

УДК 530.12:531.51

В.В. ЛАСУКОВ

**СИММЕТРИЧНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ПЕРВОАТОМА ЛЕМЕТРА**

Проведено упорядочение по правилу Вейля математической модели первоатома Леметра, неоднозначность которой обусловлена особенностью кинетической части гамильтониана.

Ключевые слова: атом Леметра, сверхпространство-время, правило упорядочения Вейля.

Введение

В квантовой геометродинамике, в которой присутствует время, порождаемое связью Логунова, различные пространственно-временные структуры – отрицательные Скаляры (сферы [1], линии и поверхности уровня [2]) реального пространства-времени, заполненные однородным скалярным полем с плотностью потенциальной энергии самодействия $\tilde{U}_0 < 0$, подобны первоатому Леметра в сверхпространстве-времени [3–9]. Первоатом является одномерным, нерелятивистским, существует в сверхпространстве-времени $\{a, t\}$, «пространственной координатой» которого является так называемый масштабный фактор a , умноженный на единицу измерения длины. Первоатом Леметра способен перманентно порождать наблюдаемую массу Вселенной по механизму спонтанного излучения [10–13]. Такой процесс рождения обычной материи Вселенной ($\gamma, n, p, \mu, e, \nu, \dots$) может служить регулярной атомной моделью большого взрыва, так что квантовая механика в сверхпространстве-времени (квантовая геометродинамика) является квантовой теорией больших объектов в реальном пространстве-времени. Данная особенность имеет голограммную аналогию: двумерное сверхпространство-время $\{a, t\}$ подобно голограмме, и в соответствии с принципом голограммы «все в каждой части» первоатом Леметра является ее малым участком, содержащим в себе все «изображение» реального 4-мерного Мира. В квантовой теории при $-\infty < E < +\infty$ и при $E_1 \leq E \leq E_2$ для систем с непрерывным спектром энергии можно ввести самосопряженный оператор времени $\hat{t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial E}$ [14], который лишь при $0 \leq E < +\infty$ не является самосопряженным, что не является проблемой, так как математические свойства такого оператора времени и при $0 \leq E < +\infty$ вполне достаточны, чтобы считать время квантово-механической наблюдаемой (для систем с дискретным спектром энергии время также является квантово-механической наблюдаемой) [15]. Это означает, что классичность времени больше не является аргументом в пользу существования обычного «наблюдателя» в квантовой геометродинамике.

Вакуумно-подобное скалярное поле может служить источником и материальным носителем времени [7]. Вероятность туннелирования планковской частицы в сверхпространстве из области с $U_0 = 0$ в область с $U_0 > 0$ по аналогии с вероятностью рождения электрон-позитронных пар сверхсильным электрическим полем можно интерпретировать как вероятность рождения в реальном пространстве-времени пары планковских частиц с энергиями $E_+ > 0$ и $E_- < 0$ в областях с $U_0 > 0, E > 0$ и $U_0 < 0, E < 0$, т.е. как вероятность сборки (появления планковской частицы-маятника в потенциальной яме) материального носителя времени, а значит, и вероятность рождения самого времени (область $U_0 < 0, E < 0$ представляет собой атомные часы Леметра, в которых роль энергетической «пружины» выполняет скалярное поле, а «маятником» является планковская частица, возникающая в потенциальной яме при туннелировании в сверхпространстве). В работе [13] показано, что кванты скалярного поля в эффективном римановом пространстве могут проявлять себя как кванты времени реального пространства Минковского.

В работе [1] теоретически доказана возможность существования в реальном пространстве сфер радиуса $r_0 = 2G|M| \approx \frac{1}{H_0}$, $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G|U_0|}{3}}$, заполненных не газом частиц скалярного поля, а однородным постоянным скалярным полем с положительной плотностью потенциальной энергии самодействия $U_0 > 0$, которое не квантуется. Такие сферы, названные положительными Скалярами, могут быть ответственны за неубывающее поведение наблюдаемых «ротационных» кривых галактик. В зависимости от значения потенциальной составляющей U_0 скалярного поля такие сферы могут как располагаться в центре звезд, так и включать в себя звезды, галактики, скопления галактик и наблюдаемую Вселенную в целом. Это означает, что Вселенная может представлять собой положительный Скаляр вселенского масштаба с отрицательными Скалярами внутри него, которые могут выступать в роли не содержащих внутри себя сингулярность «черных дыр», генерирующих обычную материю по механизму спонтанного излучения первоатома Леметра [10–13].

Классическая функция Гамильтона первоатома Леметра имеет вид [4, 5]

$$H = -\frac{\pi_a^2}{2M_p^2 a} - V|U_0|, \quad V = \frac{4\pi}{3}a^3. \quad (1)$$

Монадное обоснование выбора гамильтониана (1) дано в работе [7]. Гамильтониан первоатома является нерелятивистским, так как в сверхпространстве-времени гамильтониан свободного гравитационного поля автоматически имеет нерелятивистский вид $-\frac{\pi_a^2}{2M_p^2 a}$. Так как хаббловский

оператор $\hat{\pi}_a = -i\frac{\partial}{\partial a}$ и пространственная переменная a сверхпространства-времени не коммутируют $\left(\left[\hat{\pi}_a, \frac{1}{a}\right] \neq 0\right)$, то из-за присутствия в кинетической части гамильтониана $-\frac{\pi_a^2}{2M_p^2 a}$ множителя $\frac{1}{a}$ каноническое первичное квантование неоднозначно, что проявляется в возникновении нескольких вариантов дифференциального уравнения:

$$\left[\frac{1}{2M_p^2 a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{4\pi a^3}{3}|U_0|\right]\Psi(a) = E\Psi(a); \quad (2)$$

$$\left[\frac{1}{2M_p^2 a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{M_p^2 a^2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{M_p^2 a^3} - \frac{4\pi a^3}{3}|U_0|\right]\tilde{\Psi}(a) = E\tilde{\Psi}(a). \quad (3)$$

Точные решения уравнений (2) и (3) найдены в работах [3, 8]. Для уравнения (2) оно имеет вид

$$\Psi_n(x) = N \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{(v)}(x), \quad v = -\frac{1}{3}, \quad E = -4\omega\left[n + \frac{1}{3}\right], \quad N = \frac{\sqrt[6]{(9\alpha)}}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3} + n\right)} \right), \quad (4)$$

а для уравнения (3)

$$\tilde{\Psi}_n(x) = \tilde{N} \sqrt[3]{x} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{(v)}(x), \quad v = -\frac{1}{3}, \quad E_n = -4\omega\left[n + \frac{1}{3}\right], \quad (5)$$

где $L_n^{(v)}(x) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(1+n+v)}{k! \Gamma(1+k+v) \Gamma(1+n-k)} x^k$; $\omega = \frac{3}{4}H_0$, $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G|U_0|}{3}}$ – величина Хаббла;

$\Gamma(z)$ – гамма-функция; $\alpha = 2H_0 M_p^2$, $M_p \approx 10^{-5}$ г – масса Планка.

Таким образом, мировая функция (5) отличается от решения (4) только множителем $\sqrt[3]{x}$, а условие квантования остается прежним.

В связи с проблемой неоднозначности процедуры первичного квантования атома Леметра осуществим упорядочение математической модели первоатома Леметра по симметричному правилу Вейля.

Симметричное упорядочение Вейля

Используя симметричное правило упорядочения Вейля, осуществим первичное квантование функции Гамильтона. При использовании правила упорядочения Вейля [16] оператор гамильтониана принимает вид

$$\hat{H} = -\frac{1}{6M_p^2} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{a} \right) \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{a} \right) \right] - V|U_0|,$$

где $\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{a} \right) \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{a} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{2}{3a^3} \right\}$. При этом вместо уравнений (2), (3)

возникает уравнение

$$\left[\frac{1}{2M_p^2 a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{2M_p^2 a^2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{3M_p^2 a^3} - \frac{4\pi a^3}{3} |U_0| \right] \tilde{\Psi}(a) = E \tilde{\Psi}(a). \quad (6)$$

Найдем решение уравнения (6). Для этого введем новую переменную $\xi = \frac{a^3}{6}$. В новой переменной уравнение (6) имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha^2 - \frac{4EM_p^2}{3\xi} + \frac{2}{27\xi^2} \right] \tilde{\Psi}(\xi) = 0, \quad (7)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{32\pi}{3}} |U_0| M_p^2 \equiv \frac{8}{3} \omega M_p^2 = 2H_0 M_p^2$. Асимптотическое решение при $a \rightarrow \infty$ можно найти из уравнения

$$\tilde{\Psi}''_{\infty} - \alpha^2 \tilde{\Psi}_{\infty} = 0, \quad (8)$$

всюду конечное решение которого равно $\tilde{\Psi}_{\infty} = \exp(-\alpha\xi)$. Поэтому решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\tilde{\Psi}(\xi) = \exp(-\alpha\xi) f(\xi). \quad (9)$$

Учитывая (9), из уравнения (7) можно получить уравнение

$$\left[x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{3} - x \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{2}{27x} - \frac{E}{4\omega} - \frac{1}{6} \right) \right] f(x) = 0, \quad (10)$$

где $x = 2\alpha\xi = \frac{2H_0}{3M_p} (M_p a)^3$. Избавимся в уравнении (10) от величины $\frac{2}{27x}$. Для этого функцию

$f(x)$ представим в виде $f(x) = x^{\sigma} F(x)$. Тогда из уравнения (10) нетрудно получить уравнение на функцию $F(x)$

$$\left[x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + ((\tilde{\nu}+1)-x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{b} \right] F = 0, \quad (11)$$

где $\tilde{\nu} = 2\sigma - \frac{2}{3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$; $\tilde{b} = -\frac{E}{4\omega} - \sigma - \frac{1}{6}$; $\sigma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9}$.

Чтобы характер решения для мировой функции $\tilde{\Psi}$ на бесконечности определялся асимптотической формулой (9), необходимо найти условие, при котором функция $F(x)$ будет представлять собой конечный полином степени n [17]:

$$F(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) и группируя члены с одинаковыми степенями x , получим

$$\sum_{k=0}^n x^k \{C_k [\tilde{b} - k] + C_{k+1} [k(k+1) + (k+1)(\tilde{v}+1)]\} = 0. \quad (13)$$

Отсюда с учетом $C_{n+1} = 0, C_n \neq 0$ следует условие квантования энергии:

$$E_n = -4\omega \left[n + \sigma + \frac{1}{6} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Из (13), (14) следует рекуррентное соотношение

$$C_k (n - k) = -C_{k+1} (k + 1) (\tilde{v} + k + 1). \quad (15)$$

С учетом (15) для функции F находим

$$F(x) = C_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k x^k}{k! (1 + \tilde{v})_k} = C_0 \frac{\Gamma(1 + \tilde{v})}{\Gamma(1 + n + \tilde{v})} \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(1 + n + \tilde{v})}{k! \Gamma(1 + k + \tilde{v}) \Gamma(n + 1 - k)} x^k. \quad (16)$$

Выберем коэффициент C_0 так, чтобы коэффициент при старшей степени имел вид $C_n = (-1)^n$. Для этого следует выбрать $C_0 = \frac{\Gamma(1 + n + \tilde{v})}{\Gamma(\tilde{v} + 1)}$. Тогда $F(x) = L_n^{(\tilde{v})}(x)$, где

$$L_n^{(\tilde{v})}(x) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(1 + n + \tilde{v})}{k! \Gamma(1 + k + \tilde{v}) \Gamma(n + 1 - k)} x^k - \text{обобщенный многочлен Лагерра.}$$

Окончательно решение уравнения (6) равно

$$\tilde{\Psi}_n(x) = \tilde{N} x^\sigma \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{(\tilde{v})}(x), \quad (17)$$

$$\text{где } \tilde{v} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}; \quad \sigma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9}; \quad E_n = -4\omega \left[n + \frac{1}{6} + \sigma \right].$$

Графики мировых функций $\tilde{\Psi}_n(x)$ и $\Psi_n(x)$ при $n = 6, \sigma = \frac{3 + \sqrt{3}}{9}, \tilde{v} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ представлены на рис. 1.

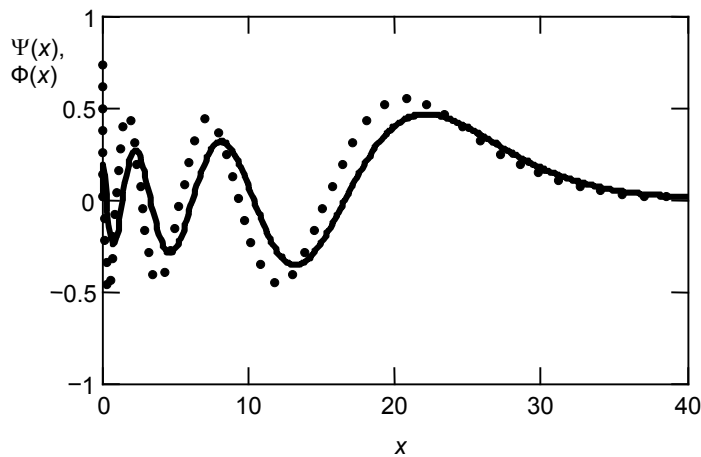


Рис. 1. Зависимость мировой функции $\Psi(x) \equiv \tilde{\Psi}_n(x)$ от безразмерной переменной $x = \frac{2H_0}{3M_p} (M_p a)^3$ – сплошная линия; зависимость функции $\Phi(x) \equiv \Psi_n(x)$ – пунктирная линия

Из рисунка видно, что неоднозначность первичного квантования атома Леметра не оказывает существенного влияния на мировую функцию. Изменение условия квантования на константу $\left(E_n = -4\omega\left(n + \frac{1}{6} + \sigma\right)\right)$ вместо $E_n = -4\omega\left(n + \frac{1}{3}\right)$ также несущественно, так как наблюдаемые величины в квантовой геометродинамике определяются разностью $\Delta E_{nk} = 4\omega(n - k)$.

Используя известный интеграл [18]

$$\int_0^\infty x^{\beta-1} \exp(-cx) L_m^{(\gamma)}(cx) L_n^{(\lambda)}(cx) dx = \frac{(1+\gamma)_m (\lambda-\beta+1)_n \Gamma(\beta)}{c^\beta} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -m, \beta, \beta-\lambda; 1 \\ \gamma+1, \beta-\lambda-n \end{matrix} \right],$$

$$\operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} c > 0,$$

можно найти нормировочный множитель и начальные моменты $\langle a^n \rangle$ произвольного порядка n , возникающие при исследовании процесса излучения первоатома Леметра. Следует иметь в виду, что в [18] коэффициент при старшей степени используется в другом виде: $C_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Для решения (4) начальный момент первого порядка

$$\langle a \rangle_{mn} = \int_0^\infty a \Psi_n(x) \Psi_m(x) da = 0, \quad m \neq n,$$

а для решений (5,17) $\langle a \rangle_{mn} \neq 0$. Например, для решения (4) нужны моменты равны

$$\langle a \rangle_{kk} = \int_0^\infty a \Psi_k^*(a) \Psi_k(a) da = \left[\frac{3}{\alpha} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(k + \frac{2}{3}\right)},$$

$$\langle a^2 \rangle_{nk} = \int_0^\infty a^2 \Psi_k^*(a) \Psi_n(a) da = \left[\frac{3}{\alpha} \right]^{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)} S_{nk},$$

$$\text{где } S_{nk} = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{4}{3} + l\right) \Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{2}{3} + l\right) \Gamma\left(\frac{4}{3} + l - k\right)} C_l^n.$$

Используя символы Похгаммера $(-n)_l = \frac{(-1)^l \Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-l)}$, $(1)_l = l!$, $(a)_l = \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)}$ с учетом того,

что при $l > n$ биномиальные коэффициенты $C_l^n = \frac{n!}{(n-l)!l!} = 0$, сумму конечного числа слагаемых

$$S_{nk} \text{ можно выразить через гипергеометрическую функцию } {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, c; z \\ d, e \end{matrix} \right] = \sum_{l=0}^\infty \frac{(a)_l (b)_l (c)_l}{(d)_l (e)_l l!} z^l :$$

$$S_{nk} = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3} - k\right)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, \frac{4}{3}, 1; 1 \\ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} - k \end{matrix} \right].$$

Функции (4), (5), (17) нормируемы, но не ортогональны. Поэтому первоатом Леметра в отличие от обычного атома может излучать перманентно. Для решения (4) излучение является квадрупольным, а для решений (5), (17) – дипольным.

Заключение

Проведенное исследование позволяет заключить, что неоднозначность первичного квантования атома Леметра не оказывает существенного влияния на ранее построенную его математическую модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2006. – Т. 49. – № 4. – С. 9–19.
2. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 1. – С. 3–11.
3. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2002. – Т. 45. – № 5. – С. 88–92.
4. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2003. – Т. 46. – № 4. – С. 70–75.
5. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2004. – Т. 47. – № 1. – С. 27–35.
6. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2005. – Т. 48. – № 1. – С. 24–34.
7. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 6. – С. 19–26.
8. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 9. – С. 31–39.
9. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 1. – С. 36–43.
10. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2003. – Т. 46. – № 9. – С. 49–55.
11. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2008. – Т. 51. – № 8. – С. 38–43.
12. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 2. – С. 59–65.
13. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 4. – С. 10–14.
14. Ласуков В. В. // Изв. вузов. Физика. – 2008. – Т. 51. – № 3. – С. 87–91.
15. Ольховский В. С. // УФН. – 2011. – Т. 181. – № 8. – С. 859–866.
16. Кучин В. А. Основные принципы нерелятивистской квантовой теории. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
17. Соколов А. А., Тернов И. М. Квантовая механика и атомная физика. – М.: Просвещение, 1970.
18. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983.

Физико-технический институт Национального исследовательского
Томского политехнического университета, г. Томск, Россия
E-mail: lav_9@list.ru

Поступила в редакцию 21.09.11.