

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



# ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

**Том 3. Математика**

Сборник научных трудов  
XIX Международной конференции студентов, аспирантов  
и молодых ученых  
26–29 апреля 2022 г.

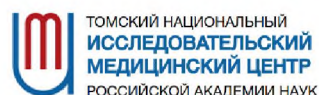
# PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

**Volume 3. Mathematics**

Abstracts  
XIX International Conference of students, graduate students  
and young scientists  
April 26–29, 2022



Национальный  
исследовательский  
**Томский  
государственный  
университет**



Томск 2022

УДК 536.24

**ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА В КУБЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ  
ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА**

М.С. Астанина

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеревет

Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [astanina.marina@bk.ru](mailto:astanina.marina@bk.ru)

**HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN A CUBE WITH A LIQUID OF VARIABLE VISCOSITY IN  
THE PRESENCE OF A HEAT-GENERATING ELEMENT**

M.S. Astanina

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [astanina.marina@bk.ru](mailto:astanina.marina@bk.ru)

**Abstract.** Free convection of fluid with temperature-dependent viscosity inside a cube with porous layer in the presence of heat-generating element has been studied numerically using the finite difference method. The cavity is cooled from the side vertical boundaries with low temperature  $T_c$ , while the other walls are thermally insulated. The mathematical model has been written using non-dimensional non-primitive variables “vector potential functions – vorticity vector – temperature”. As a result, the distributions of three-dimensional temperature fields, velocity components and integral parameters of heat transfer have been shown depending on the thermophysical characteristics of the working liquid and the porous layer.

**Введение.** Изучение процессов конвективного теплообмена с применением численных методов

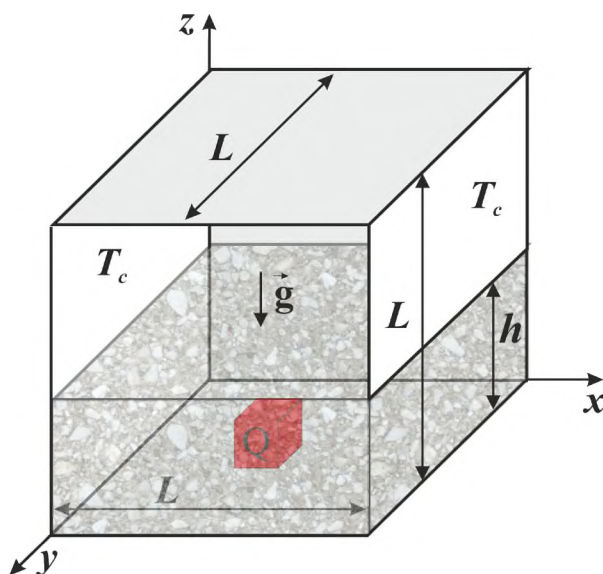


Рис. 1. Схема решаемой задачи

рассматривается как один из самых эффективных и доступных способ моделирования физических процессов в силу небольших материальных затрат. Результаты таких исследований находят своё применение во многих сферах промышленности, в том числе в приборостроении и микроэлектронике.

**Математическая модель.** Схематическая постановка рассматриваемой задачи показана на рисунке 1. Изучается процесс естественной конвекции за счёт охлаждающего эффекта от боковых стенок и нагревания от тепло выделяющего элемента в центре нижней границы куба. В качестве рабочей среды рассматривается ньютоновская теплопроводная

жидкость. При этом считается, что её вязкость является экспоненциальной функцией температуры. Для интенсификации теплообмена в полость введена пористая вставка изменяемой высоты  $h$ . Для описания чистого слоя жидкости используется модель среды, рассмотренная в [1]. Для моделирования пористой прослойки используется модель Дарси-Бринкмана:

$$\nabla^2 \psi_x = -\omega_x, \nabla^2 \psi_y = -\omega_y, \nabla^2 \psi_z = -\omega_z \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_x}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\varepsilon w}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_y}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon w}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\varepsilon u}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_z}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\varepsilon u}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\alpha_{pm} / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\alpha_{ns} / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + Os \right) \quad (6)$$

Безразмерные преобразованные переменные (компоненты вектора завихрённости и векторного потенциала) вводились следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \bar{z}}, \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{x}}, \bar{w} = \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{z}} = 0, \\ \bar{\omega}_x = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}, \bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, \bar{\omega}_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}. \end{cases}$$

В системе уравнений (1)–(6) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}/L, y = \bar{y}/L, z = \bar{z}/L, \tau = t \sqrt{g\beta\Delta T}/L, \theta = (T - T_c)/\Delta T, \mu = \bar{\mu}/\mu_0, \\ u &= \bar{u}/\sqrt{g\beta\Delta TL}, v = \bar{v}/\sqrt{g\beta\Delta TL}, w = \bar{w}/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \psi_x = \bar{\psi}_x/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \psi_y = \bar{\psi}_y/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \\ \psi_z &= \bar{\psi}_z/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \omega_x = \bar{\omega}_x \sqrt{L/(g\beta\Delta T)}, \omega_y = \bar{\omega}_y \sqrt{L/(g\beta\Delta T)}, \omega_z = \bar{\omega}_z \sqrt{L/(g\beta\Delta T)}, \\ Ra &= \rho g \beta (T_h - T_c) L^3 / (\alpha \mu_0), Pr = \mu_0 / (\rho \alpha), Da = K/L^2, Os = QL^2 / (\lambda_{ns} \Delta T), \mu = \exp(-\zeta \theta) \end{aligned}$$

Для начального момента времени  $\tau = 0$  жидкость считалась неподвижной, поэтому все переменные были обнулены. Граничные условия для сформулированной системы дифференциальных уравнений записывались в следующем виде:

$$\tau > 0: \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_z}{\partial x} = 0, \psi_y = 0, \psi_z = 0; \omega_x = 0, \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \theta = 0 \text{ на } x = 0, x = 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_x = 0, \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = 0, \psi_z = 0, \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ на } y = 0, y = 1, 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_x = 0, \psi_y = 0, \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0, \omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \omega_z = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ на } z = 0, z = 1, 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1. \end{array} \right. \quad (7)$$

$\psi = 0, \omega = -\partial^2 \psi / \partial n^2, \theta_{hs} = \theta_{pm}, (\lambda_{hs} / \lambda_{pm}) (\partial \theta_{hs} / \partial n) = \partial \theta_{pm} / \partial n$  на источнике

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{pm} = \psi_f, \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial z} = \frac{\partial \psi_f}{\partial z}, \omega_{pm} = \omega_f, \frac{\partial \omega_{pm}}{\partial z} = \frac{\partial \omega_f}{\partial z}, \\ \frac{\partial \theta_f}{\partial z} \Big|_{cl,f} = \frac{\lambda_s}{\lambda_f} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \Big|_{pm}, \theta_f \Big|_{cl,f} = \theta_s \Big|_{pm} \end{array} \right\} \text{ на границах сред}$$

Сформулированные дифференциальные уравнения в переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» с соответствующими начальными и граничными условиями решались с помощью метода конечных разностей на равномерной расчётной сетке [2]. Предложенный метод решения задач конвективного теплопереноса был верифицирован ранее на нескольких модельных задачах. Конечным этапом работы являлась программная реализация задачи на языке программирования C++ с дальнейшей визуализацией результатов.

**Результаты и заключение.** Анализ результатов был проведён по полученным распределениям полей температуры и компонент вектора скорости, а также по зависимостям среднего числа Нуссельта на поверхности тепловыделяющего источника и его средней температуры. Полученные данные отражают возможность интенсификации теплообмена в полости путём варьирования теплофизических свойств рабочей среды (вязкость), пористой вставки (пористость, проницаемость), а также геометрических параметров (высоты пористого слоя). Также было рассмотрено влияние интенсивности тепловыделения нагревателя на структуру течения и режимы теплопереноса. Представленные результаты могут быть полезны при разработке и обслуживании тепловых систем в различных отраслях.

*Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского фонда фундаментальных исследований (договор № 20-31-90080).*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Astanina M.S., Ghalambaz M., Chamkha A.J., Sheremet M. A. Thermal convection in a cubical region saturated with a temperature -dependent viscosity fluid under the non-uniform temperature profile at vertical wall // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 126. – P. 105442.
2. Wong K.C., Saeid N.H. Numerical study of mixed convection on jet impingement cooling in a horizontal porous layer-using Brinkman-extended Darcy model // International Journal of Thermal Sciences. – 2009. – Vol. 48. – P. 96–104.