НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА СО РАН
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ ИМ. С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ СО РАН

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ: ТЕОРИЯ, ЭКСПЕРИМЕНТ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
VIII ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ

3–7 июля 2023 г.

Томск
Издательство Томского государственного университета
2023

УДК 532
ББК 22.25
З15

З15 Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения : тезисы докладов VIII Всероссийской конференции с международным участием (3–7 июля 2023 г.). – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2023. – 240 с.

ISBN 978-5-907572-97-3

Содержит тезисы докладов VIII Всероссийской конференции с международным участием «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» на русском и английском языках.

УДК 532
ББК 22.25

Сборник тезисов опубликован при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета за счет средств субсидии в целях оказания федеральным государственным учреждениям дополнительной государственной поддержки (соглашение № 075-02-2023-943)

Электронный вариант издания см.:
http://conf.nsc.ru/freebound23/ru/proceedings

ISBN 978-5-907572-97-3 © Томский государственный университет, 2023

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS SB RAS
KUTATELADZE INSTITUTE OF THERMOPHYSICS SB RAS

FREE BOUNDARY PROBLEMS: THEORY, EXPERIMENT AND APPLICATIONS

BOOK OF ABSTRACTS
VIII ALL–RUSSIAN CONFERENCE
WITH FOREIGN PARTICIPANTS

July 3–7, 2023

Tomsk
TSU Press
2023

UDC 532
LBC 22.25

Free boundary problems: theory, experiment and applications : book of abstracts VIII All–Russian Conference with foreign participants (July 3–7, 2023). – Tomsk : TSU Press, 2023. – 240 p.

ISBN 978-5-907572-97-3

The book contains abstracts of the VIII All-Russian Conference with foreign participants "Free boundary problems: theory, experiment and applications" in Russian and English.

UDC 532
LBC 22.25

The publication of the book of abstracts was funded by the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University by means of the grant providing additional state support to federal state institutions (agreement No. 075-02-2023-943)

See the electronic version of the publication:
http://conf.nsc.ru/freebound23/en/proceedings

ISBN 978-5-907572-97-3

© Tomsk State University, 2023

ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ

В. И. Бородин, М. А. Бубенчиков, В. А. Потеряева

Задача о движении воды вблизи плотины после ее внезапного разрушения рассматривается в работе [1]. Ее удобнее решать в переменных Лагранжа, записывая два уравнения движения и условие неразрывности в виде:

$$x_\alpha \ddot{x} + y_\alpha \ddot{y} = \left(p/\rho + gy\right)_\alpha \; ; \;\; x_\beta \ddot{x} + y_\beta \ddot{y} = \left(p/\rho + gy\right)_\beta \; ; \;\; x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha = 1 \, . \qquad (1)$$

Метод решения, предлагаемый в работе [1], основан на представлении искомых функций $x(\alpha, \beta, t)$, $y(\alpha, \beta, t)$, $p(\alpha, \beta, t)$ в виде степенных рядов по времени с коэффициентами, зависящими от α и β. Сходимость таких рядов была изучена в статье [2] при решении задачи о всплывании пузыря.

С другой стороны, показано, что условие неразрывности можно выполнить, если выразить координаты x и y с помощью некоторой функции $\psi(\alpha,\beta,t)$ [3]:

$$x = \alpha + \psi_\beta; \qquad y = \beta - \psi_\alpha \, . \qquad (2)$$

Значит, уравнения движения (1) можно выразить через одну и ту же функцию ψ:

$$\ddot{\psi}_\alpha - g\psi_{\alpha\alpha} = -\left(p/\rho + g\beta\right)_\alpha ; \qquad \ddot{\psi}_\beta + g\psi_{\alpha\beta} = \left(p/\rho + g\beta\right)_\beta \, . \qquad (3)$$

Из (3) следует, что $\psi(\alpha,\beta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\psi_{\alpha\alpha} + \psi_{\beta\beta} = 0$, и из этих же уравнений получаются соответствующие граничные условия.

В задаче о разрушении плотины координаты Лагранжа α и β заполняют горизонтальную полосу: $-\infty < \alpha < 0$; $0 < \beta < h$, где h – высота плотины. Краевая задача для функции ψ имеет вид:

$$\Delta\psi = 0; \;\; \psi(\alpha, \, 0) = 0; \;\; \psi_\alpha(0, \, \beta) = \mu(\beta, \, t); \;\; \psi_\beta(\alpha, \, h) = q(\alpha, \, t) \, . \qquad (4)$$

Здесь значения нормальных производных $\mu(\beta, \, t)$ и $q(\alpha, \, t)$ заранее не известны и должны находиться как решения уравнений:

$$\ddot{\mu} + g\mu_\beta = g; \qquad \ddot{q} - g \; tg\left(h\partial/\partial\alpha\right) q_\alpha = 0; \qquad q(0, \, t) = \mu(h, \, t) \, . \qquad (5)$$

В настоящей статье получено решение уравнений (5), и это позволяет сформулировать граничную задачу в терминах сопряженной функции $\varphi(\alpha, \, \beta, \, t)$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Литература

1. Стокер Д. Ж. Волны на воде (матем. теория и приложения). М. : ИЛ, 1959. 616 с.

2. Овсянников Л. В. О всплывании пузыря // Некоторые проблемы математики и механики. Л. : Наука, 1970. С. 209–222.

3. Арбит О. А. О решении уравнений лагранжевой гидродинамики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3 (29).

Бородин Владислав Иванович, ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия.
Бубенчиков Михаил Алексеевич, Томский государственный университет, Томск, Россия.
Потеряева Валентина Александровна, НИ ТГУ, Томск, Россия. E-mail: valentina.poteryaeva@gmail.com

DAM FAILURE PROBLEM

V. I. Borodin, M. A. Bubenchikov, V. A. Poteryaeva

The problem of water movement near a dam after its sudden destruction is considered in [1]. It is more convenient to solve it in Lagrange variables, writing two equations of motion and the continuity condition in the form:

$$x_\alpha \ddot{x} + y_\alpha \ddot{y} = \left(p/\rho + gy\right)_\alpha \; ; \;\; x_\beta \ddot{x} + y_\beta \ddot{y} = \left(p/\rho + gy\right)_\beta \; ; \;\; x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha = 1 \, . \qquad (1)$$

The solution method proposed in [1] is based on the representation of the desired functions $x(\alpha, \beta, t)$, $y(\alpha, \beta, t)$, $p(\alpha, \beta, t)$ as power series in time with coefficients depending on α and β. The convergence of such series was studied in [2] when solving the bubble float problem.

On the other hand, it is shown that the continuity condition can be satisfied if the coordinates x and y are expressed using some function $\psi(\alpha, \beta, t)$ [3]:

$$x = \alpha + \psi_\beta; \qquad y = \beta - \psi_\alpha \, . \qquad (2)$$

Hence, the equations of motion (1) can be expressed in terms of the same function ψ:

$$\ddot{\psi}_\alpha - g\psi_{\alpha\alpha} = -\left(p/\rho + g\beta\right)_\alpha ; \qquad \ddot{\psi}_\beta + g\psi_{\alpha\beta} = \left(p/\rho + g\beta\right)_\beta \, . \qquad (3)$$

It follows from (3) that $\psi(\alpha,\beta)$ it satisfies the Laplace equation $\psi_{\alpha\alpha} + \psi_{\beta\beta} = 0$, and the corresponding boundary conditions are obtained from the same equations.

In the dam failure problem, the Lagrange coordinates αand β fill the horizontal strip: $-\infty < \alpha < 0; \;\; 0 < \beta < h$, where h is the height of the dam. The boundary value problem for the function ψ has the form:

$$\Delta\psi = 0; \;\; \psi(\alpha, \, 0) = 0; \;\; \psi_\alpha(0, \, \beta) = \mu(\beta, \, t); \;\; \psi_\beta(\alpha, \, h) = q(\alpha, \, t) \, . \qquad (4)$$

Here, the values of the normal derivatives $\mu(\beta, t)$ and $q(\alpha, t)$ are not known in advance and must be found as solutions to the equations:

$$\ddot{\mu} + g\mu_\beta = g; \qquad \ddot{q} - g \; tg\left(h\partial/\partial\alpha\right) q_\alpha = 0; \qquad q(0, \, t) = \mu(h, \, t) \, . \qquad (5)$$

In this article, the solution of equations (5) is obtained, and this allows us to formulate the boundary value problem in terms of the conjugate function $\varphi(\alpha, \beta, t)$.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2023-943).

References

1. DStoker Z. Waves on Water (Math. Theory and Applications). M. : IL, 1959. 616 p. [in Russian]

2. Ovsyannikov L. V. On the rise of a bubble // Some problems of mathematics and mechanics. L. : Science, 1970. P. 209–222. [in Russian]

3. Arbit O. A. On the solution of the equations of Lagrangian hydrodynamics // Vestnik TSU. Mathematics and mechanics. 2014. № 3 (29). [in Russian]