МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

БАЗИСЫ И ФРЕЙМЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский дом Томского государственного университета
2022

Рецензент: доцент кафедры математического анализа и теории функций Л.В. Гензе. **Рассмотрено и рекомендовано** методической комиссией механико-математического факультета.

Протокол № 7 от "7" ноября 2022.

Председатель комиссии, доцент кафедры теоретической механики Е.А. Тарасов.

В учебно-методическом пособии излагаются основы теории базисов в нормированных и гильбертовых пространствах. Приводятся примеры базисов Рисса, базисов Ауэрбаха и примеры полных минимальных систем, не являющихся базисами. Также рассмотрена теория фреймов в бесконечномерных и конечномерных пространствах. После каждой главы приведены упражнения и индивидуальные задания. Методическое пособие к курсу "Дополнительные главы функционального анализа" предназначено для студентов Механико-математического факультета (направления 01.03.01 – Математика, 02.03.01 – Математика и компьютерные науки, 01.04.01 – Математика)

АВТОРЫ: *доцент кафедры математического анализа и теории функций Т.Е. Хмылева; доцент кафедры общей математики Н.Н. Трофименко.*

Содержание

Список обозначений

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множество натуральных, вещественных и комплексных чисел соотвественно.

c_0 – пространство числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \max\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}$.

c_{00} – пространство финитных последовательностей с нормой $\|x\| = \max\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}$.

$C[a,b]$ – пространство непрерывных скалярнозначных функций, заданных на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

$P[a,b]$ – пространство всех многочленов на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

$L_2(a,b)$ – пространство скалярнозначных функций, интегрируемых в квадрате, с нормой $\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.

l_2 – пространство числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, суммируемых в квадрате с нормой $\|x\| = (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

H – гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$; (x,y) – скалярное произведение элементов x и y в гильбертовом пространстве H.

Если $L \subset H$, то $L^{\perp} = \{h \in H : h \perp L\}$.

Если X – нормированное пространство и $A \subset X$, то

$\mathrm{sp}A = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\,(\textit{или}\ \alpha_i \in \mathbb{C}),\ x_i \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$ – линейная оболочка множества A;

$\mathrm{int}A$ – внутренность множества A;

$\overline{A}$ – замыкание множества A в X.

$L(E, F)$ – пространство линейных операторов $T : E \to F$ с нормой $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$.

E^* – пространство линейных ограниченных функционалов $f : E \to \mathbb{R}$ (или $f : E \to \mathbb{C}$) с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$.

Для линейного ограниченного оператора $T : E \to E$
$\mathcal{N}(T) = T^{-1}(0) = \{x \in E : Tx = 0\}$ – замкнутое линейное подпространство в пространстве E;

$\mathcal{R}(T) = \{y : y = Tx$ для некоторого $x \in E\}$ – множество значений оператора T.

I – тождественный оператор.

$\sigma(T)$ – спектр оператора T; $\sigma_p(T)$ – множество собственных чисел оператора T.

$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \overline{(\lambda I - T)E} \neq E\}$ – остаточный спектр оператора T.

$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ – спектральный радиус оператора T.

1. Базис Гамеля и базис Шаудера в нормированном пространстве

Пусть L – линейное пространство на полем Λ ($\Lambda = \mathbb{R}$ или $\Lambda = \mathbb{C}$).

Определение 1.1. *Система элементов $\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ в линейном пространстве L называется базисом Гамеля или алгебраическим базисом, если любой элемент $x \in L$ может быть представлен единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов этой системы, т.е. $x = c_1 x_{\alpha_1} \ldots + c_n x_{\alpha_n}$, $c_i \in \Lambda$.*

Можно показать, используя лемму Цорна, что базис Гамеля существует в любом линейном пространстве L. В одном и том же пространстве L любые два базиса Гамеля равномощны и мощность базиса Гамеля называется алгебраической размерностью пространства L, обозначается $\dim L$. Если $\dim L < \aleph_0$, то пространство называется конечномерным. Заметим, что для банаховых пространств алгебраический базис либо конечен либо несчетен.

Теорема 1.2. *Пусть X – бесконечномерное банахово пространство. Тогда базис Гамеля в X несчетен.*

Доказательство. Предположим, что существует счетный базис Гамеля $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Пусть $L_n = \text{sp}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – n–мерное подпространство в X. Следовательно, L_n замкнуто в X. Кроме того, L_n – нигде не плотно в X. Действительно, если $y \in L_n$ и $U(y, \varepsilon)$ – окрестность точки y, то точка $y + \dfrac{\varepsilon\, x_{n+1}}{2 \parallel x_{n+1} \parallel} \in U(y, \varepsilon)$, но $y + \dfrac{\varepsilon\, x_{n+1}}{2 \parallel x_{n+1} \parallel} \notin L_n$ в силу линейной независимости системы $\{x_1, \dots x_n, x_{n+1}\}$. Следовательно, $\text{int} L_n = \text{int}\overline{L_n} = \emptyset$, т.е. L_n нигде не плотно. Так как $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, мы получаем противоречие с теоремой Бэра. ■

Пример 1.3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ любая линейно независимая система $\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ является базисом Гамеля. В частности, $\{e_k : k = 1, 2, \dots n\}$, где $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots 0)$ – канонический базис Гамеля. ■

Пример 1.4. c_{00} – пространство финитных числовых последовательностей. Для $x = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, 0, \dots)$ $\|x\| = \max\limits_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$. Система $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ является базисом Гамеля в пространстве c_{00}, но в пространстве c_0 эта система не является базисом, так как последовательность $\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \in c_0$ нельзя представить в виде конечной линейной комбинации элементов $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. ■

Пример 1.5. Множество полиномов $\{t^k : k = 0, 1, \dots\}$ является базисом Гамеля в пространстве $P[a, b]$, но не является базисом в пространстве $C[a,b]$.

Поскольку в бесконечномерных пространствах базисы Гамеля несчетны, они неудобны в применении. Поэтому чаще применяются системы элементов со следующими свойствами. ■

Определение 1.6. *Система элементов* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *в нормированном пространстве* X *является полной, если* $\overline{\mathrm{sp}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$*, то есть любой элемент* $x \in X$ *можно представить в виде предела конечных линейных комбинаций системы* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Определение 1.7. *Система элементов* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ *называется минимальной, если для любого* $k \in \mathbb{N}$ $x_k \notin \overline{sp}\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}\}$*.*

Определение 1.8. *Система элементов* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ *называется* ω*-независимой, если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$ *тогда и только тогда, когда* $c_n = 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$*.*

Теорема 1.9. *Пусть* X *банахово пространство и* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$*. Тогда*

(1) *если система элементов* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *минимальная, то* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ω*-независима;*

(2) *если последовательность* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ω*-независима, то*

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *линейно независима.*

Доказательство.

(1) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$. Если существует $k \in \mathbb{N}$, такой что $c_k \neq 0$, то $x_k = -\sum\limits_{n \neq k} \dfrac{\alpha_n}{\alpha_k} x_n$. Следовательно, $x_k \in \overline{sp}\{x_n : n \in \mathbb{N}, n \neq k\}$, что противоречит минимальности системы. Следовательно, $c_n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ω-независима.

(2) Очевидно. ■

Заметим, что утверждение, обратные к (1) и (2), неверны.

Пример 1.10. (линейно независимой, но не ω - независимой системы).

$X = l_2$. Система $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{e_0\}$, где $e_0 = \left(1, \dfrac{1}{2} \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right)$, линейно независима, но не является ω-независимой, так как $e_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} e_n$. ■

Пример 1.11 (ω-независимой, но не минимальной системы). Рассмотрим систему $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_2$, где

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, 1, 1, 0, \ldots),$$

при $n \geq 2$. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$. Так как $\|x_n\| = \sqrt{2}$ при $n \geq 2$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n = (c_1 + c_2, c_2 + c_3, \ldots, c_n + c_{n+1}, \ldots) = 0$, то $c_1 = -c_2 = c_3 = \ldots$ и так как $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то $c_1 = c_2 = \ldots = 0$, т.е. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ω-независима.

Рассмотрим теперь подпространство $L = \overline{sp}\{x_n : n \geq 2\}$. Элементы

$$y_2 = x_2 - x_3 = \{1, 0, -1, 0, \ldots\} \in L,$$

$$y_3 = y_2 + x_4 = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\} \in L,$$

$$y_4 = y_3 - x_5 = \{1, 0, 0, 0, -1, 0, \ldots\} \in L, \ldots,$$

$$y_{n+1} = y_n + (-1)^{n+2} x_{n+2} = \{1, 0, \ldots, 0, \underbrace{(-1)^{n+2}}_{n+2}, 0, \ldots\} \in L.$$

Тогда элемент

$$z_n = \frac{y_2 + \ldots + y_{n+1}}{n} = \left(1, 0, -\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}, \ldots, \frac{(-1)^{n+2}}{n}, 0, \ldots\right) \in L.$$

и

$$\|z_n - x_1\| = \| \left(0, 0, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{(-1)^{n+2}}{n}, 0, \ldots\right) \| = \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot n} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $x_1 \in L = \overline{\mathrm{sp}}\{x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и, значит, система $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ не минимальна. $\blacksquare$

В следующих двух теоремах дается необходимое и достаточное условие минимальности.

Определение 1.12. *Последовательность функционалов $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ называется биортогональной к $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$, если*

$$f_n(x_k) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, \text{ если } n = k, \\ 0, \text{ если } n \neq k. \end{cases}$$

Теорема 1.13. *Последовательность $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ минимальна тогда и только тогда, когда $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ имеет биортональную последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ минимальна. Пространство $L_k = \overline{\mathrm{sp}}\{x_n : n \neq k\}$ - замкнутое линейное подпространство и $x_k \notin L_k$. По следствию 4.3 из теоремы Хана-Банаха существует функционал $f_k \in X^*$, такой, что $\|f_k\| = 1$, $f_k(L_k) = \{0\}$ и $f_k(x_k) = \rho(x_k, L_k)$. Тогда, если $g_k = \frac{f_k}{\rho(x_k, L_k)} \in X^*$, то $g_k(x_k) = 1$ и $g_k(L_k) = \{0\}$, т.е. $g_k(x_n) = 0$ при $n \neq k$. Следовательно, $\{g_k : n \in \mathbb{N}\}$ - биортогональная последовательность.

Предположим теперь, что существует биортогональная последовательность $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ и пусть $L_n = f_n^{-1}(0)$. Так как, $f_n(x_k) = 0$ при $k \neq n$, то $x_k \in L_n$ при всех $k \neq n$, а $x_n \notin L_n$, так как $f_n(x_n) = 1$. Из замкнутости L_n получаем $\overline{sp}\{x_k : k \neq n\} \subset L_n$. Следовательно, $x_n \notin \overline{sp}\{x_k : k \neq n\}$. ■

В предыдущем примере

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots), \in l_2$$

$$x_k = (0, \ldots, 0, 1, 1, 0, \ldots) \in l_2, k \geq 2.$$

Предположим, что существует биортогональная последовательность $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_2^* = l_2$. В частности, существует функционал f_1, такой что $f_1(x_1) = 1$, а $f_1(x_n) = 0$, при $n \geq 2$.

В гильбертовом пространстве l_2 функционал f_1 задается формулой $f_1(x) = (x, y)$, где

$$y \in \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \in l_2.$$

Так как, $f_1(x_1) = (x_1, y) = \overline{y}_1$, то $y_1 = 1$. Далее

$$f_1(x_2) = (x_2, y) = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = 0, \text{ т.е. } y_2 = -y_1,$$

$$f_1(x_3) = (x_3, y) = \overline{y}_2 + \overline{y}_3 = 0, \text{ т.е. } y_3 = -y_2, \ldots,$$

$$f_1(x_k) = (x_k, y) = \overline{y}_{k-1} + \overline{y}_k = 0, \text{ т.е. } y_k = -y_{k-1}.$$

Следовательно, $y = (y_1, -y_1, -y_1, \ldots) \in l_2$. Это возможно только при условии $y_1 = 0$, что противоречит равенству $f_1(x_1) = 1$. Следовательно, последовательность $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет биортогональной. ■

Следующая теорема, как и теорема 1.13, помогает при исследовании системы на минимальность.

Теорема 1.14. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *минимальна тогда и только тогда, когда* $x_n \notin \overline{\mathrm{sp}}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть $x_n \notin \overline{\mathrm{sp}}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = L_{n+1}$. По следствию 4.3 из теоремы Хана-Банаха существует функционал $f_n \in E^*$, такой, что $f_n(L_{n+1}) = \{0\}$, а $f_n(x_n) = 1$. Определим биортогональную систему $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$ следующим образом: $g_1 = f_1$. Ясно, что $g_1(x_1) = f_1(x_1) = 1$, а $g_1(x_n) = 0$ при $n \geqslant 2$.

Далее, $g_2 = f_2 - f_2(x_1)g_1$. Тогда,

$$g_2(x_1) = f_2(x_1) - f_2(x_1)g_1(x_1) = 0,$$

$$g_2(x_2) = f_2(x_2) - f_2(x_1)g_1(x_2) = 1,$$

$$g_2(x_k) = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 3.$$

Предположим, построили $g_1, \ldots, g_{n-1}$, такие что $g_i(x_i) = 1$ и $g_i(x_k) = 0$, $k \neq i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Полагаем,

$$g_n = f_n - f_n(x_1)g_1 - f_n(x_2)g_2 - \ldots f_n(x_{n-1})g_{n-1}.$$

Тогда $g_n(x_n) = f_n(x_n) = 1$. При $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$g_n(x_i) = f_n(x_i) - f_n(x_i)g_i(x_i) = 0.$$

При $i = n+1, n+2, \ldots \quad g_n(x_n) = 0$. Следовательно, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ – биортогональная система и, значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - минимальна. ■

Пример 1.15. Система многочленов $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $C[a,b]$, так как по теореме Стоуна-Вейерштрасса $\overline{\mathrm{sp}}\{t^n\}_{n=0}^{\infty} = C[a,b]$. ■

Пример 1.16. Система $\{1, t^2, t^4, \ldots, t^{2n}, \ldots\}$ полна в пространстве $C[0,1]$ также по теореме Стоуна-Вейерштрасса. Это означает, что $t^{2k+1} \in \overline{\mathrm{sp}}\{1, t^2, t^4, \ldots, t^{2n}, \ldots\}$, т.е. система $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ не является минимальной в пространстве $C[0,1]$. Аналогично, любая система вида $\{1, t^k, t^{k+1}, t^{k+2}, \ldots\}$ является полной, но не минимальной в пространстве $C[0,1]$. ■

Известны следующие теоремы о полноте системы $\{t^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C[a,b]$.

Теорема Мюнца. *Пусть* $0 < a < b < +\infty$. *Система* $\{t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_k}, \ldots\}$ *полна в пространстве* $C[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \infty$. ■

Если $a = 0$, то к этой системе нужно добавить функцию $x(t) \equiv 1$. Из этой теоремы следует, что полные системы вида $\{1, t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_k}, \ldots\}$ не являются минимальными.

Определение 1.17. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *называется переполненной, если любая подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *полна.*

Ясно, что любая подпоследовательность переполненной последовательности также является переполненной.

Кроме того, в переполненной системе $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ никакая подпоследовательность не является минимальной.

Пример 1.18. (Переполненная система в пространстве $C[0,1]$). Пусть последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Рассмотрим функции $x_n(t) = \frac{1}{\lambda_n - t} \in C[0,1]$. Покажем, что $\overline{\mathrm{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = C[0,1]$. Так как $\frac{\lambda_n}{\lambda_n - t} \in \mathrm{sp}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и

$$\left\|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_n - t}\right\| = \left\|\frac{t}{\lambda_n - t}\right\| \leq \frac{1}{\lambda_n - 1} \to 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - t} = 1$ и, значит, $1 \in \overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

для $|x| < 1$. Так как $\frac{t}{\lambda_n} < 1$, то

$$x_n(t) = \frac{1}{\lambda_n - t} = \frac{\frac{1}{\lambda_n}}{1 - \frac{t}{\lambda_n}} = \frac{1}{\lambda_n}(1 + \frac{t}{\lambda_n} + \dots + \frac{t^k}{\lambda_n^k} + \dots). \quad (1.1)$$

Отсюда

$$\|(\lambda_n x_n - 1)\lambda_n - t\| = \left\| \frac{t^2}{\lambda_n} + \frac{t^3}{\lambda_n^2} + \dots \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} = \frac{\frac{1}{\lambda_n}}{1 - \frac{1}{\lambda_n}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поскольку $(\lambda_n x_n - 1)\lambda_n \in \overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $t \in \overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Далее, из равенства (1.1)

$$\|(\lambda_n x_n - 1)\lambda_n^2 - t\lambda_n - t^2\| = \left\| \frac{t^3}{\lambda_n} + \frac{t^4}{\lambda_n^2} + \dots \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} \to 0$$

при $n \to \infty$, т.е. $t^2 \in \overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Таким образом, получаем, что $\{1, t, t^2, \dots\} \subset \overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, $\overline{\text{sp}}\{1, t, t^2, \dots\} \subset \overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

По теореме Вейерштрасса получаем, что $\overline{\text{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = C[0,1]$. Поскольку любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет такой же вид, то и $\overline{\text{sp}}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = C[0,1]$. ■

Пример 1.19. (Переполненная система в пространстве l_2). Пусть $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda_n| < 1$, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $x_n = (1, \lambda_n, \lambda_n^2, \ldots, \lambda_n^k, \ldots) = \{\lambda_n^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Ясно, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda_n|^{2k} < +\infty$, т.е. $x_n \in l_2$. Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2$ и $z \perp x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $0 = (z, x_n) = z_1 + \overline{\lambda}_n z_2 + \overline{\lambda}_n^2 z_3 + \ldots = z_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n^k z_{k+1} \leq |z_1| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_n|^k |z_{k+1}|$. Так как $z \in l_2$, то существует число $M > 0$, такое что $|z_k| \leq M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n|^k |z_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n|^k = M \frac{|\lambda_n|}{1 - |\lambda_n|} \to 0$$

при $n \to \infty$. В равенстве $0 = (z, x_n) = z_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n^k z_{k+1}$ переходим к пределу при $n \to \infty$. Получаем $z_1 = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n^k z_{k+1} = 0$. Разделив на $\overline{\lambda}_n$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n^{k-1} z_{k+1} = z_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_n^{k-1} z_{k+1} = 0.$$

Аналогично предыдущему шагу $z_2 = 0$ и $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_n^{k-1} z_{k+1} = 0$. Разделим на $\overline{\lambda}_n$ и получим $z_3 = 0$ и т.д. Следовательно, $z = 0$ и система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - полна по следствию 4.2. Так как мы доказали полноту системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ для любой последовательности $\lambda_n \to 0$, то и для любой подпоследовательности $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ система

$\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ также полна. ■

Теорема 1.20. *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ минимальна. Биортогональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ единственна тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ полна.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Предположим противное: пусть $L = \overline{\mathrm{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \neq X$. Тогда по следствию 4.3 из теоремы Хана-Банаха существует функционал $f_0 \in X^*$, такой что $\|f_0\| = 1$, а $f_0(L) = 0$. Тогда система $\{f_n + f_0\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ также является биортогональной, что противоречит условию.

$\Leftarrow$ Предположим, что существуют две различные биортогональные системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $(f_n - g_n)x_k = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(f_n - g_n)z = 0$ и для любой линейной комбинации $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$. В силу непрерывности функционалов $f_n - g_n$ равенство $(f_n - g_n)z = 0$ верно для любого $z \in \overline{\mathrm{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = X$, т.е. $f_n = g_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. ■

Теорема 1.21. *Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ полна тогда и только тогда, когда не существует функционала $f \in X^*$, $f \neq \boldsymbol{0}$, такого что $f(x_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $f(x_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то в силу линейности и непрерывности функционала $f(\overline{\mathrm{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{0\}$, т.е. $f = \mathbf{0}$.

$\Leftarrow$ Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неполна, то существует функционал $f \neq \mathbf{0}$, $f(\overline{\mathrm{sp}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$ по следствию 4.3 из теоремы Хана-Банаха. ■

Следствие 1.22. *Если H - гильбертово пространство, то система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда из условия $z \in H$ и $z \perp x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ следует $z = 0$.* ■

Определение 1.23. *Пусть X - банахово пространство. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется базисом Шаудера, если любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.*

Заметим, что каждый базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ является полной системой, так как для любого элемента $x \in X$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k,$$

т.е. $x \in \overline{\mathrm{sp}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Для того, чтобы показать минимальность базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, нужно доказать, что операторы

$$S_n x = S_n\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

ограничены. Для этого рассмотрим в пространстве X новую норму, определенную формулой

$$|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|.$$

Так как,

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|,$$

то

$$\|x\| \leq |||x||| \text{ для всех } x \in X. \tag{1.2}$$

Теорема 1.24. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - банахово пространство. Тогда пространство $(X, |||\cdot|||)$ также является банаховым.*

Доказательство. Предположим, что $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность Коши в пространстве $(X, |||\cdot|||)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такой что $|||x_m - x_k||| < \varepsilon$ при $m, k \geq k_0$. В силу неравенства $\|x\| \leq |||x|||$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность Коши в $(X, \|\cdot\|)$ и, значит, $x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} x$, так как $(X, \|\cdot\|)$ банахово. Рассмотрим разложение элементов x_k по базису $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$x_1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_2^1 e_2 + \ldots + \alpha_n^1 e_n + \ldots$$

$$x_2 = \alpha_1^2 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \ldots + \alpha_n^2 e_n + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_k = \alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ldots + \alpha_n^k e_n + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пусть $S_n x_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i$ - частичные суммы ряда в разложении x_k по базису. Поскольку для $n \in \mathbb{N}$

$$\|S_n x_k - S_n x_m\| = \|S_n(x_k - x_m)\| \leq |||x_k - x_m||| < \varepsilon \qquad (1.3)$$

при $m, k \geq k_0$, то последовательность $\{S_n x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Тогда и числовая последовательность

$$|\alpha_n^k| = \frac{\|S_n x_k - S_{n-1} x_k\|}{\|e_n\|}$$

также является сходящейся для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\alpha_n^0 = \lim\limits_{k \to \infty} \alpha_n^k$.

В неравенстве 1.3

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^m e_i \right\| < \varepsilon,\ k, m \geq k_0$$

перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 e_i \right\| \leq \varepsilon \tag{1.4}$$

при $k \geq k_0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем теперь $k \geq k_0$, для которого $\|x_k - x\| < \varepsilon$ и для этого k выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\left\|x_k - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i\right\| \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Тогда при $n \geq n_0$, учитывая 1.4, получаем

$$\left\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 e_i\right\| \leq \|x - x_k\| + \left\|x_k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i\right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 e_i \right\| < 3\varepsilon.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 e_i$ сходится и $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 e_i$ в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Далее, так как неравенство 1.4 выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, то

$$\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 e_i \| \leq \varepsilon$$

при $k \geq k_0$, т.е. $|||x_k - x||| \leq \varepsilon$ при $k \geq k_0$. Значит, $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ в пространстве $(X, |||\cdot|||)$, т.е. $(X, |||\cdot|||)$ – банахово пространство.

■

Теорема 1.25. *Пусть* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– базис в банаховом пространстве* $(X, \|\cdot\|)$, $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) e_i$ *и* $|||x||| = \sup\limits_n \| \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i \|$. *Тогда тождественный оператор* $I : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$, $Ix = x$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Отображение I является линейной биекцией и непрерывно, поскольку

$$\|Ix\| = \|x\| \leq |||x|||.$$

Так как оба пространства $(X, \|\cdot\|)$ и $(X, |||\cdot|||)$ банаховы, то по теореме Банаха об обратном операторе отображение $I^{-1} : (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ также непрерывно. Следовательно, I – изоморфизм. ■

Определение 1.26. *Число* $K = \|I^{-1}\|$ *называется базисной константой. Так как*

$$\|I^{-1}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |||I^{-1}x||| = \sup_{\|x\| \leq 1} |||x||| \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|,$$

то $K \geq 1$.

Обозначим через $S_n : X \to X$ операторы, действующие по формуле
$$S_n x = S_n\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$
Очевидно, что $S_n \circ S_n = S_n$, т.е. S_n - операторы проектирования и

$$\sup_n \|S_n\| = \sup_n \left(\sup_{\|x\|\le 1} \|S_n x\| \right) = \sup_n \left(\sup_{\|x\|\le 1} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Big\|\right) =$$
$$= \sup_{\|x\|\le 1} \Big(\sup_n \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Big\|\Big) = \sup_{\|x\|\le 1} |||x||| = \sup_{\|x\|\le 1} |||I^{-1}x||| = \|I^{-1}\| = K,$$

т.е. $K = \sup\limits_n \|S_n\|$.

Определение 1.27. *Если $K = 1$, то базис называется монотонным.*

В этом случае

$$\|S_n x\| = \|(S_n \circ S_{n+1})x\| \le \|S_n\| \cdot \|S_{n+1}x\| = \|S_{n+1}x\|,$$

т.е. последовательность $\{\|S_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей и $\|S_n x\| \le \|x\|$.

Теорема 1.28. *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ базис в банаховом пространстве X, $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) e_i$ и $f_n : X \to \mathbb{R}$ функционалы,* *заданные формулой $f_n(x) = \alpha_n(x)$. Тогда система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ и является биортогональной к базису $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что f_n – линейные функционалы, $f_n(e_n) = 1$ и $f_n(e_i) = 0$ при $i \neq n$. Покажем, что функционалы $f_n \in X^*$, т.е. являются непрерывными. Действительно,

$$|f_n(x)| = |\alpha_n(x)| = \frac{\|S_n x - S_{n-1}x\|}{\|e_n\|} \leq \frac{\|S_n x\| + \|S_{n-1}x\|}{\|e_n\|} \leq \frac{2K\|x\|}{\|e_n\|},$$

т.е. формулы f_n непрерывны и $\|f_n\| \leq \frac{2K}{\|e_n\|}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. ■

Следствие 1.29. *Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X, то $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – минимальная система.* ■

Замечание. *Так как переполненные системы не являются минимальными, то они не является и базисами. Следовательно, системы в примерах* 1.18 *и* 1.19 *не базисы.*

Итак, полнота и минимальность являются необходимыми условиями базисности. Но эти условия не являются достаточными. Необходимое и достаточное условие базисности дает следующая теорема.

Теорема 1.30. (Критерий Гринблюма). *Последовательность ненулевых элементов* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является базисом в банаховом пространстве* X *тогда и только тогда, когда* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна и существует число* $K \geq 1$, *т.ч. для любых* m, n, $m \leq n$, *и любых* $\alpha_k \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \tag{1.5}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Так как

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k = S_m\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\Big)$$

и $\|S_m\| \leq K$, где K - базисная константа, то

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \right\| \leq \|S_m\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|.$$

($\Leftarrow$) Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна и выполняется неравенство 1.5. Рассмотрим подпространство

$$E = sp\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \subset X$$

и линейные операторы $S_m : E \to sp\{e_k\}_{k=1}^{m}$, определенные по формуле

$$S_m\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k e_k, & \text{если } m\le n;\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, & \text{если } m>n\end{cases}$$

Из неравенства 1.5 следует:

1. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независима и, следовательно, для $x\in E$ разложение $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$ единственно.

Действительно, в противном случае возможно равенство $\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n=0$, где некоторые $\alpha_i\neq 0$. Если i_0 - наименьший номер, при котором $\alpha_i\neq 0$, то из 1.5 получаем,

$$\|\alpha_{i_0}e_{i_0}\|=\left\|\sum_{k=1}^{i_0}\alpha_k e_k\right\|\le\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|=0,$$

что невозможно.

2. Операторы $S_m: E\to sp\{e_k\}_{k=1}^{m}$ ограничены и

$$\|S_m x\|=\left\|(S_m(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k)\right\|\le K\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|=K\|x\|,$$

то есть $\|S_m\|\le K$ для любого $m\in\mathbb{N}$.

3. Определим функционалы $f_m: E\to\mathbb{R}$ по формуле

$$f_m(x) = f_m(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k) = \begin{cases} \alpha_m, & \text{если } m \le n; \\ 0, & \text{если } m > n. \end{cases}$$

Тогда

$$|f_m(x)| = \frac{\|S_m x - S_{m-1}x\|}{\|e_m\|} \le \frac{\|S_m(x)\| + \|S_{m-1}x\|}{\|e_m\|} \le \frac{2K\|x\|}{\|e_m\|},$$

т.е. $\|f_m\| \le \frac{2K}{\|e_m\|}$. Ясно, что $f_m(e_m) = 1$ и $f_m(e_k) = 0$ при $k \ne m$. Следовательно, $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ - биортогональная система функционалов на пространстве E. Продолжая функционалы f_m по теореме Хана-Банаха на пространство X, получаем биортогональную систему функционалов на X. По теореме 1.13 система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является минимальной в пространстве X, а, следовательно, и ω-независимой.

Для доказательства базисности системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ достаточно показать, что любой элемент $x \in X$ можно представить в виде ряда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$, так как в силу ω-независимости системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ такое разложение будет единственным. По теореме 4.14 для каждого оператора $S_m : E \to sp\{e_k\}_{k=1}^{m}$ существует единственное продолжение $\widetilde{S}_m : X \to sp\{e_k\}_{k=1}^{m}$, причем $\|\widetilde{S}_m\| = \|S_m\| \le K$. Поскольку для любого $x \in E$ $(S_m \circ S_n)x = (S_n \circ S_m)x$, то и $(\widetilde{S}_m \circ \widetilde{S}_n)x = (\widetilde{S}_n \circ \widetilde{S}_m)x$. Следовательно, если $x \in X$,

$\widetilde{S}_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ и $\widetilde{S}_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k e_k$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k e_k = S_n\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k e_k\Big) = S_n(\widetilde{S}_{n-1}x) = (\widetilde{S}_n \circ \widetilde{S}_{n-1})x =$$

$$= \widetilde{S}_{n-1}(\widetilde{S}_n x) = \widetilde{S}_{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\Big) = S_{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k.$$

В силу линейной независимости системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ получаем $\beta_k = \alpha_k$ для $k \leq n-1$. Поскольку $n \in \mathbb{N}$ выбрано произвольно, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{S}_k x - \widetilde{S}_{k-1} x),$$

где $\widetilde{S}_0(x) = 0$. Частичные суммы этого ряда равны $\widetilde{S}_n x$ и для элемента $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$ имеем $\widetilde{S}_n x = S_n x = x$ при $n \geq m$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n x = x$ для всех $x \in E$. По теореме Банаха-Штейнгауза $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n x = x$ и для $x \in X$. Итак, любой элемент $x \in X$ разлагается в ряд $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, где $\alpha_k e_k = \widetilde{S}_k x - \widetilde{S}_{k-1} x$. ■

Пример 1.31. (Полная минимальная система, которая не является базисом).

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, \dots),$$

$x_n \in l_2$, $\|x_n\| = 1$.

1. Если элемент $z = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in l_2$ и $z \perp x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (x_1, z) = z_1 = 0, \\ (x_2, z) = \frac{z_1 + z_2}{\sqrt{2}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_n, z) = \frac{z_1 + \dots + z_n}{\sqrt{n}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

из которой $z_1 = z_2 = \dots = z_n = \dots = 0$. По следствию 1.22 система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна.

2. Рассмотрим элементы $y_n \in l_2$, $y_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \sqrt{n}, -\sqrt{n}, 0, \dots)$, и функционалы $f_n(x) = (x, y_n)$. Тогда $f_n(x_i) = 0$, если $i \leq n-1$ или $i > n$ и $f_n(x_n) = 1$. Следовательно, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - биотогональная система

функционалов. Заметим, что $\|f_n\| = \|y_n\| = \sqrt{2n}$.

3. Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в пространстве H. Тогда по критерию Гринблюма существует число $K \geq 1$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| \leq K \left\| x_n - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} x_{n+1} \right\|,$$

т.е.

$$1 = \|x_n\| \leq K \left\| \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, \ldots) - (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n+1}, 0, \ldots \Bigg) \right\| =$$

$$= K \left\| \Bigg(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots \Bigg) \right\| \leq K \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Получаем, что $K \geq \sqrt{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что невозможно. ■

Теорема 1.32. (С. Банах). *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Шаудера в гильбертовом пространстве H. Тогда существует единственная биортогональная система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, т.ч. для любого $x \in H$ $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ также является базисом в H и для всех $y \in H$ $\quad y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y, x_n) y_n$.*

Доказательство. Так как система $\{x_n\}$ базис, то для любого элемента $x \in H$ $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$, где $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональная система функционалов. Поскольку $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полная система, то биортогональная к $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ система единственна. По теореме Рисса для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $y_n \in H$, такой, что $x_n^*(x) = (x, y_n)$, причем $\|x_n^*\| = \|y_n\|$. Ясно, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - биортогональная система для $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Покажем, что для любого элемента $y \in H$ верно разложение $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y, x_n) y_n$. Из равенства $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n$ получаем

$$
\begin{aligned}
(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n, y \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)(x_n, y) = \\
= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (x, y_n)(x_n, y) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (x, (y, x_n) y_n) = \\
\lim_{N \to \infty} \left(x, \sum_{n=1}^{N} (y, x_n) y_n \right). \quad (1.6)
\end{aligned}
$$

Покажем теперь, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (y, x_n) y_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (y, x_n) y_n = y$. Для этого рассмотрим операторы $T_N(y) = \sum\limits_{n=1}^{N} (y, x_n) y_n$. По следствию 4.5 множество $\{T_N(y)\}_{N=1}^{\infty}$ ограничено в пространстве H для любого фиксированного $y \in H$. Применяя принцип равномерной ограниченности, получаем что существует число $M > 0$ такое, что $\|T_N\| \leq M$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Заметим теперь, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в пространстве H по следствию 1.22, так как из условия $(x, y_n) = 0$ следует, что $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, y_n)x_n = 0$. Следовательно, для любого $y \in H$ и $\varepsilon > 0$ существует элемент $z = c_1y_1 + \ldots + c_ny_{n_0}$, такой что $\|y - z\| < \varepsilon$ и, значит,

$$\|T_N(y - z)\| \leq \|T_N\| \cdot \|y - z\| < M\varepsilon \tag{1.7}$$

Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональная система к $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, то

$$T_N(y_k) = \sum_{n=1}^{N}(y_k, x_n)y_n = y_k$$

при $N \geq k$. Следовательно, если $N \geq n_0$, то

$$T_N z = T_N(\sum_{k=1}^{n_0} c_k y_k) = \sum_{k=1}^{n_0} c_k y_k = z.$$

Отсюда и из условия 1.7 получаем при $N \geq n_0$

$$\|T_N(y - z)\| = \|T_N y - z\| \leq M\varepsilon.$$

Тогда при $N \geq n_0$

$$\|T_N y - y\| \leq \|T_N y - z\| + \|z - y\| \leq M\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(M+1).$$

Это означает, что $\lim\limits_{N\to\infty} T_N y = y$, т.е.

$$y = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (y, x_n) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n) y_n.$$

Поскольку $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональна к $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, то система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ω-независима и, следовательно, разложение $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y, x_n) y_n$ единственно. Таким образом, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ - базис в пространстве H. ■

Определение 1.33. *Системы элементов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ *называются квадратично близкими, если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < +\infty$$

Теорема 1.34. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– ортонормированные квадратично близкие системы в гильбертовом пространстве* H *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом. Тогда* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *также базис в* H.

Доказательство. Поскольку $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированная, достаточно показать ее полноту. Предположим противное. Тогда по следствию 1.22 существует элемент $y_0 \neq 0$, $y_0 \perp y_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Зафикисируем число $N \in \mathbb{N}$, такое что $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1$. Рассмотрим элементы $h_k = \sum_{i=1}^{N}(y_k, x_i)x_i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Система $\{h_0, h_1, \ldots, h_N\}$ линейно зависима в N-мерном пространстве $sp\{x_1, \ldots, x_N\}$. Следовательно, для некоторых $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset$ имеем $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k h_k = 0$ и $a_l \neq 0$ для некоторого $l \leq N$. Отсюда,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h_k = \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\sum_{i=1}^{N} (y_k, x_i) x_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{N} (a_k y_k, x_i \right) \Bigg) x_i = 0.$$

Так как $\{x_1, \ldots, x_N\}$ линейно независима, то

$$\sum_{k=0}^{N} (a_k y_k, x_i) = \left(\sum_{k=0}^{N} a_k y_k, x_i \right) = 0$$

при $i = 1, 2, \ldots, N$.

Обозначим $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k y_k = v$. Тогда $v \perp x_i$ при $i \leq N$. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис, то

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(v, x_n)|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |(v, x_n)|^2,$$

а так как $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система, то

$v \perp \{y_{N+1}, y_{n+2}, \ldots\}$, т.е. $(v, y_n) = 0$ при $n \geq N+1$. Следовательно,

$$\|v\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |(v, x_n) - (v, y_n)|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |(v, x_n - y_n)|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|v\|^2 \cdot \|x_n - y_n\|^2 = \|v\|^2 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < \|v\|^2.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Упражнения

1. *Доказать, что если* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *базис в банаховом пространстве* X *и* $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, *то* $x = 0$.

2. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *- нормированная последовательность,* $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ *- биортогональная последовательность и* $\|x_n^*\| \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Доказать, что* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не является базисом в пространстве* X.

3. *Доказать, что последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, 0, 0, \ldots),\ n \geq 2,$$

является минимальной, но не является полной в пространстве

l_2.

Указание: проверить, что элемент $y \perp \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *где*

$$y = \Big(0, 0, 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2^n}}_{2^n}, \underbrace{-\frac{1}{2^n}, \ldots, -\frac{1}{2^n}}_{2^n}, \ldots\Big).$$

4. *Доказать, что система* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *где*

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$$

не является базисом в пространстве l_2.

5. *Доказать, что система функций* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *где* $x_n(t) = e^{nt}$ *является полной в пространстве* $C[0,1]$.

6. *Доказать, что последовательность функций* $x_n(t) = e^{\frac{t}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, *не является базисом в пространстве* $C[0,1]$.

7. *Доказать, что последовательность функций* $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ *не является базисом в пространстве* $L_2(0,1)$.

8. *Является ли система функций* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n(t) = e^{-nt^2}$

(a) *минимальной;*

(b) *полной;*

(c) *базисом;*

в пространствах $C[-1,1]$ *и* $L_2(0,1)$*?*

9. *Проверить является ли система* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n$*: минимимальной, полной, переполненной*

(*a*) $x_k = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \ldots, \frac{1}{k+n})$.

(*b*) $x_k = (\frac{1}{2^{k+1}}, \ldots, \frac{1}{2^{k+n}})$.

(*c*) $x_k = (\frac{k-1}{k}, \frac{k-2}{k}, \ldots, \frac{k-n}{k})$.

(*d*) $x_k = (k^1, k^2, \ldots, k^n)$.

(*e*) $x_k = (\lambda^k, \ldots, \lambda^{k+n-1})$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

(*f*) $x_k = ((k+1)^2, \ldots, (k+n)^2)$.

10. *Проверить, является ли система* $\{e^{-kt}\}_{k=1}^{\infty}$ *базисом в пространстве* $C[0,1]$.

11. *Проверить, является ли система* $\{e^{-\frac{t}{n}}\}_{k=1}^{\infty}$ *базисом в пространстве:*

(*a*). $C[-1,1]$;

(*b*). $\mathcal{L}(-1,1)$.

12. *Проверить, является ли система элементов* $\{\frac{1}{t^n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *базисом в пространстве* $C[0,1]$.

2. Базисы Рисса, Ауэрбаха и ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве.

Определение 2.1. *Пусть H – гильбертово пространство. Базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ называется ортонормированным, если $(e_k, e_i) = 0$ при $k \neq i$ и $\|e_k\| = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2.2. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ и $\|x_n\| = 1$. Если для любого $h \in H$ $\|h\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(h, x_n)|^2$, то $\{x_n\}$ – полная ортонормированная система, т.е. базис.*

Доказательство. Для любого $i \in \mathbb{N}$ по условию теоремы

$$1 = \|x_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x_i, x_n)|^2 = \|x_i\|^2 + \sum_{n \neq i}^{\infty} |(x_i, x_n)|^2.$$

Так как, $\|x_i\| = 1$ то, $\sum\limits_{n \neq i} |(x_i, x_n)|^2 = 0$, т.е. для любого i, n, $i \neq n$ $x_i \perp x_n$.

Итак, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система. Докажем полноту. Пусть $z \perp x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда, по условию

$$\|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(z, x_n)|^2 = 0.$$

Следовательно, $z = 0$. По следствию 1.22 система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна. ■

Теорема 2.3. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормированный базис в гильбертовом пространстве* H*. Тогда*

(1) *если* $U : H \to H$ *– унитарный оператор, то* $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ *также ортонормированный базис в* H*;*

(2) *если* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормированный базис в* H*, то существует унитарный оператор* $U : H \to H$*, такой, что* $Ue_k = x_k$*.*

Доказательство.

(1). Так как унитарный оператор U является изометрическим изоморфизмом H на H, то $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ базис в H. Кроме того,

$$(Ue_k, Ue_n) = (U^*Ue_k, e_n) = (e_k, e_n) = \delta_{kn}.$$

Следовательно, $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированный базис.

(2). Определим оператор $U : H \to H$ по формуле

$$Ux = U\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)x_k.$$

Нетрудно видеть, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)x_k$ сходится, поскольку для

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (x, e_k) x_k$ имеем:

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} (x, e_k) x_k \|^2 = (\text{по теор. Пифагора}) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} |(x, e_k)|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2.$$

Следовательно, определение оператора U корректно. Линейность оператора U очевидна. Поскольку

$$(Ux, Uy) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) x_n), \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) x_k \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) \overline{(y, e_k)} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_k) e_k), \sum_{n=1}^{\infty} (y, e_k) e_k \Big) = (x, y),$$

то $\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (x, x) = \|x\|^2$. Значит, оператор U изометрический изиморфизм H в H, сохраняющий скалярное произведение. Рассмотрим сопряженный оператор $U^* : H \to H$.

Если $y \in H$, то

$$U(U^* y) = U\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(U^* y, e_k)e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}(U^* y, e_k)x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(y, Ue_k)x_k = \sum_{k=1}^{\infty}(y, x_k)x_k = y,$$

т.е. U - сюрьекция и, значит, изометрический изоморфизм H на H. Следовательно, U - унитарный оператор. ■

Определение 2.4. *Базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется базисом Рисса, если существует ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и непрерывная линейная биекция $T : H \to H$, такая что $x_n = Te_n$.*

Теорема 2.5. *Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – биортогональная система к $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – также базис Рисса.*

Доказательство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис и $x_n = Te_n$, где T - непрерывная линейная биекция. Для любого элемента $h \in H$

$$T^{-1}h = \sum_{n=1}^{\infty}(T^{-1}h, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(h, (T^{-1})^* e_n)e_n.$$

Следовательно,

$$h = T(T^{-1}h) = \sum_{n=1}^{\infty}(h, (T^{-1})^* e_n) T e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(h, (T^{-1})^* e_n) x_n.$$

Следовательно, биортогональная система имеет вид $y_n = (T^{-1})^* e_n$. Так как $(T^{-1})^*$ - непрерывная линейная биекция, то $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ - базис Рисса. ■

Известно (теорема 4.12), что любая полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H является базисом.

Теорема 2.6. *Если система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ – базис Рисса, то существуют числа $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для любого $y \in H$ выполняется неравенство*

$$A\|y\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |(y, x_n)|^2 \le B\|y\|^2.$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля для ортонормированной системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y, x_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(y, T e_n)|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |(T^* y, e_n)|^2 = \|T^* y\|^2 \le \|T^*\|^2 \|y\|^2.$$

С другой стороны

$$\|y\|^2 = \|(T^*)^{-1}(T^*y)\|^2 \leq \|(T^*)^{-1}\|^2 \cdot \|T^*y\|^2 =$$
$$= \|(T^{-1})^*\|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(T^*y, e_n)|^2 = \|(T^{-1})^*\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(y, Te_n)|^2 =$$
$$= \|(T^{-1})^*\|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(y, x_n)|^2.$$

Полагая $A = \frac{1}{\|(T^{-1})^*\|^2}$ и $B = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$ получаем утверждение теоремы. ■

Теорема 2.7. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$. Следующие условия равносильны:*

(1) *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - базис Рисса;*

(2) *Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полная и существуют такие числа $A > 0$, $B > 0$, такие, что для любой последовательности $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$ выполнено неравенство*

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \Big\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) По определению базиса Рисса существует ограниченная биекция $T : H \to H$, т.ч. $x_n = Te_n$ для некоторого

ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для любого $c \in c_{00}$

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\Big\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k T e_k\Big\|^2 = \Big\|T(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k)\Big\|^2 \leq$$

$$\leq \|T\|^2 \cdot \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\Big\|^2 = \|T\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\Big\|^2 = \Big\|T^{-1} \circ T(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k)\Big\|^2$$

$$\leq \|T^{-1}\|^2 \cdot \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k T e_k\Big\|^2 = \|T^{-1}\|^2 \cdot \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\Big\|^2.$$

Полагая $A = \frac{1}{\|T^{-1}\|^2}$ и $B = \|T\|^2$ получаем требуемое неравенство.

(2) $\Rightarrow$ (1) Выберем в H ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и на $\mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ определим оператор $T : \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \to \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ по формуле

$$T(c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n.$$

Оператор V определенный на $\mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ по формуле

$$V(c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n) = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$$

является обратным T. Так как системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ полны в H, то операторы T и V определены на всюду плотных подпространствах в H. Для любого $y = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n \in \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ по условию

$$\|Ty\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\Big\|^2 \leq B\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = B\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\Big\|^2 = B\|y\|^2.$$

Следовательно, T - линейный ограниченный оператор на $\mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ и $\|T\| \leq \sqrt{B}$. Аналогично, для любого $z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \in \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\|Vz\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \leq \frac{1}{A}\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\Big\|^2 = \frac{1}{A}\|z\|^2,$$

то есть V - линейный ограниченный оператор на $\mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$. По теореме 4.14 мы можем продолжить операторы T и V до линейных ограниченных оперторов $\widetilde{T} : H \to H$ и $\widetilde{V} : H \to H$. Так как $T \circ V = I$ и $\widetilde{T} \circ \widetilde{V} = T \circ V$ на всюду плотном подпространстве $\mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, то $\widetilde{T} \circ \widetilde{V} = I_H$. Аналогично, $\widetilde{V} \circ \widetilde{T} = I_H$. Следовательно, $\widetilde{T}$ - линейная ограниченная биекция на H и $\widetilde{T}e_n = x_n$. Значит $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - базис Рисса. ■

Определение 2.8. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ базис в банаховом пространстве E и $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$ - биортогональная система* *к* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Базис* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется базисом Ауэрбаха, если* $\|x_n\| = \|x_n^*\| = 1$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.9. *Пусть* E *-* n*-мерное вещественное нормированное пространство. Тогда*

(1) *в* E *существует базис Ауэрбаха.*

(2) *Если* X *- нормированное пространство и* $E \subset X$, *то сущестувует проектор* $P : X \to E$, *т.ч.* $\|P\| \le n$.

Доказательство (1) Пусть $\{y_1, \ldots, y_n\}$ - базис в пространстве E, $S(0,1) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ - единичная сфера в E и элементы $z_1, \ldots, z_n \in S(0,1)$. Пусть $z_i = \alpha_{1i}y_1 + \alpha_{2i}y_2 + \ldots + \alpha_{ni}y_n$ - разложение z_i по базису $\{y_1, \ldots, y_n\}$ и матрица $A(z_1, \ldots, z_n) = \{\alpha_{ki}\}_{k,i=1}$. Рассмотрим функцию $v : S(0,1) \times \ldots \times S(0,1) \to \mathbb{R}$

$$v(z_1, \ldots, z_n) = |\{\alpha_{ki}\}_{k,i=1}^n|,$$

где $|\{\alpha_{ki}\}_{k,i=1}^n|$ - определитель матрицы A. Функция v определена на компакте $S(0,1)\times\ldots\times S(0,1)$. Следовательно, эта функция в некоторой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in S(0,1) \times \ldots \times S(0,1)$ достигает своего максимального значения, т.е. $v(x_1, \ldots, x_n) \ge v(z_1, \ldots, z_n)$ для любой точки $(z_1, \ldots, z_n) \in S(0,1) \times \ldots \times S(0,1)$. Так как $v(x_1, \ldots, x_n) \ge v(y_1, \ldots, y_n) = 1$, то система

$x_1, \ldots, x_n$ - линейно независима, то есть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ - базис в пространстве E. Очевидно, что $\|x_i\| = 1, i = 1, \ldots, n$. Определим функционалы $x_i^* \in E^*$ по формуле

$$x_i^*(x) = \frac{v(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{v(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Ясно, что $x_i^*(x_i) = 1$ и $x_i^*(x_k) = 0$ при $k \neq i$, так как в матрице A появится два одинаковых столбика. Кроме того, для любого $x \in S(0,1)$ $v(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq v(x_1, \ldots, x_n)$, то есть $|x_i^*(x)| \leq 1$. Следовательно, $\|x_i^*\| = 1$ для $i = 1, \ldots, n$.

(2) Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ - базис Ауэрбаха в конечномерном пространстве E. Тогда для любого $x \in E$ $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i$. По теореме Хана-Банаха продолжим функционалы $x_i^* : E \to \mathbb{R}$ до функционалов $\widetilde{x}_i^* : X \to \mathbb{R}$ с сохранением нормы. Тогда $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i^*(x) x_i$ проектор X на E. Кроме того,

$$\|Px\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i^*(x) x_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} (|\widetilde{x}_i^*(x)| \cdot \|x_i\|) \leq \sum_{i=1}^{n} (\|\widetilde{x}_i^*\| \cdot \|x\|) = n\|x\|.$$

Следовательно, $\|P\| \leq n$. ■

Пример 2.10. Рассмотрим подпространство $E \subset C[0,1]$,

$$E = sp\{t, t^2\} = \{at + bt^2 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Функции $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = t^2$ являются базисом в пространстве E, но не являются базисом Ауэрбаха. Действительно, если $\{x_1^*, x_2^*\}$ - биортогональная система, то $x_1^*(t) = 1$, а $x_1^*(t^2) = 0$. Тогда, $x_1^*(2t - t^2) = 2$. Так как $\|2t - t^2\| = 1$, то $\|x_1^*\| \geq |x_1^*(2t - t^2)| = 2$. Следовательно, $\|x_1^*\| \geq 2$. ■

Упражнения:

1. *Является ли система элементов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots)$ *базисом Рисса в пространстве* l_2*?*

2. *Является ли система элементов* $\{x_k\}_{k=1}^{n}$, $x_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 1, \ldots, 1)$ *базисом Рисса в пространстве* $\mathbb{C}^n$*?*

3. *Является ли базисом Риссса система* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$

(*a*) $x_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$;

(*b*) $x_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1 - \dfrac{1}{2^n}}_{n}, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$

(*c*) $x_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \ldots)$.

4. *Является ли система функций* $x_n(t) = (\cos \frac{nt}{2})^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *базисом Рисса в пространстве* $L(0, \pi)$*?*

5. *Доказать, что функции* $x_1(t) \equiv 1$ *и* $x_2(t) = t - 1$ *образуют базис Ауэрбаха в пространстве* $L = \{kt + b,\ k, b \in \mathbb{R}\} \subset C[0, 2]$.

6. *Образуют ли функции* $x_1(t) = \sin t$ *и* $x_2(t) = \cos t$ *базис Ауэрбаха в пространстве* $L_2 = \{a \sin t + b \cos t,\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset C[0, \pi]$.

3. Бесселевы последовательности и фреймы в гильбертовом пространстве H.

Хорошо известно, что для любой ортонормированной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2,$$

где $c_k = (x, e_k)$ - коэффициенты Фурье для элемента $x \in H$.

Определение 3.1. *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная последовательность элементов в H. Если существует число $B > 0$, т.ч. для любого $x \in H$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq B \cdot \|x\|^2,$$

то последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется бесселевой. Число B называется бесселевой границей для последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 3.2. *Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева последовательность, то для любой последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится в пространстве H.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$. Тогда при $n > m$

$$\|S_n - S_m\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k - \sum_{k=1}^{m} c_k x_k \Big\| = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k \Big\| =$$

$$= \sup_{\|y\| \leq 1} \Big| \Big(\sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k, y \Big) \Big| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k| \cdot |(x_k, y)| \leq$$

$$\leq \sup_{\|y\| \leq 1} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \cdot \sum_{k=m+1}^{n} |(y, x_k)|^2} \leq$$

$$\leq \sup_{\|y\| \leq 1} \sqrt{\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \cdot B\|y\|^2} \leq \sqrt{B \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2} \underset{m \to \infty}{\to 0},$$

так как $c \in l_2$. ■

Теорема 3.3. *Пусть последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ *сходится для любого* $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$. *Тогда оператор* $T : l_2 \to H$, *заданный формулой* $Tc = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ *является линейным, ограниченным; сопряженный оператор* $T*$ *имеет вид* $T^* x = \{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ *и последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является бесселовой с границей* $B = \|T\|^2$.

Доказательство. Рассмотрим операторы $T_n : l_2 \to H$,

$T_n c = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$. Так как,

$$\|T_n c\| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \|x_k\| \le \|c\| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2},$$

то операторы T_n линейны и ограничены. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} T_n c = Tc$ для любого $c \in l_2$, то по следствию 4.4 оператор T также является линейным и ограниченным. Из равенства

$$(Tc, x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k x_k, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x_k, x)$$

следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k (x_k, x)$ сходится для любого $c \in l_2$ и $x \in H$. По теореме Фишера получаем, что $\{(x_k, x)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ и

$$(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x_k, x) = (Tc, x) = (c, T^* x).$$

Следовательно, $T^* x = \{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Так как, $\|T^*\| = \|T\|$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 = \|T^* x\|^2 \le \|T^*\|^2 \cdot \|x\|^2 = \|T\|^2 \cdot \|x\|^2$$

для любого $x \in H$, т.е. последовательность $\{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ - бесселева и $B = \|T\|^2$. ■

Следствие 3.4. *Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ бесселева тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится для любого $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$.* ■

Следствие 3.5. *Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ ортонормированная последовательность или базис Рисса, то $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева.* ■

Теорема 3.6. *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$. Если неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \le B\|x\|^2$ выполнено для всех x из некоторого всюду плотного множества $V \subset H$, то последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ бесселева.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $x_0 \in H$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x_0, x_k)|^2 > B\|x_0\|^2$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, для которого выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |(x_0, x_k)|^2 > B\|x_0\|$. Так как $V \subset H$ всюду плотно, то $x_0 = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$ для некоторой последовательности $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset V$. Ясно, что для достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} |(y_m, x_k)|^2 > B\|x_0\|$, что противоречит условию. ■

Заметим, что не всякий базис является бесселевой системой. Например, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset l_2$, где $x_k = (0, \ldots, k, 0, \ldots) = ke_k$, не является бесселевой системой, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x_0, x_k)|^2 = \infty$, если $x_0 = \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$.

Но если базис $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является бесселевой системой, то верны следующие утверждения для биортогональных систем $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 3.7. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ – базис, а $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ биортогональная последовательность. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - бесселева с границей B, то

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, y_k)|^2 \geq \frac{1}{B}\|x\|^2$ *для любого* $x \in H$;

(2) $\|\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k y_k\| \geq \frac{1}{B}\|x\|^2$ *для любой последовательности* $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$.

Доказательство.

(1). Для любого $x \in H$ $\quad x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, y_k)x_k$. Следовательно,

$$\|x\|^4 = |(x,x)|^2 = \Big|(x, \sum_{k=1}^{\infty}(x,y_k)x_k)\Big|^2 = \Big|\sum_{k=1}^{\infty}(x,y_k)(x,x_k)\Big|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}|(x,y_k)|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}|(x,x_k)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}|(x,y_k)|^2 \cdot B \cdot \|x\|^2.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство.

(2). Так как $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ - биортогональная последовательность, то $c_k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i(y_i, x_k)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i(y_i, x_k) \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i, x_k) \right| \leq B \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i \right\|^2.$$

$\blacksquare$

Следующая теорема – достаточное условие бесселевости системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 3.8. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$. Если для любого $j \in \mathbb{N}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x_j, x_k)| \leqslant B$, то система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева с границей B.

Доказательство. По следствию 3.4 достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится для любого $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$. При $n > m$ имеем

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k \right\|^2 = \Big(\sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k, \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \Big) =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} c_k \cdot \overline{c_j} (x_k, x_j) \leqslant$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} |c_k| \cdot \sqrt{|(x_k x_j)|} \cdot |c_j| \sqrt{|(x_k, x_j)|} \leqslant$$

(используя неравенство Коши-Буняковского)

$$\leqslant \Big(\sum_{k=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} |c_k|^2 |(x_k, x_j)| \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} |c_j|^2 |(x_j, x_k)| \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 B \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{j=m+1}^{n} |c_j|^2 \cdot B \Big)^{\frac{1}{2}} = B \cdot \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \to 0$$

при $m \to \infty$ в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$. Аналогично можно получить оценку

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \|^2 \leqslant B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Из теоремы 3.3 получаем, что число B является бесселевой границей системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. ■

Теорема 3.9. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *– базис Рисса;*

(2) $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *и ее биортогональная* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– полные бесселевы системы.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2)

Так как $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ базис Рисса, то $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна и является бесселевой по теореме 2.6. По теореме 2.5 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ также базис Рисса и, следовательно, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ - полная и бесселева.

(2) $\Rightarrow$ (1) Так как системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ полные, то линейные подпространства $L = sp\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $M = sp\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ плотны в H. Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ и определим линейные операторы $V : H \to H$ и $U : H \to H$ по формулам

$$V\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k, \quad U\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k y_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k.$$

В силу биортогональности систем $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k = \sum_{k=1}^{N} (x, y_k) x_k$$

и

$$y = \sum_{k=1}^{N} c_k y_k = \sum_{k=1}^{N} (y, x_k) y_k.$$

Так как для элементов x и y разложение единственно, то операторы U и V определены корректно.

Далее,

$$\|Vx\|^2 = \Big\|V(\sum_{k=1}^{N}(x,y_k)x_k)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{N}(x,y_k)e_k\Big\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}|(x,y_k)|^2 \leq B\|x\|^2,$$

где B - бесселева граница системы $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, оператор V - ограничен и по теореме 4.14 его можно продолжить с сохранением нормы на пространство H. Аналогично доказываем ограниченность оператора V.

Для $x \in L$ и $y \in M$ имеем

$$(Vx, Uy) = \Big(\sum_{k=1}^{N} c_k e_k, \sum_{j=1}^{N} d_j e_j\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \overline{d}_j = \Big(\sum_{k=1}^{N} c_k x_k, \sum_{j=1}^{N} d_j y_j\Big) = (x, y).$$

В силу непрерывности скалярного произведения и операторов V и U $(Vx, Uy) = (x, y)$ для любых $x, y \in H$. Отсюда для любого $x \in H$

$$\|x\|^2 = (x, x) = (Vx, Ux) \leq \|Vx\| \cdot \|Ux\|.$$

Следовательно, если $x \neq 0$, то и $Vx \neq 0$, т.е. оператор V является инъективным. Пусть теперь $h \in H$. Тогда $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(h, e_k)e_k$ и последовательность $\{(h, e_k)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Так как $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ бесселева, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)x_k$ сходится и

$$V\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)x_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)e_k = h,$$

т.е. оператор V - сюрьекция. Следовательно, V - ограниченная линейная биекция H на H, $V^{-1}e_k = x_k$ и, значит, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис Рисса. ■

Рассмотрим теперь частный случай бесселевых систем.

Определение 3.10. *Последовательность элементов* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *называется фреймом, если существуют числа* $A, B > 0$, *такие, что для любого* $x \in H$ *верно неравенство*

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Число A *называется нижней границей фрейма, число* B *называется верхней границей фрейма. Числа*

$$\sup\{A : A - \textit{нижняя граница фрейма}\} \quad \text{и}$$

$$\inf\{B : B - \textit{верхняя граница фрейма}\}$$

называются точными гарницами фрейма. Если $A = B$, то фрейм называется жестким. Если $A = B = 1$, то фрейм называется парсевалевским. Заметим, что по теореме 2.6 базисы Рисса являются фреймами.

Поскольку каждый фрейм является бесселевой последовательностью, то оператор $T : l_2 \to H \quad Tc = \sum c_k x_k$ линейный, ограниченный и $T^* : H \to l_2$ имеет вид $T^*x = \{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Рассмотрим оператор $S = T \circ T^* : H \to H$.

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k.$$

Ясно, что оператор S - самосопряженный и положительный, так как

$$(Sx, x) = (T(T^*x), x) = (T^*x, T^*x) = (\{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty}, \{(x, x_k)\}_{k=1}^{\infty}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Оператор S называется фреймовым оператором.

Теорема 3.11. *Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ фрейм, то система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной.*

Доказательство. Действительно, если $\overline{\mathrm{sp}}\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \neq H$, то существует элемент $z \in H$, $z \perp 0$ и $z \perp x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда невозможно неравенство

$$A\|z\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(z, x_k)|^2.$$

■

Пример 3.12. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в H.

(a) Повторяя каждый элемент системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ дважды, мы получаем систему $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \Big\{e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots, e_n, e_n, \ldots\Big\}.$$

Тогда,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = 2\|x\|^2,$$

т.е. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - жесткий фрейм с $A = B = 2$.

(b) если

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots\},$$

то $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фрейм с границами $A = 1$, $B = 2$.

Пример 3.13. Пусть

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots\right\},$$

т.е. каждый вектор $\frac{e_k}{\sqrt{k}}$ повторяется k раз. Тогда,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k|(x, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2,$$

т.е. фрейм $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является парсевалевским.

Пример 3.14. Система элементов

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, e_2, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{n\ \text{раз}}, \dots\}$$

не является фреймом, так как для $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k} \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k|(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Теорема 3.15. *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ фрейм в гильбертовом пространстве H и S фреймовый оператор. Тогда оператор $S : H \to H$ - линейная ограниченная биекция и для любого $x \in H$*

верно равенство

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, S^{-1}x_k)x_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)S^{-1}x_k. \tag{3.2}$$

Доказательство. Так как,

$$A(x,x) \leqslant (Sx,x) \overset{(3.1)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |(x,x_k)|^2 \leq B|(x,x)|,$$

то

$$0 \leq B(x,x) - (Sx,x) = ((BI-S)x,x) \leq (B-A)(x,x) = (B-A)\|x\|^2.$$

Поскольку оператор $BI - S$ является самосопряженным, то

$$\|BI - S\| = \sup_{\|x| \leq 1} ((BI - S)x, x) \leq \sup_{\|x| \leq 1} (B - A)\|x\|^2 = B - A.$$

Отсюда

$$\|I - \frac{1}{B}S\| \leq \frac{B - A}{B} < 1.$$

По теореме 4.17 оператор $\frac{1}{B}S$ имеет обратный. Следовательно, и оператор S также имеет обратный S^{-1}. По теореме Банаха оператор S^{-1} - линейный ограниченный оператор . Из равенства

$Sx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k$ следует

$$x = S^{-1}(Sx) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)S^{-1}x_k$$

и

$$x = S(S^{-1}x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(S^{-1}x, x_k\right)x_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x, S^{-1}x_k\right)x_k.$$

■

Теорема 3.16. *Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – жесткий фрейм, то фреймовый оператор $S = AI$ и для любого $x \in H$*

$$x = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k,$$

где A – нижняя граница фрейма.

Доказательство. Так как

$$(Sx, x) = \sum_{k=1}^{\infty}|(x, x_k)|^2 = A\|x\|^2 = (Ax, x) = (AIx, x),$$

то $S = AI$, а $S^{-1} = \frac{1}{A}I$. По теореме 3.5 получаем,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)S^{-1}x_k = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k.$$

$\blacksquare$

Теорема 3.17. *Если* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– фрейм в* H*, то* $\{S^{-1}x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *также фрейм в* H *с границами* $\frac{A}{\|S\|^2}$ *и* $B\|S^{-1}\|^2$.

Доказательство. Так как $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - фрейм, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,S^{-1}x_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(S^{-1}x,x_k)|^2\le B\|S^{-1}x\|^2\le B\|S^{-1}\|^2\|x\|^2.$$

С другой стороны, так как $\|x\|=\|S(S^{-1}x)\|\le\|S\|\|S^{-1}x\|$, т.е. $\|S^{-1}x\|\ge\frac{\|x\|}{\|S\|}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,S^{-1}x_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(S^{-1}x,x_k)|^2\ge A\|S^{-1}x\|^2\ge\frac{A}{\|S\|^2}\|x\|^2.$$

$\blacksquare$

Теорема 3.18. *Если* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– фрейм в* H*,* $x\in H$ *и для некоторой последовательности* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_2$ $\quad x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kx_k$*, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\ge\sum_{k=1}^{\infty}|(x,S^{-1}x_k)|^2.$$

(Поэтому разложение $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,S^{-1}x_k)x_k$ называют самым экономичным среди всех разложений по фрейму.)

Доказательство. Так как,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - (x, S^{-1}x_k))x_k = 0,$$

и по теореме 3.17 последовательность $\{(x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$, то $\{c_k - (x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty} \in T^{-1}(0) = \mathcal{N}(T)$. Поскольку $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^{\perp}$ (теорема 4.15), а $\{(S^{-1}x, x_k)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{R}(T^*)$, то

$$\{c_k - (x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty} \perp \{(S^{-1}x, x_k)\}_{k=1}^{\infty} = \{(x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty}.$$

По теореме Пифагора,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\|^2 = \|\{c_k - (x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty} + \{(x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty}\|^2 =$$

$$= \|\{c_k - (x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty}\|^2 + \|\{(x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty}\|^2 \geq \|\{(x, S^{-1}x_k)\}_{k=1}^{\infty}\|^2.$$

■

Для определения точных границ фрейма, можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 3.19. *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– фрейм в* H *и* $\sigma(S)$ *– спектр оператора* S. *Тогда*

$$\min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\} \cdot \|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\} \cdot \|x\|^2,$$

причем границы $A = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$ *и* $B = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$ *являются точными.*

Доказательство. Заметим, что оператор S – положительный и обратимый. Следовательно, $\sigma(S) \subset (0, +\infty)$. Поскольку $\sigma(S)$ - компакт, то число $m = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\} \in \sigma(S)$ и $m > 0$. Аналогично, $M = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\} \in \sigma(S)$. Так как S – самосопряженный оператор, то по теореме 4.20(6)

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Sx, x) = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2,$$

т.е. для $x \in H$, $x \neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\frac{x}{\|x\|}, x_k)|^2 \leq M$. Отсюда, для любого $x \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq M \cdot \|x\|^2.$$

Аналогично,

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Sx, x) = \inf_{\|x\|=1} \sum |(x, x_k), |^2$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \geq m\|x\|^2$$

для любого $x \in H$. Как известно (теорема 4.26), для самоспоряженного оператора все числа из спектра либо собственные, либо почти собственные, т.е. существуют последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, т.ч. $Sx_n - Mx_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $Sy_n - my_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x_n, x_k)|^2 = (Sx_n - Mx_n, x_n) + M(x_n, x_n) \to M,$$

при $n \to \infty$, т.е. M - точная верхняя граница фрейма. Аналогично, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(y_n, x_k)|^2 \to m$ при $n \to \infty$ т.е. m - точная нижняя граница фрейма. ■

Рассмотрим теперь фреймы в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$. В конечномерных пространствах рассматривают, как правило, конечные фреймы $\{x_k\}_{k=1}^{m}$. Так как фрейм является полной системой (теорема 3.11), то $m \geq n$. Ясно, что при $m = n$ система $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ является базисом.

Теорема 3.20. *Система $\{x_k\}_{k=1}^{m} \subset \mathbb{C}^n$ является фреймом тогда и только тогда, когда система $\{x_k\}_{k=1}^{m} \subset \mathbb{C}^n$ полна.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Предположим, что система $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ неполна. Тогда существует элемент $x_0 \in \mathbb{C}^n$, такой что $x_0 \neq 0$ и $x_0 \perp sp\{x_k\}_{k=1}^{m}$. Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{m} |(x_0, x_k)|^2 = 0$, что противоречит определению фрейма.

$\Leftarrow$ Пусть $x \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, x_k)|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 \Big) \cdot \|x\|^2,$$

т.е. $B = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2$.

Для нахождения нижней границы фрейма определим отображение $\Phi : S(0,1) \to [0, +\infty)$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{m} |(x, x_k)|^2,$$

где $S(0,1)$ – единичная сфера в пространстве $\mathbb{C}^n$. Полагаем

$$A = \inf\{\Phi(x), x \in S(0,1)\}.$$

Так как $S(0,1)$ компакт, а отображение Φ непрерывно, то существует элемент $x_0 \in S(0,1)$, т.ч.

$$A = \Phi(x_0) = \sum_{k=1}^{m} |(x_0, x_k)|^2.$$

Ясно, что $\Phi(x_0) \neq 0$, иначе $(x_0, x_k) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, m$, т.е. $x_0 \perp sp\{x_k\}_{k=1}^m$, что противоречит полноте системы $\{x_k\}_{k=1}^m$. Поскольку $\Phi(\frac{x}{\|x\|}) \geq \Phi(x_0)$ для любого $x \neq 0$, то получаем неравенство

$$\Phi(\frac{x}{\|x\|}) = \sum_{k=1}^{m} |(\frac{x}{\|x\|}, x_k)|^2 \geq \Phi(x_0) = A.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, x_k)|^2 \geq A\|x\|^2,$$

т.е. A - нижняя граница фрейма. ■

В случае конечного фрейма для определения оператора T рассматривают пространство $\mathbb{C}^m$ вместо пространства l_2, т.е. $T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$

$$T(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k x_k \in \mathbb{C}^n.$$

Оператор T *называется оператором синтеза или предфреймовым оператором.* Нетрудно проверить, что в этом случае сопряженный оператор $T^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ определяется формулой

$$T^* x = \{(x, x_k)\}_{k=1}^{m} \in \mathbb{C}^m.$$

Фреймовый оператор $S = T \circ T^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$Sx = \sum_{k=1}^{m} (x, x_k) x_k$$

также, как и в общем случае, является ограниченной линейной биекцией, $S = S^*$ и $S \geq 0$. По теореме 3.15 для любого $x \in \mathbb{C}^n$ верно равенство

$$x = \sum_{k=1}^{m} (x, S^{-1}x_k)x_k = \sum_{k=1}^{m} (x, x_k)S^{-1}x_k. \tag{3.3}$$

В конечномерном пространстве $\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где λ_i, $1 \leq i \leq n$ - собственные числа оператора S и каждое λ_i повторяется столько раз какова его кратность. Так как S обратимый оператор и $S \geq 0$, то $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $\lambda_i > 0$. Можно считать, что $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Пусть x_0 и y_0 - собственные векторы, соотвествующие λ_1 и λ_n, причем $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} |(x_0, x_k)|^2 = (Sx_0, x_0) = (\lambda_1 x_0, x_0) = \lambda_1$$

и

$$\sum_{k=1}^{m} |(y_0, x_k)|^2 = (Sy_0, y_0) = (\lambda_n y_0, y_0) = \lambda_n.$$

Получаем, что верхняя и нижняя граница фрейма достигаются на собственных векторах оператора S.

Теорема 3.22. *Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ – собственные числа оператора S, тогда*

(1) $\sum\limits_{k=1}^{m} \|x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

(2) *Если* $\{x_k\}_{k=1}^{m} \subset \mathbb{C}^n$ *- жесткий фрейм и* $\|x_k\| = 1$ *при* $k = 1, \ldots, n$*, то* $A = \frac{m}{n}$*;*

Доказательство. (1) Так как оператор S – самосопряженный, то существует ортнормированный базис $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора S. Пусть λ_i – собственные числа, соотвествующие векторам z_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|z_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i z_i, z_i) = \sum_{i=1}^{n} (Sz_i, z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} ((z_i, x_k) x_k, z_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (z_i, x_k)(x_k, z_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |(z_i, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{k=1}^{m} \|x_k\|^2$.

(2). Если $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ – жесткий фрейм, то

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, x_k)|^2 = A\|x\|^2.$$

Поскольку $A = B$, то получаем, что

$$\lambda_1 = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \lambda_n = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = A$. Из (1),

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = nA = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| = m,$$

так как по условию $\|x_k\| = 1$. Следовательно, $A = \frac{m}{n}$. ■

Теорема 3.23. *Если $L \subset \mathbb{C}^n$ – линейное подпространство и $\{x_k\}_{k=1}^m$ – фрейм в L, то формула*

$$Px = \sum_{k=1}^{m} (x, S^{-1}x_k)x_k$$

определяет ортогональную проекцию $\mathbb{C}^n$ на L.

Доказательство. По теореме о проекции $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \in L^{\perp}$. Тогда

$$Px = P(y+z) = \sum_{k=1}^{m} (y+z, S^{-1}x_k)x_k = \sum_{k=1}^{m} (y, S^{-1}x_k)x_k = y,$$

так как $S^{-1}x_k \in L$, а $z \perp L$. Следовательно, $P^2x = Py = y = Px$, т.е. P - проектор. Поскольку $P(L^{\perp}) = 0$, то P - ортогональный проектор.

Пример 3.24. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^3 \subset \mathbb{C}^2$ и

$$x_1 = (1,0),\ x_2 = (1,-1),\ x_3 = (1,1).$$

Если $x = (u,v)$, то

$$\sum_{k=1}^{3} |(x,x_k)|^2 = |u|^2 + |u-v|^2 + |u+v|^2 =$$

$$\text{(по равенству параллелограмма)} =$$

$$= |u|^2 + 2|u|^2 + 2|v|^2 = 3|u|^2 + 2|v|^2 = 2\|x\|^2 + |u|^2.$$

Следовательно,

$$2\|x\|^2 \leq \sum |(x,x_k)|^2 \leq 3\|x\|^2.$$

Нижняя граница фрейма достигается на векторе $(0,1)$, а верхняя на векторе $(1,0)$. Оператор $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ имеет вид

$$T(c_1,c_2,c_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = (c_1,0) + (c_2,-c_2) + (c_3,c_3) =$$

$$= (c_1+c_2+c_3, c_3-c_2).$$

Оператор $T^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ задается формулой

$$T^* x = \{(x, x_k)\}_{k=1}^{3} = (u, u - v, u + v)$$

для $x = (u, v)$. Фреймовый оператор

$$Sx = (T \circ T^*)x = (3u, 2v),\ S^{-1}x = \left(\frac{u}{3}, \frac{v}{2}\right).$$

Получаем разложение вектора $x = (u, v)$ по фрейму

$$x = \sum_{k=1}^{3} (x, S^{-1}x_k)x_k = \left((u, v), \left(\frac{1}{3}, 0\right)\right) x_1 + \left((u, v), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)\right) x_2 +$$
$$+ \left((u, v), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\right) x_3 = \frac{u}{3} x_1 + \left(\frac{u}{3} - \frac{v}{2}\right) x_2 + \left(\frac{u}{3} + \frac{v}{2}\right) x_3.$$

Собственные числа оператора S - это $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 2$, совпадают с верхней и нижней границей фрейма, которые достигаются на собственных векторах $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соотвественно.

Пример 3.25. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{n+1} \subset \mathbb{C}^n$.

$$x_1 = (1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}) = e_1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k$$

$$x_2 = (-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}) = e_2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k$$

....

$$x_n = (-\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) = e_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$$

$$x_{n+1} = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} e_k,$$

где $\{e_k\}_{k=1}^n$ канонический базис в пространстве $\mathbb{C}^n$. Заметим, что система $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ полна в пространстве $\mathbb{C}^n$, так как для всех $i \leq n \quad e_i = x_i + \frac{1}{\sqrt{n}} x_{n+1} \in \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$. Ясно, что $\|x_k\| = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ при $k \leq n$ и $\|x_{n+1}\| = 1$. При $k, l \leq n$, $k \neq l$

$$(x_l, x_k) = (n-2)\frac{1}{n^2} - 2(1 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n} = -\frac{1}{n},$$

а $(x_{n+1}, x_k) = 0$, т.е. $x_{n+1} \perp \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^n$.

Покажем, что фрейм $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ является парсевалевским. Для этого рассмотрим проектор $P : \mathbb{C}^n \to L_1 = \mathrm{sp}\{x_{n+1}\}$

$$P(x) = (x, x_{n+1})x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)x_{n+1} =$$
$$= \frac{1}{n}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\sum_{k=1}^{n} e_k,$$

где $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Нетрудно видеть, что $L_1^{\perp} = \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Оператор $I-P:\mathbb{C}^n\to L_1^{\perp}$, т.к.

$$((I-P)x, x_{n+1}) = (x, x_{n+1}) - ((x, x_{n+1})x_{n+1}, x_{n+1}) = 0.$$

Следовательно,

$$(I-P)x = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k - \frac{1}{n}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\sum_{k=1}^{n} e_k \in sp\{x_k\}_{k=1}^{n}.$$

Поскольку $x = Px + (I-P)x$ и $Px \perp (I-P)x$, то

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}|\alpha_1+\ldots+\alpha_n|^2\cdot\|\sum_{k=1}^{n} e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k - \frac{1}{n}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)|^2$$

$$= \frac{1}{n}|\alpha_1+\ldots+\alpha_n|^2 + \sum_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2 =$$

$$= |(x, x_{n+1})|^2 + \sum_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n+1}|(x,x_k)|^2.$$

Таким образом $A = B = 1$, т.е. $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ – парсевалевский фрейм. ■

Покажем теперь, что в любом конечномерном гильбертовом пространстве H существует жесткий нормированный фрейм с границей $\frac{m}{n}$, $m \geq n$, где $n = \dim H$, а m - число векторов, из которых состоит фрейм.

Пример 3.26. Пусть $m \geq n$ и

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{m}}(1, e^{2\pi i\,\frac{k-1}{m}}, \ldots, e^{2\pi i(n-1)\,\frac{k-1}{m}}),\ k = 1, \ldots, m.$$

Тогда система $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ является жестким фреймом в $\mathbb{C}^n$ с $A = B = 1$ и $\|x_k\| = \sqrt{\frac{n}{m}}$.

Для доказательства нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.27. *Векторы*

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{m}}\Big(1, e^{2\pi i\,\frac{k-1}{m}}, \ldots, e^{2\pi i(m-1)\frac{k-1}{m}}\Big),\ k = 1, 2, \ldots, m$$

– ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^m$.

Доказательство. Очевидно $\|z_k\| = 1$. Если $k \neq l$, то

$$(z_k, z_l) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{2\pi i(j-1)\frac{k-1}{m}} \cdot e^{-2\pi i(j-1)\frac{l-1}{m}} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{2\pi i(j-1)\frac{k-l}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(e^{2\pi i\frac{k-l}{m}})^{j-1}.$$

Используя формулу $(1-x)(1+x^2+\ldots+x^{m-1}) = 1-x^m$ при

$x = e^{2\pi i \frac{k-l}{m}}$ получаем

$$(z_k, z_l) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - (e^{2\pi i \frac{k-l}{m}})^m}{1 - e^{2\pi i \frac{k-l}{m}}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i (k-l)}}{1 - e^{2\pi i \frac{k-l}{m}}} = 0,$$

т.е. $z_k \perp z_l$ при $k \neq l$. ■

Отождествим пространство $\mathbb{C}^n$ с подпространством $L \subset \mathbb{C}^m$,

$$L = \{x \in \mathbb{C}^m : x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots, 0)\}$$

и рассмотрим проектор $P : \mathbb{C}^m \stackrel{на}{\to} L$,

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots, 0).$$

Тогда, $Pz_k = x_k$. Ясно, что $(Px, y) = (x, Py)$ для любых $x, y \in \mathbb{C}^m$. Для $x \in \mathbb{C}^m$

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m} |(x, Pz_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m} |(Px, z_k)|^2 =$$

$$= (\textit{т.к.}\ \{z_k\}_{k=1}^m - \text{ортонормированный базис}) = \|Px\|^2.$$

Если $x \in L$, то $\|Px\| = \|x\|$, то есть $\sum_{k=1}^m |(x, x_k)|^2 = \|x\|^2$ и, следовательно, фрейм $\{x_k\}_{k=1}^m$ - парсевалевский с $\|x_k\| = \sqrt{\frac{n}{m}}$. Если мы заменим векторы x_k на векторы $\sqrt{\frac{m}{n}} x_k$, то мы получим жесткий фрейм в пространстве $\mathbb{C}^n$, состоящий из m

нормированных векторов. Поскольку все n-мерные гильбертовы пространства H изометрически изоморфны пространству $\mathbb{C}^n$, то получаем, что в любом конечномерном гильбертовом пространстве существует жесткий фрейм $\{x_k\}_{k=1}^m$ для любого $m \geq n$.

В частности, в $\mathbb{C}^4$ ортонормированный базис образуют векторы

$$z_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, z_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

– жесткий фрейм в пространстве $\mathbb{C}^2$ с границей $A = 2$. Векторы

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

– жесткий фрейм в пространстве $\mathbb{C}^3$ с границей $A = \frac{4}{3}$.

Теорема 3.28. *В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует жесткий фрейм $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, такой, что никакая его подпоследовательность $\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ не является базисом в H.*

Доказательство. Рассмотрим пространство

$$H = (\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 \times \ldots \times \mathbb{C}^n \times \ldots)_{l_2} = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) :$$
$$y_n \in \mathbb{C}^n,\ \{\|y_n\|\}_{n=1}^{\infty} \in l_2\}.$$

Для $y \in H$ $\|y\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|y_n\|^2}$, а скалярное произведение $y, z \in H$ определяется формулой $(y, z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y_n, z_n)$. Таким образом, пространство H является гильбертовым. Отождествим пространство $\mathbb{C}^n$ с подпространством $(0 \times \ldots \times 0 \times \mathbb{C}^n \times 0 \ldots)_{l_2} \subset H$ и рассмотрим в каждом $\mathbb{C}^n$ фрейм из примера 3.25

$$x_1^n = \Big(1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\Big)$$

$$x_2^n = \Big(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\Big)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n^n = \Big(-\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\Big)$$

$$x_{n+1}^n = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

Так как вектор $x_{n+1}^n \perp x_k^n$ при $k \le n$, то подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$

$$L = sp\{x_k^n\}_{k=1}^n \perp L_1 = sp\{x_{n+1}^n\},$$

т.е. $L = L_1^{\perp}$. Так как $\dim L = n-1$ и векторы $sp\{x_k^n\}_{k=1}^n = L$, то, чтобы получить базис в пространстве $\mathbb{C}^n$, мы должны убрать один из векторов в системе $\{x_1^n, \dots, x_n^n\}$. Тогда система $\{x_k^n\}_{k=1}^{n+1} \setminus \{x_j^n\}$, где $j \le n$, является базисом в пространстве $\mathbb{C}^n$. Если $n = 2l$, то представим систему $\{x_k^n\}_{k=1}^{n+1}$ в виде

$$\{x_k^n\}_{k=1}^{n+1} = \{x_k^n\}_{k=1}^{l} \cup \{x_k^n\}_{k=l+1}^{n+1}.$$

Предположим, что $x_j^n \in \{x_k^n\}_{k=1}^{l}$. Тогда,

$$\sum_{k=1}^{l} x_k^n - x_j^n = \Big(\underbrace{1-\frac{1}{n}\cdot l, 1-\frac{1}{n}\cdot l, \dots, 1-\frac{1}{n}\cdot l}_{l}, \underbrace{-\frac{1}{n}\cdot l, \dots, -\frac{1}{n}\cdot l}_{l}\Big)$$

$$-\Big(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{j}, \dots, -\frac{1}{n}) = (\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{l}, \underbrace{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}}_{l}\Big)-$$

$$\Big(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\dots,\underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{j},\dots,-\frac{1}{n}\Big),$$

а

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k^n - x_j^n = \Big(\text{т.к.} \sum_{k=1}^{n} x_k^n = 0\Big) = x_{n+1}^n - x_j^n =$$

$$= \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n},\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n},\dots,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}-(1-\frac{1}{n})}_{j},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\Big).$$

Отсюда получаем,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{l} x_k^n - x_j^n\Big\| \geq \Big\|\sum_{k=1}^{l} x_k^n\Big\| - \|x_j^n\| = \frac{1}{2}\sqrt{n} - \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)+(1-\frac{1}{n})^2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}-\sqrt{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}-1,$$

а

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n+1} x_k^n - x_j^n\Big\| = \sqrt{\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\Big)^2\cdot(n-1)+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big)^2}$$

$$\leq \sqrt{\frac{n-1}{n}+1} \leq \sqrt{2}.$$

Так как $\{\{x_k^n\}_{k=1}^{n+1} - \{x_j^n\}\}_{n=1}^{\infty}$ - базис в пространстве $H = (\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 \times \ldots \times \mathbb{C}^n \times \ldots)_{l_2}$, то по критерию Гринблюма существует число $K \geq 1$, т.ч.

$$\Big\| \sum_{k=1}^{l} x_k^n - x_j^n \Big\| \leq K \Big\| \sum_{k=1}^{n+1} x_k^n - x_j^n \Big\|$$

при любом $n \in \mathbb{N}$, что невозможно, так как при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ получаем противоречивое неравенство

$$\frac{1}{2}\sqrt{n} - 1 \leq \| \sum_{k=1}^{l} x_k^n - x_j^n \| \leq K \| \sum_{k=1}^{n+1} x_k^n - x_j^n \| \leq \sqrt{2}.$$

В случае $x_j^n \in \{x_k^n\}_{k=l+1}^{n+1}$ или $n = 2l + 1$ аналогично получаем противоречивое неравенство. Следовательно, система $\{x_k^n,\, l \leq k \leq n+1,\, n \in \mathbb{N}\}$ является жестким фреймом с границей $A = 1$, но никакая ее подпоследовательность не является базисом.

Если H - произвольное гильбертово пространство, то по теореме 4.13 существует изометрический изоморфизм $T : (\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^2 \times \ldots \times \mathbb{C}^n \times \ldots)_{l_2} \overset{на}{\to} H$, сохраняющий скалярное произведение. Тогда, $\{Tx_k^n,\, l \leq k \leq n+1,\, n \in \mathbb{N}\}$ - жесткий фрейм в H, из которого нельзя извлечь базис. ■

Упражнения:

1. *В пространстве $\mathbb{C}$ найти точные границы фрейма $\{x_k\}_{k=1}^n$, где $x_k = e^{2\pi i \cdot \frac{k-1}{n}}$, $k = 1, \ldots, n$.*

2. *В пространстве* $\mathbb{C}^2$ *найти точные границы фрейма* $\{x_k\}_{k=1}^n$, *где* $x_k = (\cos\frac{2\pi(k-1)}{n}, \sin\frac{2\pi(k-1)}{n})$, $k = 1, \dots, n$.

3. *Найти точные границы фрейма* $\{x_k\}_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{C}^2$, *где* $x_k = (e^{\frac{2\pi i(k-1)}{n}}, 0)$, *если* $k = 1, \dots, n$, *а* $x_{n+1} = (0, 1)$.

4. Необходимые сведения из курса функционального анализа, используемые в данном пособии.

I. Основные принципы функционального анализа

Теорема Хана-Банаха. *Пусть E - нормированное пространство, $L \subset E$ - линейное подпространство и $\varphi : L \to \Lambda$ ($\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) - линейный ограниченный функционал. Тогда функционал φ можно продолжить до линейного функционала на E с сохранением нормы, т.е. существует функционал $f : E \to \Lambda$, т.ч. $f(l) = \varphi(l)$ для всех $l \in L$ и $\|f\|_{E^*} = \|\varphi\|_{L^*}$.*

Следствие 4.1. *Если $x \in E$, то существует функционал $f \in E^*$, т.ч. $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$.*

Следствие 4.2. *Если $x \in E$, то*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E^*, \|f\| \le 1\} = \sup\{|f(x)| : f \in E^*, \|f\| = 1\}.$$

(Формула, двойственная к определению нормы функционала $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\| \le 1\}$)

Следствие 4.3. *Пусть $L \subset E$ - замкнутое линейное подпространство и $x \notin L$. Тогда существует функционал $f \in E^*$, такой, что $\|f\| = 1$, $f(L) = 0$ и $f(x) = \rho(x, L)$.*

Теорема Банаха об обратном операторе. *Пусть E, F – банаховы пространства и T – линейная ограниченная биекция E на F. Тогда $T^{-1} : F \to E$ – линейный ограниченный оператор.*

Принцип равномерной ограниченности. *Пусть E - банахово пространство, F - нормированное пространство и операторы $T_n \in L(E, F)$. Следующие условия равносильны:*

(1) *Последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, т.е. существует число $K > 0$, т.ч. $\|T_n\| \leq K$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

(2) *Последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно ограничена, т.е. для любого $x \in E$ существует число $K_x > 0$, т.ч. $\|T_n x\| \leq K_x$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 4.4. *Пусть E - банахово пространство, F - нормированное пространство, операторы $T_n \in L(E, F)$ и для любого $x \in E$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Тогда оператор $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ линейный ограниченный и $\|T\| \leq \sup\{\|T_n\|, n \in \mathbb{N}\} < \infty$.*

Следствие 4.5. *Пусть E - нормированное пространство и $A \subset E$. Множество A ограничено тогда и только тогда, когда для любого $f \in E^*$ ограничено множество $f(A)$.*

Теорема Банаха-Штейнгауза. *Пусть E, F - банаховы* *пространства, множество* $A \subset E$ *такое, что* $\overline{\mathrm{sp}}A = E$ *и операторы* $T_n \in L(E, F)$. *Если для каждого* $x \in A$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ *существует для каждого* $x \in E$ *и оператор* $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ *является линейным и ограниченным.*

Теорема Бэра. *Пусть* E *- полное метрическое пространство и* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. *Тогда существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\mathrm{int}\overline{E_n} \neq \emptyset$

II. Гильбертовы пространства.

Все гильбертовы пространства рассамтриваются на послем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Теорема 4.6. **(Теорема о проекции)** *Пусть* H *- гильбертово пространство и* $L \subset H$ *- замкнутое линейное подпространство. Тогда любой элемент* $x \in H$ *единственным образом представляется в виде* $x = y + z$, *где* $y \in L$, $z \in L^{\perp}$.

Следствие 4.7. *Если* $x = y + z$, *где* $y \in L$, $z \in L^{\perp}$, *то*

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - l\| : l \in L\}.$$

Следствие 4.8. *Если $L \subset H$ - линейное подпространство, то $\overline{L} \neq H$ тогда и только тогда, когда существует $z \in H$, $z \neq 0$, $z \perp L$.*

Теорема 4.9. Общий вид линейного ограниченного функционала на H. *Пусть $f \in H^*$. Тогда существует единственный элемент $y \in H$, такой что $f(x) = (x, y)$ для любого $x \in H$ и $\|f\| = \|y\|$. Верно и обратное: для любого $y \in H$ формула $f(x) = (x, y)$ задает линейный ограниченный функционал с нормой $\|f\| = \|y\|$.*

Следствие 4.10. *Пусть $x \in H$. Тогда*

$$\|x\| = \sup\{|(x, y)| : y \in H, \|y\| = 1\}.$$

Теорема 4.11. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ - ортонормированная система в H, то для любого элемента $x \in H$ ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ сходится и верно неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \, (\textit{Неравенство Бесселя}).$$

Теорема 4.12. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система в H. Тогда следующие условия равносильны.*

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k = x$ *для любого* $x \in H$, *т.е.* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *базис в* H.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ *для любого* $x \in H$.

(3) *Система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в* H, *т.е.* $\overline{\mathrm{sp}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$.

Теорема 4.13. *Если* H *– сепарабельное гильбертово пространство, то существует изометрический изоморфизм* $T : H \to l_2$, *т.ч.* $(Tx, Ty) = (x, y)$ *для любых* $x, y \in H$.

III. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах

Теорема 4.14. *Пусть* E, F *нормированные пространства и* F *- банахово. Если* $L \subset E$ *всюду плотное линейное подпространство и* $T : L \to F$ *линейный ограниченный оператор, то существует единственный оператор* $\widetilde{T} : E \to F$ *такой, что*

(1) $\widetilde{T}l = Tl$ *для всех* $l \in L$ *и*

(2) $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Теорема 4.15. *Пусть* H *и* H_1 *- гильбертовы пространства и* $T : H \to H_1$ *- линейный ограниченный оператор. Тогда существует единственный линейный ограниченный оператор*

$T^* : H_1 \to H$, *такой что* $(Tx, y) = (x, T^*y)$ *для любых* $x \in H$ *и* $y \in H_1$ *и* $\|T\| = \|T^*\|$. *Если* $T : H \to H$ *и* $\mathcal{N}(T) = T^{-1}(0)$, *а* $\mathcal{R}(T^*)$ *- множество значений оператора* T^*, *то* $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$

Если $T : H \to H$ и $T = T^*$, то T называется самосопряженным.

Теорема 4.16. (О норме самосопряженного оператора) *Пусть* $T : H \to H$ *линейный ограниченный оператор и* $T = T^*$. *Тогда*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\}.$$

Теорема 4.17. *Пусть* E *- банахово пространство и* $T : E \to E$ *линейный ограниченный оператор. Если* $\|T - I\| < 1$, *то существует обратный оператор* T^{-1} *и*

$$T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k,$$

где $(I - T)^0 = I$.

Теорема 4.18. *Если* H *гильбертово пространство,* $T : H \to H$ *линейный ограниченный оператор и* $(Tx, x) = 0$ *для любого* $x \in H$, *то* $T \equiv 0$.

Теорема 4.19. *Для линейного ограниченного оператора* $T : H \to H \quad \sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Теорема 4.20. *Если* $T = T^*$, *то*

(1) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;

(2) *Остаточный спектр* $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) $\|T\| = r(T)$, *где* $r(T)$ *– спектральный радиус оператора* T;

(4) *Если* λ_1, λ_2 *– собственные числа оператора* T, E_{λ_1} *и* E_{λ_2} *– соотвествующие им собственные подпространства и* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *то* $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$;

(5) $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, *где* $m_T = \inf\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ *и* $M_T = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1$, *причем* $m_T \in \sigma(T)$ *и* $M_T \in \sigma T$.

(6) *Если* $T = T^*$ *и* $\lambda \in \sigma(T)$, *то число* λ *либо собственное, либо почти собственное, т.е. существует последовательность* $x_n \in H$, *т.ч.* $\|x_n\| = 1$, *а* $\lambda x_n - Tx_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 4.21. *Оператор* $T : H \to H$ *является положительным тогда и только тогда, когда* $T = T^*$ *и* $\sigma(T) \subset [0; +\infty)$.

Индивидуальное задание 1. *Проверить, является ли данная система элементов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$

(a) *ω-независимой;*

(b) *минимальной;*

(c) *полной;*

(d) *переполненной;*

(e) *базисом;*

(f) *базисом Рисса;*

(g) *бесселевой;*

(h) *фреймом.*

1. $x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 1, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. $x_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $\quad x_n = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}, 1, 0, \ldots)$, $n \geq 2$.

3. $x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (1, 1, 0, \ldots)$, $x_n = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, 1, 0, \ldots)$, $n > 2$

4.

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}$$

.

5.

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, -1, 0, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}.$$

6.

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\ x_2 &= (-1, 1, 0, \ldots) \\ x_n &= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, -1, 1, 0, \ldots), n > 2. \end{aligned}$$

7.

$$x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots),\ n \in \mathbb{N}.$$

8.

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \ldots), \\ x_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots), \\ x_n &= (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, \frac{1}{n}, 0, \ldots), n > 2 \end{aligned}$$

9.

$$x_1 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$$
$$x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, 0, \dots), n \geq 2.$$

10.

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots),$$
$$x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$$
$$x_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-2}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, 0, \dots), n > 2.$$

11.

$$x_1 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots),$$
$$x_2 = (0, 1, \frac{1}{3}, 0, \dots),$$
$$x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{n+1}, 0, \dots),\ n > 2.$$

12.

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots),$$
$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, 1, \frac{1}{n}, 0, \ldots),\ n > 2.$$

13.

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}.$$

14.

$$x_n = (\underbrace{1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}}_{n}, 0, \ldots),\ n \in \mathbb{N}.$$

15.

$$x_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots),$$
$$x_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots),$$
$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \ldots),\ n > 2.$$

16.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots), \\
x_2 &= (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots), \\
x_n &= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots),\ n > 2.
\end{aligned}
$$

17.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots), \\
x_2 &= (1, 0, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots), \\
x_3 &= (1, 0, 0, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots), \\
x_n &= (1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{2^n}, \ldots),\ n > 3.
\end{aligned}
$$

17.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots), \\
x_2 &= (1, 0, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots), \\
x_3 &= (1, 0, 0, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots), \\
x_n &= (1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{2^n}, \ldots),\ n > 3.
\end{aligned}
$$

18.

$$x_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots),$$
$$x_2 = (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots),$$
$$x_n = (1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots), n > 2.$$

19.

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}}_{n}, 0, 0, \ldots),\ n \in \mathbb{N}.$$

20.

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots),\ n \in \mathbb{N}.$$

21.

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2^n}}_{n}, 0, 0, \ldots),\ n \in \mathbb{N}.$$

22.

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (1, \frac{1}{2!}, 0, 0, \ldots),$$
$$x_n = (1, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots),\ n \geq 3.$$

23.

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{n!}, \ldots, \frac{1}{n!}}, 0, \ldots),\ n \in \mathbb{N}.$$

24.

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 1, 0, \ldots),\\
x_2 &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots),\\
x_3 &= (0, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots),\\
x_n &= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 1, 0, \ldots),\ n > 3.
\end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, \ldots),\\
x_2 &= (0, 1, \frac{1}{2}, 0, \ldots),\\
x_3 &= (0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, 0, \ldots),\\
x_n &= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, 0, \ldots),\ n > 3.
\end{aligned}$$

26.

$$x_1 = (1, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$x_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \ldots),\ n > 3.$$

Индивидуальное задание 2. *Доказать, что данная система элементов $\{x_k\}_{k=1}^m$ является фреймом в пространстве $\mathbb{C}^n$.*

(a) Найти фреймовый оператор;

(b) Найти точные фреймовы границы и элементы на которых эти границы достигаются.

(c) Для произвольного элемента $x \in \mathbb{C}^n$ написать разложение по фрейму.

1. $x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $x_3 = (1, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

2. $x_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $x_2 = (1, 0)$, $x_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

3. $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $x_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $x_4 = (0, -1)$ в

пространстве $\mathbb{C}^2$.

4. $x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_4 = (1, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

5. $x_1 = (0, -1)$, $x_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $x_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $x_4 = (0, 1)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

6. $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

7. $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $x_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2},)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

8. $x_1 = (0, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $x_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

9. $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (0, 1, 0)$, $x_4 = (0, 0, 1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

10. $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_4 = (-1, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

11. $x_1 = (0, -1)$, $x_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $x_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

12. $x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

13. $x_1 = (0, 0, 1)$, $x_2 = (0, -1, 0)\, x_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $x_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

14. $x_1 = (0,0,1)$, $x_2 = (-1,0,0)\, x_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $x_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

15. $x_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $x_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $x_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $x_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

16. $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,-1)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

17. $x_1 = (0,1)$, $x_2 = (-1,0)$, $x_3 = (1,-1)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$.

18. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (-1,-1,0)$, $x_4 = (0,0,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

19. $x_1 = (0,0,1)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (-1,0,0)$, $x_4 = (1,-1,0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

20. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

в пространстве $\mathbb{C}^3$.

21. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,-1,0)$, $x_3 = (-1,1,0)$, $x_4 = (0,0,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

22. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (1,1,0)$, $x_4 = (1,1,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

23. $x_1 = (-1,0,0)$, $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_3 = (1,0,0)$, $x_4 = (0,0,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

24. $x_1 = (0,0,1)$, $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_3 = (1,0,0)$, $x_4 =$

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

25. $x_1 = (0,0,1)$, $x_2 = (1,0,0)$, $x_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $x_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

26. $x_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_2 = (-1,0,0)$, $x_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_4 = (0,0,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

27. $x_1 = (-1,0,0)$, $x_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_3 = (0,-1,0)$, $x_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

28. $x_1 = (0,0,1)$, $x_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_3 = (0,-1,0)$, $x_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

29. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_3 = (0,1,0)$, $x_4 = (0,0,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

30. $x_1 = (0,1,0)$, $x_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $x_3 = (-1,0,0)$, $x_4 = (0,0,1)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$.

Литература

[1] *Ахиезер Н. И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Издательство "Наука", 1966.

[2] *Бородин П. А., Савчук А. М., Шейпак И. А.* Задачи по функциональному анализу. МЦНМО, 2017, С. 336.

[3] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск.: Издательство "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, С. 464.

[4] *Christensen O.* An Introduction to Frames. Berlin.2002.

[5] *Fabian M., Habala P., Hajek P., Montesinos V., Zizler V.* Banach Space Theory. Springer.2011.

[6] *Albiac F., Kalton N.J.* Topics in Banach Space Theoty. Springer.2000.

Издание подготовлено в авторской редакции.

Подписано в печать 01.12.2022 г.
Отпечатано на оборудовании Издательства Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 529-849. E-mail: rio.tsu@mail.ru
Заказ 5266. Тираж 30 экз.