}_\nu^n$). Поэтому физически допустимые состояния $|\varphi\rangle$ должны удовлетворять не дираковскому уравнению $\hat{L}_0|\varphi\rangle=0$, а уравнению

$$\hat{\hat{L}}_0|\varphi\rangle=0$$

или, эквивалентно,

$$\hat{L}_0|\varphi\rangle=\alpha_0|\varphi\rangle. \qquad (27)$$

Уравнение (27) означает, что

$$M_0^2=\langle 0|\hat{P}^2|0\rangle=-2\pi M_p^2\alpha_0+2\pi M_p^2\sum_{n=1}^{\infty}\langle 0|C_1^{-n}C_1^n+C_2^{-n}C_2^n+C_3^{-n}C_3^n-C_0^{-n}C_0^n|0\rangle=-2\pi M_p^2\alpha_0,$$

а квадрат масс возбужденных состояний больше этой величины на любое число, делящееся на 2 $\left(2\langle 1|\hat{C}^{-1}\hat{C}^1|1\rangle=2,\ 2\langle 2|\hat{C}^{-2}\hat{C}^2|2\rangle=4,\ldots\right)$.

В струнном формализме оказывается справедливым следующее утверждение: свободный от состояний с отрицательной нормой (духов) спектр состояний получается при $\alpha_0=1$ и числе компонент функций $d=26$ или при $\alpha_0\leq 1,\ d\leq 26$. Тогда при $\alpha_0=1$

$$M_1^2=\langle 1|\hat{P}^2|1\rangle=-2\pi M_p^2\alpha_0+2\pi M_p^2=0,\ M_2^2=\langle 2|\hat{P}^2|2\rangle=-2\pi M_p^2\alpha_0+4\pi M_p^2=2\pi M_p^2\ldots,$$

так что основным состоянием является тахион с квадратом массы $M_0^2=-2\pi M_p^2$, а первым возбужденным состоянием – векторный мезон с массой $M_1^2=0$.

Состояние первого возбужденного уровня определяется как состояние вида $\langle 1;P|\equiv\xi^\mu\cdot\hat{C}_\mu^{-1}|0;P\rangle$, где $\xi_\mu(P)$ – поляризационная функция, имеющая до учета связей d независимых компонент, $|0;P\rangle$ – основное состояние с импульсом P_μ. Из дополнительного условия $L_1|1;P\rangle=0$ следует, что $\xi^\mu\cdot P_\mu=0$. Это условие оставляет $d-1$ допустимую поляризацию. Норма этих состояний определяется выражением $\langle 1;P|1;P\rangle=-\gamma_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu=\overline{\xi}^2-\xi_0^2$. Система уравнений $P_\mu P^\mu=P_0^2-\overline{P}^2=M_1^2=0$ и $\xi_\mu\cdot P^\mu=\xi_0P_0-\overline{\xi}\overline{P}=0$ имеет решение $\overline{\xi}=\overline{\xi}_{11}+\overline{\xi}_\perp,\ \overline{P}=\overline{\xi}_{11}$,

$P_0 = \xi_0$, $\overline{P\xi_\perp} = 0$, так что имеется $d-2$ состояния с поперечной поляризацией и положительной нормой

$$\langle 1;P|1;P\rangle = \overline{\xi}^2 - \xi_0^2 = \overline{\xi}_{11}^2 + \overline{\xi}_\perp^2 - \xi_0^2 = \overline{\xi}_\perp^2 + \left(\overline{P}^2 - P_0^2\right) = \overline{\xi}_\perp^2 > 0$$

и одно состояние с нулевой нормой $\left(\overline{\xi}_\perp^2 = 0\right)$ и продольной поляризацией $\overline{P} = \overline{\xi}$. В струнной теории состояния с нулевой нормой, так же как в электродинамике, не принадлежат пространству, в котором действует *S*-матрица.

Так как при $m > 0$ коммутатор операторов, входящих в $\hat{L}_m = \dfrac{\hat{C}^m \hat{C}^0}{2} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k \neq 0,m} \hat{C}^{m-k}\hat{C}^k$, аннулируется $\left[\hat{C}_\mu^k, \hat{C}_\nu^{m-k}\right] = -k\gamma_{\mu\nu}\delta_{m,0} = 0$, то для величин L_m указанная выше неоднозначность, связанная с упорядочением, не возникает и обращение в нуль величин L_m в классической теории заменяется в квантовой теории на обычное дираковское требование

$$\hat{L}_m |\varphi\rangle = 0, \quad m = 1, 2, 3... \tag{28}$$

Таким образом, дополнительные условия (27), (28) определяют физическое подпространство допустимых состояний полного пространства Фока.

Следует отметить, что в «лабораторной» параметризации $\Phi_0(a,t) = t$, так что из выражения

$$\Phi_\mu(t,a) = \Psi_\mu + \frac{i}{M_p\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(C_\mu^n e^{-i\nu_n t} - C_\mu^{n*} e^{i\nu_n t}\right)\frac{\cos(k_n a)}{n}\right]$$

следует, что при такой параметризации нулевые компоненты C_0^m аннулируются. Это означает, что проблема «духов» является координатным эффектом.

Превращение виртуальных струнных квантов в реальные

Очевидно, что при рождении Вселенной из «ничего» реальные кванты должны отсутствовать. Поэтому до рождения Вселенной струнные кванты могут быть только виртуальными. Исследуем процесс превращения виртуальных струнных квантов в реальные. По аналогии со спонтанным излучением обычного атома [12] в роли преобразователя виртуальных частиц в реальные может выступать первоатом Леметра. Поэтому будем интерпретировать сформулированный в сверхпространстве-времени струнный формализм как теорию вакуума со специфическими начальными и граничными условиями.

Концепция первоатома Леметра в сверхпространстве-времени сформулирована и развита в работах [13–17]. Первоатом Леметра является одномерным, нерелятивистским, существует в двумерном сверхпространстве-времени, «пространственной координатой» которого является так называемый масштабный фактор a. В первоатоме Леметра роль электрона выполняет планковская частица с массой M_p, а эффективный потенциал имеет вид $W(a,E) = M_p a\left[-|E| + \dfrac{4\pi|\tilde{U}_0|}{3}a^3\right]$.

Квантовая механика в двумерном сверхпространстве-времени (квантовая геометродинамика) является квантовой теорией больших объектов в реальном пространстве. Данная особенность имеет голограммную аналогию, которая позволяет создавать впечатление трехмерного изображения при рассмотрении двумерной поверхности. Следует отметить, что процедура первичного квантования геометродинамики применяется не к масштабному фактору a, а к импульсу планковской частицы $\left(\pi_a = -M_p a a' \to \hat{\pi}_a = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial a}\right)$. Поэтому метрика $d\sigma^2 = c^2dt^2 - da^2$ сверхпространства-времени $\{a,t\}$ не оказывается размытой из-за принципа неопределенности Гейзенберга. Нулевые конусы не подвергаются квантовым неопределенностям. Не исчезает разделение интервалов $d\sigma^2$ на пространственноподобные, времениподобные и нулевые. Размытым становится положение (событие) планковской частицы на пространственной оси a сверхпространства-времени $\{a,t\}$. Первоатом

Леметра способен перманентно порождать наблюдаемую массу Вселенной по механизму спонтанного излучения. Такой процесс рождения обычной материи Вселенной $(\gamma, n, p, \mu, e, \nu ...)$ может служить регулярной атомной моделью большого взрыва [18–22].

В первом порядке нестационарной теории возмущений вероятность спонтанных переходов в дискретном спектре первоатома Леметра в единицу времени равна

$$P = \frac{\partial}{\partial t}\sum_k |B_k|^2 . \tag{29}$$

Здесь

$$B_m(t) = -\frac{i}{M_p\langle a\rangle}\int_0^t e^{i\omega_{mn}t}W_{mn}(t)dt,\ \omega_{mn} = E_m - E_n, W_{mn}(t) = \int_0^\infty \Psi_m^* W_0(a,t)\Psi_n da , \tag{30}$$

где $W_0(a,t) = \frac{g}{M_p}\left(\Phi_\mu(a,t)\hat{\pi}\right), \hat{\pi} = -i\frac{\partial}{\partial a};\ \langle a\rangle = \int_0^\infty a\Psi_n^*(a)\Psi_n(a)da$. Отметим, что выражение (30) отличается от стандартного выражения нестационарной теории возмущений множителем $M_p\langle a\rangle$. Так как «хаббловский» оператор $\hat{\pi} = -i\frac{\partial}{\partial a}$ является одномерным, то процесс превращения виртуальных струнных квантов в реальные можно исследовать отдельно для каждой «пространственной» компоненты функции $\Phi_j(a,t),\ j = 1, 2, 3$. Исследование проведем при $\Psi_\mu = 0$. Подставляя

$$\Phi_j(a,t) = \frac{i}{2a_0 M_p\sqrt{T}}\sum_\nu \sqrt{\nu}\left[C_j^\nu e^{-i\nu t} - C_j^{\nu+}e^{i\nu t}\right]\frac{\cos(ka)}{k} \tag{31}$$

в выражение (30), получим

$$B_m(t) = \frac{g}{2a_0 M_p^3\langle a\rangle\sqrt{T}}\sum_\nu\sqrt{\nu}\left[\begin{array}{l}\int_0^\infty \frac{\cos(ka)}{k}\Psi_m^*\left(C^\nu\hat{\pi}\right)\Psi_n\frac{e^{i(\omega_{mn}-\nu)}-1}{i(\omega_{mn}-\nu)}da + \\ +\int_0^\infty\frac{\cos(ka)}{k}\Psi_m^*\left(C^{\nu+}\hat{\pi}\right)\Psi_n\frac{e^{-i(\omega_{nm}-\nu)}-1}{i(\omega_{nm}-\nu)}da\end{array}\right], \tag{32}$$

где второй член, пропорциональный C^+, описывает процесс рождения струнных квантов. Оставляя этот член, имеем

$$B_m(t) = \frac{g}{2a_0 M_p^3\langle a\rangle\sqrt{T}}\sum_\nu\sqrt{\nu}\frac{e^{-i(\nu-\omega_{nm})t}-1}{(\nu-\omega_{nm})}\int_0^\infty\frac{\cos(ka)}{k}\Psi_m^*\left(C^{\nu+}\hat{\pi}\right)\Psi_n da ,$$

так что вероятность отдельного перехода равна

$$P_{nm} = \frac{g^2}{2a_0^2 M_p^6 T\langle a\rangle^2}\sum_\nu \nu\frac{\sin\left[(\nu-\omega_{nm})t\right]}{(\nu-\omega_{nm})}\left(C^\nu\pi_{mn}^*\right)\left(C^{\nu+}\pi_{mn}\right), \tag{33}$$

где матричный элемент

$$\pi_{mn} = \int_0^\infty\frac{\cos(ka)}{k}\Psi_m^*\hat{\pi}\Psi_n da ,$$

$$\left(C^\nu\pi_{mn}^*\right)\left(C^{\nu+}\pi_{mn}\right) = (1+N_\nu)|\pi_{nm}|^2 .$$

Из стационарного уравнения, описывающего первоатом Леметра [13], нетрудно получить

$$\pi_{mn} = -iM_p^2\omega_{mn}\int_0^\infty\frac{\cos(ka)}{k}a^2\Psi_m^*\Psi_n da .$$

При больших временах T и t

$$\frac{1}{T}\sum_{\nu} \;=\frac{1}{2\pi}\int d\nu \;\text{ и }\; \frac{\sin\left[\left(\nu-\omega_{nm}\right)t\right]}{\left(\left(\nu-\omega_{nm}\right)\right)}=\pi\delta\left(\nu-\omega_{nm}\right),$$

так что окончательно

$$P_{nm}=\frac{g^2}{4a_0^2M_p^2}\omega_{nm}\left|x_{nm}\right|^2,$$

где $x_{nm}=\frac{\left\langle a^2\right\rangle_{nm}}{\left\langle a\right\rangle}$, $\left\langle a^2\right\rangle_{nm}=\int\limits_0^\infty a^2\cos\left(a\frac{\omega_{nm}}{c}\right)\Psi_m^*\left(a\right)\Psi_n\left(a\right)da$, $a_0=M_p^{-1}$; $g^2=8\pi G\left|U_0\right|$, $G=M_p^{-2}$ – ньютоновская гравитационная постоянная, $M_p\approx 10^{-5}$ г – масса Планка, U_0 – плотность потенциальной энергии самодействия вакуумоподобного скалярного поля, $\Lambda=8\pi G\left|U_0\right|$ – космологическая постоянная Эйнштейна. Собственные функции первоатома Леметра имеют вид

$$\Psi_n\left(a\right)=N\exp\left(-\frac{x}{2}\right)L_n^{(\lambda)}\left(x\right), \tag{34}$$

$$x=2\alpha\xi,\ \xi=\frac{a^3}{6},\ \alpha=\sqrt{\frac{32\pi}{3}\left|U_0\right|M_p^2}=2M_p^2H_0,\ \lambda=-\frac{1}{3},\ N=\frac{\sqrt[6]{9\alpha}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+n\right)\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}},$$

$$L_n^{(\lambda)}\left(x\right)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^k\Gamma\left(1+n+\lambda\right)}{k!\,\Gamma\left(1+k+\lambda\right)\Gamma\left(1+n-k\right)}x^k$$ – обобщенный многочлен Лагерра,

$$\left\langle a\right\rangle=\int\limits_0^\infty a\,\Psi_m^*\left(a\right)\Psi_m\left(a\right)da=\frac{3}{\sqrt[3]{9\alpha}}\left[\frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(m+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right)}\right],E_n=-3H_0\left(n+\frac{1}{3}\right),\ \omega_{nm}=3H_0\left(n-m\right),\ n>m,$$

$H_0=\sqrt{\frac{8\pi G\left|U_0\right|}{3}}$ – параметр Хаббла. Для решения (34) начальный момент первого порядка $\left\langle a\right\rangle_{nm}=\int\limits_0^\infty a\Psi_n\left(x\right)\Psi_m\left(x\right)da=0,\ m\neq n$. Функции (34) нормируемы, образуют полную систему, но подобно базису когерентных состояний не ортогональны [23]. Поэтому первоатом Леметра в отличие от обычного атома может излучать перманентно. Физически перманентность обусловлена тем, что с ростом $\left|E\right|$ ширина и глубина потенциальной ямы $W\left(a,E\right)$ возрастают – «планковская частица сама себе копает потенциальную яму». Для решения (34) излучение является квадрупольным, так как оно определяется начальным моментом второго порядка $\left\langle a^2\right\rangle_{nm}$.

При $n=m+1$ вероятность квантового перехода между соседними уровнями можно представить в характерном для квантовой электродинамики виде

$$P_n=\frac{4}{3}\frac{\tilde{\alpha}\omega_0^3}{c^3}\left|x_{n+1,n}\right|^2,\quad \omega_0=3H_0,\quad \tilde{\alpha}=\frac{1}{16}.$$

Здесь константа $\tilde{\alpha}=\frac{1}{16}$ выполняет роль постоянной тонкой структуры $\alpha\approx\frac{1}{137}$ квантовой электродинамики. Обеспечивающий необратимость процесса рождения струнных квантов эффект релаксации может быть учтен так же, как это сделано в работе [17]. Этот эффект имеет фундаментальное значение, так как из-за эффекта релаксации процесс рождения обычной материи первоатомом Леметра является необратимым относительно операции обращения времени, что обуславливает существование стрелы времени и объясняет отличие начала и конца эволюции обычной материи Вселенной. Эффект спонтанного излучения с учетом релаксации является примером объективной редукции Пенроуза.

В следующей публикации планируется исследование многокомпонентной замкнутой и суперсимметричной релятивистской струны. Естественно ожидать, что сформулированный в сверхпространстве-времени струнный формализм можно обобщить на замкнутую и суперсимметричную струну.

Заключение

Результат проведенного исследования лишь по форме имеет известный вид, но физическое содержание является существенно иным.

Математический аппарат теории струн может быть сформулирован в плоском двумерном **сверхпространстве-времени** без использования идеи о многомерности пространственно-временного мира, что автоматически устраняет необходимость компактификации лишних пространственных измерений. В таком подходе **масштабный фактор** сверхпространства-времени выступает в качестве внутренней переменной струнного формализма. Одновременно он характеризует в классической теории кривизну-гравитацию эффективного риманова пространства. Стандартные преобразования Лоренца используются в многокомпонентном **функциональном** пространстве $\Phi_\mu(a,t)=\{\Phi_0(a,t),\Phi_1(a,t),\Phi_2(a,t),\Phi_3(a,t),...,\Phi_{25}(a,t)\}$, а не в многомерном пространстве-времени. Кванты возбуждений открытой релятивистской бозонной струны являются виртуальными, а теорию струн можно интерпретировать как теорию вакуума со специфическими начальными и граничными условиями. В роли преобразователя виртуальных струнных квантов в реальные может выступать первоатом Леметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. – М.: Мир, 1990.
2. Морозов А.Ю. // УФН. – 1985. – Т. 162. – С. 83.
3. Арефьева И.Я., Волович И.В. // УФН. – 1985. – Т. 146. – С. 655.
4. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. // УФН. – 1986. – Т. 150. – С. 490–524.
5. Маринов М.С. // УФН. – 1977. – Т. 121. – С. 377–425.
6. Маршаков А.В. // УФН. – 2002. – Т. 172. – С. 977–1020.
7. Огиевецкий В.И., Мезинческу Л. // УФН. – 1975. – Т. 117. – С. 673.
8. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 6. – С. 19–26.
9. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2007. – № 9 . – С. 47–52.
10. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 8 . – С. 45–50.
11. Дирак П. Принципы квантовой механики. – М.: Наука, 1979.
12. Соколов А.А., Тернов И.М. Квантовая механика и атомная физика. – М.: Просвещение, 1970.
13. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2003. – № 4. – С. 88–92.
14. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2004. – № 1. – С. 27–35.
15. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 9. – С. 24–34.
16. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 5. – С. 91–92.
17. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2005. – № 1. – С. 24–34.
18. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2003. – № 9. – С. 49–55.
19. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2008. – № 8. – С. 38–43.
20. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 2 . – С. 59–65.
21. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 4. – С. 10–14.
22. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2010. – № 1. – С. 3–9.
23. Кучин В.А. Основные принципы нерелятивистской квантовой механики. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. – С. 127–132.

Физико-технический институт Национального исследовательского Томского политехнического университета, г. Томск, Россия
E-mail: lav_9@list.ru

Поступила в редакцию 22.06.10.

Ласуков Владимир Васильевич, к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики.