УДК 517.956

М.М. ГОНЧАРОВСКИЙ, И.В. ШИРОКОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предъявлен алгоритм нахождения частных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих некоторую нетривиальную алгебру симметрии, но неинтегрируемых стандартными методами. Введено понятие вырожденного решения. Предложена естественная классификация решений.

Ключевые слова: *линейные дифференциальные уравнения, алгебра симметрии, группы Ли, коприсоединенное представление.*

Введение

Наиболее универсальным и развитым методом решения линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) математической физики является метод разделения переменных, однако существуют вполне определённые ограничения его применимости. Известно (см., напр., [1]), что необходимым условием разделения переменных в уравнении с N независимыми переменными является существование для него N-мерного коммутативного набора дифференциальных операторов симметрии не выше второго порядка. В работах [2–4] построен метод некоммутативного интегрирования ЛДУ, в основе которого лежит теория орбит коприсоединённого представления [5]. Некоммутативный метод использует некоммутативные алгебры симметрии и позволяет во многих случаях проинтегрировать уравнения, неинтегрируемые при помощи разделения переменных. Например, работы [6, 7] посвящены некоммутативному интегрированию уравнений Дирака и Клейна – Гордона. Тем не менее и в рамках этого подхода общее решение удаётся получить далеко не всегда.

В данной работе описан способ построения частных решений путём ограничения уравнения на определённые инвариантные относительно алгебры симметрии подпространства функций. Такие решения называем вырожденными. В работе введено понятие ранга вырождения. Решения максимального ранга являются инвариантными относительно группы симметрии. Показано, что вырожденные решения образуют цепочку вложенных друг в друга подпространств, что даёт естественную основу для их классификации.

1. Классификация К-орбит и однородных пространств

Пусть G – вещественная связная унимодулярная группа Ли, LG – ее алгебра Ли с базисом ei и коммутационными соотношениями $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$, i, j = 1, . . , n = dim G, LG^* – сопряженное к LG пространство (коалгебра), f_i – координаты ковектора $f \in LG^*$ в базисе, дуальном к e_i: $f = f_i e^i$, $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$. Группа G действует на коалгебре LG^* коприсоединённым представлением Ad^* по правилу

$$\left\langle \mathrm{Ad}_g^* f, X \right\rangle = \left\langle f, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X \right\rangle, \; g \in G, \; X \in LG, \; f \in LG^*. \tag{1}$$

Генераторами коприсоединенного действия являются векторные поля на LG^*:

$$Y_i(f) = C_{ij}(f) \frac{\partial}{\partial f_j}, \quad C_{ij}(f) = C_{ij}^k f_k.$$

Действие (1) расслаивает пространство LG^* на орбиты коприсоединённого представления (К-орбиты). Размерность орбиты O_f, проходящей через точку (ковектор) f, определяется рангом матрицы $C(f)$, составленной из компонент генераторов действия группы, в данной точке:

$$\dim O_f = \operatorname{rank} C(f).$$

Орбиты, имеющие максимально возможную размерность, равную рангу матрицы $C(f)$ в точке общего положения, называются невырожденными. Из антисимметричности матрицы $C(f)$ следует, что все K-орбиты чётномерны, поэтому последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$\dim O_f = n - r - 2s \ , \ s = 0, 1, \ldots, \frac{n-r}{2}, \tag{2}$$

где $r = \mathrm{ind} LG$ – индекс алгебры LG, равный числу независимых инвариантов коприсоединённого действия (функций Казимира), а число s называется степенью вырождения орбиты. Невырожденные орбиты характеризуются условием $s = 0$. Объединение всех невырожденных орбит обозначим M_0.

Чтобы найти особые инвариантные подмногообразия M_s пространства LG^*, являющиеся объединением орбит размерности $n - r - 2s$, $s > 0$, следуя общему правилу, приравняем нулю все миноры матрицы $C(f)$ размера $n - r - 2s + 2$. Из полученных равенств, определяющих искомые подмногообразия, выберем codim M_s независимых и запишем их в виде $F^s(f) = 0$. Часто бывает удобно использовать не сами равенства, а какие-либо их следствия; в этом случае функции $F^s(f)$ могут не совпадать с минорами матрицы $C(f)$. Тогда инвариантные подмножества $M_s \subset LG^*$ могут быть описаны следующим образом:

$$M_0 = \{ f \in LG^* : F^1(f) \neq 0 \};$$

$$M_s = \left\{ f \in LG^* : F^s(f) = 0, F^{s+1}(f) \neq 0 \right\}, \quad s = 1, \ldots, \frac{n-r}{2} - 1;$$

$$M_{\frac{n-r}{2}} = \{ f \in LG^* : F^{\frac{n-r}{2}}(f) = 0 \}.$$

Если множество M_s несвязно, то будем нумеровать его связные компоненты строчными латинскими буквами: M_{sa}, M_{sb} и т.д., а произвольную компоненту связности обозначать круглыми скобками у индекса: $M_{(s)}$. Для краткости K-орбиты из множества $M_{(s)}$ будем называть орбитами (s)-типа, а точки, принадлежащие такой орбите, – (s)-ковекторами.

На пространстве LG^* определена вырожденная скобка Пуассона

$$\{\varphi, \psi\}(f) = \langle f, [\varphi, \psi] \rangle = C_{ij}(f) \frac{\varphi(f)}{\partial f_i} \frac{\psi(f)}{\partial f_j}, \ \{f_i, f_j\} = C_{ij}(f) \tag{3}$$

(скобка Березина). Непостоянные на $M_{(s)}$ функции $K^{(s)}(f)$, коммутирующие относительно скобки (3) с любой функцией на $M_{(s)}$, будем называть *функциями Казимира* (s)*-типа*. На фактор-многообразии $M_{(s)}/G$, точками которого являются орбиты (s)-типа, введём локальные координаты $j = (j_1, \ldots, j_{r_{(s)}})$, где $r_{(s)}$ – число независимых функций $K^{(s)}(f)$. Орбиты s-типа локально задаются уравнениями $K^{(s)}_\mu(f) = \kappa^{(s)}_\mu(j)$. Из инвариантности множеств $M_{(s)}$ и определения функций Казимира можно получить следующие соотношения:

$$Y_i F^{(s)}_\mu |_{F^{(s)}(f)=0} = 0, \quad Y_i K^{(s)}_\nu(f)|_{F^{(s)}(f)=0} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, \mathrm{codim}\, M_{(s)}, \quad \nu = 1, \ldots, r_{(s)}. \tag{4}$$

Ограничение скобки Пуассона (3) на орбиту коприсоединённого представления невырождено и индуцирует на ней симплектическую структуру. Согласно теореме Дарбу, на каждой орбите O_f существуют координаты q_A, p_A, $A = 1, \ldots, 1/2 \dim O_f$, в которых скобка Пуассона принимает канонический вид. При этом, разумеется, должно быть $F^{(s)}(f(q, p, j)) \equiv 0$. Предположим, что переход $f \to (q, p)$ линеен по переменным p:

$$f_i(q, p, j) = \alpha_i^A(q) p_A + \chi_i(q, j). \tag{5}$$

В работе [6] показано, что существование линейного qp-перехода эквивалентно существованию для ковектора f поляризации, т.е. такой подалгебры $H \in LG$, что

$$\langle f, [H, H] \rangle = 0, \dim H = n - \frac{1}{2} \dim O_f \ .$$

Замечание. Ситуация, когда поляризации не существует, на практике встречается крайне редко. Кроме того, по-видимому, для произвольной группы Ли и любой её K-орбиты существует полиномиальный по переменным p переход к каноническим координатам, что с точки зрения излагаемой теории не приводит к каким-либо принципиальным трудностям по сравнению с линейным случаем.

Введём линейные дифференциальные операторы, символами которых являются функции (5): $l_i(q,\partial_q,j)=\frac{i}{\hbar}f(q,-i\partial_q,j)$ ($\hbar$ – положительный параметр). Полученное представление называется *λ-представлением* алгебры LG.

Обозначим $L_L(G)$ и $L_R(G)$ алгебры соответственно лево- и правоинвариантных векторных полей на группе G. Пусть H – замкнутая связная $n–m$-мерная подгруппа Ли группы G, LH – соответствующая подалгебра, $M=H\backslash G$ – правое однородное G-пространство, $\dim M = m$, на котором группа G действует посредством правых сдвигов с генераторами X_i. Каждый элемент $g\in G$ может быть единственным образом представлен в виде $g = h\, s(x)$, где $h\in H$, $x\in M$, а s – некоторое сечение главного расслоения π: $G\to M$. Тогда касательный гомоморфизм алгебры $LG\approx L_L(G)$ в алгебру гладких векторных полей на M совпадает с проекцией $\pi^*|_{L_L(G)}$, а функции на M можно рассматривать как H-инвариантные слева функции на группе G:

$$\varphi(x)=\varphi(Hg)=\varphi(g)\Leftrightarrow \eta_H\varphi(g)=0,\quad \eta_H\in L_R(H).$$

На языке координат это означает, что в окрестности любой точки $g_0\in G$ можно выбрать такую карту (U_{g_0},ϕ), что $\phi(g)=(h^1,\ldots,h^{n-m},x^1,\ldots,x^m)$. Здесь h^α и x^a – локальные координаты на H и M соответственно (в дальнейшем везде греческие индексы α, β, ... пробегают значения от 1 до $n–m$, а латинские a, b, ... – от 1 до m). Пусть, далее, $LH^\perp$ – «ортогональное дополнение» к подалгебре LH: $LH^\perp=\{f\in LG^*\,|\,\langle f,LH\rangle=0\}$, и s_M – минимальная степень вырождения К-орбит, имеющих непустое пересечение с подпространством $LH^\perp$, т.е. $M_{(s_M)}\cap LH^\perp\neq\varnothing$, $M_{s_M-1}\cap LH^\perp=\varnothing$. Число s_M называется *степенью вырождения* однородного пространства M. Введём инвариантные подмножества $M_{(s)}^H=GLH^\perp\cap M_{(s)}$. Тогда орбита подпространства $LH^\perp$ допускает следующее разложение:

$$GLH^\perp=\bigcup_{(s):s\geq s_M}M_{(s)}^H. \tag{6}$$

В этом случае λ-представление алгебры LG для $f(q,p,j)\in M_{(s)}^H$ называется λ-представлением, *соответствующим однородному пространству M*.

Генераторы X_i в общем случае не являются независимыми – между ними могут существовать функциональные соотношения вида $\Gamma(X)\equiv 0$, называемые *тождествами*. Число i_M независимых тождеств называется *индексом* однородного пространства. В [7] показано, что функция Γ является тождеством тогда и только тогда, когда её ограничение на орбиту $GLH^\perp$ равно нулю: $\Gamma(f)|_{GLH^\perp}=0$. Таким образом, все независимые тождества исчерпываются функциями $F^{(s_M)}(X)$ и функциями Казимира s_M-типа, удовлетворяющими условию $K^{(s_M)}(f)|_{LH^\perp}=0$, а степень вырождения и индекс однородного пространства могут быть посчитаны по формулам

$$s_M=\frac{1}{2}(n-r-\operatorname{rank}C_{ij}(l)),\qquad i_M=\dim H-\operatorname{rank}C_{\alpha a}(l)\ . \tag{7}$$

2. Вырожденные решения ЛДУ

Рассмотрим ЛДУ с N независимыми переменными

$$Lu(x)=0,\quad x\in D\subset R^N,\quad u(x)\in C^\infty(D), \tag{8}$$

допускающее n-мерную алгебру симметрии $LG = Xi$ линейных дифференциальных операторов первого порядка:

$$[L,X_i]=0,\quad [X_i,X_j]=C_{ij}^kX_k,\quad \operatorname{rank}X_i^A(x)=m.$$

Для простоты операторы X_i будем считать однородными. Можно показать, что все полученные результаты остаются в силе и в более общем случае неоднородных операторов симметрии.

Пусть H – подгруппа изотропии некоторой точки $x_0 \in D$ и $l_i(q,\partial_q,j)$ – λ-представление, соответствующее многообразию $M = H\backslash G$ – интегральной поверхности векторных полей X_i. Определим линейные подпространства $L_{(s)}(D) \subset C^{\infty}(D)$:

$$L_{(s)}\left(D\right) = \{\varphi \in C^{\infty}\left(D\right) \mid F^{(s)}\left(X\right)\varphi = 0\}\,. \tag{9}$$

Из определения функций $F_{(s)}$ следует, что $L_{s+1}(D) \subset L_s(D)$ и при $s \le s_M$ подпространства $L_{(s)}(D)$ совпадают с $C^{\infty}(D)$. В силу первого из соотношений (4) операторы $F_{(s)}(X)$ на функциях из $L_{(s)}(D)$ коммутируют с генераторами X_i, т.е. подпространства $L_{(s)}(D)$ инвариантны относительно действия группы G.

В работах [2–4] разработан метод некоммутативного интегрирования линейных уравнений, суть которого заключается в следующем. Общее решение уравнения (8) представляется в виде разложения

$$u(x) = \int \hat{u}(j,q)\varphi_j(x,q)dqdj\,, \tag{10}$$

где dq, dj – меры на многообразиях Q и $M_{(s)}/G$ соответственно; $\hat{u}(j, q)$ – произвольная функция, для которой определён интеграл (10), а $\varphi_j(x, q)$ удовлетворяет уравнению (8) и дополнительной системе линейных уравнений

$$\left(X_i\left(x\right) + l_i\left(q,\partial_q,j\right)\right)\varphi_j\left(x,q\right) = 0\,. \tag{11}$$

Ограничивая уравнение (8) на подпространство решений системы (11), получим редуцированное уравнение с

$$N' = N + i_M - s_M - \frac{n+r}{2} \tag{12}$$

независимыми переменными. Уравнение является интегрируемым, если путём этой процедуры оно сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, т.е. $N' = 1$.

Однако зачастую имеющейся алгебры симметрии недостаточно для интегрирования рассматриваемого ЛДУ. Можно тем не менее построить частные решения, принадлежащие инвариантным подпространствам $L_{(s)}(D)$, накладывая на функцию u дополнительные условия $F_{(s)}(X) = 0$.

Определение. Решение $u(x)$ уравнения (8) будем называть *решением типа* (s), если $u \in L_{(s)}(D)$. Число $s - s_M$ назовём *рангом вырождения* решения.

Решения нулевого ранга вырождения (невырожденные решения) даются формулой (10). Другая крайность – решения максимального ранга $(n - r)/2 - s_M$, являющиеся G-инвариантными функциями: $X_i\, u = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Однородному пространству M и типу К-орбит (s), $s \ge s_M$, сопоставим число $i\left(M,s\right) = \mathrm{codim}(GLH^{\perp} \cap M_{(s)})$, которое назовём *условным индексом* однородного пространства M. Условный индекс является числом независимых функций на коалгебре LG^*, принимающих нулевое значение на инвариантном подмножестве $M_{(s)}^{H}$. Как следствие, он совпадает с числом независимых операторов, составленных из генераторов X_i группы преобразований на однородном пространстве, ограничение которых на подпространство $L_{(s)}(D)$ равно нулю, – тождеств типа (s). В частности, при $s = s_M$ имеем $i(M, s) = i_M$.

Теорема. Уравнение (8) при ограничении на инвариантное функциональное подпространство $L_{(s)}(D)$ редуцируется к ЛДУ с

$$\tilde{N} = N - m + \max\left\{0, m + i_M - \frac{n+r}{2} - s\right\} \tag{13}$$

независимыми переменными. При этом теряется $\delta = i\left(M,s\right) - i_M + \min\left\{0, m + i_M - \frac{n+r}{2} - s\right\}$ существенных параметров.

Доказательство. Обозначим через $r(M, s)$ число тривиальных функций Казимира (s)-типа, т.е. таких функций Казимира, для которых справедливо равенство $K_{\mu}^{(s)}\left(f\right)|_{LH^{\perp}} = 0$. Размерность К-орбиты ($s$)-типа определяется формулой (2). С другой стороны, она равна разности

$\dim M_{(s)} - r_{(s)}$ размерности множества $M_{(s)} \supset O_{(s)}$ и числа функций Казимира, определяющих данную орбиту. Отсюда условный индекс однородного пространства может быть вычислен по формуле

$$i\big(M, s\big) = \operatorname{codim} M_{(s)} + r\big(M, s\big) = r + 2s - r_{(s)} + r(M, s).$$

Пусть $f(j) \in M^H_{(s)}$, при этом $r_{(s)} - r(M, s)$ параметров j являются локальными координатами на многообразии $M^H_{(s)}/G$, и пусть $l_i(q, \partial_q, j)$ – соответствующее λ-представление. Тогда решения системы уравний (11) порождают пространство $L_{(s)}(D)$. Сделаем замену переменных $x \to (y, z)$ следующим образом. В качестве переменных y возьмём $N - m$ независимых инвариантов группы G, которые служат координатами на множестве D/G, а m дополнительных переменных z параметризуют интегральные поверхности векторных полей X_i. Уравнения (11) в новых переменных принимают вид

$$\Big(X_i(y, z, \partial_z) + l_i(q, \partial_q, j)\Big)\varphi_j(y, z, q) = 0\,, \tag{14}$$

то есть переменные y входят в них как параметры.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда ковектор $f(j)$ допускает поляризацию и, следовательно, операторы λ-представления являются операторами первого порядка. Общее решение системы (14) представляется в виде $\varphi_j(y, z, q) = e^{R_j(z,q)}\tilde{\varphi}_j(y, v(z, q))$, где $R_j(z, q)$ – определённая функция, а $\tilde{\varphi}_j(y, v(z, q))$ – произвольная функция характеристик y, $v(z, q)$ системы (14). Подставляя это решение в уравнение (8), получим редуцированное уравнение

$$\tilde{L}\big(y, v, \partial_y, \partial_v, j\big)\tilde{\varphi}_j(y, v) = 0, \quad \tilde{L} = Le^{R_j(z,q)}. \tag{15}$$

Подсчитаем число характеристик системы (14). Число независимых переменных в системе (14), содержащей $n - i_M$ независимых уравнений, равно $m + (n - r)/2 - s$, следовательно, число характеристик $v(z, q)$ равно $\max\{0,\ m + i_M - (n + r)/2 - s\}$. Кроме того, имеется ещё $N - r$ характеристик y. Таким образом, число независимых переменных в редуцированном уравнении (15) определяется формулой (13).

Пусть теперь ковектор $f(j)$ не имеет поляризации и, следовательно, операторы $l_i(q, \partial_q, j)$ имеют порядок выше первого. Интегрируя в системе (14) все уравнения первого порядка, получим $\varphi_j(y, z, q) = e^{R_j(z,q)}\tilde{\varphi}_j(y, v(z, q), \tilde{q}(z, q))$, где функция $\tilde{\varphi}_j(y, v, \tilde{q})$ удовлетворяет системе параболических уравнений

$$\Big(\partial_{\tilde{q}_k} + \tilde{l}_k\big(v, \tilde{q}, \partial_v, j\big)\Big)\tilde{\varphi}_j\big(y, v, \tilde{q}\big) = 0\,. \tag{16}$$

Подставляя функцию $\varphi_j(y, z, q)$ в исходное уравнение, приходим к ЛДУ на неизвестную функцию $\tilde{\varphi}_j(y, v, \tilde{q})$, причём все производные по переменным $\tilde{q}$ выражаются из системы (16). Решение редуцированного уравнения с $\tilde{N}$ независимыми переменными y, v содержит некоторое количество произвольных функций от парамеров $\tilde{q}$, которые определяются подстановкой в систему (16).

Посчитаем число существенных параметров (им соответствуют параметры разделения в методе разделения переменных), которые мы теряем при такой редукции. Очевидно, оно равно разности между числом $N - \tilde{N}$ и числом произвольных параметров q, j, от которых зависит решение. Общее число параметров q, j равно $(n + r)/2 + s - i(M, s)$. Используя формулу (13), получим утверждение второй части теоремы. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим правое действие шестимерной группы Ли G, определяемой коммутационными соотношениями в алгебре Ли

$$[e_1, e_2] = 2e_1,\ [e_1, e_3] = -e_2,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = 2e_3,\ [e_2, e_4] = e_4,$$
$$[e_2, e_5] = -e_5,\ [e_3, e_5] = e_4,\ [e_4, e_6] = e_4,\ [e_5, e_6] = e_5$$

(остальные коммутаторы равны нулю), на однородном пространстве $M = \exp(he_1)\backslash G$, генерируемое векторными полями

$$X_1 = x_2\partial_1 - x_2^2\partial_2 - x_3\partial_4\,, \quad X_2 = \partial_1 - 2x_2\partial_2 - x_3\partial_3 + x_4\partial_4\,, \tag{17}$$
$$X_3 = \partial_2 - x_4\partial_3\,, \ \ X_4 = e^{-x_5}\partial_3\,, \ \ X_5 = e^{-x_5}\partial_4\,, \ \ X_6 = \partial_5\,,$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$. На многообразии M имеется четыре инвариантных относительно такого действия оператора:

$$\zeta_1 = \partial_1, \quad \zeta_2 = e^{x_1}(x_2\partial_3 - \partial_4), \quad \zeta_3 = x_3\partial_3 + x_4\partial_4 - \partial_5, \quad \zeta_4 = e^{-x_1}(\partial_{1,3}^2 - x_2\partial_{2,3}^2 + \partial_{2,4}^2),$$

поэтому любое ЛДУ вида $L(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)u(x) = 0$ допускает алгебру симметрии (17). Подсчёт по формулам (7), (12), (13) показывает, что $i_M = s_M = 0$, $N' = 2$ и при $s = 1$ $\tilde{N} = 1$, $\delta = 1$, т.е. рассматриваемое уравнение в общем случае неинтегрируемо, но может быть редуцировано к ОДУ путём ограничения на подпространство $L_1(M)$. Инвариантное подмногообразие $M_1 \subset LG^*$ коприсоединённого действия данной группы определяется единственным соотношением

$$F^1(f) = \frac{1}{2}\sqrt{\det C(f)} = f_1 f_4^2 - f_2 f_4 f_5 - f_3 f_5^2 = 0.$$

В этом случае λ-представление, соответствующее орбитам типа 1, можно выбрать в виде

$$l_1 = -q_1^2\partial_1 - q_1\partial_2 + \frac{ij}{h}q_1, \quad l_2 = -2q_1\partial_1 - \partial_2 + \frac{ij}{h}, \quad l_3 = \partial_1, \quad l_4 = e^{-q_2}\partial_2, \quad l_5 = q_1 e^{-q_2}\partial_2, \quad l_6 = \partial_2,$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial q_i$. Общее решение системы (11) имеет вид

$$\varphi_j(x,q) = e^R\tilde{\varphi}_j(v) = \exp\left(\frac{ij}{h}(x_1 + \ln(q_1 - x_2))\right)\tilde{\varphi}_j\left(\frac{e^{-x_1}(e^{q_2 - x_5} - x_3 - q_1 x_4)}{q_1 - x_2}\right).$$

Подставив последнее выражение в исходное уравнение, получим ОДУ

$$L\left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, 0\right)\tilde{\varphi}_j(v) = 0, \quad \tilde{\zeta}_1 = v\frac{d}{dv} - \frac{ij}{h}, \quad \tilde{\zeta}_2 = \frac{d}{dv}, \quad \tilde{\zeta}_3 = v\frac{d}{dv},$$

интегрируя которое, найдём базис решений ранга вырождения 1. При этом в выражении (10) интегрирование будет производиться по трём переменным q_1, q_2, j вместо четырёх, как это было бы в общем решении, т.е. один параметр теряется в соответствии с утверждением теоремы.

Пример 2. Пусть $L(\eta)$ – операторная функция от правоинвариантных векторных полей на группе $\mathrm{St}(1,R) \subset \mathrm{Sp}(4,R)$ (см. [5], с. 261). Соответствующее уравнение (8) допускает алгебру симметрии левоинвариантных векторных полей $X_i = \eta_i$ с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_1, e_4] = -e_4, \quad [e_1, e_5] = e_5,$$

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = -e_5, \quad [e_3, e_5] = -e_4, \quad [e_4, e_5] = 2e_6.$$

Например, выбрав в качестве $L(\eta)$ оператор Клейна – Гордона $\gamma^{ab}\eta_a\eta_b - k^2$, $k \in R$, где γ^{ab} – невырожденная симметричная постоянная матрица, получим уравнение, описывающее массивное скалярное поле на (псевдо)римановом многообразии группы St(1, R) с правоинвариантной метрикой $g^{ij}(x) = \gamma^{ab}\eta_a^i(x)\eta_b^j(x)$. Выпишем лево- и правоинвариантные поля в канонических координатах второго рода $g = \exp(x_1e_1)\ldots\exp(x_6e_6)$:

$$\xi_1 = \partial_1 - 2x_2\partial_2 + 2x_3\partial_3 + x_4\partial_4 - x_5\partial_5,$$

$$\xi_2 = -x_3\partial_1 + (1 + 2x_2x_3)\partial_2 - x_3^2\partial_3 + x_4\partial_5 - x_4^2\partial_6, \quad \xi_3 = \partial_3 + x_5\partial_4 - x_5^2\partial_6,$$

$$\xi_4 = \partial_4 - 2x_5\partial_6, \quad \xi_5 = \partial_5, \quad \xi_6 = \partial_6,$$

$$\eta_1 = -\partial_1, \quad \eta_2 = -e^{-2x_1}\partial_2, \quad \eta_3 = e^{2x_1}(x_2\partial_1 - x_2^2\partial_2 - \partial_3),$$

$$\eta_4 = -e^{-x_1}((1 + 2x_2x_3)\partial_4 + x_2\partial_5 - 2x_2x_4\partial_6), \quad \eta_5 = e^{-x_1}(-x_3\partial_4 - \partial_5 + 2x_4\partial_6), \quad \eta_6 = -\partial_6.$$

В данном случае $M = St(1,R)$, $N = \dim M = 6$, $s_M = i_M = 0$, и формула (12) даёт $N' = 2$, т. е. рассматриваемое уравнение неинтегрируемо в некоммутативном смысле. Описание классов K-орбит для данной группы имеет следующий вид:

$$M_0 = \{f \in LG^* \mid F^1(f) \neq 0\},$$

$$M_{1a} = \{f \in LG^* \mid F^{1a}(f) = 0, f_6 \neq 0\},$$

$$M_{1b} = \{f \in LG^* \mid f_4 = f_5 = f_6 = 0,\ f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \neq 0\},$$

$$M_2 = \{f_i = 0\},$$

где $F_1^{1a}(f) = 2f_1f_6 - f_4f_5$; $F_2^{1a}(f) = 4f_2f_6 - f_5^2$; $F_3^{1a}(f) = 4f_3f_6 + f_4^2$.

Из приведённого описания видно, что подпространство $L_{1a}(\mathrm{St}(1, R))$ состоит из функций, инвариантных относительно подгруппы $\exp(x_4e_4)\exp(x_5e_5)\exp(x_6e_6)$, поэтому соответствующие решения уравнения (8) могут быть получены методами группового анализа и с точки зрения рассматриваемого метода представляют второстепенный интерес. Найдём все вырожденные решения типа $1a$. Этот пример интересен тем, что для К-орбит типа $1a$ группы $\mathrm{St}(1, R)$ не существует поляризации, поэтому соответствующее λ-представление

$$l_1 = q\partial_q,\ \ l_2 = \frac{ij}{\hbar}q^2,\ \ l_3 = \frac{i\hbar}{4j}\partial_q^2,\ \ l_4 = \partial_q,\ \ l_5 = \frac{2ij}{\hbar}q,\ \ l_6 = \frac{ij}{\hbar}$$

квадратично по ∂_q. Интегрирование уравнений первого порядка в системе (14) даёт

$$\varphi_j(x,q) = \exp(R)\,\tilde\varphi_j(v,\tilde v),$$

где $$R = \frac{1}{2}\left(x_1 - \ln x_3\right) - \frac{ij}{\hbar}\left(\frac{(x_4-q)^2}{x_3} + 2qx_5 + x_6\right);\ \ v = \frac{e^{x_1}(x_4-q)}{x_3};\ \ \tilde v = \frac{e^{2x_1}(1+x_2x_3)}{x_3}.$$

Оставшееся уравнение второго порядка (16) на функцию $\tilde\varphi_j$ имеет вид уравнения Шрёдингера:

$$\left(i\partial_{\tilde v} + \frac{\hbar}{4j}\partial_v^2\right)\tilde\varphi_j(v,\tilde v) = 0. \tag{18}$$

Подействовав оператором $L(\eta)$ на найденную функцию $\varphi_j(x, q)$, получим редуцированное уравнение

$$H(\tilde\eta)\tilde\varphi_j(v,\tilde v) = 0,\ \ \tilde\eta_i = e^{-R}\eta_i e^{R}, \tag{19}$$

$$\tilde\eta_1 = v\partial_v - 2\tilde v\partial_{\tilde v} - \frac{1}{2},\ \ \tilde\eta_2 = -\partial_{\tilde v},\ \ \tilde\eta_3 = -v\tilde v\partial_v + \tilde v^2\partial_{\tilde v} + \frac{\tilde v}{2} - \frac{ij}{\hbar}v^2,\ \ \tilde\eta_4 = -\tilde v\partial_v + \frac{2ij}{\hbar}v,\ \ \tilde\eta_5 = -\partial_v,\ \ \tilde\eta_6 = \frac{ij}{\hbar}.$$

Производные по $\tilde v$ выражаются из уравнения (17), и, таким образом, уравнение (19) является обыкновенным дифференциальным уравнением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаповалов В.Н. // Диф. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 10. – С. 1864–1874.
2. Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – № 2. – С. 195–213.
3. Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. – 1996. – Т. 106. – С. 13–15.
4. Широков И.В. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений. Препринт. – Омск: ОмГУ, 1998.
5. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978.
6. Федосеев В.Г., Шаповалов А.В., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 1991. – № 9. – С. 43–46.
7. Вараксин О.Л., Фирстов В.В., Шаповалов А.В., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 1995. – № 5. – С. 83–87.
8. Барановский С.П., Широков И.В. // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 4. – С. 737–745.
9. Широков И.В. // ТМФ. – 2001. – Т. 126. – № 3. – С. 393–408.

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, г. Омск, Россия
Поступила в редакцию 18.11.10.
E-mail: iv_shirokov@mail.ru

Гончаровский Михаил Михайлович, аспирант;
Широков Игорь Викторович, д.ф.-м.н., профессор, профессор каф. средств связи и информационной безопасности.