Н.Ю. Галанова, Л.В. Гензе, Я.С. Гриншпон
Е.Г. Лазарева, Ю.А. Лобода, Е.Н. Путятина,
Е.А. Тимошенко

Задачи олимпиады по математике 2022 года

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
кафедра общей математики

**Н.Ю. Галанова, Л.В. Гензе, Я.С. Гриншпон
Е.Г. Лазарева, Ю.А. Лобода, Е.Н. Путятина,
Е.А. Тимошенко**

Задачи олимпиады по математике 2022 года

Томск
2022

Одобрено кафедрой общей математики
Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятина

Рассмотрено и утверждено методической комиссией ММФ

Протокол № 8 от 22 декабря 2022 г.

Председатель методической комиссии Е.А. Тарасов.

В данной работе представлены задачи с решениями олимпиад по математике, которые прошли в Томском государственном университете в 2022 году. Ряд задач являются авторскими.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по математике студентов дневной формы обучения ММФ, ИПМКН, ВИТШ, РФФ, ФТФ, ФФ, ХФ, ГГФ, БИ.

АВТОРЫ:
доцент Н.Ю. Галанова, доцент Гензе Л.В., доцент Гриншпон Я.С., доцент Лазарева Е. Г., доцент Лобода Ю.А., доцент Путятина Е.Н., профессор Тимошенко Е.А.

Университетский тур Всероссийской олимпиады по математике

(физико-математические факультеты, первый курс)

Задача 1. Найдите наибольший член последовательности $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Задача 2. Докажите, что функция $y = \cos x + \cos\sqrt{3x}$ непериодическая.

Задача 3. Вычислите предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{72}\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\right).$$

Задача 4. Решите в натуральных числах уравнение $2\cdot n!+5n+13=k^4$.

Задача 5. Решите неравенство: $x-4<\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}\right)^2$.

Задача 6. Можно ли на плоскости с декартовой системой координат начертить равносторонний треугольник так, чтобы все его вершины располагались в точках с рациональными координатами?

Задача 7. Матрицу $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ возвели в степень n.

Укажите верхний правый элемент матрицы A^n, если $a=d\neq0$, при $n=2022$.

Университетский тур Всероссийской олимпиады по математике

(физико-математические факультеты, старшие курсы)

Задача 1. Найдите: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$.

Задача 2. Исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2{,}022)^{\ln n}}.$$

Задача 3. Решите уравнение:

$$2\int_{\pi/3}^{y'}\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{1-4\cos^2 t}}=\arccos x.$$

Задача 4. Найдите наибольшее значение функции

$$u=\frac{(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

Задача 5. Найдите: $\displaystyle\int\frac{\cos x(1-\ln x)-x\sin x\ln x}{x^2}dx$.

Задача 6. Можно ли на плоскости с декартовой системой координат начертить равносторонний треугольник так, чтобы все его вершины располагались в точках с рациональными координатами?

Задача 7. Дан определитель размера n на n. Какое значение он принимает при $n=9$?

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Решения (первый курс)

Задача 1. Найдите наибольший член последовательности $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Решение. Рассмотрим дифференцируемую функцию $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$. Исследуем её на экстремум. Пусть стационарная точка удовлетворяет неравенству: $k \le x_0 < k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, если последовательность имеет наибольший член ($\max a_n$), то он равен большему из чисел a_1, a_k, a_{k+1}.

Найдем x_0. Дифференцируем:

$$f'(x) = \left(x^{1/x}\right)' = x^{1/x} \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} =$$

$$= x^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \ln x\right) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot \left(1 - \ln x\right).$$

Находим стационарную точку $x_0 = e - \max$, следовательно, $k = 2$. Сравним числа $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt[3]{3}$. Следовательно, $\max a_n = \sqrt[3]{3} \approx 1,44.$

Задача 2. Докажите, что функция $y = \cos x + \cos \sqrt[3]{3x}$ непериодическая.

Решение. Данная функция при $x = 0$ равна 2. Больше ни в одной точке эта функция не равна 2: если $\cos x = 1,\ x = 2\pi k$, то $\cos \sqrt[3]{3x} < 1$.

Задача 3. Вычислите предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{72}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\right).$$

Решение. Обозначим через

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}.$$

Представим a_n в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}=$$

$$=\frac{A(n+2)\cdot(n+3)+B(n+1)\cdot(n+3)+C(n+1)\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}.$$

Приравнивая числители и полагая последовательно:

$$n=-1,-2,-3,$$

находим, что

$$A=\frac{1}{2},\ B=-1,\ C=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right).$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\cdot+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)(n+3)}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}-\frac{2}{7}+\right.$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{2}{8}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{72}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{864}.$$

Задача 4 . Решите в натуральных числах уравнение $2\cdot n!+5n+13=k^4$.

Решение. При $n\geq5$ левая часть есть натуральное число, оканчивающееся на 3 либо 8 ($n!$ при $n\geq5$ оканчивается на 0). Никакое натуральное число в четвёртой степени не может оканчиваться на 3 или 8. Следовательно, для этих n решений нет. Значения $n\in\{1,2,3,4\}$ проверяются непосредственно:

$n=1 \;\Rightarrow\; 2+5+13=20\neq k^4$;

$n=2 \;\Rightarrow\; 4+10+13=27\neq k^4$;

$n=3 \;\Rightarrow\; 12+15+13=40\neq k^4$;

$n=4 \;\Rightarrow\; 48+20+13=81=3^4$.

Следовательно, единственным решением является $n=4,\;\; k=3$.

Задача 5. Решите неравенство: $x-4<\left(\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\right)^2$.

Решение. Очевидно: $x\geq-1$. Далее, преобразуем правую часть:

$$\left(\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\right)^2=\left(\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}\right)^2=\left(\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=x+2-2\sqrt{x+1}\ .$$

Данное неравенство принимает вид:

$x-4<x+2-2\sqrt{x+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{x+1}<3\ \Rightarrow\ x+1<9\ \Rightarrow\ x<8$.

Итак, $-1\le x<8$.

Задача 6. Можно ли на плоскости с декартовой системой координат начертить равносторонний треугольник так, чтобы все его вершины располагались в точках с рациональными координатами?

Решение. Нет, нельзя. Предположим, что $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ и $C(x_C;y_C)$ – вершины равностороннего треугольника *ABC*, и $x_A,y_A,x_B,y_B,x_C,y_C\in\mathbb{Q}$. Тогда площадь треугольника *ABC* равна половине модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Найдем векторное произведение:

$$\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & 0\\ x_C-x_A & y_C-y_A & 0\end{vmatrix}=\left((x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right)\bar{k}.$$

Значит, $S_{ABC}=\dfrac{\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|}{2}$ – рациональное число.

С другой стороны, площадь равностороннего треугольника со стороной *a* вычисляется по формуле:

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Заметим, что $a^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ – рациональное число.

Следовательно, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ – иррациональное число. Противоречие.

Замечание. Рациональность площади треугольника ABC можно было показать, вписав данный треугольник в прямоугольник. Тогда площадь треугольника равна разности площади прямоугольника и суммы площадей прямоугольных треугольников. Рациональность площади треугольника ABC можно было также доказать, используя формулу Пика, рассмотрев предварительно подобный треугольник с целочисленными координатами (подобрав натуральный коэффициент подобия).

Задача 7. Матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ возвели в степень n. Укажите верхний правый элемент матрицы A^n, если $a = d \neq 0$, при $n = 2022$.

Решение:

Пусть $a = d \neq 0$.

$A^1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$,

$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$,

$$A^3=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & a^2b+2abd \\ 0 & a^2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & a^3b+3a^2bd \\ 0 & a^3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix},$$

и т.д. Тогда, следуя методу математической индукции, предположим:

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Докажем утверждение при $n=k+1$.

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^ka & a^kb+ka^{k-1}ba \\ 0 & a^ka \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Формула верна при $n=k+1$. Следовательно, утверждение верно для любого целого неотрицательного n.

Тогда верхний правый элемент матрицы A^n при $n=2022$ равен $2022a^{2021}b$.

Решения (старшие курсы)

Задача 1. Найдите: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}.$

Тогда $\ln\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right)=$

$=\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$ и

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right)=$

$\int\limits_0^1\ln(1+x)\,dx=\left((1+x)\ln(1+x)-x\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e},$

откуда следует: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}=\frac{4}{e}$.

Задача 2. Исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2{,}022)^{\ln n}}.$$

Решение. Так как

$\frac{1}{(2{,}022)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln(2{,}022)}}=\frac{1}{n^{\ln(2{,}022)}}=\frac{1}{n^{\alpha}}$, где

$\alpha=\ln(2{,}022)<1$, то данный ряд расходится.

Задача 3. Решите дифференциальное уравнение:

$$2\int\limits_{\pi/3}^{y'}\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{1-4\cos^2 t}}=\arccos x.$$

Решение.

$$2\int\limits_{\pi/3}^{y'} \frac{\sin t dt}{\sqrt{1-4\cos^2 t}} = -\int\limits_{\pi/3}^{y'} \frac{d\left(2\cos t\right)}{\sqrt{1-4\cos^2 t}} = \arccos\left(2\cos x\right)\Big|_{\pi/3}^{y'} =$$

$$= \arccos\left(2\cos y'\right) - \arccos\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right) = \arccos\left(2\cos y'\right).$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\arccos\left(2\cos y'\right) = \arccos x \text{ или } 2\cos y' = x \Rightarrow \cos y' = \frac{x}{2},$$

$$|x| \le 2 \Rightarrow y' = \pm\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$y = \pm\left(x\arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{4-x^2}\right) + 2\pi n x + C, \ |x| \le 2, \ n\in\mathbb{Z}.$$

Задача 4. Найдите наибольшее значение функции $u = \dfrac{\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\right)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ числовые параметры.

Решение. Используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\left|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \Rightarrow$$

$$u = \frac{\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\right)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Знак равенства в неравенстве Коши-Буняковского имеет место лишь при $x_k = a_k, k = \overline{1,n}$.

Следовательно, $u_{наиб.} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

Задача 5. Найдите: $\displaystyle\int \frac{\cos x\left(1-\ln x\right) - x\sin x\ln x}{x^2}dx$.

Решение.

$$\left(\frac{\cos x\cdot\ln x}{x}\right)'=\left(\frac{\left(-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right)x-\cos x\cdot\ln x}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{\cos x(1-\ln x)-x\cdot\sin x\cdot\ln x}{x^2}$$, откуда следует:

$$\int\frac{\cos x(1-\ln x)-x\sin x\ln x}{x^2}dx=\frac{\cos x\cdot\ln x}{x}+C.$$

Задача 6. Можно ли на плоскости с декартовой системой координат начертить равносторонний треугольник так, чтобы все его вершины располагались в точках с рациональными координатами?

Решение. Нет, нельзя. Предположим, что $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ и $C(x_C;y_C)$ – вершины равностороннего треугольника *ABC*, и $x_A,y_A,x_B,y_B,x_C,y_C\in\mathbb{Q}$. Тогда площадь треугольника *ABC* равна половине модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
Найдем векторное произведение:

$$\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & 0\\ x_C-x_A & y_C-y_A & 0\end{vmatrix}=\big((x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\big)\bar{k}.$$

Значит, $S_{ABC}=\dfrac{\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|}{2}$ – рациональное число.
С другой стороны, площадь равностороннего треугольника со стороной *a* вычисляется по формуле:

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Заметим, что $a^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ – рациональное число. Следовательно, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ – иррациональное число. Противоречие.

Замечание. Рациональность площади треугольника ABC можно было показать, вписав данный треугольник в прямоугольник. Тогда площадь треугольника равна разности площади прямоугольника и суммы площадей прямоугольных треугольников. Рациональность площади треугольника ABC можно было также доказать, используя формулу Пика, рассмотрев предварительно подобный треугольник с целочисленными координатами (подобрав натуральный коэффициент подобия).

Задача 7. Дан определитель размера n на n. Какое значение он принимает при $n = 9$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \left(-1\right)^{n+1} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1^{n-1} + \left(-1\right)^{n+1} 2 \cdot 2^{n-1} = 1^n + \left(-1\right)^{n+1} \cdot 2^n.$$

При $n = 9$ имеем $1 + 512 = 513$.

Областной тур Всероссийской олимпиады по математике

(первый курс)

1. Пусть u_n и v_n такие числовые последовательности, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + v_n\right) = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + v_{2n}\right) = a$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + v_{4n}\right)$.

2. На графике функции $y = \dfrac{2022}{x^2}$ выбраны точки A и B так, что прямые AO и BO перпендикулярны (точка O – начало координат). Найдите произведение абсцисс точек A и B.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – вещественные функции, определённые на $(-\infty,+\infty)$ и выпуклые вниз на всей вещественной прямой, причём ни на каком промежутке (a,b) функция $f(x)-g(x)$ не равна тождественно нулю. Может ли оказаться, что графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют бесконечное число точек пересечения?

4. Существует ли функция $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любых чисел $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ произведение $f(a,b)\cdot f(c,d)$ совпадает со скалярным произведением векторов (a,b) и (c,d)?

5. Найдите $\int\frac{dx}{x^{10}-x}$.

6. *Метрика* на множестве X – это функция ρ: $X\times X\to[0,+\infty)$, удовлетворяющая следующим трём условиям (аксиомам метрики):

1) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для любых $x,y\in X$;

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ для $\forall x,y,z\in X$.

Докажите, что если ρ – метрика на X, то и функция $\frac{\rho}{\rho+1}$ тоже метрика на X.

Областной тур Всероссийской олимпиады по математике

(старшие курсы)

1. Пусть u_n и v_n такие числовые последовательности, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+v_n\right)=0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{2n}\right)=a$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{8n}\right)$.

2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^2}$, где $\alpha(n)$ – число цифр в десятичной записи числа n.

3. Существует ли функция $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любых чисел $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ произведение $f(a,b)\cdot f(c,d)$ совпадает со скалярным произведением векторов (a,b) и (c,d)?

4. Докажите, что при $a,b>1$ выполняется неравенство $ab\le e^{a-1}+b\ln b$.

5. Докажите, что для любых комплексных чисел a и b и числа $p\ge1$ выполняется неравенство:

$$\left|a+b\right|^p\le 2^{p-1}\left(\left|a\right|^p+\left|b\right|^p\right).$$

6. Найдите $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}dx$.

Решения (первый курс)

Задача 1. Пусть u_n и v_n такие числовые последовательности, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+v_n\right)=0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{2n}\right)=a$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{4n}\right)$.

Решение. Из условия следует:
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{2n}+v_{2n}\right)=0$ (1) и $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{2n}+v_{4n}\right)=a$ (2).
Вычитая (1) из (2), получим: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_{4n}-v_{2n}\right)=a$ (3).
Тогда
$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{4n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{2n}-v_{2n}+v_{4n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n+v_{2n}\right)+$$
$$+\lim_{n\to+\infty}\left(-v_{2n}+v_{4n}\right)=a+a=2a.$$

Задача 2. На графике функции $y=\dfrac{2022}{x^2}$ выбраны точки A и B так, что прямые AO и BO перпендикулярны (точка O – начало координат). Найдите произведение абсцисс точек A и B.

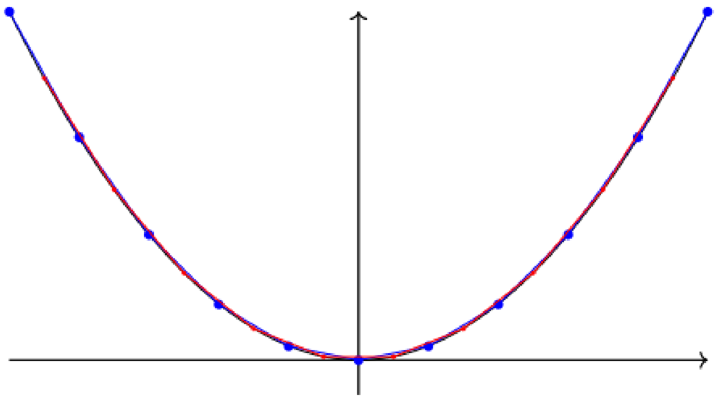
Решение. Пусть $A=\left(x_1,\dfrac{2022}{x_1^2}\right)$ и $B=\left(x_2,\dfrac{2022}{x_2^2}\right)$.
Тогда $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, а, значит, $\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=0$, где $\langle .,.\rangle$ – скалярное произведение. Поэтому
$$x_1x_2+\frac{(2022)^2}{(x_1x_2)^2}=0 \;\Rightarrow\; x_1x_2=-\sqrt[3]{(2022)^2}.$$

Задача 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – вещественные функции, определённые на $(-\infty,+\infty)$ и выпуклые вниз на всей вещественной прямой, причём ни на каком промежутке (a,b) функция $f(x)-g(x)$ не равна тождественно нулю. Может ли оказаться, что графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют бесконечное число точек пересечения?

Решение. Пусть $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+\sin x$. Тогда $f''(x)=2>0$, $g''(x)=2-\sin x>0$, поэтому $f(x)$ и

$g(x)$ выпуклы вниз. При этом, очевидно, интересующие нас графики пересекаются в точках с абсциссами, равными πn, где n – произвольное целое число.

Ещё один из возможных вариантов решения: рассмотрим график функции $f(x)=x^2$ и отметим на нём бесконечное число синих точек, «уходящих на бесконечность» по обеим ветвям параболы. Соединяя эти точки, получим ломаную. Поставив между соседними синими точками по одной красной на графике и соединяя красные точки, получим другую ломаную. Эти ломаные – искомые графики.



Задача 4. Существует ли функция $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любых чисел $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ произведение $f(a,b)\cdot f(c,d)$ совпадает со скалярным произведением векторов (a,b) и (c,d)?

Решение. Предположим, что требуемая функция существует. Тогда

$$f(a,b)\cdot f(a,b)=\langle(a,b),(a,b)\rangle=a^2+b^2$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(a,b) = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ (выбор знака перед корнем может, вообще говоря, зависеть от конкретной пары чисел $a, b \in \mathbb{R}$). Но в этом случае $f(1,0) \cdot f(0,1) = (\pm 1) \cdot (\pm 1) = \pm 1$, что противоречит равенству $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 0$.

Задача 5. Найдите $\int \frac{dx}{x^{10} - x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^{10} - x} = \int \frac{dx}{x^{10}\left(1 - x^{-9}\right)} = \frac{1}{9} \int \frac{d\left(1 - x^{-9}\right)}{\left(1 - x^{-9}\right)} = \frac{1}{9} \ln\left|1 - x^{-9}\right| + C.$$

Второй способ: представим подинтегральную функцию в виде суммы двух дробей с неопределёнными числителями $\frac{1}{x^{10} - x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{P(x)}{x^9 - 1}$, где α константа, а $P(x)$ многочлен. Тогда для всех x должно выполняться равенство: $\alpha\left(x^9 - 1\right) + xP(x) = 1$ или, эквивалентно, $x\left(\alpha x^8 + P(x)\right) - \alpha - 1 = 0$. Значит, $\begin{cases} \alpha x^8 + P(x) = 0, \\ \alpha + 1 = 0. \end{cases}$

Отсюда $\alpha = -1, \quad P(x) = -x^8$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^{10} - x} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x^8}{x^9 - 1} dx = -\ln|x| + \frac{1}{9} \int \frac{d\left(x^9 - 1\right)}{x^9 - 1} =$$

$$= -\frac{1}{9} \ln\left|x^9\right| + \frac{1}{9} \ln\left|x^9 - 1\right| = \frac{1}{9} \ln\left|1 - x^{-9}\right| + C.$$

Задача 6. *Метрика* на множестве X – это функция $\rho\colon\ X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая следующим трём условиям (аксиомам метрики):

1) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для любых $x,y\in X$;

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ для $\forall x,y,z\in X$.

Докажите, что если ρ – метрика на X, то и функция $\dfrac{\rho}{\rho+1}$ тоже метрика на X.

Доказательство. Так как $\rho(x,y)\ge 0$ для любых $x,y\in X$, то и $\dfrac{\rho(x,y)}{\rho(x,y)+1}\ge 0$ для всех $x,y\in X$.

Проверка двух первых аксиом метрики тривиальна.

Для проверки третьей аксиомы рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Это возрастающая функция при $x\ge 0$. Проверить это можно, взяв производную функции, или заметить, что

$f(x)=\dfrac{x+1-1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$ и что функция $\dfrac{1}{x+1}$ убывает при $x\ge 0$.

Введём обозначения $\rho(x,y)=a$, $\rho(x,z)=b$ и $\rho(z,y)=c$. Так как ρ – метрика, то $a\le b+c$. Тогда

$$\frac{a}{a+1}=f(a)\le f(b+c)=\frac{b+c}{b+c+1}=\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{b+c+1}\le$$

$$\le\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}.$$

Полученное неравенство является третьей аксиомой метрики для функции $\dfrac{\rho}{\rho+1}$.

Решения (старшие курсы)

Задача 1. Пусть u_n и v_n такие числовые последовательности, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_{2n})=a$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_{8n})$.

Решение. Из условия следует:
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}+v_{2n})=0$ (1) и $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}+v_{4n})=a$ (2).
Вычитая (1) из (2), получим: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{4n}-v_{2n})=a$ (3).
Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_{4n})=\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_{2n}-v_{2n}+v_{4n})=\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_{2n})+$$
$$+\lim_{n\to+\infty}(-v_{2n}+v_{4n})=a+a=2a\quad(4).$$

Из (3) получаем: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{8n}-v_{4n})=a$ (5).
Наконец, с учётом (4) и (5) получим:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_{8n})=\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_{4n}-v_{4n}+v_{8n})=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_{4n})+\lim_{n\to+\infty}(-v_{4n}+v_{8n})=2a+a=3a$$

Задача 2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(n)}{n^2}$, где $\alpha(n)$ – число цифр в десятичной записи числа n.

Решение. Очевидно, что $\alpha(n)=k \Leftrightarrow 10^{k-1}\le n<10^k$.
Следовательно, $\alpha(n)=k \Leftrightarrow k-1\le \lg n<k$, откуда

$\alpha(n)-1\le\lg n<\alpha(n)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\lg n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg(10n)}{n^2}.$$

Так как $\lg 10n<\sqrt{n}$ начиная с некоторого n_0, то исходный ряд сходится по признаку сравнения.

Задача 3. Существует ли функция $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любых чисел $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ произведение $f(a,b)\cdot f(c,d)$ совпадает со скалярным произведением векторов (a,b) и (c,d)?

Решение. Предположим, что требуемая функция существует. Тогда

$$f(a,b)\cdot f(a,b)=\langle(a,b),(a,b)\rangle=a^2+b^2$$

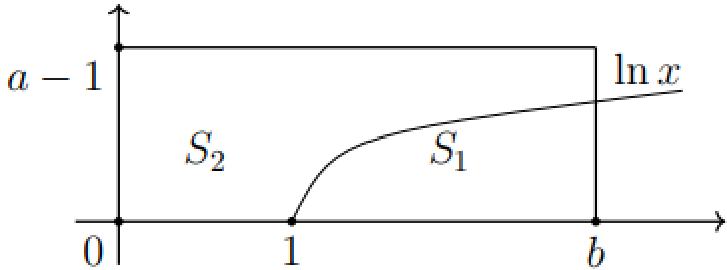
для любых $a,b\in\mathbb{R}$. Следовательно, $f(a,b)=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ (выбор знака перед корнем может, вообще говоря, зависеть от конкретной пары чисел $a,b\in\mathbb{R}$). Но в этом случае $f(1,0)\cdot f(0,1)=(\pm1)\cdot(\pm1)=\pm1$, что противоречит равенству $\langle(1,0),(0,1)\rangle=0$.

Задача 4. Докажите, что при $a,b>1$ выполняется неравенство $ab\le e^{a-1}+b\ln b$.

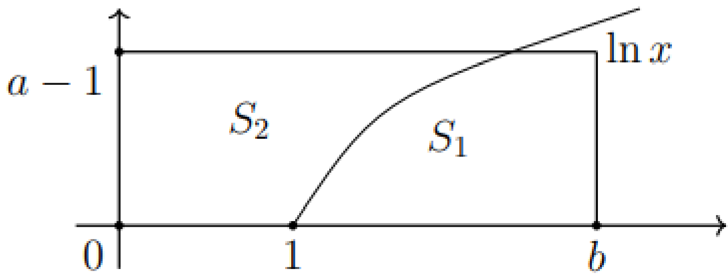
Решение. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a-1$ и b и график функции $y=\ln x$, разбивающий прямоугольник на две части с площадями S_1 и S_2.

Очевидно, что в первом случае $S_1 = \int\limits_1^b \ln x dx$ и

$S_2 \le \int\limits_0^{a-1} e^x dx$,



а во втором случае $S_1 \le \int\limits_1^b \ln x dx$ и $S_2 = \int\limits_0^{a-1} e^x dx$.



Тогда $(a-1)b = S_1 + S_2 \le \int\limits_1^b \ln x dx + \int\limits_0^{a-1} e^x dx =$

$= b\ln b - b + 1 + e^{a-1} - 1 = b\ln b - b + e^{a-1}$,
откуда следует нужное неравенство.

Задача 5. Докажите, что для любых комплексных чисел a, b и числа $p \geq 1$ выполняется неравенство: $|a+b|^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right)$.

Решение. Если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, то неравенство очевидно. Пусть теперь $|a| \geq |b| > 0$.

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right) \iff \frac{|a+b|^p}{|a|^p + |b|^p} \leq 2^{p-1} \iff$$

$$\iff \frac{\left|a/b + 1\right|^p}{\left|a/b\right|^p + 1} \leq 2^{p-1} .$$

Введём обозначение: $t = a/b$. Так как $\left|a/b + 1\right| \leq \left|a/b\right| + 1$ и $p \geq 1$, то для доказательства исходного неравенства нам теперь достаточно доказать, что $\dfrac{(t+1)^p}{t^p+1} \leq 2^{p-1}$ при $t \geq 1$.

Исследуем функцию $f(t) = \dfrac{(t+1)^p}{t^p+1}$ на экстремум.

$$f'(t) = \frac{p(t+1)^{p-1}\left(t^p+1\right) - (t+1)^p\, pt^{p-1}}{\left(t^p+1\right)^2} =$$

$$= \frac{p(t+1)^{p-1}\left(t^p + 1 - (t+1)t^{p-1}\right)}{\left(t^p+1\right)^2} = \frac{p(t+1)^{p-1}\left(1 - t^{p-1}\right)}{\left(t^p+1\right)^2} .$$

Видно, что $f'(t) \leq 0$ при $t \geq 1$. Таким образом, при $t \geq 1$ функция $f(t)$ – невозрастающая. Кроме того, $f(1) = 2^{p-1}$. Таким образом, неравенство $\dfrac{(t+1)^p}{t^p+1} \leq 2^{p-1}$

при $t \geq 1$ доказано, а вместе с ним и исходное неравенство.

Задача 6. Найдите $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}dx$.

Решение. Воспользуемся стандартным представлением любой функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ в виде суммы чётной и нечётной функции:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Пусть $f(x)=\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}$. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}+\frac{(-x)^{2022}}{2^{-1/x}+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}-\frac{(-x)^{2022}}{2^{-1/x}+1}\right).$$

В силу симметричности промежутка интегрирования интеграл от второго слагаемого равен нулю. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}+\frac{(-x)^{2022}}{2^{-1/x}+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{x^{2022}}{2^{1/x}+1}+\frac{x^{2022}}{2^{-1/x}+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^{2022}\left(2^{1/x}+2^{-1/x}+2\right)}{2^{1/x}+2^{-1/x}+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^{2022}dx=\frac{1}{2023}.$$

Литература

1. И.Х Сивашинский Неравенства в задачах. И – М: Наука, 1967, - 303 стр.
2. Лизунова Н.А., Шкроба С.П. Матрицы и системы линейных уравнений. - М.:Физматлит, 2007.-352 с.

Содержание

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 5307 от 23.12.2022 г. Тираж 50 экз.

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49. Сайт: http://publish.tsu.ru. E-mail: rio.tsu@mail.ru