

Научная статья
УДК 518.872
doi: 10.17223/7783494/2/5

Исследование математической модели беспроводной сети передачи данных в виде циклической системы случайного множественного доступа

Анатолий Андреевич Назаров¹, Ксения Сергеевна Шульгина², Радмир Ренатович Салимзянов³,
Светлана Владимировна Пауль⁴, Дмитрий Вадимович Шашев⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *nazarov.tsu@gmail.com*

² *shulgina19991999@mail.ru*

³ *rsalimzyanov@yahoo.com*

⁴ *paulsv82@mail.ru*

⁵ *dshashev@mail.ru*

Аннотация. Выполнено исследование математической модели беспроводной сети передачи данных в виде циклической системы с повторными вызовами, на вход которой поступают два стационарных пуассоновских потока заявок, продолжительности обслуживания которых имеют экспоненциальную функцию распределения. Применяя метод асимптотического анализа, найдено предельное стационарное распределение вероятностей числа заявок в исследуемой математической модели сети передачи данных.

Ключевые слова: беспроводная сеть, циклическая система с повторными вызовами, метод асимптотического анализа

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Назаров А.А., Шульгина К.С., Салимзянов Р.Р., Пауль С.В., Шашев Д.В. Исследование математической модели беспроводной сети передачи данных в виде циклической системы случайного множественного доступа // Технологии безопасности жизнедеятельности. 2023. № 2. С. 58–65. doi: 10.17223/7783494/2/5

Original article
doi: 10.17223/7783494/2/5

Mathematical Model of Wireless Network as a Cyclic Random Access Queueing System

Anatoly A. Nazarov¹, Ksenia S. Shulgina², Radmir R. Salimzyanov³,
Svetlana V. Paul⁴, Dmitry V. Shashev⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *nazarov.tsu@gmail.com*

² *shulgina19991999@mail.ru*

³ *rsalimzyanov@yahoo.com*

⁴ *paulsv82@mail.ru*

⁵ *dshashev@mail.ru*

Abstract. In this paper, we investigate mathematical model of wireless network in the form of cyclic queueing system with retrials, two input stationary Poisson processes and exponential distribution service times. Applying asymptotic analysis method, we obtain limiting stationary distribution of the number of customers in considered queueing model of data network.

Keywords: wireless network, cyclic retrial queue, asymptotic analysis method

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority-2030).

For citation: Nazarov, A.A., Shulgina, K.S., Salimzyanov, R.R., Paul, S.V. & Shashev, D.V. (2023) Mathematical Model of Wireless Network as a Cyclic Random Access Queueing System. *Tekhnologii bezopasnosti zhiznedeятel'nosti – Life Safety / Security Technologies*. 2. pp. 58–65. doi: 10.17223/7783494/2/5 (In Russian).

Введение

Беспроводные сети передачи информации являются важным направлением современной телеком-

муникационной индустрии. Причинами этому, в первую очередь, являются глобальная автоматизация и роботизация различных областей науки и тех-

ники, развитие специализированных сетей обмена данными (например, VANET и FANET [1]) и т.д. Такие сети используются как в гражданской, так и в военной областях. Их применение позволяет получить широкий спектр услуг: мониторинг шума и света, загрязнений окружающей среды, движения транспортных средств и противоугонная защита, контроль по предотвращению обрушения старых зданий и мостов, экстренная медицинская услуга. В частности, сеть FANET (Flying Ad Hoc Networks) включает беспилотные летающие аппараты (БПЛА), используемые для удаленного получения изображений, мониторинга стихийных бедствий, видеотрансляции и др.

Повсеместное использование сетей FANET способствует появлению нескольких явных проблем с точки зрения терминов безопасности. С одной стороны, сети FANET имеют проблемы информационной безопасности (ИБ), что, в свою очередь, ставит под вопрос обеспечение доверительной беспроводной сети передачи данных, характеристики которой должны быть обеспечены при использовании таких сетей в городской инфраструктуре. С другой стороны: обеспечение должного уровня безопасности для окружающей среды при использовании таких сетей. Основной причиной возникновения таких проблем является динамическая природа этих сетей, высокая мобильность и, соответственно, быстрое изменение топологий, большие расстояния между БПЛА, нетерпеливые пользователи и частая непродолжительность связи.

Внедрение таких беспроводных технологий для решения различных задач жизнедеятельности способствует росту уровня значимости ИБ существующих информационных систем. С другой стороны, такое внедрение возможно только при разработке специальных механизмов обеспечения безопасности их работы и должного уровня ИБ, которые, в свою очередь, обусловлены особенностями и характеристиками беспроводных сетей.

Один из возможных подходов, позволяющих решить эту проблему, требует фундаментального и детального изучения систем передачи данных с применением аппарата математического моделирования, способного подтвердить границы применимости и функциональные характеристики.

Беспроводные широкополосные сети на сегодняшний день являются оперативными, мобильными, привлекательными по цене и по возможности реализуемых приложений. В основе беспроводных сетей лежит технология широкополосного или шумоподобного сигнала, которая предусматривает деление всей используемой широкой полосы на несколько подканалов, по которым закодированная информация передается либо параллельно по всем

подканалам сразу, либо по очереди, переключаясь от канала к каналу. Во втором случае отводится время для подключения к каналу, в течение которого будет передаваться информация. Проблема разделения общего ресурса связи сети решается выбором протокола множественного доступа абонентов сети к общему ресурсу. Для эффективного разделения общего ресурса связи могут быть использованы циклические протоколы либо протоколы множественного, в том числе случайного доступа. Проблема выбора класса протоколов эффективного доступа в данном исследовании решается методами математического моделирования и математически корректным исследованием предложенных моделей. Адекватными математическими моделями протоколов случайного доступа являются RQ-системы (Retrial Queueing System), а для циклических протоколов – системы поллинга. Те и другие являются математическими моделями систем массового обслуживания.

В данной работе рассматривается циклическая система с повторными вызовами [2–4], в которой цикл является суммой интервалов доступа к общему ресурсу каждого из абонентов сети [5–8]. Особенностью предлагаемой модели является то, что продолжительности таких интервалов случайные (в частности, детерминированные) и не зависимые не только между собой, но и от входящих потоков заявок и продолжительностей их обслуживания [9–10]. На вход предлагаемой циклической системы поступают два простейших потока заявок, интервалы подключения прибора к RQ-системам (входящий поток и соответствующая ему орбита) имеют экспоненциальную функцию распределения. Для исследования используется метод асимптотического анализа [9–10] в предельном условии большой задержки заявок на орбитах. Ставится задача определения вероятностных характеристик такой циклической сети связи множественного доступа.

Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим циклическую систему с повторными вызовами (рис. 1), на вход которой поступают два простейших потока событий с интенсивностями λ_1 и λ_2 соответственно. Заявки каждого потока формируют свою орбиту неограниченного объема.

Будем называть пару n -го потока и соответствующую ему орбиту « n -й RQ-системой», $n = 1, 2$. Прибор посещает RQ-системы в циклическом порядке, начиная с первой и заканчивая второй, потом цикл повторяется. Время нахождения прибора у n -й RQ-системы с повторными вызовами имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром α_n , $n = 1, 2$. В течение этого времени прибор обслуживает заявки, которые поступают из n -го входяще-

го потока и с орбиты. Время обслуживания заявок имеет экспоненциальную функцию распределения с параметрами $\mu_n, n = 1, 2$. Если поступившая заявка входящего потока обнаруживает прибор занятым или неподключенным, она мгновенно уходит на соответствующую орбиту, где осуществляет случай-

ную задержку в течение экспоненциального времени с параметром $\sigma_n, n = 1, 2$, после которой вновь обращается к прибору. Будем рассматривать циклическую RQ-систему, когда после истечения времени подключения к n -й RQ-системе заявка уходит на соответствующую орбиту.

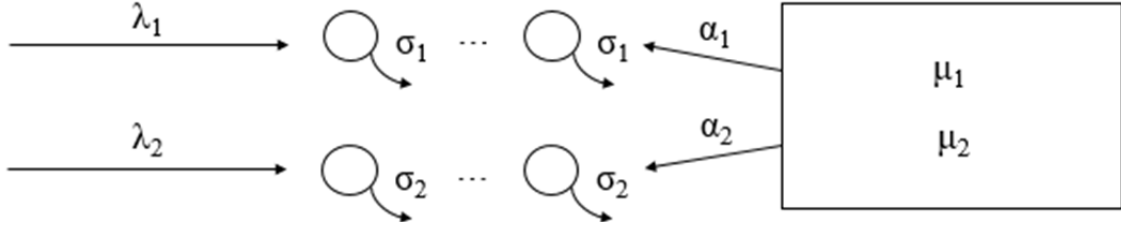


Рис. 1. Циклическая система с повторными вызовами
Fig. 1. Cyclic retrial queue

Обозначим процесс $k(t)$ – состояние прибора в момент времени t . Этот процесс может принимать следующие значения: 0 – прибор подключен к первой RQ-системе и свободен; 1 – прибор подключен к первой RQ-системе и занят; 2 – прибор подключен ко второй RQ-системе и свободен; 3 – прибор подключен ко второй RQ-системе и занят. Также введем случайные процессы: $i_1(t)$ – число заявок на первой орбите в момент времени t ; $i_2(t)$ – число заявок на второй орбите в момент времени t .

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на первой и второй орбитах и состояний прибора. Для этого рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_k(i_1, i_2, t)$$

составим систему Колмогорова и запишем ее в стационарном режиме

$$\begin{aligned} & -(\lambda_1 + \lambda_2 + i_1\sigma_1 + \alpha_1)P_0(i_1, i_2) + \lambda_2 P_0(i_1, i_2 - 1) + \\ & + \mu_1 P_1(i_1, i_2) + \alpha_2 P_2(i_1, i_2) + \alpha_2 P_3(i_1, i_2 - 1) = 0, \\ & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \alpha_1)P_1(i_1, i_2) + \lambda_1 P_0(i_1, i_2) + \\ & + \sigma_1(i_1 + 1)P_0(i_1 + 1, i_2) + \lambda_1 P_1(i_1 - 1, i_2) + \lambda_2 P_1(i_1, i_2 - 1) = 0, \\ & -(\lambda_1 + \lambda_2 + i_2\sigma_2 + \alpha_2)P_2(i_1, i_2) + \lambda_1 P_2(i_1 - 1, i_2) + \\ & + \mu_2 P_3(i_1, i_2) + \alpha_1 P_0(i_1, i_2) + \alpha_1 P_1(i_1 - 1, i_2) = 0, \\ & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \alpha_2)P_3(i_1, i_2) + \lambda_2 P_2(i_1, i_2) + \\ & + \sigma_2(i_2 + 1)P_2(i_1, i_2 + 1) + \lambda_2 P_3(i_1, i_2 - 1) + \lambda_1 P_3(i_1 - 1, i_2) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2), \quad k = \overline{0, 3},$$

обозначив $j = \sqrt{-1}$. Систему для частичных характеристических функций запишем в матричной форме, обозначив векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u_1, u_2) &= \{H_0(u_1, u_2), H_1(u_1, u_2), H_2(u_1, u_2), H_3(u_1, u_2)\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= \left\{ \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial H_3(u_1, u_2)}{\partial u_1} \right\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= \left\{ \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial H_3(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right\} \end{aligned}$$

и матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1) & \lambda_1 & \alpha_1 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \alpha_1) & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_2) & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \alpha_2) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Получим систему, в которой скалярное уравнение получено путем умножения матричного уравнения на вектор единичного столбца \mathbf{e} .

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}(u_1, u_2) \{ \mathbf{A} + e^{ju_1} \mathbf{B} + e^{ju_2} \mathbf{C} \} + \\ & + j\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju_1} \mathbf{I}_1 \} + j\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \{ \mathbf{I}_2 - e^{-ju_2} \mathbf{I}_3 \} = 0. \\ & (e^{ju_1} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u_1, u_2) \mathbf{B} + j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} + \\ & + (e^{ju_2} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u_1, u_2) \mathbf{C} + j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (2) является основой для дальнейших исследований. Мы решим ее методом асимптотического анализа в предельном условии согласованно большой задержки заявок на орбитах $\sigma_1 \rightarrow 0$ и $\sigma_2 \rightarrow 0$.

В системе уравнений (2) обозначим $\sigma_1 = \gamma_1 \sigma$, $\sigma_2 = \gamma_2 \sigma$, $\sigma = \varepsilon$ и введем следующие замены:

$$u_1 = w_1 \varepsilon, \quad u_2 = w_2 \varepsilon, \quad \mathbf{H}(u_1, u_2) = \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon).$$

Получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \left\{ \mathbf{A} + e^{j\varepsilon w_1} \mathbf{B} + e^{j\varepsilon w_2} \mathbf{C} \right\} + j\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \left\{ \mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_1 \right\} + \\ + j\gamma_2 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \left\{ \mathbf{I}_2 - e^{-j\varepsilon w_2} \mathbf{I}_3 \right\} = 0. \\ (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \left\{ \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \mathbf{B} + j\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1} \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} + \\ + (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \left\{ \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \mathbf{C} + j\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2} \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

С помощью метода асимптотического анализа будет получена предельная характеристическая функция числа заявок на орбитах в условии согласованно большой задержки заявок на орбитах. Будет построена аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на орбитах с использованием полученных асимптотических характеристик.

Асимптотический анализ первого порядка

Теорема 1. Пусть $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – число заявок на первой и второй орбитах соответственно, тогда выполняется следующее предельное равенство:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \{ jw_1 \gamma_1 \sigma i_1(t) + jw_2 \gamma_2 \sigma i_2(t) \} = \exp \{ jw_1 a_1 + jw_2 a_2 \},$$

где a_1 и a_2 являются корнями матричных уравнений

$$\mathbf{r} \{ \mathbf{B} - \gamma_1 a_1 \mathbf{I}_1 \} \mathbf{e} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{r} \{ \mathbf{C} - \gamma_2 a_2 \mathbf{I}_3 \} \mathbf{e} = 0, \quad (5)$$

вектор вероятностей состояний прибора \mathbf{r} является корнем уравнения

$$\mathbf{r} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \} - \gamma_1 a_1 \mathbf{r} \{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \} - \gamma_2 a_2 \mathbf{r} \{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \} = 0. \quad (6)$$

Здесь γ_1 , γ_2 , w_1 и w_2 являются параметрами метода асимптотического анализа.

Доказательство. В системе (3) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w_1, w_2) \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \} + j\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2)}{\partial w_1} \{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \} + \\ + j\gamma_2 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2)}{\partial w_2} \{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \} = 0. \\ jw_1 \left\{ \mathbf{F}(w_1, w_2) \mathbf{B} + j\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2)}{\partial w_1} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} + \\ + jw_2 \left\{ \mathbf{F}(w_1, w_2) \mathbf{C} + j\gamma_2 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2)}{\partial w_2} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Решение системы (7) будем искать в виде

$$\mathbf{F}(w_1, w_2) = \mathbf{r} \Phi(w_1, w_2),$$

где \mathbf{r} – вектор стационарных распределений состояний прибора. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \} + j\gamma_1 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi(w_1, w_2)} \{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \} + \\ + j\gamma_2 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi(w_1, w_2)} \{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \} = 0, \\ jw_1 \left\{ \mathbf{r} \mathbf{B} + j\gamma_1 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi(w_1, w_2)} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} + \\ + jw_2 \left\{ \mathbf{r} \mathbf{C} + j\gamma_2 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi(w_1, w_2)} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Так как отношения $j \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi(w_1, w_2)}$ и $j \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi(w_1, w_2)}$ не зависят от w_1 и w_2 , то функция

$\Phi(w_1, w_2)$ имеет вид

$$\Phi(w_1, w_2) = \exp \{ jw_1 a_1 + jw_2 a_2 \}.$$

Тогда $j \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi(w_1, w_2)} = -a_1$, $j \frac{\partial \Phi(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi(w_1, w_2)} = -a_2$.

Вектор стационарного распределения вероятностей \mathbf{r} состояния прибора удовлетворяет условию нормировки, тогда систему уравнений (8) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \} - \gamma_1 a_1 \mathbf{r} \{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \} - \gamma_2 a_2 \mathbf{r} \{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \} = 0, \\ \mathbf{r} \{ \mathbf{B} - \gamma_1 a_1 \mathbf{I}_1 \} \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{r} \{ \mathbf{C} - \gamma_2 a_2 \mathbf{I}_3 \} \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{r} \mathbf{e} = 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом, получили системы уравнений, численное решение которых позволит нам найти величины a_1 и a_2 – асимптотические средние числа заявок на первой и второй орбитах соответственно и \mathbf{r} – вектор вероятностей состояний прибора. Реализация метода асимптотического анализа на первом этапе или доказанная теорема 1 позволяют найти только средние предельные значения числа заявок на орбитах. Для более детального исследования процессов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ рассмотрим асимптотику второго порядка.

Асимптотический анализ второго порядка

Теорема 2. В контексте теоремы 1 верно следующее предельное равенство:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow 0 \\ \sigma_2 \rightarrow 0}} M \exp \left\{ jw_1 \sqrt{\sigma_1} \left(i_1(t) - \frac{a_1}{\sigma_1} \right) + jw_2 \sqrt{\sigma_2} \left(i_2(t) - \frac{a_2}{\sigma_2} \right) \right\} = \\ = \exp \left\{ \frac{jw_1^2}{2} K_{11} + \frac{jw_2^2}{2} K_{22} + jw_1 \cdot jw_2 \cdot K_{12} \right\}, \end{aligned}$$

где K_{11} , K_{12} , K_{22} – корреляционные моменты, которые определяются равенствами

$$K_{11} = \frac{((\mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + a_1\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_1)\mathbf{e}}{(\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_1)\mathbf{e}},$$

$$K_{12} = \frac{((\mathbf{g}_{21} + \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + (\mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3))\mathbf{e}}{(\mathbf{r}(\gamma_1\mathbf{I}_1 + \gamma_2\mathbf{I}_3))\mathbf{e}},$$

$$K_{22} = \frac{((\mathbf{g}_{21} + \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + a_2\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_3)\mathbf{e}}{(\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_3)\mathbf{e}}. \quad (9)$$

Здесь вектор вероятностей состояний прибора \mathbf{r} является решением уравнения (6), а векторы \mathbf{g}_{11} , \mathbf{g}_{12} , \mathbf{g}_{21} , \mathbf{g}_{22} , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 являются решениями неоднородных систем уравнений:

$$\mathbf{g}_{11}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \gamma_1\mathbf{r}\{\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\},$$

$$\mathbf{g}_{12}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \gamma_2\mathbf{r}\{\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\},$$

$$\mathbf{z}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \mathbf{r}(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1),$$

$$\mathbf{g}_{11}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{12}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_1\mathbf{e} = 0. \quad (10)$$

$$\mathbf{g}_{21}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \gamma_1\mathbf{r}\{\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\},$$

$$\mathbf{g}_{22}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \gamma_2\mathbf{r}\{\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\},$$

$$\mathbf{z}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \mathbf{r}(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3),$$

$$\mathbf{g}_{21}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{22}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_2\mathbf{e} = 0. \quad (11)$$

Доказательство. В системе уравнений (2) сделаем замены

$$\mathbf{H}(u_1, u_2) = \exp\left(ju_1 \frac{a_1}{\sigma_1} + ju_2 \frac{a_2}{\sigma_2}\right) \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2),$$

получим систему

$$\mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2) \left\{ \mathbf{A} + e^{ju_1} \mathbf{B} + e^{ju_2} \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - e^{-ju_1} \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - e^{-ju_2} \mathbf{I}_3) \right\} +$$

$$+ j\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \left\{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju_1} \mathbf{I}_1 \right\} + j\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \left\{ \mathbf{I}_2 - e^{-ju_2} \mathbf{I}_3 \right\} = 0,$$

$$(e^{ju_1} - 1) \left\{ \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)(\mathbf{B} - e^{-ju_1} a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} +$$

$$+ (e^{ju_2} - 1) \left\{ \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)(\mathbf{C} - e^{-ju_2} a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (12)$$

В системе (12) сделаем замены

$$\sigma_1 = \gamma_1\sigma, \quad \sigma_2 = \gamma_2\sigma, \quad \sigma = \varepsilon^2, \quad u_1 = w_1\varepsilon, \quad u_2 = w_2\varepsilon,$$

$$\mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2) = \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon),$$

тогда получим систему

$$\mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon) \left\{ \mathbf{A} + e^{j\varepsilon w_1} \mathbf{B} + e^{j\varepsilon w_2} \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - e^{-j\varepsilon w_2} \mathbf{I}_3) \right\} +$$

$$+ j\varepsilon\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \left\{ \mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_1 \right\} +$$

$$+ j\varepsilon\gamma_2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \left\{ \mathbf{I}_2 - e^{-j\varepsilon w_2} \mathbf{I}_3 \right\} = 0,$$

$$(e^{j\varepsilon w_1} - 1) \left\{ \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)(\mathbf{B} - e^{-j\varepsilon w_1} a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + j\varepsilon\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} +$$

$$+ (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \left\{ \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)(\mathbf{C} - e^{-j\varepsilon w_2} a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + j\varepsilon\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (13)$$

Будем искать решение полученной системы уравнений (13) в виде

$$\mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon) = \Phi_2(w_1, w_2) \left\{ \mathbf{r} + j\varepsilon w_1 \mathbf{f}_1 + j\varepsilon w_2 \mathbf{f}_2 \right\} + O(\varepsilon^2).$$

Подставим решение в (13), разложим экспоненты в ряд Тейлора, разделим уравнения системы на $j\varepsilon\Phi_2(w_1, w_2)$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$w_1 \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) + \mathbf{r}(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) \right\} +$$

$$+ w_2 \left\{ \mathbf{f}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) + \mathbf{r}(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) \right\} +$$

$$+ \gamma_1 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi_2(w_1, w_2)} \left\{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \right\} + \gamma_2 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi_2(w_1, w_2)} \left\{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \right\} = 0,$$

$$w_1 \left\{ (w_1 \mathbf{f}_1 + w_2 \mathbf{f}_2)(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + a_1\gamma_1 w_1 \mathbf{r} \mathbf{I}_1 + \gamma_1 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi_2(w_1, w_2)} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} +$$

$$+ w_2 \left\{ (w_1 \mathbf{f}_1 + w_2 \mathbf{f}_2)(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + a_2\gamma_2 w_2 \mathbf{r} \mathbf{I}_3 + \gamma_2 \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi_2(w_1, w_2)} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} = 0.$$

Заметим, что скалярная функция $\Phi_2(w_1, w_2)$ определяется в виде

$$\Phi_2(w_1, w_2) = \exp \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} K_{11} + \frac{(jw_2)^2}{2} K_{22} + jw_1 \cdot jw_2 \cdot K_{12} \right\},$$

$$\frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2) / \partial w_1}{\Phi_2(w_1, w_2)} = -(w_1 K_{11} + w_2 K_{12}),$$

$$\frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2) / \partial w_2}{\Phi_2(w_1, w_2)} = -(w_2 K_{22} + w_1 K_{12}).$$

Имеем

$$w_1 \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{r}(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) - \gamma_1 \mathbf{r} K_{11} \left\{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \right\} - \right.$$

$$\left. - \gamma_2 \mathbf{r} K_{12} \left\{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \right\} \right\} + w_2 \left\{ \mathbf{f}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{r}(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) - \gamma_2 \mathbf{r} K_{22} \left\{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \right\} - \gamma_1 \mathbf{r} K_{12} \left\{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \right\} \right\} = 0,$$

$$w_1^2 \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + a_1\gamma_1 \mathbf{r} \mathbf{I}_1 - \gamma_1 \mathbf{r} K_{11} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e} +$$

$$+ w_2^2 \left\{ \mathbf{f}_2(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + a_2\gamma_2 \mathbf{r} \mathbf{I}_3 - \gamma_2 \mathbf{r} K_{22} \mathbf{I}_3 \right\} \mathbf{e} +$$

$$+ w_1 w_2 \left\{ \mathbf{f}_2(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + \mathbf{f}_1(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) - \mathbf{r} K_{12} (\gamma_1 \mathbf{I}_1 + \gamma_2 \mathbf{I}_3) \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим отдельно уравнения системы (14):

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) =$$

$$= -\mathbf{r}(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + \gamma_1 \mathbf{r} K_{11} \left\{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \right\} + \gamma_2 \mathbf{r} K_{12} \left\{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \right\},$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) =$$

$$= -\mathbf{r}(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + \gamma_2 \mathbf{r} K_{22} \left\{ \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \right\} + \gamma_1 \mathbf{r} K_{12} \left\{ \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 \right\}. \quad (15)$$

Система (15) – неоднородная система линейных алгебраических уравнений для \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 . Решение системы (15) можно записать в виде

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{C}\mathbf{r} + K_{11}\mathbf{g}_{11} + K_{12}\mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1,$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{C}\mathbf{r} + K_{12}\mathbf{g}_{21} + K_{22}\mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2. \quad (16)$$

Здесь \mathbf{C} – константа, вероятности \mathbf{r} определены выше, а векторы \mathbf{g}_{11} , \mathbf{g}_{12} , \mathbf{g}_{21} , \mathbf{g}_{22} , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 являются частными решениями неоднородной системы (15), удовлетворяющими условиям

$$\mathbf{g}_{11}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{12}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_1\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{21}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{22}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_2\mathbf{e} = 0.$$

Получим системы для нахождения частных решений неоднородной системы (15):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_1\mathbf{r}\{\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\}, \\ \mathbf{g}_{12}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_2\mathbf{r}\{\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\}, \\ \mathbf{z}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \mathbf{r}(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1), \\ \mathbf{g}_{11}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{12}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_1\mathbf{e} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{21}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_1\mathbf{r}\{\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\}, \\ \mathbf{g}_{22}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_2\mathbf{r}\{\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\}, \\ \mathbf{z}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \mathbf{r}(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3), \\ \mathbf{g}_{21}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{22}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_2\mathbf{e} = 0. \end{aligned}$$

Решив последнюю систему, получим векторы \mathbf{g}_{11} , \mathbf{g}_{12} , \mathbf{g}_{21} , \mathbf{g}_{22} , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 , подставив которые в выражения для \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 , а затем в уравнение для нахождения величин K_{11} , K_{22} и K_{12} :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{((\mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + a_1\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_1)\mathbf{e}}{(\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_1)\mathbf{e}}, \\ K_{12} &= \frac{((\mathbf{g}_{21} + \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{B} - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1) + (\mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3))\mathbf{e}}{(\mathbf{r}(\gamma_1\mathbf{I}_1 + \gamma_2\mathbf{I}_3))\mathbf{e}}, \\ K_{22} &= \frac{((\mathbf{g}_{21} + \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{C} - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3) + a_2\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_3)\mathbf{e}}{(\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_3)\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_1(t)$ и $i_2(t)$ заявок на первой и второй орбитах в рассматриваемой циклической системе является нормальным распределением с асимптотическими средними: a_1/σ_1 , a_2/σ_2 , дисперсиями: K_{11}/σ_1 , K_{22}/σ_2 и коэффициентом корреляции числа заявок на первой и второй орбитах $K_{12}/\gamma_1\gamma_2\sigma$.

Численный анализ

Для построения плотности распределения вероятностей двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах была использована система математических вычислений Mathcad. Задав необходимые начальные параметры: $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $\sigma = 0.01$, $\sigma_1 = \gamma_1\sigma$, $\sigma_2 = \gamma_2\sigma$, построим плотность распределения вероятностей двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

$$\text{где } \mu_1 = a_1/\sigma_1, \mu_2 = a_2/\sigma_2, \sigma_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{\sigma_1}}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{K_{22}}{\sigma_2}},$$

$$\rho = \frac{K_{12}}{\gamma_1\gamma_2\sigma}, \text{ а коэффициенты } a_1, a_2, K_{11}, K_{12}, K_{22} \text{ были}$$

найжены с помощью первой и второй асимптотики в теоремах 1 и 2. Построим график плотности двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах (рис. 2).

Для определения точности полученных предельных результатов сравним их с эмпирическим распределением, полученным в результате работы имитационной модели. Точность асимптотических результатов будем оценивать с помощью расстояния Колмогорова между аналитическим и эмпирическим распределениями. В таблице приведены значения этих расстояний для различных параметров σ для первой (Δ_1) и второй (Δ_2) орбит.

Расстояние Колмогорова Δ_1 и Δ_2

Δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.001$
Δ_1	0.0701	0.0129	0.0029	0.0011
Δ_2	0.1533	0.0194	0.0027	0.0006

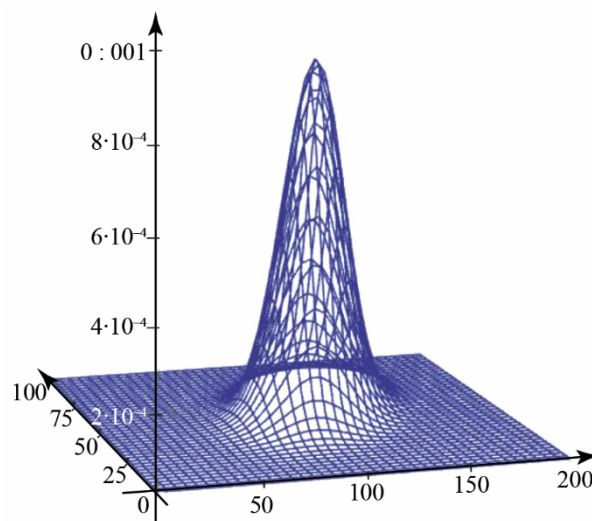


Рис. 2. График плотности $f(x_1, x_2)$ асимптотического двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах

Fig. 2. Graph of the increase $f(x_1, x_2)$ of the asymptotic two-dimensional normal distribution of the number of applications for the first and second orbits

Анализируя данные таблицы, можно сделать вывод, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ . Полу жирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность

аппроксимаций удовлетворительной. Из полученных значений можно сделать вывод, что аппроксимация, полученная с помощью асимптотического анализа, дает хорошие результаты при низкой интенсивности повторного обслуживания ($\sigma \leq 0.1$).

Заключение

Таким образом, найденная асимптотика первого и второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_1(t)$ и $i_2(t)$ заявок на первой и второй орбитах в рассматриваемой циклической системе является нормальным распределе-

нием с асимптотическими средними: a_1/σ_1 , a_2/σ_2 , дисперсиями: K_{11}/σ_1 , K_{22}/σ_2 и коэффициентом корреляции числа заявок на первой и второй орбитах $K_{12}/\gamma_1\gamma_2\sigma$.

Отметим также, что в исследовании осуществлены первые шаги по описанию сетей FANET в терминах теории массового обслуживания, что в дальнейшем позволит построить наиболее адекватные математические модели таких сетей и определять их ключевые характеристики с точки зрения архитектуры и передачи данных.

Список источников

1. Pasandideh F., J.P.J. da Costa, Kunst R. et al. A Review of Flying Ad Hoc Networks: Key Characteristics, Applications, and Wireless Technologies // *Remote Sensing*. 2022. V. 14(18). Art. 4459. P. 1–25. DOI: 10.3390/rs14184459
2. Вишневецкий В.М., Семёнова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М.: Техносфера, 2007. 312 с.
3. Вишневецкий В.М., Семёнова О.В. Математические методы исследования систем поллинга // *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 2. С. 3–56.
4. Nazarov A., Paul S. A Cyclic Queueing System with Priority Customers and T-Strategy of Service // *CCIS*. 2016. V. 678. P. 182–193. DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_17
5. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial queueing systems: A computational approach. Berlin : Springer, 2008. 267 p.
6. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial Queues. London : Chapman and Hall, 1997. 328 p.
7. Alfa A.S., Isotupa K.P.S. An M/PH/k retrial queue with finite number of sources // *Computers and Operations Research*. 2004. V. 31(9). P. 1455–1464. DOI: 10.1016/S0305-0548(03)00100-X
8. Artalejo J.R. Algorithmic Methods in Retrial Queues. Dordrecht : Springer. Series Annals of operations research, 2006. V. 141.
9. Nazarov A., Paul S., Gudkova I. Asymptotic analysis of markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrial condition // *31st European Conference on Modelling and Simulation (ECMS-2017) : proceedings*. Budapest, Hungary, May 23–26, 2017. Sbr.-Dudweiler, 2017. P. 687–693.
10. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication // *Communications in Computer and Information Science*. 2017. V. 800: 16th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2017). Kazan, 2017. P. 28–41.

References

1. Pasandideh, F., da Costa, J.P.J., Kunst, R. & etc. (2022) A Review of Flying Ad Hoc Networks: Key Characteristics, Applications, and Wireless Technologies. *Remote Sensing*. 14 (18). Art. 4459. pp. 1–25. DOI: 10.3390/rs14184459
2. Vishnevsky, V.M. & Semyonova, O.V. (2007) *Polling systems: theory and application in broadband wireless networks*. Moscow : Technosfera.
3. Vishnevsky, V.M. & Semyonova, O.V. (2006) Mathematical methods for studying polling systems. *Automation and Remote Control*. 2. pp. 3–56.
4. Nazarov, A. & Paul, S. (2016) A Cyclic Queueing System with Priority Customers and T-Strategy of Service. *CCIS*. 678. pp. 182–193. DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_17
5. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial queueing systems: A computational approach*. Berlin : Springer.
6. Falin, G.I. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London : Chapman and Hall.
7. Alfa, A.S. & Isotupa, K.P.S. (2004) An M/PH/k retrial queue with finite number of sources. *Computers and Operations Research*. 31 (9). pp. 1455–1464. DOI: 10.1016/S0305-0548(03)00100-X
8. Artalejo, J.R. (2006) Algorithmic Methods in Retrial Queues. In: *Annals of operations research*. Vol. 141. Dordrecht : Springer.
9. Nazarov, A., Paul, S. & Gudkova, I. (2017) Asymptotic analysis of markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrial condition. In: *31st European Conference on Modelling and Simulation (ECMS-2017) : proceedings*. Budapest, Hungary, May 23–26, 2017. Sbr.-Dudweiler. pp. 687–693.
10. Nazarov, A., Phung-Duc, T. & Paul, S. (2017) Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication. *Communications in Computer and Information Science*. 800. pp. 28–41.

Информация об авторах:

Назаров Анатолий Андреевич – доктор технических наук, профессор Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Шульгина Ксения Сергеевна – магистрант Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: shulgina19991999@mail.ru

Салимзянов Радмир Ренатович – магистрант Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rsalimzyanov@yahoo.com

Пауль Светлана Владимировна – доктор физико-математических наук, доцент Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: paulsv82@mail.ru

Шашев Дмитрий Вадимович – кандидат технических наук, доцент Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dshashev@mail.ru

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Nazarov Anatoly A., Dr.Sc. (Engineering), Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Shulgina Ksenia S., master degree student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: shulgina19991999@mail.ru

Salimzyanov Radmir R., master degree student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: rsalimzyanov@yahoo.com

Paul Svetlana V., Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: paulsv82@mail.ru

Shashev Dmitry V., Cand.Sc. (Engineering), Associate Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: dshashev@mail.ru

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 5.06.2023; одобрена после рецензирования 26.06.2023; принята к публикации 12.07.2023

The article was submitted 5.06.2023; approved after reviewing 26.06.2023; accepted for publication 12.07.2023