НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2023)

МАТЕРИАЛЫ
XXII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
4–9 декабря 2023 г.

Часть 1

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2023

УДК 519
ББК 22.17
И74
Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (4–9 декабря 2023 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2023. — Часть 1. — 416 с.

ISBN 978–5–907572–40–9

Сборник содержит избранные материалы XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, интеллектуальные системы и робототехника, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование технологических процессов.

Материалы подготовлены при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

ISBN 978–5–907572–40–9

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY

PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL
SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

KARSHI STATE UNIVERSITY

INFORMATIONAL TECHNOLOGIES AND MATHEMATICAL MODELLING (ITMM-2023)

PROCEEDINGS
of the 22th International Conference
named after A. F. Terpugov
2023 December, 4–9

Part 1

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2023

UDC 519
LBC 22.17
I60
Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2023): Proceedings of the 22th International Conference named after A. F. Terpugov (2023 December, 4–9). — Tomsk: Tomsk State University Publishing, 2023. — Part 1. — 416 p.

ISBN 978–5–907572–40–9

This volume presents selected papers from the 22th International Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new results in the following areas: queuing theory and its applications, intelligent systems and robotics, information technology and software engineering, mathematical and computer modeling of technological processes.

The proceedings was published by supporting of the Tomsk State University Development Programme (Priority-2030).

UDC 519
LBC 22.17

E d i t o r s:

S.P. Moiseeva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

D.V. Semenova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor.

S.V. Shidlovsky, Doctor of Technical Sciences.

E.A. Fedorova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

D.V. Shashev, Candidate of Technical Sciences.

O.D. Lizyura.

ISBN 978–5–907572–40–9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С КАТАСТРОФАМИ

В. В. Романов, И. Л. Лапатин, В. И. Бронер

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В работе рассматривается модель массового обслуживания с неограниченным числом приборов, простейшим входящим потоком и показательным законом распределения времени обслуживания каждого запроса. Кроме потока запросов, которые требуют обслуживания, на вход системы поступает поток отрицательных заявок. При поступлении отрицательной заявки с заданной вероятностью заявки на обслуживании прекращают обработку и теряются. Таким образом, отрицательная заявка в момент прихода приводит к потере случайного числа запросов в системе, которая и интерпретируется как термин "катастрофа". Для исследования данной модели используется численный алгоритм решения усеченной системы уравнений и имитационное моделирования. С помощью предложенных методов находятся вероятностные характеристики модели.

Ключевые слова: *математическое моделирование, теория массового обслуживания, отрицательные заявки, имитационное моделирование, неограниченное число приборов.*

Введение

Системы массоового обслуживания с неограниченным числом приборов являтся математическими моделями работы, например, финансовых, сраховых организаций [1, 2, 3], а также вычислительны систем, в которых наблюдается параллельное исполнение большого числа процессов. Моделям такого класса посвящено достаточное число работ [4, 5]. При этом в последние десятилетия в теории массового обслуживания появилось понятие отрицательных заявок [6]. Наличие в модели отрицательных заявок позволяет учитывать дестабилизирующие факторы, такие как внезапные сбои, попадание вируса, потеря пакета данных и другие. В классичесвом понимание отрицательная заявка вытесняет

Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного униврситета (Приоритет 2030)

из системы одну положительную заявку. В дальнейшем понятие было обобщено и на случай так называемых катастроф, при котором наступление события в потоке отрицательных заявок вытесняет сразу группу или вообще все заявки тиз ситемы [7]. В предложенной работе данный подход применен к системе не с очередью, а с беконечным числом приборов. Примерами катастроф в таких системах могут быть запуски вредоносных программ, котрые могут остановить или испортить сразу большое количество процессов. В страховом деле под катастрофами можно понимать такие события, которые приводят к наступлению страхового случая у многих клиетов. Учет таких факторов в математической модели позволяет при исследовании делать вывод о характере влияния частоты и масштаба катастроф на характеристики системы.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массовго обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток положительных заявок с интенсивнойтью λ и простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью γ. Положительная заявка, попадая в ситему, начинает обслуживание в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром μ. Отрицательная заявка, попадая в систему, с верояностью $(1-r)$ независимо для каждой положительной заявки в системе останаливает ее облуживание и вытесняет из системы (Рисунок 1).

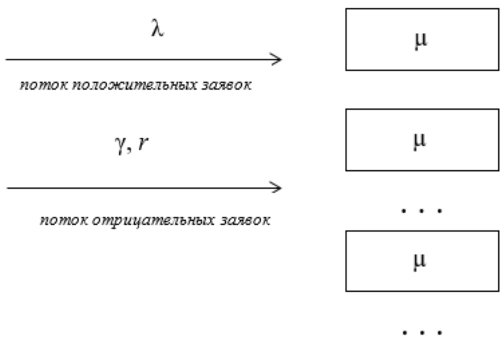

Рис. 1. Математическая модель рассматриваемой системы

Обозначим через $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t. Процесс $i(t)$ – марковский. Соответственно $P_i(t)$ – вероятность того, что в системе в момент времени t занято i приборов. Составим прямую систему уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P_i(t)$ и перейдем к ситеме уравнений для стационарных вероятностей P_i

$$i = 0:$$

$$-\lambda P_0 + P_1\mu + \sum_{k=1}^{N} P_k\gamma(1-r)^k = 0, \tag{1}$$

$$1 \le i \le \infty:$$

$$-(\lambda + i\mu + \gamma(1-r^i))P_i + P_{i+1}\mu(i+1)+$$

$$+P_{i-1}\lambda + \gamma\sum_{k=1}^{\infty} P_{i+k}C_{i+k}^{i} r^i(1-r)^k = 0. \tag{2}$$

Полученная система имеет бесконечное число уравнений и нетривиальна для решения.

2. Численное решение

Для нахождения оценки распределения P_i рассмотрим модель с ограниченным, но достаточно большим числом приборов N. Тогда система уравнений для ограниченной системы принимает следующий вид.

$$i = 0:$$

$$-\lambda P_0 + P_1\mu + \sum_{k=1}^{N} P_k\gamma(1-r)^k = 0, \tag{3}$$

$$1 \le i \le N-1:$$

$$-(\lambda + i\mu + \gamma(1-r^i))P_i + P_{i+1}\mu(i+1)+$$

$$+P_{i-1}\lambda + \gamma\sum_{k=1}^{N-i} P_{i+k}C_{i+k}^{i} r^i(1-r)^k = 0, \tag{4}$$

$$i = N$$

:

$$-(N\mu + \gamma(1-r^N))P_N + P_{N-1}\lambda = 0. \tag{5}$$

Для решения конечной системы (3),(4),(5) будем использовать обратный рекуррентный метод. Для его реализации зададим начальное приближение $P_N = 1$ и найдем значение P_{N-1} из уравнения (5). Далее последовательно для каждого уравнения из (4) находим P_i. После мы проверяем полученное решение путём подстановки P_0 и P_1 в уравнение

(3). Поскольку в качестве начального приближения мы брали $P_N = 1$, то необходимо еще выполнить нормировку полученного распределения – сумма его значений должна равняться единице.

Для подтверждения того, что при выборе достаточного значения N решение системы (3), (4), (5) можно использовать для аппроксимации распределения вероятностей состояний исходной модели была разработана и реализована имитационная модель. Результаты ее работы используются в численных примерах.

3. Численные эксперименты

Для численного примера рассмотрим работу вычислительного процессора. Моменты поступления новых задач на процессор образуют простейший поток с параметром $\lambda = 15$. Время выполнения задачи распределено экспоненциально с параметром $\mu = 3$. Моменты запуска вредоносных программ образуют простейший поток с параметром $\gamma = 0.1$. Вероятность того, что выполняемая задача не попадёт под воздейсвие вредоносной программы $r = 0.5$.

В численном эксперименте будем сравнивать распрепределение вероятностей (PN), найденное численным алгоритмом, с эмпирическим распределением (PS), полученным при помощи имитационной модели. Δ – расстояние Колмогорова между этими распределениями.

Для певого примера возьмем в численном алгоритме $N = 8$ (Рисунок 2). В данном случае расстояние Колмогорова равняется 0.065.

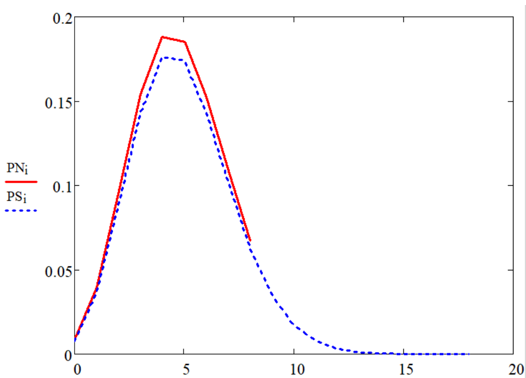

Рис. 2. Сравнение графиков распределений вероятностей числа занятых приборов для $N = 8$

Как видно по графику и значению расстояния Коломогорова значение N выбрано недостатчно большим.

Ниже представлен график, при построении которого в численном алгоритме $N = 18$. В данном случае расстояние Колмогорова равняется 0.00213 (Рисунок 3),

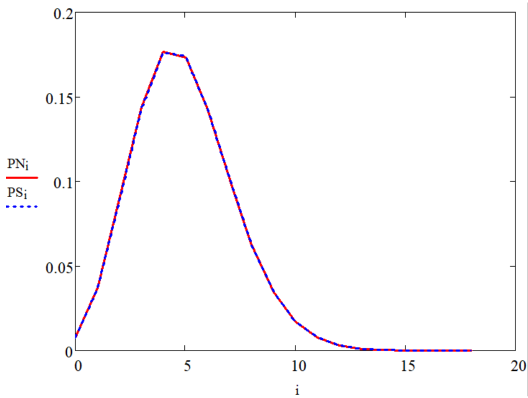

Рис. 3. Сравнение графиков распределений вероятностей числа занятых приборов для $N = 18$

4. Заключение

В работе рассмотрена система массового обслуживания с неограниченным числом приборов и потоком отрицательных заявок, которые вытесняют случайное число заявок из системы. Такое событие названо катастрофой. Такая модель позволяет учитывать деструктивные факторы при работе, например, вычислительного процессора. Заметим, что поток отрицательных заявок (катастроф) определеятся двумя параметрами – частота наступления катастроф и их масштаб. Это позволяет проследить как влияет изменение этих параметров на характеристики системы.

Для аппрокимации распределения вероятностей числа занятых приборов было предложено решать усеченную ситему уравнений обратным рекуррентным методом. Чтобы проиллюстрировать возможность применения аппроксимации была разработана имитацинная модель. Стоит отметить, что с помощью имитационной модели мы сможем находить и другие характеристики модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лившиц К. И., Юкимович К. Ю.* Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями и непрерывными нестраховыми расходами // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014) : Материалы XIII Международной начно-практической конференции им. А. Ф. Терпугова (20-22 ноября 2014 г.). Часть 1. Томск: Изд-во Том-го ун-та, 2014. С. 46—51.
2. *Капустин Е. В.* Вычисление вероятности разорения страховой компании в случае выплат, имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2012. № 4. С. 47–52.
3. *Бублик Я. С., Лившиц К. И.* Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
4. *Ананина И. А., Моисеева С. П., Назаров А. А.* Исследование потоков в системе M|GI|∞ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3(8). С. 56–67.
5. *Моисеев А. Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP|GI|∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3(32). С. 56–65.
6. *Gelenbe E., Glynn P., Sigman K.* Queues with negative arrivals // Journal of Applied Probability. 1991. № 28. P. 245–250.
7. *Yang Woo S.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. № 55. P. 223–237.

Лапатин Иван Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета. E-mail: *ilapatin@mail.ru*

Бронер Валентина Игоревна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета. E-mail: *valsubbotina@mail.ru*

Романов Вячеслав Васильевич — магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Томского государственного университета. E-mail: *slaves2001@gmail.com*