

УДК 539.12

В.Ф. ПАНОВ, О.В. САНДАКОВА

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПА IX ПО БЬЯНКИ

Построены две космологические модели для метрики типа IX по Бьянки с источниками гравитации: 1) сопутствующая анизотропная жидкость, несопутствующая пыль и скалярное поле; 2) анизотропная жидкость, чистое излучение и скалярное поле. Найдены кинематические параметры моделей.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, космологическая модель.

В последнее время усилился интерес к исследованию крупномасштабной анизотропии Вселенной и ее возможному вращению (работы [1, 2] и др.).

Рассмотрим метрику типа IX по Бьянки в виде

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{0,3}, \quad (1)$$

где $\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; θ^α – ортонормированные 1-формы, выражающиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt - R v_A e^A, & \theta^1 &= R K_1 e^1, & \theta^2 &= R K_2 e^2, & \theta^3 &= R K_3 e^3, \\ R &= R(t), \text{ а } K_A, v_A = \text{const, причём } K_A > 0 \text{ при } A = 1, 2, 3; \\ e^1 &= \cos y \cos z dx - \sin z dy, \\ e^2 &= \cos y \sin z dx + \cos z dy, \\ e^3 &= -\sin y dx + dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Используется система единиц, в которой $c = 1$, $\hbar = 1$, $8\pi G = 1$, где G – ньютоновская гравитационная постоянная. В нашем случае ненулевыми компонентами являются K_1, K_2, K_3, v_1 , связанные между собой соотношением $K_1^2 = K_2^2 + v_1^2$, $K_2 = K_3$.

1. В первой модели источниками гравитации являются сопутствующая анизотропная жидкость, несопутствующая пыль, а также скалярное поле.

Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = (\pi + \rho) u_\alpha u_\beta + (\sigma - \pi) \chi_\alpha \chi_\beta - \pi \eta_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

а тензор энергии-импульса несопутствующей пыли

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = \varepsilon \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta. \quad (4)$$

При этом $u_i = (1, 0, 0, 0)$; $\tilde{u}_i = (\sqrt{u_1^2 + 1}, u_1, 0, 0)$; $\chi_i = (0, 1, 0, 0)$.

Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(3)} = \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - \left\{ \frac{1}{2} \varphi_{,k} \varphi_{,l} g^{kl} - U(\varphi) \right\} g_{\alpha\beta}. \quad (5)$$

При этом скалярное поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \left(\sqrt{-g} g^{ik} \varphi_{,k} \right) + \frac{dU}{d\varphi} = 0. \quad (6)$$

Потенциал скалярного поля, следуя работе [3], выбран в виде

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= -\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4, \\ \varphi(t) &= \phi_0 e^{-Ht}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение для скалярного поля (5) в данном случае примет вид

$$3 \frac{R'}{R} \phi' + \phi'' + \frac{K_1^2}{K_2^2} \frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (8)$$

Решая уравнение (7), получим

$$R(t) = R_0 e^{At - Be^{-2Ht}}, \quad (9)$$

где $A = \frac{H}{3} - \frac{m^2 K_1^2}{3HK_2^2}$; $B = \frac{\lambda K_1^2 \phi_0^2}{6H^2 K_2^2}$. Полагаем, что $A > 0$, то есть $H^2 > \frac{m^2 K_1^2}{K_2^2}$.

Уравнения Эйнштейна в тетрадной форме имеют вид

$$G_{00} \equiv - \left(2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \frac{v_1^2}{K_1^2} + 3 \frac{R'^2}{R^2} + \frac{2K_1^2 + K_2^2}{4R^2 K_2^4} = \rho + \varepsilon(u_1^2 + 1) + \frac{\phi'^2}{2} \left(1 + \frac{v_1^2}{K_1^2} \right) + U(\phi); \quad (10)$$

$$G_{11} \equiv - \left(2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) + 3 \frac{R'^2}{R^2} \frac{v_1^2}{K_1^2} + \frac{-K_2^2 + 2v_1^2}{4R^2 K_2^4} = \sigma + \varepsilon u_1^2 + \frac{\phi'^2}{2} \left(1 + \frac{v_1^2}{K_1^2} \right) - U(\phi); \quad (11)$$

$$G_{22} \equiv G_{33} \equiv - \left(2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \frac{K_2^2}{K_1^2} - \frac{1}{4R^2 K_2^2} = \pi + \frac{\phi'^2}{2} \frac{K_2^2}{K_1^2} - U(\phi); \quad (12)$$

$$G_{01} \equiv 2 \left(- \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \frac{v_1}{K_1} + \frac{K_1 v_1}{2R^2 (K_2 K_3)^2} = \varepsilon u_1 \sqrt{1 + u_1^2} + \phi'^2 \frac{v_1}{K_1}. \quad (13)$$

При решении уравнений Эйнштейна предполагаем, что $\sigma = -\rho$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(\frac{4}{3} \lambda \phi_0^2 - H^2 \phi_0^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} \right) e^{-2Ht} + \frac{1}{2K_2^2 R^2}, \\ \pi &= \frac{K_2^2}{3K_1^2} \left(H - \frac{m^2 K_1^2}{HK_2^2} \right)^2 + e^{-2Ht} \phi_0^2 \left(\frac{H^2 K_2^2}{2K_1^2} - \frac{2\lambda}{3H} \left(H + \frac{m^2 K_1^2}{HK_2^2} \right) + \frac{m^2}{2} \right) + \\ &\quad + e^{-4Ht} \lambda \phi_0^4 \left(\frac{\lambda K_1^2}{3H^2 K_2^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4K_2^2 R^2}, \\ \rho = -\sigma &= - \frac{K_2^2}{3K_1^2} \left(H - \frac{m^2 K_1^2}{HK_2^2} \right)^2 - e^{-2Ht} \phi_0^2 \left(\frac{H^2 K_2^2}{2K_1^2} - \frac{2\lambda}{3H} \left(H + \frac{m^2 K_1^2}{HK_2^2} \right) + \frac{m^2}{2} \right) - \\ &\quad - e^{-4Ht} \lambda \phi_0^4 \left(\frac{\lambda K_1^2}{3H^2 K_2^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4K_2^2 R^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

2. Рассмотрим теперь в качестве источников гравитации анизотропную жидкость, поле излучения, а также скалярное поле.

Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости имеет вид (3).

Тензор энергии-импульса чистого излучения

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = w k_\alpha k_\beta. \quad (15)$$

Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид (5). Потенциал скалярного поля удовлетворяет уравнению (6).

В данной работе рассмотрены три вида потенциала скалярного поля:

$$U(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \phi^4; \quad (16)$$

$$U(\phi) = - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \phi^4; \quad (17)$$

$$U(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (18)$$

Для данной метрики уравнение для скалярного поля имеет вид (8).

Уравнения Эйнштейна в тетрадной форме имеет вид

$$\begin{aligned} G_{00} &= -\left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right) \frac{v_1^2}{K_1^2} + 3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2K_1^2 + K_2^2}{4K_2^4 R^2} = p + U + K_0^2 \omega + \frac{\varphi'^2}{2} \left(1 + \frac{v_1^2}{K_1^2}\right), \\ G_{11} &\equiv -\left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right) + 3\frac{R'^2}{R^2} \frac{v_1^2}{K_1^2} + \frac{2K_1^2 - 3K_2^2}{4K_2^4 R^2} = \sigma - U + K_0^2 \omega + \frac{\varphi'^2}{2} \left(1 + \frac{v_1^2}{K_1^2}\right), \\ G_{22} &= G_{33} \equiv \left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right) \left(\frac{v_1^2}{K_1^2} - 1\right) - \frac{1}{4K_2^2 R^2} = \pi - U + \frac{\varphi'^2}{2} \left(1 - \frac{v_1^2}{K_1^2}\right), \\ G_{01} &\equiv 2\left(-\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right) \frac{v_1}{K_1} + \frac{v_1 K_1}{2K_2^4 R^2} = K_0^2 \omega + \frac{v_1 \varphi'^2}{K_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Во всех трех случаях $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-Ht}$.

Решение в случае потенциала вида $U(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$ следующее:

$$\begin{aligned} R &= R_0 e^{Qt}; \quad Q = \frac{1}{3} H + \frac{K_1^2 m^2}{K_2^2 3H}, \\ wk_0^2 &= \frac{K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2Qt} K_2^4} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{e^{2Ht}} \frac{v_1}{K_1}, \\ \pi &= -3Q^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} - \frac{1}{4R_0^4 e^{2Qt} K_2^2} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{2e^{2Ht}} \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{m^2 \varphi_0^2}{2e^{2Ht}}, \\ \sigma &= -3Q^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{-K_2^2 + 2v_1^2 - 2K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2Qt} K_2^4} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{2e^{2Ht}} \frac{(K_1 - v_1)^2}{K_1^2} + \frac{m^2 \varphi_0^2}{2e^{2Ht}}, \\ \rho &= 3Q^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{2K_1^2 + K_2^2 - 2K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2Qt} K_2^4} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{2e^{2Ht}} \frac{(K_1 - v_1)^2}{K_1^2} - \frac{m^2 \varphi_0^2}{2e^{2Ht}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение в случае стандартного потенциала $U(\varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \varphi^4$:

$$\begin{aligned} R &= R_0 e^{\alpha(t)}, \\ \alpha(t) &= Qt - \frac{K_1^2 \lambda \varphi_0^2}{6H^2 K_2^2 e^{2Ht}}, \\ wk_0^2 &= \frac{4K_1 v_1 \lambda \varphi_0^2}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{K_1 v_1}{2R_0^2 e^{2\alpha(t)}} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{e^{2Ht}} \frac{v_1}{K_1}, \\ \pi &= -3\left(Q + \frac{K_1^2 \lambda \varphi_0^2}{3HK_2^2 e^{2Ht}}\right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4\lambda \varphi_0^2}{3e^{2Ht}} - \frac{1}{4R_0^2 e^{2\alpha(t)} K_2^2} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{2e^{2Ht}} \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{m^2 \varphi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda \varphi_0^4}{4e^{4Ht}}, \\ \sigma &= -3\left(Q + \frac{K_1^2 \lambda \varphi_0^2}{3HK_2^2 e^{2Ht}}\right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4K_1 \lambda \varphi_0^2 (K_1 - v_1)}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{-K_2^2 + 2v_1^2 - 2K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2\alpha(t)} K_2^4} + \\ &\quad + \frac{m^2 \varphi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda \varphi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{2e^{2Ht}} \frac{(K_1 - v_1)^2}{K_1^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\rho = 3 \left(Q + \frac{K_1^2 \lambda \phi_0^2}{3HK_2^2 e^{2Ht}} \right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} - \frac{4v_1 \lambda \phi_0^2 (K_1 - v_1)}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{2K_1^2 + K_2^2 - 2K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2\alpha(t)} K_2^4} - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Ht}} - \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\phi_0^2 H^2 (K_1 - v_1)^2}{2e^{2Ht} K_1^2}.$$

Решение в случае потенциала Хиггса $U(\phi) = -\frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \phi^4$:

$$\tilde{Q} = \frac{1}{3} H - \frac{K_1^2 m^2}{K_2^2 3H},$$

$$R = R_0 e^{\alpha(t)},$$

$$\alpha(t) = \tilde{Q}t - \frac{K_1^2 \lambda \phi_0^2}{6H^2 K_2^2 e^{2Ht}},$$

$$wk_0^2 = \frac{4K_1 v_1 \lambda \phi_0^2}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{K_1 v_1}{2R_0^2 e^{2\alpha(t)}} - \frac{\phi_0^2 H^2 v_1}{e^{2Ht} K_1}, \quad (22)$$

$$\pi = -3 \left(\tilde{Q} + \frac{K_1^2 \lambda \phi_0^2}{3HK_2^2 e^{2Ht}} \right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4\lambda \phi_0^2}{3e^{2Ht}} - \frac{1}{4R_0^2 e^{2\alpha(t)} K_2^2} - \frac{\phi_0^2 H^2 K_2^2}{2e^{2Ht} K_1^2} - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Ht}},$$

$$\sigma = -3 \left(Q + \frac{K_1^2 \lambda \phi_0^2}{3HK_2^2 e^{2Ht}} \right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4K_1 \lambda \phi_0^2 (K_1 - v_1)}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{-K_2^2 + 2v_1^2 - 2K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2\alpha(t)} K_2^4} - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\phi_0^2 H^2 (K_1 - v_1)^2}{2e^{2Ht} K_1^2},$$

$$\rho = 3 \left(Q + \frac{K_1^2 \lambda \phi_0^2}{3HK_2^2 e^{2Ht}} \right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} - \frac{4v_1 \lambda \phi_0^2 (K_1 - v_1)}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{2K_1^2 + K_2^2 - 2K_1 v_1}{4R_0^2 e^{2\alpha(t)} K_2^4} - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Ht}} - \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\phi_0^2 H^2 (K_1 - v_1)^2}{2e^{2Ht} K_1^2}.$$

Найдём кинематические параметры сопутствующей жидкости. Параметр расширения определяется формулой $\theta = 3 \frac{R'}{R}$, 4-ускорение равно $a = \frac{R'v_1}{RK_1}$, параметр вращения $\omega = \frac{v_1}{2R K_2^4}$, сдвиг в модели отсутствует.

Модели могут использоваться для описания инфляционной стадии Вселенной с вращением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuvshinova E.V., Panov V.F., Sandakova O.V. // Российская летняя школа-семинар «Современные проблемы гравитации и космологии» GRACOS-2007. Казань – Яльчик, 9–16 сентября 2007 г. Труды семинара. – Казань: Изд-во «Фолиант», 2007. – С. 100–104.
2. Червон С.В. Нелинейные поля в теории гравитации и космологии. – Ульяновск: УлГУ, 1997.
3. Сайбаталов Р.Х., Фильченков М.Л. // Российская летняя школа-семинар «Современные проблемы гравитации и космологии» GRACOS-2007. Казань – Яльчик, 9–16 сентября 2007 г. Труды семинара. – Казань: Изд-во «Фолиант», 2007. – С. 152–155.
4. Панов В.Ф., Сандакова О.В. // 13-я Российская конф. – Междунар. конф. по гравитации, космологии и астрофизике RUSGRAV-13. Москва, 23–28 июня 2008 г.: тез. докл. – М., 2008. – С. 121–122.

Пермский государственный университет, г. Пермь, Россия
E-mail: panov@psu.ru

Поступила в редакцию 01.07.10.

Панов Вячеслав Федорович, д.ф.-м.н., профессор;
Сандакова Ольга Васильевна, к.ф.-м.н., ст. преподаватель.