

УДК 530.12:531.551

А.В. ТИМОШКИН

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЁМНОЙ ЭНЕРГИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ КОСМОЛОГИИ ФРИДМАНА – РОБЕРТСОНА – УОКЕРА¹

Рассмотрена пространственно-плоская Вселенная Фридмана, заполненная двумя взаимодействующими идеальными жидкостями (тёмной энергией и тёмной материей). Решены гравитационные уравнения движения с учётом взаимодействия тёмной энергии и тёмной материи. Показано, что при этом возможно появление периодической Вселенной с возникновением космологических сингулярностей, она становится статичной в бесконечно отдалённом будущем.

Ключевые слова: осциллирующая космология, космологические сингулярности, темная энергия, темная материя.

Введение

В настоящей работе исследовалась феноменологическая модель тёмной энергии, взаимодействующей с тёмной материей, специального вида (см. обзор [1]), в которой тёмная энергия имеет нелинейное неоднородное уравнение состояния, а тёмная материя – линейное однородное (для обзора подобных моделей модифицированной гравитации см. ссылку [2]). Представляет интерес изучение природы тёмной энергии, взаимодействующей с тёмной материей, относительно ускорения и космического расширения Вселенной. Среди различных возможных моделей, которые рассматривались в литературе, существует модель, в которой тёмная энергия и тёмная материя описываются идеальной жидкостью с необычным уравнением состояния. Наиболее общая модель идеальной жидкости с неоднородным уравнением состояния была введена в работах [3–5] (см. также примеры в [6]). Идеальная жидкость с зависящим от времени нелинейным неоднородным уравнением состояния изучалась в работах [7, 8]. Некоторые примеры уравнений подобного типа найдены в работах [9,10]. Известно, что зависимость от времени параметров в уравнении состояния идеальной жидкости может привести к переходу от нефантомной эры к фантомной эре в эволюции Вселенной [11, 12]. Также описаны случаи, в которых параметры w и Λ стационарны или линейно зависят от времени. При соответствующем выборе взаимодействия между тёмной энергией и тёмной материей получены выражения для масштабного фактора и его первой и второй производных. Найдены значения параметров, при которых Вселенная расширяется с ускорением (квинтэссенция) и расширяется с замедлением. Показано, что взаимодействие между тёмной энергией и тёмной материей может привести к периодическому появлению космологических сингулярностей [1,13]. Заметим, что зависимость от времени уравнения состояния может служить классическим аналогом струнного ландшафта [14] или модифицированной гравитации [15].

1. Влияние взаимодействия между тёмной энергией и тёмной материей на эволюцию Вселенной

Рассмотрим Вселенную, заполненную двумя взаимодействующими идеальными жидкостями: тёмной энергией и тёмной материей. В плоской метрике Фридмана – Робертсона – Уокера для масштабного фактора $a(t)$ уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{cases} \dot{\rho} + 3H(p + \rho) = -Q, \\ \dot{\rho}_m + 3H(p_m + \rho_m) = Q, \\ \dot{H} = -\frac{k^2}{2}(p + \rho + p_m + \rho_m), \end{cases} \quad (1)$$

¹ Работа поддержана грантом научной школы LRSS № 4489.2006.02.

где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ – постоянная Хаббла; $k^2 = 8\pi G$ с гравитационной постоянной Ньютона G ; p, ρ и p_m, ρ_m – давление и плотность соответственно тёмной энергии и тёмной материи; Q – взаимодействие между тёмной энергией и тёмной материей. Здесь точка обозначает производную по времени t . Уравнение Фридмана для параметра Хаббла имеет вид [1]

$$H^2 = \frac{k^2}{3}(\rho + \rho_m). \quad (2)$$

Сначала исследуем стационарный случай, когда параметры w_1, w_2 в уравнениях состояния тёмной энергии и тёмной материи и параметр Λ не зависят от времени:

$$\begin{aligned} p_m &= w_1 \cdot \rho_m, \\ p &= w_2 \cdot \rho + \Lambda + a_1 \cdot H, \end{aligned} \quad (3)$$

где a_1 – некоторая постоянная.

С учётом уравнений (1) – (3) получим гравитационное уравнение движения для системы «энергия – материя»:

$$\dot{\bar{\rho}} + \sqrt{3}k\sqrt{\bar{\rho}}[(1+w)\bar{\rho} + \Lambda + a_1 H^2] = 0, \quad (4)$$

где $\bar{\rho} = \rho + \rho_m$; $w_1 = w_2 = w$. Решение уравнения (4) имеет вид

$$\bar{\rho} = \frac{3\Lambda}{\Phi} \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right), \quad (5)$$

где $\Phi = 3(1+w) + a_1 \cdot k^2$; C_1 – произвольная постоянная.

Тогда получим гравитационное уравнение для тёмной материи:

$$\dot{\rho}_m + \sqrt{3}k(1+w)\sqrt{\frac{3\Lambda}{\Phi}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right)\rho_m = Q. \quad (6)$$

Выберем взаимодействие между тёмной энергией и тёмной материей в следующем виде:

$$Q = \sin\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right). \quad (7)$$

В этом случае плотность энергии тёмной материи запишется как

$$\rho_m = C_2 \left[\cos\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right) \right]^{\frac{6(1+w)}{\Phi}} + \sqrt{\frac{\Phi}{\Lambda}} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right)}{3k(1+w) \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_1 k^2}{3(1+w)} \right) \right]}, \quad (8)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Параметр Хаббла примет вид

$$H(t) = k\sqrt{\frac{\Lambda}{\Phi}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right). \quad (9)$$

Получили периодическую Вселенную, космологические сингулярности Big.Rip возникают, если

$$t = t_s = \frac{\pi(1+2n) - C_1}{k\sqrt{\Lambda\Phi}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Производная $H(t)$ равна

$$\dot{H}(t) = \frac{k^2 \Lambda}{2 \cos^2\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi}t + C_1\right)}. \quad (10)$$

Таким образом, Вселенная расширяется. Масштабный фактор даётся выражением

$$a(t) = \exp\left[\int H(t) dt\right] = \frac{C_2}{\left[\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda\Phi} t + C_1\right)\right]^{\frac{1}{\Phi}}}. \quad (11)$$

Первая и вторая производные масштабного фактора соответственно равны

$$\dot{a}(t) = \frac{C_2 \cdot \sin\left(k\sqrt{\Lambda\Phi} t + C_1\right)}{\left[\cos^2\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi} t + C_1\right)\right]^{\frac{\Phi^2 - \Phi + 2}{\Phi^2}}}; \quad (12)$$

$$\ddot{a}(t) = k\sqrt{\Lambda\Phi} \cdot \dot{a}(t) \left[\operatorname{ctg}\left(k\sqrt{\Lambda\Phi} t + C_1\right) + \frac{\Phi^2 - \Phi + 2}{\Phi^2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}k\sqrt{\Lambda\Phi} t + C_1\right) \right]. \quad (13)$$

Если $0 < t < \frac{\pi}{2k\sqrt{\Lambda\Phi}}$, обе производные положительны, Вселенная расширяется с ускорением

(квинтэссенция), и если $\frac{\pi}{2k\sqrt{\Lambda\Phi}} < t < \frac{\pi}{k\sqrt{\Lambda\Phi}}$, первая производная масштабного фактора положительна, а вторая производная отрицательна, Вселенная расширяется с замедлением.

Предположим, что параметры w_1, w_2, Λ линейно зависят от времени:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= w_2(t) = ct + b, \\ \Lambda(t) &= dt + e, \end{aligned} \quad (14)$$

где c, b, d, e – некоторые постоянные. Такое поведение может быть следствием модификации гравитации (см. обзор [2]).

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\dot{\bar{\rho}} + \sqrt{3}k(ct + \theta)\bar{\rho}^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}k(dt + e)\bar{\rho}^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (15)$$

где $\theta = b + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1k^2 + 1$. Рассмотрим случай, когда $ce = d\theta$.

Решение уравнения (15) будет таким:

$$\bar{\rho} = \frac{e}{\theta} \operatorname{tg}^2 \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right], \quad (16)$$

где $\delta = \frac{\sqrt{3cd}}{4}$; C_1 – произвольная постоянная.

Запишем гравитационное уравнение для тёмной материи:

$$\dot{\rho}_m + \sqrt{3}k(ct + b + 1) \sqrt{\frac{e}{\theta}} \operatorname{tg} \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right] \rho_m = Q. \quad (17)$$

Если выбрать член взаимодействия тёмной энергии и тёмной материей в виде

$$Q = 2\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \sin \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right], \quad (18)$$

то получим решение уравнения (18):

$$\rho_m = C_2 \cos^2 \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right] - \cos \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right]. \quad (19)$$

Постоянная Хаббла равна

$$H(t) = \frac{k}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{e}{\theta}} \operatorname{tg} \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right]. \quad (20)$$

Возникает периодическая Вселенная с конечными по времени сингулярностями при $t = t_s = \pm \sqrt{\frac{\pi(1+2n) - C_1}{2\delta}} - \frac{\theta}{c}$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае плотность энергии и параметр Хаббла одновременно приближаются к бесконечности. Производная по времени $H(t)$ равна

$$\dot{H}(t) = \frac{k^2}{2} \sqrt{d} \frac{t + \frac{\theta}{c}}{\cos^2 \left(\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right)}. \quad (21)$$

Если $t > -\frac{\theta}{c}$, то производная положительна и Вселенная расширяется.

Масштабный фактор даётся выражением

$$a(t) = \exp \left[\int H(t) dt \right] = a_0 \cdot \exp \left[\frac{\mu \left(S \left[\sqrt{\delta} \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \right] + C_1 \right) - \frac{1}{2}}{\cos^2 \left(\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right)} \right], \quad (22)$$

где $\mu = \sqrt{\frac{2}{3} \pi \frac{ek}{\theta \sqrt{3cd}}}$; $S \left[\sqrt{\delta} \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \right]$ – интеграл Френеля; a_0 – некоторая постоянная.

Если $t \rightarrow +\infty$, то $S \left[\sqrt{\delta} \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{2}$ и $a(t) \rightarrow a_0$. Масштабный фактор приближается к постоянной, и получаем пространство Минковского. Расширение останавливается, и Вселенная становится статичной.

Первая и вторая производные масштабного фактора соответственно равны

$$\dot{a}(t) = a(t) \mu \operatorname{tg} \left[\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 \right] \left\{ 1 + 2\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \frac{\left(S \left[\sqrt{\delta} \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \right] - \frac{1}{2} \right)}{\cos \left(\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 + C_1 \right)} \right\}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}(t) = \dot{a}(t) \left[H(t) + \frac{4\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)}{\sin 2\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2} \right] + 2\mu \delta a(t) \operatorname{tg} \delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{1 + 2\delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 \operatorname{tg} \delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2}{\cos \delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2} \left(S \left[\sqrt{\delta} \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \right] - \frac{1}{2} \right) + \left(t + \frac{\theta}{c} \right) \operatorname{tg} \delta \left(t + \frac{\theta}{c} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Если $-\frac{\theta}{c} < t < \sqrt{\frac{\pi}{2\delta}} - \frac{\theta}{c}$, то обе производные положительны, Вселенная расширяется с ускорением (квинтэссенция). Таким образом, мы построили осциллирующую Вселенную, которая может появиться после фазы доминирующей материи [16] перед ускорением.

Заключение

Изучена модель, в которой учтено влияние взаимодействия тёмной энергии с тёмной материей специального вида на эволюцию Вселенной. Рассмотрены стационарный и нестационарный случаи для параметров в уравнениях состояния тёмной энергии и тёмной материи. В отличие от модели с чистой тёмной энергией присутствие члена взаимодействия между тёмной энергией и тёмной материей в специальной форме в гравитационном уравнении движения приводит к периодическому появлению Big.Rip-сингулярностей. В нестационарном случае возможен переход Вселенной к пространству Минковского, она становится статичной в бесконечно отдалённом будущем.

Автор выражает благодарность профессору С.Д. Одинцову за обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nojiri S., Odintsov S.D., and Tsujikava S. // Phys. Rev. – 2005. – V. D71. – P. 063004, [hep-th/0501025].
2. Nojiri S. and Odintsov S.D. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2007. – V. 4. – P. 115–146; Phys. Rev. – 2003. – V. D68. – P. 123512, [hep-th/0307288].
3. Nojiri S. and Odintsov S.D. // Phys. Rev. – 2005. – V. D72. – P. 023003, [hep-th/0505215]; Phys. Lett. – 2006. – V. B639. – P. 144–150.
4. Brevik I., Nojiri S., Odintsov S.D., and Vanzo L. // Phys. Rev. – 2004. – V. D70. – P. 043520, [hep-th/0401073].
5. Capozziello S., Cardone V., Elizalde E., et al. // Phys. Rev. – 2006. – V. D73. – P. 043512, [astro-ph/0508350].
6. Brevik I. and Gorbunova O.G. // Gen. Rel. Grav. – 2005. – V. 37. – P. 2039–2045.
7. Nojiri S. and Odintsov S.D. // Phys. Lett. – 2006. – V. B637. – P. 139–148.
8. Brevik I., Gorbunova O.G., and Timoshkin A.V. // Eur. Phys. J. – 2007. – V. C51. – P. 179–183.
9. Горбунова О.Г. // Изв. вузов. Физика. – 2006. – № 5. – С. 91–92.
10. Ren J. and Meng X.H. // Int. J. Mod. Phys. – 2007. – V. D16. – P. 1341–1348; Phys. Lett. – 2006. – V. B636. – P. 5–12; Hu M. and Meng X.H. // Phys. Lett. – 2006. – V. B635. – P. 186–194; Cardone V., Tortora C., Troisi A., and Capozziello S. // Phys. Rev. – 2006. – V. D73. – P. 043508, arXiv: 0511528 [astro-ph].
11. McInnes B. // JHEP. – 2002. – V. 0208. – P. 029, [hep-th/0112066].
12. Nojiri S. and Odintsov S.D. // Phys. Lett. – 2003. – V. B562. – P. 147–152.
13. Bamba K., Nojiri S., and Odintsov S.D. // JCAP. – 2008. – V. 0810. – P. 045, arXiv: 0807.2575 [hep-th].
14. Nojiri S. and Odintsov S.D. // Phys. Lett. – 2007. – V. B649. – P. 440–444.
15. Corda C. // CRG. – 2008. – V. 40. – P. 2201, arXiv: 0802.2523 [astro-ph].
16. Nojiri S., Odintsov S.D., and Stefancic H. // Phys. Rev. – 2006. – V. D74. – P. 086009, [hep-th/0608168]; Elizalde E., Nojiri S., and Odintsov S.D. // Phys. Rev. – 2004. – V. D70. – P. 043539, [hep-th/0405034].

Томский государственный педагогический университет, г. Томск, Россия
E-mail: timoshkinAV@tspu.edu.ru

Поступила в редакцию 04.02.10.