

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
IX-й Международной научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 26–28 мая 2022 г.

*Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

Приведенные результаты статистических экспериментов, а также другие многочисленные испытания имитационной модели подтверждают её работоспособность и соответствие результатов моделирования физическому представлению о протекающих процессах в МАР-потоке событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Соловьев А.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительность непродлевающегося мертвого времени в МАР-потоке событий // Вестник Томского государственного университета. – 2015. – № 4(33). – С. 13 – 22.
2. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. – М.: Техносфера, 2018. – 564 с.
3. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Соловьев А.А. Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 8. – С. 49 – 63.
4. Лифшиц А.Л. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. – М.: Сов. Радио, 1978. – 248 с.
5. Нежелская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского государственного университета, 2020. – 210 с.

DOI: 10.17223/978-5-907572-27-0-2022-3

ММ-ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В РЕКУРРЕНТНОМ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Горцев А.М., Веткина А.В.

Томский государственный университет
anyavetkina@stud.tsu.ru

Введение

Входящие потоки событий в современных телекоммуникационных системах наиболее адекватно описывают дважды стохастические потоки событий – потоки, у которых случайными являются моменты наступления событий и интенсивность. В общем случае дважды стохастические потоки событий являются коррелированными потоками. Благодаря этому исследование разновидностей дважды стохастических потоков является актуальной задачей.

Дважды стохастические потоки делятся на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс которых есть непрерывный случайный процесс [1,2]; второй – потоки, сопровождающий процесс которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний [3–5].

Также в зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, выделяется три типа дважды стохастических потоков: 1) синхронные потоки (потоки, у которых состояние сопровождающего процесса меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [6–9]; 2) асинхронные потоки (потоки, у которых переход из состояния в состояние сопровождающего процесса происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [10–13]; 3) полусинхронные потоки (потоки, у которых одна часть состояний сопровождающего процесса меняется в моменты наступления событий потока, другая часть состояний сопровождающего процесса меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [14–17].

На практике часто приходится иметь дело с потоками, у которых не все события доступны наблюдению. Как правило, причиной ненаблюдаемости служит так называемое мертвое время регистрирующих приборов [18], порождаемое зарегистрированным событием, другие же события, наступившие в этот период, теряются. Регистрирующие

приборы, вместе с тем, делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся. Кроме того, длительность мертвого времени может быть как детерминированной величиной, одинаковой для всех событий, так и случайной с тем или иным законом распределения [18].

На практике, наблюдая за системами различного вида, исследователь имеет лишь информацию на выходе (случайную выборку данных), а то, что подается на вход системе, остается неизвестным. Именно поэтому важной задачей становится задача оценивания входных параметров потока с помощью использования наблюдаемых данных.

В данной работе рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий, функционирующий в условиях случайного непродлевающегося мертвого времени, распределенного по равномерному закону. Выводится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий наблюдаемого потока, а также находится явный вид совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов. Находятся условия рекуррентности потока в рассматриваемом случае. Для рекуррентного потока в особом случае соотношения его параметров решается задача оценивания параметра распределения длительности случайного мертвого времени с помощью метода моментов.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий, сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda_1$ и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Если имеет место первое состояние процесса S_1 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 . Если имеет место второе состояние процесса S_2 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 . Переход из состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 возможен только в момент наступления события, при этом этот переход осуществляется с вероятностью p (с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1). Переход из состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_1 может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$, где α_2 – интенсивность смены состояния S_2 на S_1 . Так как переход из второго состояния в первое не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, то поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс; наблюдаемыми являются только моменты наступления событий потока).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени, недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$ где T – значение длительности мертвого времени, $0 \leq T \leq T^*$.

Возможный вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1 и S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, t)$ – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом (S_1) состоянии процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мертвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; аналогично для временной оси $(0, t^{(2)})$; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды продолжительности мертвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к временной оси $(0, t^{(1)})$.

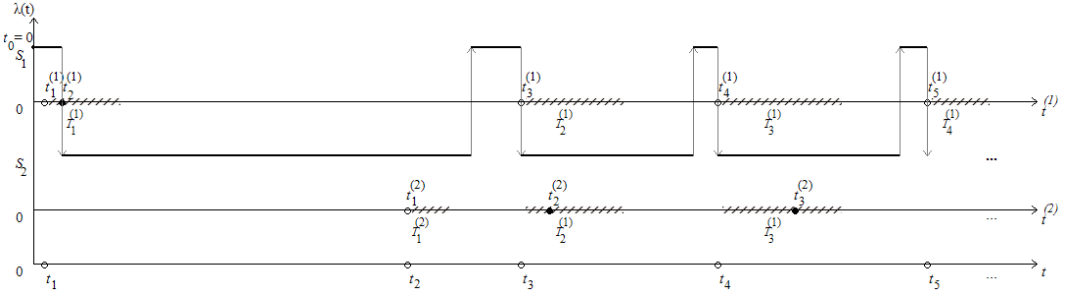


Рис. 1. Формирование наблюдаемого полусинхронного потока событий

Рассмотрим теперь полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности $T \geq 0$; если $T = 0$, то мертвое время отсутствует. Из работы [19] имеем, что плотность вероятности $p(\tau|T)$ значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T , имеет вид

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))(\alpha_2 + \lambda_2) e^{-(\alpha_2 + \lambda_2)(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$p(\tau_1, \tau_2|T) = 0, \quad \tau_2 \geq 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T; \quad \tau_1 \geq 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p(\tau_1, \tau_2|T) = p(\tau_1|T)p(\tau_2|T) + e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T} \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{\lambda_2(1-p)}{\lambda_2 + \alpha_2} \times \quad (2)$$

$$\times [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)(\tau_1-T)}] [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)(\tau_2-T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,$$

где $\gamma(T) = \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \lambda_1 p)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)} \left[1 - \frac{p(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1-p)\lambda_2 - (\alpha_2 + \lambda_2)e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T}} \right], \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0; \tau_1,$

τ_2 – смежные интервалы между наблюдаемыми событиями.

Рассмотрим частные случаи, при выполнении которых полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком:

- 1) $p = 0$; тогда $\gamma(T) = 1$ и совместная плотность (2) факторизуется $p(\tau_1, \tau_2|T) = p(\tau_1|T)p(\tau_2|T)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$, а плотность вероятности (1) при-

нимает вид $p(\tau|T) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)}$, $\tau \geq T$; в этом случае имеет место простейший поток с интенсивностью λ_1 .

2) $\alpha_2 = 0$; тогда $\gamma(T) = 0$, $p(\tau_1, \tau_2|T) = p(\tau_1|T)p(\tau_2|T)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$, $p(\tau|T) = \lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau-T)}$, $\tau \geq T$; в этом случае имеет место простейший поток с интенсивностью λ_2 .

3) $\lambda_1(1-p) - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$; тогда $\gamma(T) = 0$, $p(\tau_1, \tau_2|T) = p(\tau_1|T)p(\tau_2|T)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$, $p(\tau|T) = (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)(\tau-T)}$, $\tau \geq T$; в этом случае имеет место простейший поток с интенсивностью $\lambda_2 + \alpha_2$.

4) $\lambda_2 = 0$; в данной ситуации имеет место

$$p(\tau_1, \tau_2|T) = p(\tau_1|T)p(\tau_2|T), \quad \tau_2 \geq 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T; \quad \tau_1 \geq 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$\gamma(T) = \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \alpha_2)} \left[1 + \frac{p\lambda_1}{\alpha_2 e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T}} \right], \quad (3)$$

$$p(\tau|T) = \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))(\alpha_2 + \lambda_2) e^{-(\alpha_2 + \lambda_2)(\tau-T)}, \quad \tau \geq T; \quad \lambda_1 - \alpha_2 \neq 0.$$

Формулы (3) характеризуют альтернирующий рекуррентный полусинхронный поток (отсутствуют события во втором состоянии).

5) $p = 1$; тогда имеем

$$p(\tau_1, \tau_2|T) = p(\tau_1|T)p(\tau_2|T), \quad \tau_2 \geq 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T; \quad \tau_1 \geq 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$\gamma(T) = -\frac{\alpha_2(\lambda_2 + \alpha_2)}{(\lambda_1 + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)} \left[1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\alpha_2 + \lambda_2) e^{(\lambda_1 + \alpha_2)T}} \right], \quad (4)$$

$$p(\tau|T) = \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))(\alpha_2 + \lambda_2) e^{-(\alpha_2 + \lambda_2)(\tau-T)}, \quad \tau \geq T; \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0.$$

Формулы (4) описывают рекуррентный полусинхронный поток, который при каждом наступлении события в первом состоянии переходит во второе.

Отметим, что условия рекуррентности потока 1)–5), полученные для случая детерминированного мертвого времени, для ситуации случайного непродлевающегося мертвого времени очевидно не изменятся, т.к. они являются следствием значений параметров потока или их соотношений.

Рассмотрим четвертый случай – альтернирующий рекуррентный полусинхронный поток событий, у которого $\lambda_2 = 0$. Поток такого вида в общем случае был рассмотрен и подробно исследован в [20], рассмотрим теперь данный поток с особым случаем соотношения его параметров: $\lambda_1 - \alpha_2 = 0$, когда знаменатель в (3) становится равным нулю.

На рис. 2 приведен вариант формирования такого наблюдаемого потока при наличии мертвого времени случайной длительности.

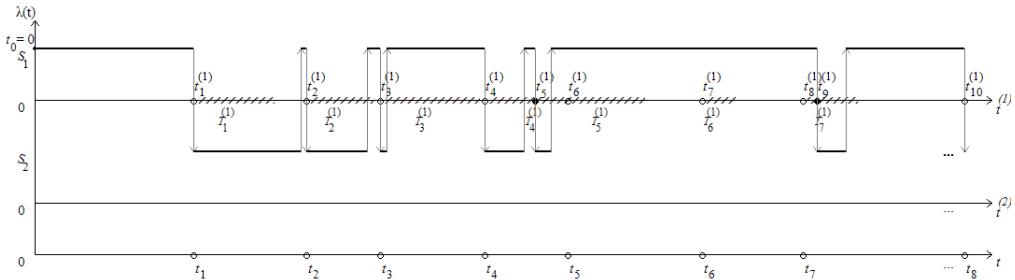


Рис. 2. Формирование наблюдаемого альтернирующего рекуррентного полусинхронного потока событий в особом случае

Цель данной работы:

1. На основании выборки моментов наступления событий наблюдаемого альтернирующего рекуррентного полусинхронного потока событий в особом случае $t_1, t_2, \dots, t_n$ на временном интервале $(0, T_m)$, где T_m – время наблюдения за потоком ($t_n < T_m$), оценить параметр равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени T^* .
2. Исследовать оценку $\hat{T}^*$. Для этого провести статистические эксперименты на имитационной модели наблюдаемого потока, устанавливающие стационарный режим и определяющие свойства полученной оценки.

2. Уравнение моментов для оценивания параметра T^*

Для оценки неизвестного параметра T^* равномерного распределения длительности случайного непродлевающегося мертвого времени в наблюдаемом потоке событий используется метод моментов [21]. Метод моментов заключается в приравнивании теоретических и эмпирических моментов. Для этого находится теоретический момент – математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке $M(\tau|T^*)$, а затем значение оценки $\hat{T}^*$ вычисляется численно из уравнения моментов $M(\tau|T^*) = C$, где C – значение оценки математического ожидания $M(\tau|T^*)$ – выборочное среднее, $C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Величины τ_k являются выходными данными имитационной модели наблюдаемого альтернирующего рекуррентного полусинхронного потока событий в особом случае.

Для нахождения теоретического момента имеем формулу $M(\tau|T^*) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau$.

Здесь плотность вероятности $p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) dT = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT$, где (T) – область изменения значений случайной величины T ; $p(T) = 1/T^*$, $0 \leq T \leq T^*$, по условию задачи.

Так как область значений случайной величины мертвого времени представляет собой объединение двух областей, когда $0 \leq \tau < T^*$ и когда $\tau \geq T^*$, то выражение для плотности $p(\tau)$ примет следующий вид:

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^{\tau} p(T) p(\tau|T) dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau|T) dT, & \tau \geq T^*, \end{cases} \quad (5)$$

где плотность $p(\tau|T)$ определена в (3).

Известно [19], что в обобщенном полусинхронном потоке событий с непродлевающимся мертвом времени фиксированной длительности T в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ справедливы формулы

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \left[\lambda_1 - \alpha_2 (1 - \delta) \pi_2(T) (1 - \lambda_1 (\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1 (\tau - T)}, & \tau \geq T; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
p(\tau_1, \tau_2 | T) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T; \\
p(\tau_1, \tau_2 | T) &= p(\tau_1 | T) p(\tau_2 | T) + e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T} \lambda_1 [\alpha_2 (1 - \delta)]^2 [\alpha_2 (1 - p + \delta p) - \lambda_1 (1 - p)] \times \\
&\times \left[\frac{\pi_2 + (p - \pi_2) e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}}{\lambda_1 + [\alpha_2 (1 - p + \delta p) - \lambda_1 (1 - p)] e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}} \right]^2 [1 - \lambda_1 (\tau_1 - T)] [1 - \lambda_1 (\tau_2 - T)] \times \\
&\times e^{-\lambda_1 (\tau_1 + \tau_2 - 2T)}, \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T;
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\pi_2(T) &= \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0 | T)] e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}, \quad \pi_2 = \frac{p\lambda_1}{\alpha_2 + p\lambda_1}, \\
\pi_2(0 | T) &= \frac{p\lambda_1 - \pi_2 [\alpha_2 (1 - p + \delta p) - \lambda_1 (1 - p)] [1 - e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}]}{\lambda_1 + [\alpha_2 (1 - p + \delta p) - \lambda_1 (1 - p)] e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}}.
\end{aligned}$$

Здесь δ – вероятность инициирования дополнительного события при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое ($0 \leq \delta \leq 1$). В настоящей работе рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, когда $\delta = 0$ (не наступает дополнительное событие при переходе из второго состояния в первое) и $\lambda_2 = 0$, т.е. рассматривается классический альтернирующий рекуррентный полусинхронный поток. Таким образом, с учетом описанных условий, из формул (6)–(7) получим следующие соотношения:

$$p(\tau | T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \left[\lambda_1 - \frac{p\lambda_1}{1+p} (1 + pe^{-\lambda_1(1+p)T}) (1 - \lambda_1(\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau - T)}, & \tau \geq T; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
p(\tau_1, \tau_2 | T) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T; \\
p(\tau_1, \tau_2 | T) &= p(\tau_1 | T) p(\tau_2 | T),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\pi_2(T) = \frac{p}{1+p} [1 + pe^{-\lambda_1(1+p)T}], \quad \pi_2 = \frac{p}{1+p}, \quad \pi_2(0 | T) = p.$$

Формула (8) определяет вид плотности $p(\tau | T)$ вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в альтернирующем рекуррентном полусинхронном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T в особом случае $\lambda_1 - \alpha_2 = 0$.

Подставляя выражение (8) в (5) и учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \{1 - 2e^{-\lambda_1\tau} + e^{-\lambda_1(1+p)\tau}\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \tag{10}$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} \frac{1}{1+p} \left\{ (-2 + e^{\lambda_1 T^*} + e^{-\lambda_1 p T^*}) (1+p) + \lambda_1 p (\tau - T^*) (e^{\lambda_1 T^*} - e^{-\lambda_1 p T^*}) \right\} e^{-\lambda_1 \tau}, \quad \tau \geq T^*. \tag{11}$$

Отметим, что в граничной точке $\tau = T^*$ имеет место равенство двух плотностей $p_1(T^*) = p_2(T^*)$ и неравенство их производных $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$, т.е. функция $p(\tau)$, задаваемая формулой (5), есть непрерывная функция и в точке $\tau = T^*$ имеет излом.

По определению математического ожидания случайной величины τ – длительности интервала между двумя соседними событиями наблюдаемого потока – с учетом форму-

лы (5), имеем $M(\tau|T^*) = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau$. Подставляя сюда плотности вероятности $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, определенные в (10), (11), находим

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(1 + \frac{p}{1+p} \right) + \left[\frac{p}{\lambda_1(1+p)} \right]^2 \frac{1}{T^*} (1 - e^{-\lambda_1(1+p)T^*}), \quad T^* > 0. \quad (12)$$

Аналитически можно показать, что $M'(\tau|T^*) > 0$ при $T^* > 0$; $\lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*) > 0$ при $T^* \rightarrow 0$. Это означает, что функция $M(\tau|T^*)$ является возрастающей функцией T^* .

Теперь для нахождения значения оценки $\hat{T}^*$ необходимо решить уравнение моментов $M(\tau|T^*) = C$. Данное уравнение будем решать численно методом простой итерации [22].

Отметим, что уравнение моментов $M(\tau|T^*) = C$ имеет единственное решение, т.к. математическое ожидание $M(\tau|T^*)$ – возрастающая функция переменной T^* , C – постоянная величина, характеризующая конкретную реализацию потока. Уравнение моментов может не иметь решение только в одном единственном случае, когда $C < M(\tau|T^* = 0)$, тогда принимается $\hat{T}^* = 0$.

3. Численные результаты

С целью установления стационарного режима и определения свойств найденной оценки проведены статистические эксперименты. Для параметров потока $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $p = 0.6$ и параметров точности $\varepsilon = 0.0001$, $\Delta T^* = 0.001$ (параметры метода простой итерации) получено 100 реализаций ($N = 100$) имитационной модели потока и, соответственно, получено 100 решений уравнения моментов, для двух значений параметра $T^* = 1; 3$ и для каждого значения времени моделирования $T_m = 50, 100, \dots, 2000$ ед. времени. Далее на основании полученных данных вычислялись выборочное среднее искомой оценки $\hat{M}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^*$ и ее выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2$, где T^* – известное из имитационной модели значение параметра, $\hat{T}_i^*$ – решение уравнения моментов для i -й реализации потока.

В табл. 1 приведены результаты для $T^* = 1$. В первой строке таблицы указано время моделирования T_m (время наблюдения за потоком) ($T_m = 50, 100, \dots, 2000$ ед. времени); во второй и третьей строках указано выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*)$ для $T^* = 1$.

Таблица 1

Численные результаты эксперимента для $T^* = 1$

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	1.0016	0.9779	0.9772	1.0208	0.9973	1.0066	0.9961	0.9857
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0.0532	0.0249	0.0177	0.0164	0.0119	0.0101	0.0078	0.0076

450	500	550	600	650	700	750	800	850
1.0037	0.9951	1.0020	0.9921	0.9988	1.0123	1.0006	1.0012	0.9996
0.0059	0.0046	0.0037	0.0035	0.0053	0.0041	0.0033	0.0032	0.0031

900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250	1300
0.9950	0.9949	0.9998	0.9934	0.9989	0.9989	1.0048	1.0005	0.9980
0.0023	0.0034	0.0034	0.0025	0.0021	0.002	0.0026	0.0019	0.0015

1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700	1750
0.9939	0.9975	0.9957	0.9984	1.0052	1.0003	0.9942	0.9991	0.9972
0.0022	0.0018	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0016	0.0013	0.0011

1800	1850	1900	1950	2000
0.9974	1.0040	0.9972	0.9971	0.9953
0.0011	0.0008	0.0010	0.0012	0.0011

Для наглядности на рис. 3 и 4 приведены графики зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от значения времени моделирования T_m для $T^*=1$, построенные по данным табл. 1.

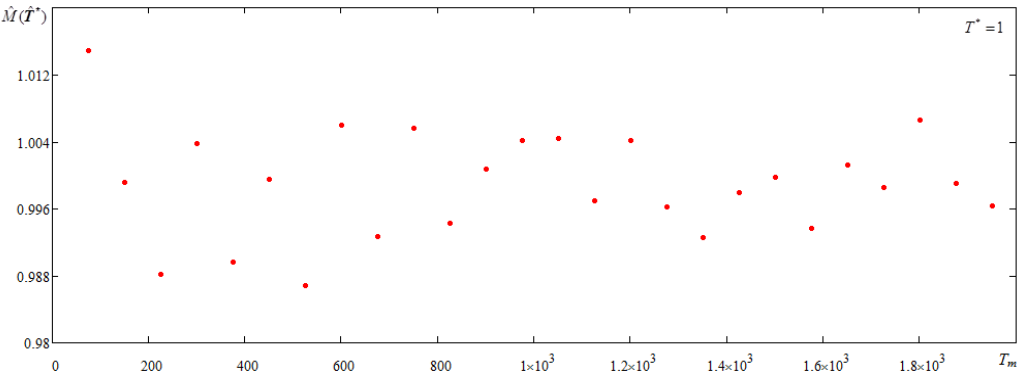


Рис. 3. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^*=1$

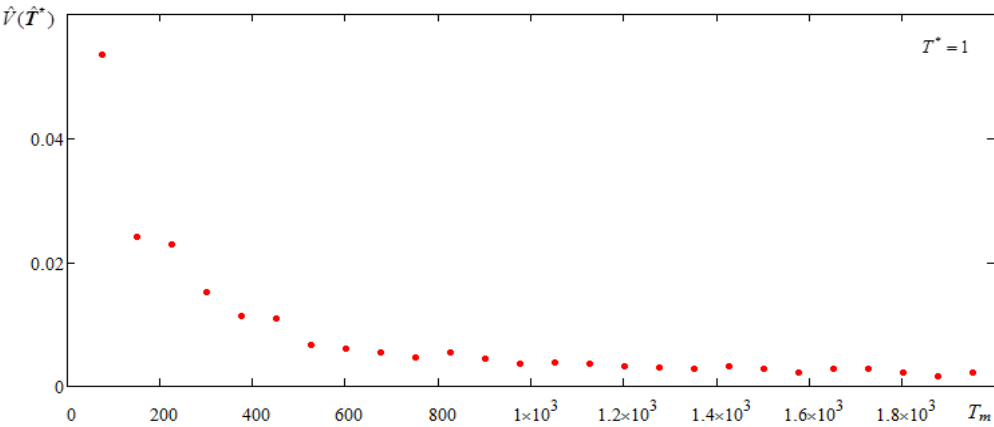


Рис. 4. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^*=1$

В табл. 2 приведены результаты для $T^*=3$. Структура табл. 2 аналогична структуре табл. 1.

Численные результаты эксперимента для $T^* = 3$

Tm	50	100	150	200	250	300	350	400
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	3.0148	2.9871	3.0252	2.9686	3.0258	2.9960	3.0034	3.0251
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0.2198	0.1089	0.0615	0.0588	0.0384	0.0339	0.0258	0.0229

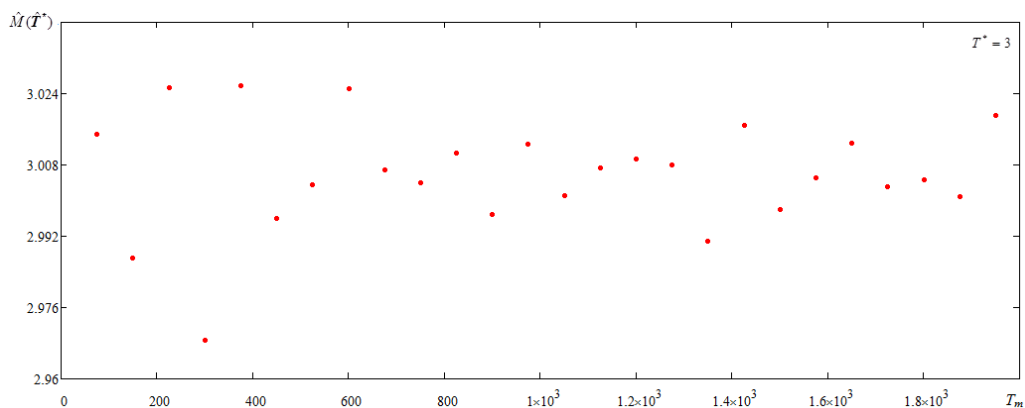
450	500	550	600	650	700	750	800	850
3.0069	3.0039	3.0106	2.9968	3.0125	3.0012	3.0073	3.0092	3.0080
0.0253	0.0169	0.0187	0.0154	0.0186	0.0158	0.0104	0.0115	0.0098

900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250	1300
2.9908	3.0168	2.9979	3.0051	3.0129	3.0031	3.0046	3.0008	3.0191
0.0103	0.0105	0.0114	0.0078	0.0070	0.0081	0.0092	0.0079	0.0060

1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700	1750
2.9912	3.0040	3.0057	3.0084	3.0019	3.0063	3.0176	2.9909	3.0049
0.0062	0.0071	0.0061	0.0054	0.0058	0.0062	0.0049	0.0043	0.0061

1800	1850	1900	1950	2000
3.0075	3.0074	3.0055	3.0064	3.0036
0.0035	0.0054	0.0062	0.0035	0.0044

На рис. 5 и 6 приведены графики зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от времени моделирования Tm для $T^* = 3$, построенные по данным табл. 2.

Рис. 5. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от Tm при $T^* = 3$

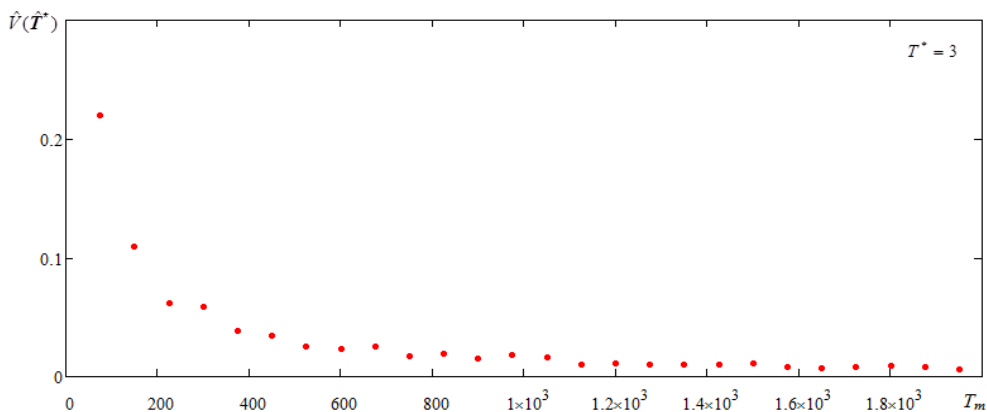


Рис. 6. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от Tm при $T^* = 3$

- Из анализа результатов первого статистического эксперимента следует, что
- 1) стационарный режим функционирования потока устанавливается при $T_m \geq 1600$ ед. времени, т.к. выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ стремится к постоянному значению, когда $T_m \geq 1600$ ед. времени;
 - 2) оценка $\hat{T}^*$ является смещенной оценкой; причиной смещения оценки $\hat{T}^*$ ($\hat{T}^* < T^*$) относительно истинного T^* (известного из имитационной модели) является то, что значения случайного мертвого времени T сосредоточены около теоретического среднего ($T^*/2$).

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^* на качество оценок) организован аналогично первому и поставлен при фиксированном времени моделирования $Tm = 1600$ единиц времени, что соответствует, как следует из табл. 1, 2, времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров имитационной модели, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений T^* . Сначала второй статистический эксперимент реализуется для $T^* = 1$, затем для $T^* = 2, \dots$, затем для $T^* = 5$.

Результаты второго статистического эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3

Численные результаты второго статистического эксперимента

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	1.0003	1.9953	3.0063	4.0090	4.9886
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0.0014	0.0035	0.0062	0.0128	0.0209

На рис. 7 и 8 приведены графики зависимости выборочного среднего $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и выборочной вариации $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от параметра $T^* = 1; 2; 3; 4; 5$, построенные по данным табл. 3.

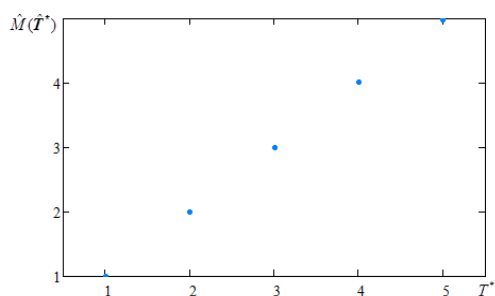


Рис. 7. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T^*

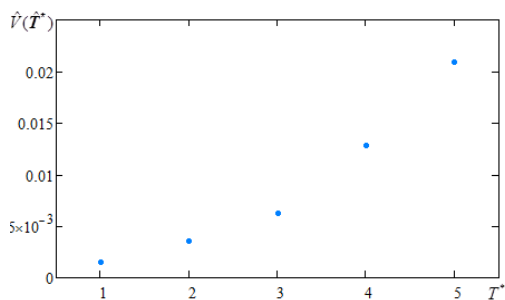


Рис. 8. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T^*

Данный эксперимент демонстрирует тот факт, что при увеличении значений параметра равномерного распределения мертвого времени T^* увеличивается выборочная вариация оценки. Это объясняется тем, что при больших значениях T^* увеличивается число потерянных событий исходного потока и, как следствие, ухудшается качество оценивания.

Кроме того, получена состоятельная оценка параметра распределения длительности мертвого времени T^* , т.к. выполняются условия теоремы о состоятельности оценок [20]: длительности интервалов между моментами наступления событий в потоке являются независимыми случайными величинами; теоретическое среднее существует; решение уравнения моментов существует и единственно.

Заключение

В данной работе рассмотрен полусинхронный дважды стохастический поток событий с непродлевающимся случайным мертвым временем. Найдены условия рекуррентности потока и исследован альтернирующий рекуррентный полусинхронный дважды стохастический поток событий в особом случае.

Аналитически получены формулы (10), (11), определяющие плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом рекуррентном потоке при случайном мертвом времени; выведена формула (12) для математического ожидания длительности интервала между соседними событиями.

Методом моментов найдена оценка параметра равномерного распределения длительности случайного мертвого времени, полученная оценка исследована на качество. Приведенные результаты численных расчетов указывают на приемлемое качество оценивания в связи с малой выборочной вариацией оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1955. – V. 51(3). – No. 3. – P. 433–441.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1964. – V. 60. – No. 4. – P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.1 // Изв. АНССР. Техн. Кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
4. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
5. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. – 1991. – V. 7. – P. 1–46.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № S6. – С. 232–239.
7. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering. – 1996. – V. 50. – No. 1. – P. 56–63.
8. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № S1-1. – С. 24–29.

9. *Nezhel'skaya L.A.* Probability density function for modulated MAP event flows with unextendible dead time // *Communication in Computer and Information Science*. – 2015. – V. 564. – P. 141–151.

10. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. – 2006. – № S18. – С. 267–273.

11. *Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2012. – №2(19). – С. 88–101.

12. *Горцев А.М., Зуевич В.Л.* Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2010. – № 2(11). – С. 44–65.

13. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2013. – № 4(25). – С. 32–42.

14. *Калягин А.А., Нежелская Л.А.* Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2015. – № 3(32). – С. 23–32.

15. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2015. – № 1(30). – С. 27–37.

16. *Нежелская Л.А.* Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. – 2000. – № 269. – С. 95–98.

17. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2014. – № 2(27). – С. 19–29.

18. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.

19. *Нежелская Л.А.* Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Л. А. Нежелская. – 2016. – 341 с.

20. *Горцев А.М., Веткина А.В.* Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности случайного непродлеваемого мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий // *Материалы VIII Международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем"*. – Томск, 26-30 мая 2021. – С. 63-71.

21. *Малинковский Ю.В.* Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика). – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 146 с.

22. *Лифшиц А.Л., Малъц Э.А.* Статистическое моделирование систем массового обслуживания. – М.: Сов. Радио, 1978. – 248 с.

23. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.

DOI: 10.17223/978-5-907572-27-0-2022-4

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ИНТЕРВАЛОВ ОБОБЩЁННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ ЕГО НЕПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ И УСЛОВИЯ РЕКУРРЕНТНОСТИ ПОТОКА

Кеба А.В., Нежелская Л.А.

Томский государственный университет

mir.na.mig7@mail.ru, ludne@mail.ru

Введение

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование обобщённого МАР-потока событий, функционирующего в условиях непродлеваемого мёртвого времени, начатое в работах [1,2].

Обобщённый МАР-поток событий относится к классу дважды стохастических потоков [3,4] и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания [5]. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще не известны, либо изменяются со временем. Поэтому при анализе дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач,