

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

УДК 519.2

*Д.Д. Ахмедова, О.А. Змеев, А.Ф. Тернугов*

**ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ  
С УЧЁТОМ РАСХОДОВ НА РЕКЛАМУ**

Решается задача об оптимальном во времени распределении расходов на рекламу. Строится стратегия рекламной программы в зависимости от условий эффективности рекламы. Получены выражения для ковариаций капитала и числа клиентов страховой компании.

В настоящее время вызывают интерес математические модели актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. В актуарной математике уже существует классическая модель страховой компании, где не учитываются многие факторы. В [1] нами была рассмотрена модель с учетом расходов на рекламу, найдены основные характеристики капитала компании и условия эффективности рекламы в случае, когда расходы на рекламу пропорциональны капиталу. Теперь же мы определим, как меняются характеристики капитала и число клиентов в зависимости от рекламной стратегии компании, а также рассмотрим задачу оптимизации рекламной компании в случае, когда доля денег, выделяемых на рекламу, меняется со временем.

**Математическая модель  
и постановка задачи**

Будем считать, что в момент времени  $t$  состояние страховой компании характеризуется её капиталом  $S(t)$  и числом застрахованных клиентов  $k(t)$ . Количество денег, выделяемых на рекламу, будет характеризоваться величиной  $\alpha(t)$ , так что на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$  на рекламу выделяется  $\alpha(t)S(t)\Delta t$  денег и  $0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_0$ .

В [1] подробно описана модель страховой компании и получена система дифференциальных уравнений, описывающая состояние страховой компании в среднем:

$$\begin{aligned} \frac{dM\{S(t)\}}{dt} &= a\lambda_0 + \alpha(t)(\lambda_1 a - 1)M\{S(t)\} + \\ &+ (c_2\mu_2 - b_1\mu_1)M\{k(t)\}, \\ \frac{dM\{k(t)\}}{dt} &= \lambda_0 + \lambda_1\alpha(t)M\{S(t)\} - \mu M\{k(t)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Смысл входящих сюда параметров описан в [1].

Рассмотрим теперь следующую задачу: пусть страховая компания начинает свою работу в момент времени  $t=0$  и она хочет провести рекламную программу таким образом, чтобы к концу рассматриваемого промежутка времени  $[0, T]$  её капитал стал максимальным. Определим критерий оптимальности следующим образом:

$$\frac{M\{S(T)\} - S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}} \rightarrow \max.$$

Максимум ищется по виду  $\alpha(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  с учетом ограничений  $0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_0$ ;  $S_0$  – капитал компании в начальный момент времени. Заметим, что это одна из постановок задач на оптимизацию рекламной деятельности.

**Решение задачи**

**Система уравнений для ковариаций капитала и числа клиентов компании**

Для решения задачи разделим рассматриваемый промежуток времени  $[0, T]$  на три  $[0, T_0]$ ,  $[T_0, T_1]$  и

$[T_1, T]$ , причем каждому из промежутков соответствует своё значение  $\alpha(t)$ :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T_0, \\ \alpha_0, & T_0 \leq t \leq T_1, \\ 0, & T_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Естественно, значение средних и дисперсий для капитала и числа клиентов будут различны в зависимости от промежутка. Система относительно средних капитала и числа клиентов уже получена. Выведем систему дифференциальных уравнений для ковариаций капитала и числа клиентов. Имеем:

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) &= S(t) + \Delta S(t) - \alpha(t)S(t)\Delta t, \\ D\{S(t)\} &= M\{S^2(t)\} - M^2\{S(t)\}, \\ \frac{dD\{S(t)\}}{dt} &= \frac{dM\{S^2(t)\}}{dt} - \frac{dM^2\{S(t)\}}{dt}. \end{aligned}$$

Обозначим  $M\{\xi^2\} = a_2$ ,  $M\{\eta^2\} = b_2$ ,  $M\{\zeta\} = c_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dM\{S^2(t)\}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M\{S^2(t + \Delta t)\} - M\{S^2(t)\}}{\Delta t}, \\ S^2(t + \Delta t) &= S^2(t) + \Delta^2 S(t) + 2S(t)\Delta S(t) - \\ &- 2\alpha(t)S^2(t)\Delta t - 2\alpha(t)\Delta S(t)S(t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Ограничиваясь членами с  $\Delta t$ , запишем выражение для  $M\{S^2(t + \Delta t)\}$ . Имеем

$$\begin{aligned} M\{S^2(t + \Delta t)\} &= M\{S^2(t)\} + 2\lambda_0 a M\{S(t)\}\Delta t + \\ &+ (b_2\mu_1 + c_2\mu_2)M\{k(t)\}\Delta t + \\ &+ a_2(\lambda_0 + \lambda_1\alpha M\{S(t)\})\Delta t + \\ &+ 2(c_2\mu_2 - b_1\mu_1)M\{S(t)k(t)\}\Delta t + \\ &+ 2a\lambda_1\alpha M\{S^2(t)\}\Delta t - 2\alpha M\{S^2(t)\} + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Так как  $\frac{dM^2\{S(t)\}}{dt} = 2M\{S(t)\}\frac{dM\{S(t)\}}{dt}$ , то с учетом (1) можем записать дифференциальное уравнение для дисперсии капитала компании:

$$\begin{aligned} \frac{dD\{S(t)\}}{dt} &= 2\alpha(t)(a\lambda_1 - 1)D\{S(t)\} + \\ &+ \lambda_1 a_2 \alpha(t)M\{S(t)\} + 2(c_2\mu_2 - b_1\mu_1)C(S, k) + \\ &+ (c_2\mu_2 + b_1\mu_1)M\{k(t)\} + \lambda_0 a_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C(S, k) = \text{cov}(S(t), k)$ . После аналогичных преобразований можем получить дифференциальное уравнение для дисперсии числа клиентов компании

$$\begin{aligned} \frac{dD\{k(t)\}}{dt} &= \frac{dM\{k^2(t)\}}{dt} - \frac{dM^2\{k(t)\}}{dt}, \\ \frac{dD\{k(t)\}}{dt} &= -2\mu D\{k(t)\} + \mu M\{k(t)\} + \end{aligned}$$

$$+\lambda_1\alpha(t)M\{S(t)\}+2\lambda_1\alpha(t)C(S,k)+\lambda_0. \quad (3)$$

Уравнение для ковариации  $S(t)$  и  $k(t)$  имеет следующий вид

$$\frac{dC(S,k)}{dt} = \frac{dM\{S(t)k(t)\}}{dt} - \frac{d[M\{S(t)\}M\{k(t)\}]}{dt},$$

$$\frac{dC(S,k)}{dt} = \lambda_1\alpha(t)D(S(t)) + (c\mu_2 - b\mu_1)D\{k(t)\} + \lambda_1\alpha\alpha(t)M\{S(t)\} + \lambda_0 a + (\lambda_1\alpha\alpha(t) - \alpha(t) - \mu)C(S,k). \quad (4)$$

Заметим, что в уравнениях (2), (3), (4) присутствуют выражения для средних значений капитала и числа клиентов компании, что является решением системы (1). Имеет (далее для удобства будем  $\alpha(t)$  обозначать  $\alpha$ ):

$$M\{S(t)\} = \frac{1}{\lambda_1\alpha} \left[ K_1 e^{\gamma_1 t} (\mu + \gamma_1) + K_2 e^{\gamma_2 t} (\mu + \gamma_2) \right] + \frac{1}{\lambda_1\alpha} \left( \frac{\mu\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2} - \lambda_0 \right), \quad (5)$$

$$M\{k(t)\} = K_1 e^{\gamma_1 t} + K_2 e^{\gamma_2 t} + \frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2},$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  – корни характеристического уравнения системы (1);  $K_1, K_2$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий  $M\{S(0)\} = S_0, M\{k(0)\} = k_0$ .

#### Поведение дисперсий капитала и числа клиентов в зависимости от $\alpha(t)$

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений относительно ковариаций  $S(t)$  и  $k(t)$  при  $\alpha=0$ . Для этого подставим в систему значение  $\alpha$ , после чего получим [далее, чтобы подчеркнуть зависимость интересующих нас функций от  $t$  и  $\alpha$  будем записывать  $D_S(t, \alpha), D_k(t, \alpha), C_{Sk}(t, \alpha)$ ]:

$$\frac{dD_S(t,0)}{dt} = 2(c\mu_2 - b\mu_1)C_{Sk}(t,0) + (c_2\mu_2 + b_1\mu_1)M\{k(t,0)\} + \lambda_0 a_2,$$

$$\frac{dC_{Sk}\{t,0\}}{dt} = (c\mu_2 - b\mu_1)D_k(t,0) + \lambda_0 a - \mu C_{Sk}(t,0),$$

$$\frac{dD_k(t,0)}{dt} = -2\mu D_k(t,0) + \mu M\{k(t,0)\} + \lambda_0. \quad (6)$$

Так как в систему входят выражения средних значений капитала и числа клиентов при  $\alpha = 0$ , то необходимо записать решение системы (1) в этом случае. Имеем [далее математическое ожидание капитала и числа клиентов будем обозначать  $\bar{S}(t), \bar{k}(t)$ ]:

$$\frac{d\bar{S}(t)}{dt} = a\lambda_0 + (c\mu_2 - b\mu_1)\bar{k}(t), \quad \frac{d\bar{k}(t)}{dt} = \lambda_0 - \mu\bar{k}(t). \quad (7)$$

Решение системы (7) имеет следующий вид:

$$\bar{S}(t,0) = \lambda_0 \left( a + \frac{c\mu_2 - b\mu_1}{\mu} \right) t - D_1 \frac{c\mu_2 - b\mu_1}{\mu} e^{-\mu t} + D_2,$$

$$\bar{k}(t,0) = \frac{\lambda_0}{\mu} + D_1 e^{-\mu t},$$

где константы  $D_1, D_2$  определяются из начальных условий  $\bar{S}(0,0) = S_0, \bar{k}(0,0) = k_0$ .

Заметим, что  $D_k(t,0)$  однозначно определяется из второго уравнения системы (6). Имеем

$$D_k(t,0) = C_1 e^{-2\mu t} + \frac{D_1}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{\lambda_0}{\mu}.$$

Тогда из третьего уравнения системы (6) получаем выражение для ковариации

$$C_{Sk}(t,0) = \frac{C_1}{\mu} e^{-2\mu t} + \left( C_2 + \frac{D_1 t}{\mu} \right) e^{-\mu t} + (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) \frac{\lambda_0}{\mu^2}.$$

Запишем выражение для дисперсии капитала:

$$D_S(t,0) = \left[ \frac{2\lambda_0}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) + \frac{\lambda_0}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) \right] t - \frac{2D_1}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) t e^{-\mu t} - 2 \left[ \frac{1}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1) (C_2 + 2D_1) + (c\mu_2 - b\mu_1) \frac{D_1}{\mu^2} \right] e^{-\mu t} - \frac{C_1}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) e^{-2\mu t} + C_3,$$

где константы  $C_1, C_2, C_3$  определяются из следующих начальных условий:

$$D_S(0,0) = 0, D_k(0,0) = 0, C_{Sk}(0,0) = 0.$$

Имеем

$$C_1 = -\frac{\lambda_0}{\mu} \frac{D_1}{\mu}, C_2 = \frac{C_1}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) \frac{\lambda_0}{\mu^2},$$

$$C_3 = \frac{2}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1) \left( C_2 + 2D_1 - \frac{D_1}{\mu} \right) + \frac{C_1}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1).$$

Система дифференциальных уравнений относительно ковариаций капитала и числа клиентов при ненулевом  $\alpha(t)$  имеет следующий вид:

$$\frac{dD_S(t,\alpha)}{dt} = 2\alpha(a\lambda_1 - 1)D_S(t,\alpha) + \lambda_1 a_2 \alpha \bar{S}(t,\alpha) + 2(c\mu_2 - b\mu_1)C_{Sk}(t,\alpha) + (c_2\mu_2 + b_1\mu_1)\bar{k}(t,\alpha) + \lambda_0 a_2,$$

$$\frac{dC_{Sk}(t,\alpha)}{dt} = \lambda_1 \alpha D_S(t,\alpha) + (c\mu_2 - b\mu_1)D_k(t,\alpha) + \lambda_1 \alpha \alpha \bar{S}(t,\alpha) + \lambda_0 a + (\lambda_1 \alpha \alpha - \alpha - \mu)C_{Sk}(t,\alpha),$$

$$\frac{dD_k(t,\alpha)}{dt} = -2\mu D_k(t,\alpha) + \mu \bar{k}(t,\alpha) + \lambda_1 \alpha + 2\lambda_1 \alpha C_{Sk}(t,\alpha) + \lambda_0. \quad (8)$$

Обозначим через  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  – корни характеристического уравнения системы (8). Само уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2\alpha(a\lambda_1 - 1) - \kappa_1 & -2(c\mu_2 - b\mu_1) & 0 \\ \lambda_1 \alpha & \lambda_1 \alpha \alpha - \alpha - \mu - \kappa_2 & c\mu_2 - b\mu_1 \\ 0 & 2\lambda_1 \alpha & -2\mu - \kappa_3 \end{vmatrix} = 0$$

или в явном виде

$$-\kappa^3 + 3(\lambda_1 \alpha \alpha - \mu - \alpha)\kappa^2 + 2[-(\lambda_1 \alpha \alpha - \mu - \alpha)^2 + 2\mu\alpha(\lambda_1 - 1) + 2\lambda_1 \alpha (c\mu_2 - b\mu_1)]\kappa - 4(\lambda_1 \alpha \alpha - \mu - \alpha) \times [\mu\alpha(\lambda_1 - 1) + \lambda_1 \alpha (c\mu_2 - b\mu_1)] = 0, \quad (9)$$

откуда  $\kappa_1 = \gamma_1 + \gamma_2, \kappa_2 = 2\gamma_1, \kappa_3 = 2\gamma_2$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  – корни характеристического уравнения системы (1):

$$\gamma_1 = \frac{-(\mu - a\lambda_1 \alpha + \alpha) + \sqrt{D}}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{-(\mu - a\lambda_1 \alpha + \alpha) - \sqrt{D}}{2},$$

$$D = (\mu - a\lambda_1 \alpha + \alpha)^2 - 4[\alpha\lambda_1 (b\mu_1 - c\mu_2 - \mu a) + \mu\alpha].$$

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} D_S(t, \alpha) &= F_1(t)Y_{11}e^{\kappa_1 t} + F_2(t)Y_{21}e^{\kappa_2 t} + F_3(t)Y_{31}e^{\kappa_3 t}, \\ C_{Sk}(t, \alpha) &= F_1(t)Y_{12}e^{\kappa_1 t} + F_2(t)Y_{22}e^{\kappa_2 t} + F_3(t)Y_{32}e^{\kappa_3 t}, \\ D_k(t, \alpha) &= F_1(t)Y_{13}e^{\kappa_1 t} + F_2(t)Y_{23}e^{\kappa_2 t} + F_3(t)Y_{33}e^{\kappa_3 t}, \end{aligned}$$

где  $Y_{ij}$  – алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{vmatrix} 2\alpha(a\lambda_1 - 1) & 2(c\mu_2 - b\mu_1) & 0 \\ \lambda_1\alpha & \lambda_1 a\alpha - \alpha - \mu_2 & c\mu_2 - b\mu_1 \\ 0 & 2\lambda_1\alpha & -2\mu \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$A = \lambda_1\alpha\bar{S}(t) + \mu\bar{k}(t) + \lambda_0, \quad B = \lambda_1\alpha a\bar{S}(t) + \lambda_0 a,$$

$$C = \lambda_1\alpha a_2\bar{S}(t) + (c_2\mu_2 + b_2\mu_1)\bar{k}(t) + \lambda_0 a_2.$$

Тогда чтобы получить общее решение системы (8), запишем уравнения относительно  $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} F_1'(t)Y_{11}e^{\kappa_1 t} + F_2'(t)Y_{21}e^{\kappa_2 t} + F_3'(t)Y_{31}e^{\kappa_3 t} &= C, \\ F_1'(t)Y_{12}e^{\kappa_1 t} + F_2'(t)Y_{22}e^{\kappa_2 t} + F_3'(t)Y_{32}e^{\kappa_3 t} &= B, \\ F_1'(t)Y_{13}e^{\kappa_1 t} + F_2'(t)Y_{23}e^{\kappa_2 t} + F_3'(t)Y_{33}e^{\kappa_3 t} &= A. \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta$  – определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{32} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

тогда имеем следующие выражения для интересующих нас  $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[ \frac{K_1(T_0)(\gamma_1 + \mu)}{[\gamma_1 - \kappa_1]} e^{(\gamma_1 - \kappa_1)t} + \right. \right. \\ &+ \frac{K_2(T_0)(\gamma_2 + \mu)}{[\gamma_2 - \kappa_1]} e^{(\gamma_1 - \kappa_1)t} - \left. \left( \frac{\mu\alpha\lambda_1}{\kappa_1\gamma_1\gamma_2} - \frac{\lambda_0}{\kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 t} \right] J_1 + \left[ \frac{K_1(T_0)}{\gamma_1 - \kappa_1} e^{(\gamma_1 - \kappa_1)t} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{K_2(T_0)}{\gamma_2 - \kappa_1} e^{(\gamma_2 - \kappa_1)t} - \frac{\alpha\lambda_0}{\kappa_1\gamma_1\gamma_2} e^{-\kappa_1 t} \right] I_1 - \frac{\lambda_0}{\kappa_1} e^{-\kappa_1 t} J_1 \right\} + F_1, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$J_i = M_{1i} + M_{i2}a + M_{i1}a_2, \quad I_i = \mu M_{i3} + (c_2\mu_2 + b_2\mu_1)M_{i1}, \quad i=1, 2, 3;$$

$M_{ij}$  – алгебраические дополнения матрицы (10). Выражения для  $K_1(T_0), K_2(T_0)$  определяются из условий сшивания в точке  $T_0$  для среднего значения капитала. Определим условия сшивания следующим образом:

$$\bar{S}(T_0, 0) = \bar{S}(T_0, \alpha), \quad \bar{S}'(T_0, 0) = \bar{S}'(T_0, \alpha).$$

Имеем

$$\begin{aligned} K_1(T_0) &= \frac{W \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[ W \left( T_0 \frac{1}{\gamma_1} \right) + V \right]}{\gamma_1 e^{\gamma_1 T_0} (\mu + \gamma_1)}, \\ K_2(T_0) &= \frac{W \left( T_0 \frac{1}{\gamma_1} \right) + V}{e^{\gamma_2 T_0} (\mu + \gamma_2) \left( 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)}, \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$W = \lambda_0\lambda_1\alpha \left( \frac{c\mu_2 - b\mu_1}{\mu} + a \right), \quad V = S_0\lambda_1\alpha \frac{\mu\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2} + \lambda_0.$$

Выражения для  $F_2(t), F_3(t)$  имеют аналогичный вид. Заметим, что в выражениях для  $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$  присутствуют константы  $F_1, F_2, F_3$ , которые определим из условий сшивания на границе:

$$\begin{aligned} D_S(T_0, 0) &= D_S(T_0, \alpha), \quad C_{Sk}(T_0, 0) = C_{Sk}(T_0, \alpha), \\ D_k(T_0, 0) &= D_k(T_0, \alpha). \end{aligned} \quad (13)$$

(13) – алгебраическая система уравнений относительно интересующих нас констант. Решая систему, получим

$$F_j = \frac{e^{-\kappa_j T_0}}{D} \left[ (D_S(T_0, 0) - Q_1(T_0))M_{j1} + (C_{Sk}(T_0, 0) - Q_2(T_0))M_{j1} + (D_k(T_0, 0) - Q_3(T_0))M_{j3} \right], \quad j=1, 2, 3, \quad (14)$$

где  $D$  – определитель матрицы (10);

$$\begin{aligned} Q_l(t) &= \frac{e^{\gamma_l t}}{\Delta} \left( \frac{Y_{1l}}{\gamma_1 - \kappa_1} K_1(T_0) [(\gamma_1 + \mu)J_1 + I_1] + \right. \\ &+ \frac{Y_{2l}}{\gamma_1 - \kappa_2} K_1(T_0) [(\gamma_1 + \mu)J_2 + I_2] + \\ &+ \left. \frac{Y_{3l}}{\gamma_1 - \kappa_2} K_1(T_0) [(\gamma_1 + \mu)J_3 + I_3] \right) + \\ &+ \frac{e^{\gamma_2 t}}{\Delta} \left( \frac{Y_{1l}}{\gamma_2 - \kappa_1} K_2(T_0) [(\gamma_2 + \mu)J_1 + I_1] + \right. \\ &+ \frac{Y_{2l}}{\gamma_2 - \kappa_2} K_2(T_0) [(\gamma_2 + \mu)J_2 + I_2] + \\ &+ \left. \frac{Y_{3l}}{\gamma_3 - \kappa_2} K_2(T_0) [(\gamma_1 + \mu)J_3 + I_3] \right) + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{Y_{1l}}{\kappa_1} \frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2} (-\mu J_1 - I_1) + \frac{Y_{2l}}{\kappa_2} \frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2} (-\mu J_2 - I_2) + \right. \\ &+ \left. \frac{Y_{3l}}{\kappa_3} \frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2} (-\mu J_3 - I_3) \right), \quad l=1, 2, 3. \quad (15) \end{aligned}$$

Из (14) видим, что  $F_j, j=1, 2, 3$  являются функциями от момента времени включения рекламы  $T_0$ . Запишем выражения для дисперсии капитала, ковариации капитала и числа клиентов, и дисперсии числа клиентов для  $T_0 \leq t \leq T_1$ :

$$\begin{aligned} D_S(t, \alpha) &= F_1(T_0)Y_{11}e^{\kappa_1 t} + F_2(T_0)Y_{21}e^{\kappa_2 t} + F_3(T_0)Y_{31}e^{\kappa_3 t} + Q_1(t), \\ C_{Sk}(t, \alpha) &= F_1(T_0)Y_{12}e^{\kappa_1 t} + F_2(T_0)Y_{22}e^{\kappa_2 t} + F_3(T_0)Y_{32}e^{\kappa_3 t} + Q_2(t), \\ D_k(t, \alpha) &= F_1(T_0)Y_{13}e^{\kappa_1 t} + F_2(T_0)Y_{23}e^{\kappa_2 t} + \\ &+ F_3(T_0)Y_{33}e^{\kappa_3 t} + Q_3(t). \quad (16) \end{aligned}$$

Определим поведение интересующих нас характеристик капитала и числа клиентов для случая, когда доля денег на рекламу равна нулю и  $T_1 \leq t \leq T$ . Имеем

$$\begin{aligned} D_k(t, 0) &= R_1 e^{-2\mu t} + \frac{L(T_0, T_1)}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{\lambda_0}{\mu}, \\ C_{Sk}(t, 0) &= \frac{R_1}{\mu} e^{-2\mu t} + \left( R_2 + \frac{L(T_0, T_1)}{\mu} t \right) e^{-\mu t} + \\ &+ (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) \frac{\lambda_0}{\mu^2}, \\ D_S(t, 0) &= \left[ \frac{2\lambda_0}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_0}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) \right] t - \frac{2L_1(T_0, T_1)}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) \times \end{aligned}$$

$$\times te^{-\mu} - 2 \left[ \frac{1}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1) (R_2 + 2L_1(T_0, T_1)) + (c\mu_2 - b\mu_1) \frac{L_1(T_0, T_1)}{\mu^2} \right] e^{-\mu} - \frac{R_1}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) e^{-2\mu} + R_3, \quad (17)$$

где константы  $R_1, R_2, R_3$  определяются из условий сшивания на границе. Заметим, что интересующие нас константы будут отличаться от тех констант, которые определены для случая  $\alpha=0$ . В этом случае они будут зависеть от  $T_0$  и  $T_1$ . Имеем

$$D_S(T_1, \alpha) = D_S(T_1, 0),$$

$$D_k(T_1, \alpha) = D_k(T_1, 0),$$

$$C_{sk}(T_1, \alpha) = C_{sk}(T_1, 0).$$

Выражение для  $L_1(T_0, T_1)$  определяется из условий сшивания для средних значений капитала и числа клиентов аналогичным образом

$$L_1(T_0, T_1) = \left[ W - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left( W \left( T_0 - \frac{1}{\gamma_1} \right) + V \right) \right] \times \frac{e^{\gamma_1(T_1 - T_0)}}{\gamma_1(\gamma_1 + \mu)} + \left[ W \left( T_0 - \frac{1}{\gamma_1} \right) + V \right] \times \frac{e^{\gamma_2(T_1 - T_0)} \gamma_1}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 + \mu)} + \frac{\alpha \lambda_0}{\gamma_1 \gamma_2} - \frac{\lambda_0}{\mu} \Big] e^{\mu T_1}. \quad (18)$$

Выпишем выражения для констант  $R_1, R_2, R_3$ :

$$R_1(T_0, T_1) = e^{2\mu T_1} \left( D_k(T_1, \alpha) - \frac{\lambda_0}{\mu} - \frac{L_1(T_0, T_1)}{\mu} e^{-\mu T_1} \right),$$

$$R_2(T_0, T_1) = e^{\mu T_1} \left( C_{sk}(T_1, \alpha) - \frac{R_1(T_0, T_1)}{\mu} \times e^{-2\mu T_1} - (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) \frac{\lambda_0}{\mu^2} - \frac{L_1(T_0, T_1)}{\mu} T_1 e^{-\mu T_1} \right),$$

$$R_3(T_0, T_1) = D_S(T_1, \alpha) - \frac{\lambda_0}{\mu} \left[ \frac{2}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1) \times (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) + (c_2\mu_2 + b_2\mu_1) + \lambda_0 a\mu \right] \times T_1 + \frac{2L_1(T_0, T_1)}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) T_1 e^{-\mu T_1} + \frac{2}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1) \left( R_2(T_0, T_1) + L_1(T_0, T_1) \left( 2 + \frac{1}{\mu} \right) \right) \times$$

$$\times e^{-\mu T_1} + \frac{R_1(T_0, T_1)}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) e^{-2\mu T_1}. \quad (19)$$

Теперь дисперсия и математическое ожидание капитала зависят от моментов включения и отключения рекламы. Вспомнив критерий оптимальности, обозначим

$$U(T_0, T_1) = \frac{M\{S(T)\} - S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}}. \quad (20)$$

При выполнении условия  $\left. \frac{\partial U(T_0, T_1)}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} < 0$  страхо-

вая компания включает рекламу в нулевой момент времени, то есть в тот самый момент, когда начинает работать [2]. Таким образом, критерий оптимальности (20) запишем в виде

$$U(T_0, T_1) = \frac{M\{S(T)\} - S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}} \Rightarrow \max.$$

Имеем

$$\bar{S}(T, 0) \Big|_{T_0=0} = P_1(T - T_1) + e^{-\mu(T - T_1)} (V_1 e^{\gamma_1 T_1} + V_2 e^{\gamma_2 T_1} + V_3) + W_1 e^{\gamma_1 T_1} + W_2 e^{\gamma_2 T_1} + P_2,$$

$$D_S(T, 0) \Big|_{T_0=0} = H_1(T - T_1) - T e^{-\mu(T - T_1)} \times (A_1 e^{\gamma_1 T_1} + A_2 e^{\gamma_2 T_1} + A_3) - e^{-\mu(T - T_1)} (B_1 e^{\kappa_1 T_1} + B_2 e^{\kappa_2 T_1} + B_3 e^{\kappa_3 T_1} + B_4 e^{\gamma_1 T_1} + B_5 e^{\gamma_2 T_1} + B_6) - e^{-\mu(T - T_1)} T_1 \times (E_1 e^{\gamma_1 T_1} + E_2 e^{\gamma_2 T_1} + E_3) - e^{-2\mu(T - T_1)} (G_1 e^{\kappa_1 T_1} + G_2 e^{\kappa_2 T_1} + G_3 e^{\kappa_3 T_1} + G_4 e^{\gamma_1 T_1} + G_5 e^{\gamma_2 T_1} + G_6) + J_1 e^{\kappa_1 T_1} + J_2 e^{\kappa_2 T_1} + J_3 e^{\kappa_3 T_1} + J_4 e^{\gamma_1 T_1} + J_5 e^{\gamma_2 T_1} + (I_1 e^{\gamma_1 T_1} + I_2 e^{\gamma_2 T_1} + I_3) T_1 + H_2, \quad (21)$$

где все  $P_i, V_i, W_i, H_i, A_i, B_i, E_i, G_i, J_i, I_i$  – выражения, зависящие от параметров модели. Например,

$$H_1 = \frac{2\lambda_0}{\mu^2} (c\mu_2 - b\mu_1) (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu) + \frac{\lambda_0}{\mu} (c\mu_2 - b\mu_1 + a\mu). \quad (22)$$

Из-за громоздкости эти выражения не приводятся. Далее задача сводится к отысканию с помощью численных методов такого момента  $T_1$ , при котором функция  $U(0, T_1)$  имеет максимум.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедова Д.Д., Тертугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1. С. 25–28.
2. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 615 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию номера 3 декабря 2001 г.