

УДК 539.12

В.Н. ПАВЕЛКИН, О.В. САНДАКОВА

СТАЦИОНАРНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТИПА II ПО БЬЯНКИ

Найдены стационарные космологические решения для метрики типа II по Бьянки, где в качестве источников гравитации моделей использованы скалярное поле с усредненным по вакууму тензором энергии-импульса, космологическая постоянная, а также сопутствующая или несопутствующая идеальная жидкость.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, космологическая модель, спонтанное нарушение симметрии вакуума.

В работе [1] рассмотрено несколько примеров спонтанного нарушения симметрии скалярного поля с самодействием во внешних полях. К спонтанному нарушению симметрии приводит, в частности, взаимодействие с сильным статическим либо высокочастотным переменным электрическими полями. Показано, что гравитационное поле, описываемое метрикой однородного изотропного пространства открытого типа, также служит инициатором спонтанного нарушения симметрии в первоначально симметричной системе [1]. Этот эффект представляет интерес, во-первых, потому, что дает механизм возникновения ненулевых масс элементарных частиц, обусловленных кривизной пространства-времени, т.е. в конечном счете наличием материи во Вселенной. Во-вторых, эффект спонтанного нарушения симметрии в искривленном пространстве-времени позволяет связать единые калибровочные теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий с возможным изменением геометрии на малых расстояниях. В большинстве из этих теорий спонтанное нарушение симметрии вводится искусственно путем приписывания отрицательного квадрата голой массы хиггсовской частице.

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в космологии, в том числе в космологических моделях с вращением, исследовалось в работах [1, 2]. Эффект спонтанного нарушения калибровочной симметрии в космологических моделях с расширением и вращением с метрикой типа II по Бьянки рассматривался авторами в [3].

В настоящей работе исследован эффект спонтанного нарушения калибровочной симметрии для метрики типа II по Бьянки:

$$ds^2 = dt^2 + 2\mu R(t)[zdxdt - dydt] - R^2(t)[(\lambda z^2 + 1)dx^2 - 2\lambda zdx dy + \lambda dy^2 + dz^2]. \quad (1)$$

Кинематические параметры модели: вращение $\omega = \frac{\mu}{2R(t)}$, ускорение $a = \frac{\dot{R}(t)\mu}{R(t)\sqrt{\lambda + \mu^2}}$, расширение $\theta = \frac{3\dot{R}(t)}{R(t)}$, сдвиг $\sigma = 0$.

Рассмотрим самодействующее комплексное скалярное поле $\varphi(t)$ в искривленном пространстве с метрикой (1), удовлетворяющее уравнению

$$g^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi + M^2\varphi - \frac{1}{6}\tilde{R}\varphi + \frac{\Lambda}{3}\varphi^*\varphi^2 = 0, \quad (\Lambda > 0), \quad (2)$$

которое получается из плотности лагранжиана

$$L = \sqrt{-g}[g^{ik}\partial_i\varphi^*\partial_k\varphi - M^2\varphi^*\varphi + \frac{\tilde{R}}{6}\varphi^*\varphi - \frac{\Lambda}{6}(\varphi^*\varphi)^2], \quad (3)$$

инвариантной относительно калибровочных преобразований вида $\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\alpha)$, $\varphi^* \rightarrow \varphi^* \exp(-i\alpha)$.

Обозначим $|0\rangle$ гейзенберговское вакуумное состояние, определенное при $t = t_{\text{pl}}$. Из пространственной однородности (1) вытекает, что если вакуумное среднее φ отлично от нуля, то оно может зависеть только от t :

$$\langle 0|\varphi(t, x, y, z)|0\rangle = \langle 0|\varphi(t)|0\rangle = q(t). \quad (4)$$

Вследствие C -инвариантности состояния $|0\rangle$ величина q – вещественна. Отличие q от нуля означает спонтанное нарушение калибровочной симметрии. При этом в ходе усреднения (2) по состоянию $|0\rangle$ предполагается в древесном приближении

$$\langle 0|\phi^*\phi^2|0\rangle \approx \langle 0|\phi^*|0\rangle \langle 0|\phi|0\rangle^2 = q^3. \quad (5)$$

Для метрики (1)

$$g = -R^6(\lambda + \mu^2), \quad \lambda + \mu^2 > 0;$$

$$\tilde{R} = -\frac{\lambda(12\ddot{R}R + 12\dot{R}^2 - \lambda - \mu^2)}{2R^2(\lambda + \mu^2)}, \quad (R \equiv R(t)), \quad R_0^0 = -\frac{3\ddot{R}\lambda}{R(\lambda + \mu^2)}.$$

Исследуем эффект спонтанного нарушения симметрии скалярного поля ϕ в пространстве-времени с метрикой (1), когда $R(t) = \text{const}$. В этом случае усредненное уравнение (2) для метрики (1) примет вид

$$\ddot{q} - \alpha q + \beta q^3 = 0, \quad (6)$$

где

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}, \quad \alpha = \left[\frac{(\lambda + \mu^2)(\lambda - 12M^2R^2)}{12R^2\lambda} \right],$$

$$\beta = \frac{(\lambda + \mu^2)\Lambda}{3\lambda}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

При этом можно считать $q = \text{const}$, ввиду того, что $R(t) = \text{const}$. Тогда уравнение (6) имеет два ненулевых решения

$$q_{2,3} = \pm \left(\frac{\lambda - 12M^2R^2}{4R^2\Lambda} \right)^{1/2} \quad \text{при } \lambda - 12M^2R^2 > 0 \quad \text{и} \quad q_1 = 0. \quad (7)$$

Предпочтительность выбора решений $q_{2,3} \neq 0$ из соображений минимума энергии дает возможность выявить спонтанное нарушение калибровочной симметрии. В этом случае несимметричное вакуумное состояние $|0\rangle$ энергетически более выгодно, чем симметричный вакуум. Используем метрический тензор энергии-импульса для скалярного поля ϕ :

$$T_\mu^\nu = \nabla_\mu \phi^* \nabla^\nu \phi + \nabla^\nu \phi^* \nabla_\mu \phi - \delta_\mu^\nu \left[\nabla^\alpha \phi^* \nabla_\alpha \phi - M^2 \phi^* \phi \right] -$$

$$- \frac{1}{3} \left[-R_\mu^\nu + \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu \tilde{R} + \nabla^\nu \nabla_\mu - \delta_\mu^\nu \right] \phi^* \phi + \frac{\Lambda}{6} \delta_\mu^\nu (\phi^* \phi)^2, \quad (8)$$

где R_μ^ν – тензор Риччи; δ_μ^ν – единичный тензор.

Вакуумная плотность энергии для данной модели равна

$$E = \langle 0|T_0^0|0\rangle = \left(M^2 + \frac{1}{3}R_0^0 - \frac{1}{6}\tilde{R} \right) q^2 + \frac{\Lambda}{6} q^4. \quad (9)$$

Подставляем решения уравнения (6) в (9), находим

$$E(q_1) = 0,$$

$$E(q_{2,3}) = -\frac{(\lambda - 12M^2R^2)^2}{96R^4\Lambda} < 0. \quad (10)$$

Так как рассматривается космологическая модель, где R и M – постоянные, то за счет варьирования параметров источников гравитационного поля можно менять λ, μ , тогда эффект спонтанного нарушения симметрии будет при любых $\lambda \neq 12M^2R^2$, и он не зависит от скорости вращения модели, определяемой вращением идеальной жидкости $\omega = \frac{\mu}{2R}$.

Таким образом, энергетически более выгодным будет несимметричное вакуумное состояние $|0\rangle$ ($q \neq 0$), что означает спонтанное нарушение симметрии вакуума.

Переходим к составлению системы уравнений Эйнштейна в виде $G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(1)} + T_{\alpha\beta}^{(2)}$, где $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$.

В работе используется усредненный по вакууму метрический тензор энергии-импульса скалярного поля (8) в качестве одного из источников гравитации.

Ненулевые компоненты усредненного по вакууму метрического тензора энергии-импульса скалярного поля:

$$\begin{aligned} T_{00}^{(1)} &= \frac{\varphi^2(-\lambda + 2\mu^2 + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))}{12R^2}, \\ T_{01}^{(1)} &= \frac{\mu z \varphi^2(-3\lambda + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))}{12R}, \\ T_{02}^{(1)} &= -\frac{\mu \varphi^2(-3\lambda + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))}{12R}, \\ T_{11}^{(1)} &= \frac{1}{12}\varphi^2(2\lambda(-1 + \lambda z^2) + (1 + \lambda z^2)(\lambda - 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))), \\ T_{12}^{(1)} &= \frac{1}{12}\varphi^2(3\lambda - 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2)), \\ T_{22}^{(1)} &= -\frac{z}{12}\varphi^2(3\lambda - 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2)), \\ T_{33}^{(1)} &= -\frac{1}{12}\varphi^2(\lambda + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2)). \end{aligned} \quad (11)$$

В качестве добавочного источника гравитации рассматривается сопутствующая идеальная жидкость с тензором энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = (\rho + p)\delta_{\alpha}^0\delta_{\beta}^0 - g_{\alpha\beta}p. \quad (12)$$

Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса идеальной жидкости имеют вид

$$\begin{aligned} T_{00}^{(2)} &= \rho, \\ T_{01}^{(2)} &= -\mu R z p, \\ T_{02}^{(2)} &= \mu R p, \\ T_{11}^{(2)} &= p R^2(1 + \lambda z^2), \\ T_{12}^{(2)} &= L p R^2, \\ T_{22}^{(2)} &= -L z p R^2, \\ T_{33}^{(2)} &= p R^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda - 2\mu^2}{4R^2} &= \rho + \frac{\varphi^2(-\lambda + 2\mu^2 + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))}{12R^2}, \\ -\frac{3\lambda\mu z}{4R} &= -\mu R z p + \frac{\mu z \varphi^2(-3\lambda + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))}{12R}, \\ \frac{1}{4}\lambda(-1 + 3\lambda z^2) &= p R^2(1 + \lambda z^2) + \frac{1}{12}\varphi^2(2\lambda(-1 + \lambda z^2) + \\ &\quad + (1 + \lambda z^2)(\lambda - 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3\lambda^2}{4} &= LpR^2 + \frac{1}{12}\varphi^2(3\lambda - 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2)), \\ -\frac{\lambda}{4} &= pR^2 - \frac{1}{12}\varphi^2(\lambda + 2R^2(6M^2 + \Lambda\varphi^2)).\end{aligned}\tag{14}$$

Решение уравнений Эйнштейна следующее:

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= 3, p = \frac{3}{2}(2M^2 + \Lambda), \\ \rho + p &= 0.\end{aligned}\tag{15}$$

С учетом эффекта спонтанного нарушения симметрии (7) получим

$$\lambda = 12R^2(\Lambda + M).\tag{16}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. – М.: Атомиздат, 1980.
2. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные эффекты в сильных полях. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
3. Павелкин В.Н., Сандакова О.В. // Тез. докл. 13-й Рос. гравитационной конф. – Междунар. конф. по гравитации, космологии и астрофизике RUSGRAV-13. Москва, 23–28 июня 2008 г. – М., 2008. – С. 122–123.

Пермский государственный университет, г. Пермь, Россия
E-mail: ranov@psu.ru

Поступила в редакцию 01.07.10.