

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра общей математики

Я.С. Гриншпон, С.Г. Киреенко

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ**

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательство
Томского государственного университета
2022

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятин

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией механико-математического факультета
Протокол № 7 от «7» ноября 2022 г.
Председатель МК ММФ Е.А. Тарасов

Гриншпон Я.С., Киреенко С.Г.

Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем : учебно-методическое пособие. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 96 с.

Изложены функциональные методы решения нестандартных уравнений, неравенств и их систем, а также заданий с параметром. Методы систематизированы по применяемым свойствам функций: область определения, ограниченность, монотонность, четность (нечетность). Приведено большое количество разнообразных примеров.

Для старшеклассников, учителей математики, бакалавров физико-математических, технических и естественнонаучных специальностей, а также для магистрантов направления «Преподавание математики и информатики».

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики рассматриваются различные типы уравнений и неравенств, для каждого из которых изучается набор стандартных приемов, позволяющих решать уравнения и неравенства данного типа. Как правило, все эти приемы основаны на упрощении искомых уравнений и неравенств путем проведения некоторых алгебраических преобразований.

Однако если ограничиваться только алгебраическим подходом, то получится решить далеко не всякое уравнение или неравенство из тех, которые могут встретиться на экзамене, олимпиаде или другом математическом соревновании.

Оказывается, что часто справиться с решением нестандартных уравнений и неравенств помогают так называемые «функциональные методы», заключающиеся в выделении функций, входящих в уравнение или неравенство, и в применении свойств этих функций.

Довольно распространенным является использование функциональных методов при выполнении заданий высокого уровня сложности профильного ЕГЭ по математике, а также при участии в математических олимпиадах и конкурсах различного уровня (в том числе в «перечневых» олимпиадах).

Наиболее ярко эффективность функционального метода проявляется при решении заданий с параметром, т.к. часто привычные алгебраические методы либо приводят к чрезвычайно громоздким преобразованиям, либо вообще не приводят к результату.

В данном пособии на многочисленных примерах показывается применение при решении уравнений, неравенств и их систем таких свойств функций, как область определения (для уравнений и неравенств вместо термина «область определения» принято употреблять термин «область допустимых значений»), ограниченность, монотонность и четность. Для всех этих свойств сформулированы необходимые теоретические сведения, вклю-

чая определения и утверждения, полезные именно с точки зрения применения их к решению уравнений и неравенств.

Отметим, что изучаемые в пособии функциональные методы (в отличие от графического метода) являются точными и при грамотном их применении математически абсолютно корректными.

Также важно заметить, что литературы, в которой были бы систематизированы функциональные методы и каждый метод был бы сопровождается достаточным количеством примеров, практически нет! А в большинстве школьных учебников нет даже и упоминания о применении функциональных методов решения уравнений и неравенств.

Пособие будет полезно всем, использующим элементарный математический аппарат (на уровне простейших уравнений и неравенств) в своей деятельности, а также всем, интересующимся нестандартными задачами и математическими конкурсами. Существенную помощь пособие может оказать выпускникам школ, готовящимся к прохождению ЕГЭ.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В пособии мы будем придерживаться стандартных обозначений для числовых множеств:

$\emptyset$ — пустое множество;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых положительных чисел;

$\mathbb{Z}_-$ — множество целых отрицательных чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (можно изобразить в виде числовой прямой Ox);

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел;

$\mathbb{R}_-$ — множество отрицательных чисел;

$\mathbb{R}^2$ — множество упорядоченных пар действительных чисел (можно изобразить в виде декартовой плоскости Oxy).

§ 1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ (ОДЗ)

1.1. Теоретические сведения

Напомним определения основных понятий, которые будут использоваться в пособии.

Определение. *Функцией* называется такая зависимость между двумя множествами, при которой каждому элементу одного множества ставится в соответствие единственный элемент другого множества. Первое множество называется *областью определения функции*, а второе — *областью значений функции*.

Функцию обозначают $y=f(x)$, где x — это независимая переменная (аргумент функции), принимающая значения в области определения; y — это зависимая переменная (значение функции), принимающая значения в области значений; f — правило, ставящее в соответствие значениям переменной x значения переменной y . В этом случае область определения обозначают $D(y)$ или $D(f)$, а область значений — $E(y)$ или $E(f)$.

В пособии будут рассматриваться в основном числовые функции, т.е. функции, области определения и значений которых состоят из действительных чисел.

В прикладных задачах область определения функции, как правило, считается заданной исходя из реального смысла рассматриваемой модели. В теоретических математических задачах под областью определения общепринято подразумевать множество всех чисел, при подстановке которых вместо переменной x в формулу $f(x)$ получается числовое выражение, имеющее смысл. Иногда в условии задачи (в том числе, при решении уравнений и неравенств) оговариваются дополнительные ограничения, которые сужают область определения. Например, если ставится задача о нахождении только положительных корней уравнения $f(x)=g(x)$, причем функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл при всех действительных x , то фактически указывается, что не-

зависимая переменная x принимает только положительные значения, т.е. $D(f) = D(g) = \mathbb{R}_+$.

Таким образом, если задана числовая функция $y=f(x)$ и в условии задачи не указаны дополнительные ограничения, то областью определения данной функции считается множество всех значений, которые может принимать переменная x . Если же в условии сформулированы ограничения, то в область определения входят те значения переменной x , которые удовлетворяют этим ограничениям и одновременно для которых формула, задающая функцию $f(x)$, имеет смысл.

В любом случае область значений функции образуют те значения переменной y , которые она принимает при условии, что x пробегает всю область определения. Поэтому если соответствующая условию задачи область определения функции $f(x)$ обозначена через X , то для области значений иногда используют обозначение $f(X)$.

Пересечение областей определения функций, входящих в уравнение, неравенство или систему, называют *областью допустимых значений* переменной (ОДЗ) для данного уравнения, неравенства или системы соответственно.

Выпишем основные элементарные функции, имеющие ограничения на области определения, при этом будем подразумевать, что сами функции $f(x)$ и $g(x)$ существуют (табл. 1).

Также в работе будут встречаться числовые функции $z=f(x; y)$, зависящие от двух действительных переменных. Для таких функций область определения — это множество допустимых значений пар чисел $(x; y)$. Такая область определения лежит во множестве $\mathbb{R}^2$ и ее можно изобразить как некоторую область на декартовой плоскости Oxy . Следовательно, для уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем ОДЗ также будет являться подмножеством в $\mathbb{R}^2$.

Таблица 1

№	Вид функции		Ограничения на переменную
1	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$		$g(x) \neq 0$
2	$y = \sqrt[n]{f(x)}, n \in \mathbb{N}$		$f(x) \geq 0$
3	$y = \operatorname{tg} f(x)$		$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
4	$y = \operatorname{ctg} f(x)$		$f(x) \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
5	$y = \arcsin f(x),$ $y = \arccos f(x)$		$-1 \leq f(x) \leq 1$
6	$y = \log_{g(x)} f(x)$		$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) > 0 \end{cases}$
7	$y = (f(x))^\alpha$	$\alpha \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$	$f(x) \neq 0$
		$\alpha \notin \mathbb{Z}, \alpha > 0$	$f(x) \geq 0$
		$\alpha \notin \mathbb{Z}, \alpha < 0$	$f(x) > 0$

1.2. Применение ОДЗ при решении уравнений, неравенств и их систем

Иногда анализ условий, определяющих ОДЗ, позволяет существенно сократить количество рассматриваемых значений неизвестной.

В частности, легко решаются уравнения, ОДЗ которых конечно или пусто. В первом случае (конечное ОДЗ) достаточно непосредственной подстановкой в уравнение проверить все значения из ОДЗ и выбрать в ответ те из них, которые приводят к верным числовым равенствам. А во втором случае (пустое ОДЗ) достаточно записать в ответ, что уравнение не имеет решений.

Пример 1.1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{3x - x^2} = \sqrt{x - 3} \quad [1].$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения, учитывая, что подкоренные выражения должны быть неотрицательными:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ 3x - x^2 \geq 0, \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty), \\ x \in [0; 3], \\ x \in [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Получаем, что $x=3$ — единственное допустимое значение неизвестной. Подставим это значение в уравнение:

$$\sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 - 3} - \sqrt{3 \cdot 3 - 3^2} = \sqrt{3 - 3},$$

$\sqrt{0} - \sqrt{0} = \sqrt{0}$ — верное равенство. Значит, $x=3$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

Пример 1.2. Решите уравнение $\sqrt{3-x} = \log_5(2x-6)$.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения, учитывая, что подкоренное выражения должно быть неотрицательным, а логарифмируемое выражение должно быть положительным:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 2x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Так как для данного уравнения не существует допустимых значений неизвестной x , то это уравнение не имеет корней.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 1.3. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ [2].

Решение. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ -|\sin x| \geq 0, \\ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x = 0, \\ x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя допустимые значения x в исходное уравнение, получаем, что его левая и правая части равны 0, а это означает, что все $x = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, являются его решениями.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2-x^2-y^2} = 2y-x, \\ \sqrt{x+y-2} = y^3x-1. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ данной системы уравнений описывается системой неравенств

$$\begin{cases} 2-x^2-y^2 \geq 0, \\ x+y-2 \geq 0. \end{cases}$$

Записав первое условие из системы для нахождения ОДЗ в виде $x^2 + y^2 \leq 2$, можно сделать вывод, что на декартовой плоскости Oxy оно задает круг с центром в начале координат радиуса $\sqrt{2}$, включая ограничивающую этот круг окружность. А записав второе условие в виде $y \geq 2-x$, делаем вывод, что оно задает полуплоскость, расположенную выше прямой $y = 2-x$, включая саму прямую.

Изобразим эти множества на плоскости (рис. 1). Видно, что в ОДЗ исходной системы уравнений входит единственная точка $(1; 1)$. Это наблюдение можно обосновать аналитически, проверив, что прямая $y = 2-x$ касается окружности $x^2 + y^2 = 2$ в точке $(1; 1)$. Действительно, эта точка принадлежит и данной окружности и данной прямой, при этом радиус, проведенный в точку $(1; 1)$, лежит на прямой $y = x$, перпендикулярной прямой $y = 2-x$ (перпендикулярность следует из того, что углы наклона этих прямых равны 45° и 135° соответственно).

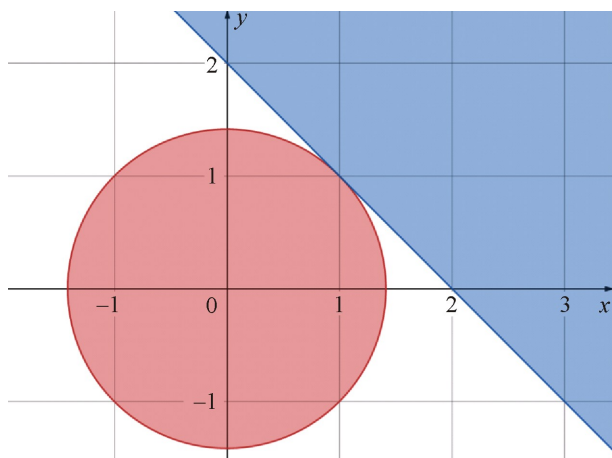


Рис. 1

Подставим точку $(1; 1)$ в систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2-1^2-1^2} = 2 \cdot 1 - 1, \\ \sqrt{1+1-2} = 1^3 \cdot 1 - 1 \end{cases} \text{ — верные равенства.}$$

Значит, $x=y=1$ — единственное решение системы уравнений.

Ответ: $(x; y) = (1; 1)$.

В некоторых случаях, рассмотрение только тех значений неизвестной, которые входят в ОДЗ, позволяет ограничить значения, принимаемые левой и правой частями уравнения, что существенно упрощает процесс решения уравнения.

Пример 1.5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} + x = 4$.

Решение. ОДЗ уравнения определяется системой

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-3 \geq 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $x \geq 3$. С учетом этого условия, рассмотрим, какие значения может принимать левая часть уравнения.

Поскольку при $x \geq 3$ выполняются неравенства $\sqrt{x+1} \geq 2$ и $\sqrt{x-3} \geq 0$, то $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} + x \geq 2 + 0 + 3 = 5$.

Таким образом, левая часть уравнения всегда не меньше 5, а значит, левая часть уравнения всегда больше правой. Это означает, что данное уравнение корней не имеет.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 1.6. Решите неравенство $\log_5 x < \sqrt{1-x^2}$.

Решение. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty), \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1].$$

Рассмотрим $x = 1$. Подставив его в неравенство, получим:

$$\log_5 1 < \sqrt{1-1}.$$

Видно, что левая часть равна правой, а значит, неравенство неверно и $x = 1$ не является его решением.

Рассмотрим все остальные значения из ОДЗ, кроме $x = 1$, т.е. $x \in (0; 1)$. Для этих значений выполняются неравенства

$\log_5 x < 0$ и $\sqrt{1-x^2} > 0$. Значит, на интервале $(0; 1)$ левая часть искомого неравенства $\log_5 x < \sqrt{1-x^2}$ всегда отрицательна, а правая положительна, откуда следует справедливость этого неравенства. Следовательно, все $x \in (0; 1)$ являются решениями.

Ответ: $x \in (0; 1)$.

Пример 1.7. Решите неравенство

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} > (x-1)^2(x-7) \quad [2].$$

Решение. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 3].$$

Заметим, что левая часть неравенства всегда положительна, т.к. она равна сумме двух квадратных корней, которые не могут оба одновременно равняться нулю (действительно, $\sqrt{3-x} = 0$ при $x = 3$, а $\sqrt{x-1} = 0$ при $x = 1$).

Рассмотрим теперь правую часть с учетом ОДЗ. Так как $x \in [1; 3]$, то $x - 7 < 0$, а значит, $(x-1)^2(x-7) \leq 0$.

Получили, что на ОДЗ левая часть неравенства $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} > (x-1)^2(x-7)$ всегда больше правой, т.е. все значения из ОДЗ являются его решениями.

Ответ: $x \in [1; 3]$.

Пример 1.8. Решите неравенство $\sqrt[4]{x+36} + \sqrt{6-x} < \sqrt{6}$.

Решение. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x+36 \geq 0, \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-36; 6].$$

Разобьем ОДЗ на два промежутка: $x \in [-36; 0]$ и $x \in (0; 6]$.

а) Рассмотрим первый промежуток. Так как $-36 \leq x \leq 0$, то $\sqrt[4]{x+36} \geq 0$ и $\sqrt{6-x} \geq \sqrt{6}$. Тогда $\sqrt[4]{x+36} + \sqrt{6-x} \geq \sqrt{6}$, а значит, исходное неравенство $\sqrt[4]{x+36} + \sqrt{6-x} < \sqrt{6}$ на этом промежутке не выполняется.

б) Рассмотрим второй промежуток. Так как $0 < x \leq 6$, то $\sqrt[4]{x+36} \geq \sqrt{6}$ и $\sqrt{6-x} \geq 0$. Тогда $\sqrt[4]{x+36} + \sqrt{6-x} \geq \sqrt{6}$, а значит, и на втором промежутке исходное неравенство $\sqrt[4]{x+36} + \sqrt{6-x} < \sqrt{6}$ не выполняется.

Таким образом, ни одно значение из ОДЗ не является решением неравенства.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Для уравнений и неравенств с двумя переменными не существует каких-либо общепринятых традиционных приемов реше-

ния. Чаще всего при алгебраическом подходе к их решению используются методы, основанные на разложении выражений на множители или выделении полного квадрата. Однако часто более эффективным является применение функционального подхода, основанного на нахождении ОДЗ и анализе значений левой и правой частей уравнения или неравенства.

Пример 1.9. Решите неравенство $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1$ [3].

Решение. Запишем условие на ОДЗ, следующее из неотрицательности подкоренного выражения: $x \geq y^2 + 1$. Из этого условия следует, что $x \geq 1$ (т.к. y^2 всегда неотрицательно).

Складывая неравенства $x \geq 1$, $y^2 \geq 0$ и $\sqrt{x - y^2 - 1} \geq 0$, получим, что левая часть исходного неравенства $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1$ всегда либо больше единицы, либо равна единице. Причем равенство единице достигается только в том случае, когда все складываемые неравенства превращаются в равенства, т.е. $x = 1$, $y^2 = 0$ и $\sqrt{x - y^2 - 1} = 0$.

Осталось заметить, что случай, когда левая часть больше единицы, не удовлетворяет исходному неравенству. А случай, когда левая часть равна единице, возможен только при выполнении условий $x = 1$ и $y = 0$.

Подстановкой убеждаемся, что пара чисел $(1; 0)$ является решением, т.к. неравенство $1 + 0^2 + \sqrt{1 - 0^2 - 1} \leq 1$ верно.

Ответ: $(x; y) = (1; 0)$.

Пример 1.10. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 10x^3 + 47x^2 + 52x + 12 = 0, \\ \log_{8+5x} \left(y + \frac{6}{x} + 6 \right) = \frac{y + 10(x+1)}{y-1} + \sqrt{\frac{36}{x} - 5x(7+5x) + 24} \lg(y+1) \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Заметим, что при неотрицательных x левая часть уравнения $10x^3 + 47x^2 + 52x + 12 = 0$ будет положительной, а значит, все пары чисел $(x; y)$, в которых $x \geq 0$, не могут удовлетворять исходной системе. Следовательно, $x < 0$.

Из второго уравнения системы следует, что в область допустимых значений переменной x могут входить только значения, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{36}{x} - 5x(7 + 5x) + 24 \geq 0.$$

Приведем к общему знаменателю

$$\frac{36 - 35x^2 - 25x^3 + 24x}{x} \geq 0.$$

Так как $x < 0$, то знаменатель всегда отрицателен и, значит, должно выполняться неравенство $25x^3 + 35x^2 - 24x - 36 \geq 0$.

Решим это неравенство. Подстановкой убеждаемся, что $x = 1$ является корнем многочлена $25x^3 + 35x^2 - 24x - 36 = 0$ (это также следует из того, что сумма коэффициентов многочлена равна нулю). Следовательно, по теореме Безу многочлен делится без остатка на двучлен $(x - 1)$. После деления получим

$$(x - 1)(25x^2 + 60x + 36) \geq 0.$$

Осталось применить формулу сокращенного умножения:

$$(x - 1)(5x + 6)^2 \geq 0.$$

Поскольку при $x < 0$ выражение $x - 1$ отрицательно, то $(x - 1)(5x + 6)^2$ отрицательно при $(5x + 6)^2 > 0$ и равно нулю при $(5x + 6)^2 = 0$. А значит, неравенство $(x - 1)(5x + 6)^2 \geq 0$ справедливо только в том случае, когда $(5x + 6)^2 = 0$, т.е. $x = -6/5$.

Итак, выяснили, что $x = -6/5$ — единственное допустимое значение неизвестной x , которое может удовлетворять исходной системе уравнений. Подставим его.

При подстановке $x = -6/5$ в первое уравнение системы, получим равенство

$$-\frac{10 \cdot 6^3}{5^3} + \frac{47 \cdot 6^2}{5^2} - \frac{52 \cdot 6}{5} + 12 = 0.$$

Сократим первую дробь на 5 и приведем первые две дроби к общему знаменателю:

$$\frac{6^2(-12+47)}{5^2} - \frac{52 \cdot 6}{5} + 12 = 0.$$

Еще раз сократим первую дробь на 5 и приведем первые две дроби к общему знаменателю:

$$\frac{6(42-52)}{5} + 12 = 0.$$

Приходим к верному равенству $-12+12=0$. Таким образом, $x = -6/5$ удовлетворяет первому уравнению.

Подставим теперь $x = -6/5$ во второе уравнение системы, чтобы найти подходящие значения неизвестной y :

$$\begin{aligned} \log_{8-5 \cdot \frac{6}{5}} \left(y - \frac{6 \cdot 5}{6} + 6 \right) &= \frac{y+10(-6/5+1)}{y-1} + \\ &+ \sqrt{-\frac{36 \cdot 5}{6} + 5 \cdot \frac{6}{5} \left(7 - 5 \cdot \frac{6}{5} \right) + 24 \lg(y+1)}. \end{aligned}$$

Упростим:

$$\log_2(y+1) = \frac{y-2}{y-1} + \sqrt{-30+6+24 \lg(y+1)}.$$

Получим уравнение:

$$\log_2(y+1) = \frac{y-2}{y-1}.$$

Выделив целую часть алгебраической дроби в правой части уравнения

$$\frac{y-2}{y-1} = \frac{(y-1)-1}{y-1} = 1 - \frac{1}{y-1},$$

запишем уравнение в виде

$$\log_2(y+1) = 1 - \frac{1}{y-1}.$$

Найдем ОДЗ на неизвестную y для этого уравнения:

$$\begin{cases} y+1 > 0, \\ y-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -1, \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Разобьем ОДЗ на два промежутка: $y \in (-1; 1)$ и $y \in (1; +\infty)$.

Рассмотрим первый промежуток. Так как $-1 < y < 1$, то

$$\log_2(y+1) < 1 \text{ и } 1 - \frac{1}{y-1} > 1,$$

а значит, уравнение

$$\log_2(y+1) = 1 - \frac{1}{y-1}$$

на этом промежутке не выполняется.

Рассмотрим второй промежуток. Так как $y > 1$, то

$$\log_2(y+1) > 1 \text{ и } 1 - \frac{1}{y-1} < 1,$$

а значит, и на втором промежутке рассматриваемое уравнение не выполняется.

Таким образом, уравнение

$$\log_2(y+1) = 1 - \frac{1}{y-1}$$

не имеет решений. Следовательно, исходная система уравнений также не имеет решений.

Ответ: $(x; y) \in \emptyset$.

1.3. Применение ОДЗ при решении заданий с параметром

В большинстве заданий с параметром ставится задача нахождения значений параметра a , при которых множество решений уравнения $f(x; a) = g(x; a)$ или неравенства $f(x; a) < g(x; a)$ удовлетворяет некоторому условию (как правило, это условие

на количество решений). Следовательно, при решении этих заданий также можно применять функциональный подход, основанный на анализе ОДЗ. При этом под ОДЗ подразумевается множество допустимых значений переменной x , т.е. функции $f(x; a)$ и $g(x; a)$ рассматриваются как функции от одной переменной x при каждом фиксированном значении параметра a . Это, в частности, означает, что ОДЗ может зависеть от параметра, т.е. при разных значениях параметра a множество допустимых значений может быть различным.

Пример 1.11. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x+1} = a - \sqrt{4-x^2}$$

имеет хотя бы один целый корень?

Решение. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; +\infty), \\ x \in [-2; 2] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 2].$$

Итак, $-1 \leq x \leq 2$, а значит, целые корни уравнения могут находиться только среди чисел $-1; 0; 1; 2$. Подставив каждое из этих значений вместо x в исходное уравнение, получим условия на параметр a , при которых конкретное число из набора $-1; 0; 1; 2$ будет являться корнем уравнения.

Пусть $x = -1$. Тогда $\sqrt{-1+1} = a - \sqrt{4-(-1)^2}$, откуда $a = \sqrt{3}$.

Пусть $x = 0$. Тогда $\sqrt{0+1} = a - \sqrt{4-0^2}$, откуда $a = 3$.

Пусть $x = 1$. Тогда $\sqrt{1+1} = a - \sqrt{4-1^2}$, откуда $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Пусть $x = 2$. Тогда $\sqrt{2+1} = a - \sqrt{4-2^2}$, откуда $a = \sqrt{3}$.

Ответ: $a \in \{\sqrt{3}; 3; \sqrt{3} + \sqrt{2}\}$.

Пример 1.12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{4-x^2} + a\sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{x^2+x-2} = a^2 - ax - 1$$

имеет единственное решение?

Решение. Преобразуем подкоренные выражения:

$$\sqrt{(2-x)(2+x)} + a\sqrt{(x+1)(x-2)} + \sqrt{(x+2)(x-1)} = a^2 - ax - 1.$$

Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} (2-x)(2+x) \geq 0, \\ (x+1)(x-2) \geq 0, \\ (x+2)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 2], \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}.$$

Таким образом, при любом a множество корней уравнения содержится в двухэлементном множестве $\{-2; 2\}$, а значит, уравнение имеет единственное решение в том и только в том случае, когда один из этих элементов удовлетворяет уравнению, а второй — нет.

Подставим в уравнение полученные допустимые значения переменной x и найдем a . Если $x = 2$, то $2 = a^2 - 2a - 1$, и значит, $a = -1$ или $a = 3$. Если же $x = -2$, то $2a = a^2 + 2a - 1$, и значит, $a = \pm 1$. Делаем вывод, что при $a = -1$ уравнение имеет два корня, при $a = 3$ и при $a = 1$ уравнение имеет один корень, а при остальных a уравнение не имеет корней.

Ответ: $a = 1, a = 3$.

Пример 1.13. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{\ln^2(a^2 + 2x - x^2)}{1 - \operatorname{tg}(\pi x/4)} \geq 0$$

имеет ровно три целых решения?

Решение. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} a^2 + 2x - x^2 > 0, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \neq 1, \\ \frac{\pi x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 < a^2 + 1, \\ \frac{\pi x}{4} \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 2 + 4n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{a^2 + 1} < x < 1 + \sqrt{a^2 + 1}, \\ x \neq 1 + 4n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 2 + 4n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Последние два условия системы для нахождения ОДЗ показывают, что если x является целым решением исходного неравенства, то x не может давать остатки 1 или 2 при делении на 4. Следовательно, все целые решения дают остатки 0 или 3 при делении на 4, т.е. имеют вид $x = 4n$ или $x = 3 + 4n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Убедимся, что при этих значениях x знаменатель левой части исходного неравенства положителен. Действительно, если $x = 4n$, то

$$1 - \operatorname{tg} \frac{4\pi n}{4} = 1 - \operatorname{tg} \pi n = 1 > 0,$$

а если $x = 3 + 4n$, то

$$1 - \operatorname{tg} \frac{(3 + 4n)\pi}{4} = 1 - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = 2 > 0.$$

А так как на ОДЗ числитель левой части всегда неотрицателен, то x является целым решением неравенства тогда и только тогда, когда он удовлетворяет первому условию системы для нахождения ОДЗ, т.е. когда $x \in (1 - \sqrt{a^2 + 1}; 1 + \sqrt{a^2 + 1})$.

Итак, условие задачи выполняется в том и только в том случае, когда интервалу $(1 - \sqrt{a^2 + 1}; 1 + \sqrt{a^2 + 1})$ принадлежат три целых числа, дающих остатки 0 или 3 при делении на 4.

Заметим, что данный интервал симметричен относительно точки 1. Обозначим его длину через d , т.е. $d = 2\sqrt{a^2 + 1}$. Рассмотрим различные случаи для значений d (эти случаи проиллюстрированы на рис. 2):

а) если $d \leq 2$, то в интервал входит единственное целое значение 1, имеющее неподходящий остаток 1 при делении на 4;

б) если $2 < d \leq 4$, то в интервал входят три целых значения 0, 1 и 2, но только одно из них $x = 0$ имеет подходящий остаток;

в) если $4 < d \leq 6$, то в интервале содержатся пять целых значений $-1, 0, 1, 2$ и 3 , ровно три из которых $x = -1, x = 0$ и $x = 3$ имеют подходящие остатки;

г) если $d > 6$, то в интервале содержатся не менее семи целых значений, среди которых не менее четырех $x = -1, x = 0, x = 3$ и $x = 4$ имеют подходящие остатки.

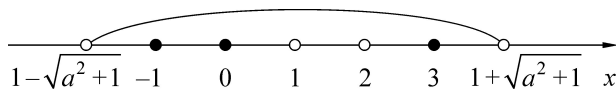


Рис. 2

Таким образом, должно выполняться условие $4 < d \leq 6$, т.е. $4 < 2\sqrt{a^2 + 1} \leq 6$, откуда $3 < a^2 \leq 8$ и $\sqrt{3} < |a| \leq 2\sqrt{2}$.

Ответ: $a \in [-2\sqrt{2}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2\sqrt{2}]$.

Пример 1.14. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{4a - x} + \sqrt{x - a^2 - 4} < 2 + 2x$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 4a - x \geq 0, \\ x - a^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4a, \\ x \geq a^2 + 4. \end{cases}$$

Данная система для нахождения ОДЗ имеет решения только в том случае, когда $4a \geq a^2 + 4$. Имеем $a^2 - 4a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a = 2$. Осталось проверить, при $a = 2$ будет ли неравенство иметь хотя бы одно решение. Подставив $a = 2$, получим $\sqrt{8 - x} + \sqrt{x - 8} < 2 + 2x$. ОДЗ этого неравенства состоит из единственного значения $x = 8$, которое удовлетворяет неравенству, т.к. числовое неравенство $\sqrt{8 - 8} + \sqrt{8 - 8} < 2 + 2 \cdot 8$ верно. Значит, $x = 8$ — решение неравенства.

Ответ: $a = 2$.

**Задания для самостоятельного решения по теме
«Область определения функции»**

1. Докажите, что уравнения не имеют решений:

а) $\sqrt{6-x} - \sqrt{x-8} = 2$;

б) $(x+1)(6-x)(\sqrt{x-9}+3) = 18$;

в) $\log_3(x-5) \cdot \arcsin x = 0$;

г) $\arccos(x+2) + \sqrt{2x-x^2} = x-2$;

д) $\frac{x^2-3x+2}{\log_5(2x-3)} = 0$.

Решите уравнение:

2. $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)=0$;

3. $\left(\sqrt{x^2-9x+14}-2\right)\log_{0,5}x+\sqrt{\frac{2-x}{x-7}}=5-\frac{6}{x}$;

4. $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{x-2}=(x-1)^2(x-6)$;

5. $\arccos(6x-x^2-10)=\frac{\pi x}{3}$;

6. $\arcsin(x^2-2x+2)=\frac{\pi x}{2}$.

Решите неравенство:

7. $(x-3)^2(x-8)<\sqrt{6-x}+\sqrt{x-1}$;

8. $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[6]{x^4-1}<2^x-\log_2(1+x^4)$;

9. $\log_2(2^x+1-x^2)>\log_2(1-2^{|x-1|})+1$;

10. $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}+x>4$;

11. $\arcsin \frac{2}{x} + \sqrt{x-1} > 1;$

12. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} > 2(1-x).$

13. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y ,
для каждой из которых $|x| \geq \sqrt{1-x^2-y^2} + |y| + 1.$

14. При каких значениях параметра a неравенство
 $\sqrt{2a-1-x} + \sqrt{x-a^2} < 4x-1$ имеет хотя бы одно решение?

Ответы

2. $x=1$. 3. $x=2$. 4. Нет корней. 5. $x=3$. 6. $x=1$.

7. $x \in [1; 6]$. 8. $x=1$. 9. Нет решений. 10. $x \in (3; +\infty)$.

11. $x \in [2; +\infty)$. 12. $x \in (1; +\infty)$.

13. $(1; 0), (-1; 0)$. 14. $a=1$.

§ 2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФУНКЦИИ

2.1. Теоретические сведения

Функция $y=f(x)$ фактически определяет два множества: область определения, которую пробегают значения переменной x , и область значений, которую пробегают значения переменной y . Первый параграф пособия был посвящен исследованию области определения функции, а второй параграф будет посвящен анализу ее области значений (свойство ограниченности описывает именно особенности поведения области значений функции).

Определение. Числовое множество Y называют ограниченным сверху (ограниченным снизу), если существует такое число M , что для всех $y \in Y$ выполняется неравенство $y \leq M$ ($y \geq M$). Множество, ограниченное одновременно и сверху и снизу, называют ограниченным.

Определение. Функцию $f(x)$ называют ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если ее область значений $E(f)$ ограничена (ограничена сверху, ограничена снизу).

Иногда удобно свойство ограниченности функции вводить, рассматривая функцию не на всей области определения, а на некотором подмножестве из области определения.

Определение. Функцию $f(x)$ называют ограниченной сверху (ограниченной снизу) на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число M , что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$). Функцию, ограниченную одновременно и сверху и снизу на X , называют ограниченной на X .

Метод решения уравнений и неравенств, заключающийся в исследовании свойства ограниченности функции сверху или снизу на некотором множестве, называют *методом оценки* или *методом мажорант*. Этот метод часто играет ключевую роль в тех заданиях, которые затруднительно или вообще невозможно решить с помощью стандартных алгебраических преобразований.

Метод оценки (метод мажорант) основывается на следующих утверждениях.

Утверждение 1. Если для всех x из множества X справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A — некоторое число, то на X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Утверждение 2. Если для всех x из множества X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A — некоторое число, то на X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leq g(x)$ равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Утверждение 3. Если для всех x из множества X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \geq B$ ($f(x) \leq A$ и $g(x) \leq B$), где A и B — некоторые числа, то на X уравнение $f(x) + g(x) = A + B$ и неравенство $f(x) + g(x) \leq A + B$ ($f(x) + g(x) \geq A + B$) равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B. \end{cases}$$

Утверждение 4. Для того чтобы неравенство $f(x) \geq g(x)$ на множестве X имело хотя бы одно решение, необходимо (но не достаточно), чтобы выполнялось условие $\max_{x \in X} f(x) \geq \min_{x \in X} g(x)$.

Утверждение 5. Если для всех x из множества X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \geq B$ ($0 < f(x) \leq A$ и $g(x) \leq B$), где A и B — положительные числа, то на X уравнение $f(x) \cdot g(x) = AB$ и неравенство $f(x) \cdot g(x) \leq AB$ ($f(x) \cdot g(x) \geq AB$) равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B. \end{cases}$$

Утверждение 6. Если для всех x из множества X справедливы неравенства $|f(x)| \geq A$ и $|g(x)| \geq B$ ($|f(x)| \leq A$ и $|g(x)| \leq B$), где A и B — положительные числа, то на X уравнение $f(x) \cdot g(x) = AB$ равносильно совокупности систем уравнений

$$\left[\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B, \\ f(x) = -A, \\ g(x) = -B. \end{cases} \right.$$

Утверждение 7. Если для всех x из промежутка X справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, где $f(x)$ — непрерывная и неограниченная сверху на X функция и $x_0 \in X$, то для того чтобы уравнение $f(x) = A$ и неравенство $f(x) \leq A$, где A — некоторое число, имели на X хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) \leq A$.

Утверждение 8. Пусть для всех x из промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ и $g(x) \leq g(x_0)$, где $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X , $f(x)$ не ограничена сверху, а $g(x)$ не ограничена снизу на X , и $x_0 \in X$. Тогда для того чтобы уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leq g(x)$ имели на X хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) \leq g(x_0)$.

Утверждение 9. Пусть для всех x из промежутка X справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, где x_0 — внутренняя точка промежутка X . Пусть также функция $f(x)$ непрерывна на X и $f(x)$ не ограничена сверху на множестве тех $x \in X$, для которых $x < x_0$, и на множестве тех $x \in X$, для которых $x > x_0$. Тогда для того чтобы уравнение $f(x) = A$ и неравенство $f(x) \leq A$, где A — некоторое число, имели на X более одного решения, достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) < A$. Если, кроме того, уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное на X решение $x = x_0$, то это условие является и необходимым.

Утверждение 10. Пусть для всех x из промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ и $g(x) \leq g(x_0)$, где x_0 — внутренняя точка промежутка X . Пусть также функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X и $f(x)$ не ограничена сверху на множестве тех $x \in X$, для которых $x < x_0$, и на множестве тех $x \in X$, для которых $x > x_0$, а $g(x)$ не ограничена снизу на множестве тех $x \in X$, для которых

$x < x_0$, и на множестве тех $x \in X$, для которых $x > x_0$. Тогда для того чтобы уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leq g(x)$ имели на X более одного решения, достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x_0) < g(x_0)$. Если, кроме того, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное на X решение $x = x_0$, то это условие является и необходимым.

Докажем, например, утверждение 2, а именно, покажем равносильность уравнения $f(x) = g(x)$ системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Напомним, что равносильность означает, что любое решение данного уравнения является решением системы, и, наоборот, любое решение системы является решением уравнения. Пусть x_0 — решение уравнения $f(x) = g(x)$. Если предположить, что x_0 не удовлетворяет системе, то либо $f(x_0) \neq A$, либо $g(x_0) \neq A$. Если $f(x_0) \neq A$, то $f(x_0) > A$ (т.к. $f(x) \geq A$ для всех $x \in X$), но с другой стороны $f(x_0) = g(x_0) \leq A$, противоречие. Если же $g(x_0) \neq A$, то $g(x_0) < A$ (т.к. $g(x) \leq A$ для всех $x \in X$), но с другой стороны $g(x_0) = f(x_0) \geq A$, противоречие. Пусть теперь x_0 — решение системы. Тогда $f(x_0) = A = g(x_0)$, а значит, x_0 — решение уравнения $f(x) = g(x)$. Для неравенства доказательство утверждения 2 проводится аналогично.

В утверждениях 7–10 требования непрерывности и неограниченности функций являются обязательными. Действительно, если $f(x) = |x|/x$, $X = D(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, $x_0 = -1$, $A = 0$, то, несмотря на утверждение 7, уравнение $f(x) = A$ не имеет решений. Аналогичная ситуация при $f(x) = x^2/(1+x^2)$, $X = D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $A = 2$. График функции $f(x) = x^2/(1+x^2)$ изображен на рис. 3.

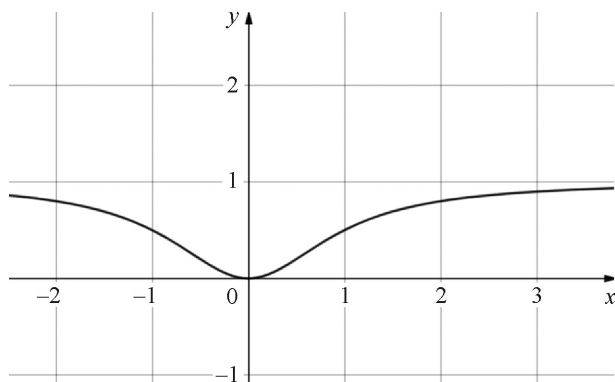


Рис. 3

В утверждениях 9 и 10 нельзя опустить требования неограниченности функций как слева от точки x_0 , так и справа от нее. Действительно, если $f(x) = |x - \sin x| + x$, $X = D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 = -\pi/2$, $A = 2$, то, несмотря на утверждение 9, уравнение $f(x) = A$ имеет единственное решение. График функции $f(x) = |x - \sin x| + x$ изображен на рис. 4.

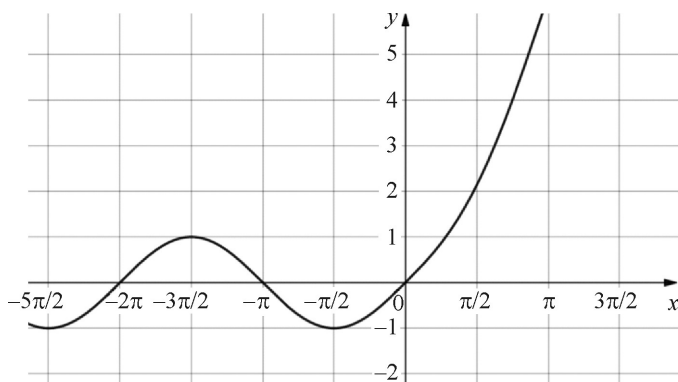


Рис. 4

Также при решении задач методом оценки (методом мажорант) могут оказаться полезными следующие неравенства:

1) $a^{2n} \geq 0$ при любом действительном a и натуральном n ;

2) $\sqrt[n]{a} \geq 0$ при любом неотрицательном a и натуральном n ;

3) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (неравенство Коши) при любых неотрицательных a и b , причем знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$;

4) $a + \frac{b^2}{a} \geq 2b$ (следствие из неравенства Коши) при любых

положительных a и b , причем знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$;

$a + \frac{b^2}{a} \leq 2b$ при любых отрицательных a и b , причем знак ра-

венства выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$;

5) $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \geq c - \frac{b^2}{4a}$ при любом по-

ложительном a и любых действительных b и c (данное преобразование называют выделением полного квадрата);

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leq c - \frac{b^2}{4a}$ при любом отрица-

тельным a и любых действительных b и c ;

6) $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ при любых действительных x ;

7) $|a \sin x + b \cos x| = \sqrt{a^2 + b^2} |\sin(x + \varphi)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ при любых действительных a, b, x (здесь через φ обозначен вспомогательный угол, который находится из равенств $\cos \varphi = a$ и $\sin \varphi = b$);

8) $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$ и $0 \leq \arccos x \leq \pi$ при любом действительном x , удовлетворяющим условию $|x| \leq 1$;

9) $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$ и $0 < \operatorname{arctg} x < \pi$ при любом действительном x ;

10) $a^x > 0$ при любом положительном a и любом действительном x .

Кроме того, полезно помнить, что из неравенства $a < b$ для возрастающей функции $f(x)$ следует неравенство $f(a) < f(b)$, а для убывающей функции $g(x)$ — неравенство $g(a) > g(b)$.

2.2. Применение ограниченности при решении уравнений, неравенств и их систем

Решение примеров данного раздела будет основываться на использовании свойств ограниченных функций, сформулированных в виде утверждений в предыдущем разделе.

Пример 2.1. Решите уравнение

$$\sqrt{5x^2 - 10x + 9} + \sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 2 + 2x - x^2.$$

Решение. Выделим полные квадраты во всех встречающихся квадратичных функциях:

$$5x^2 - 10x + 9 = 5(x-1)^2 + 4 \geq 4,$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1 \geq 1,$$

$$2 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 3 \leq 3.$$

Пользуясь монотонностью квадратного корня, оценим левую часть уравнения: $\sqrt{5(x-1)^2 + 4} + \sqrt{2(x-1)^2 + 1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$. Итак, левая часть всегда не меньше трех, а правая часть всегда не больше трех. Значит, по утверждению 2 исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{5(x-1)^2 + 4} + \sqrt{2(x-1)^2 + 1} = 3, \\ -(x-1)^2 + 3 = 3. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственное решение $x = 1$, которое при подстановке удовлетворяет и первому уравнению.

Ответ: $x = 1$.

Пример 2.2. Решите уравнение

$$\log_{1/3}(1+(x^2-3x+2)^2) = \sqrt{x^2-6x+8}.$$

Решение. Оценим левую часть уравнения, учитывая, что функция $y = \log_{1/3} x$ убывает на своей области определения:

$1+(x^2-3x+2)^2 \geq 1 \Rightarrow \log_{1/3}(1+(x^2-3x+2)^2) \leq 0$. Для правой части запишем оценку, основанную на неотрицательности значений квадратного корня: $\sqrt{x^2-6x+8} \geq 0$. Следовательно, по утверждению 2 исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{1/3}(1+(x^2-3x+2)^2) = 0, \\ \sqrt{x^2-6x+8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 = 0, \\ x^2-6x+8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 1, \\ x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Таким образом, исходному уравнению может удовлетворять только общий корень обоих уравнений системы, т.е. $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2.3. Решите уравнение $\log_{\pi} \cos^2 x = \operatorname{tg}^4(x/2)$.

Решение. Оценим левую часть уравнения, учитывая, что функция $y = \log_{\pi} x$ возрастает на своей области определения: $\cos x \leq 1 \Rightarrow \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow \log_{\pi} \cos^2 x \leq 0$. Для правой части справедлива оценка $\operatorname{tg}^4(x/2) \geq 0$. Следовательно, по утверждению 2 исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{\pi} \cos^2 x = 0, \\ \operatorname{tg}^4(x/2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm 1, \\ \operatorname{tg}(x/2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.4. Решите уравнение

$$\log_2(2x^2-4x+3) + \log_3(1+\sin^2 \pi x) = 0.$$

Решение. Оценим каждое из слагаемых в левой части уравнения:

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \log_2(2x^2 - 4x + 3) \geq 0,$$

$$1 + \sin^2 \pi x \geq 1 \Rightarrow \log_3(1 + \sin^2 \pi x) \geq 0.$$

Значит, по утверждению 3 исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2(2x^2 - 4x + 3) = 0, \\ \log_3(1 + \sin^2 \pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 3 = 1, \\ 1 + \sin^2 \pi x = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x = 1$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: $x = 1$.

Пример 2.5. Решите уравнение $7^{-|x-3|} \log_5(6x - x^2 - 4) = 1$.

Решение. Оценим сомножители в левой части уравнения:

$$-|x-3| \leq 0 \Rightarrow 0 < 7^{-|x-3|} \leq 1,$$

$$6x - x^2 - 4 = -(x-3)^2 + 5 \leq 5 \Rightarrow \log_5(6x - x^2 - 4) \leq \log_5 5 = 1.$$

Значит, по утверждению 5 исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 7^{-|x-3|} = 1, \\ \log_5(6x - x^2 - 4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| = 0, \\ 6x - x^2 - 4 = 5. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x = 3$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: $x = 3$.

Пример 2.6. Решите уравнение $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin 2x + (-\sin 6x) = -2$.

Поскольку $\sin 2x \geq -1$ и $-\sin 6x \geq -1$, по утверждению 3 исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ -\sin 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Найдем пересечение серий решений уравнений на единичной окружности (рис. 5). Получим $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

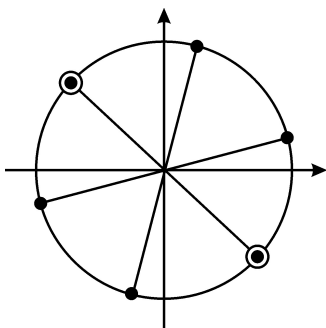


Рис. 5

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.7. Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 3x = 1$.

Решение. Множители $\cos x$ и $\cos 3x$ в левой части уравнения по модулю не превосходят единицы. Поэтому произведение этих множителей может равняться единице только в том случае, когда сами множители равны ± 1 . Значит, по утверждению 6 уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1, \\ \cos x = -1, \\ \cos 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При решении совокупности можно было заметить, что в каждой из двух систем, образующих совокупность, все решения первого уравнения удовлетворяли и второму уравнению.

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.8. Решите уравнение

$$\left(\cos \frac{x}{4} - 3 \sin x\right) \sin x + \left(2 + \sin \frac{x}{4} - 3 \cos x\right) \cos x = 0.$$

Решение. Раскрыв скобки и применив тригонометрические формулы, преобразуем уравнение к виду

$$\sin \frac{5x}{4} + 2 \cos x = 3.$$

Оценив каждое слагаемое в левой части, по утверждению 3 сделаем вывод, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}, \\ x = 2\pi k, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Найдем пересечение серий решений уравнений:

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5} = 2\pi k \Rightarrow 4n + 1 = 5k.$$

Рассмотрим, какие остатки может иметь целое число k при делении на 4:

а) случаи, когда k делится на 4 без остатка или когда остаток при делении k на 4 равен двум, невозможны, т.к. тогда левая часть равенства $4n + 1 = 5k$ нечетная, а правая — четная;

б) если k дает остаток 1 при делении на 4, т.е. $k = 4l + 1$, где $l \in \mathbb{Z}$, то $4n + 1 = 20l + 5$, откуда $n = 5l + 1$ и $x = 2\pi + 8\pi l$;

в) если k дает остаток 3 при делении на 4, т.е. $k = 4l + 3$, где $l \in \mathbb{Z}$, то $4n + 1 = 20l + 15$, откуда $2n = 10l + 7$, что невозможно, т.к. левая часть четная, а правая — нечетная.

Ответ: $x = 2\pi + 8\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.9. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^3 x = 1$.

Решение. Заметим, что $\sin^6 x \leq \sin^2 x$ и $\cos^3 x \leq \cos^2 x$ при любых действительных x . Тогда для левой части уравнения справедлива оценка $\sin^6 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin^6 x = \sin^2 x, \\ \cos^3 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Вторая совокупность этой системы имеет две серии решений $x = 2\pi n$ и $x = \pi/2 + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти серии удовлетворяют и первой совокупности.

Ответ: $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.10. Решите уравнение

$$1 + \cos^2 x + 2 \cos x \cos^2 5x = \sin^2 5x.$$

Решение. Перенесем единицу в правую часть уравнения и упростим:

$$\cos^2 x + 2 \cos x \cos^2 5x = -\cos^2 5x.$$

Выделим полный квадрат в левой части:

$$(\cos x + \cos^2 5x)^2 = \cos^4 5x - \cos^2 5x.$$

Оценим левую часть $(\cos x + \cos^2 5x)^2 \geq 0$. Для правой части справедлива оценка: $\cos^4 5x - \cos^2 5x = \cos^2 5x(\cos^2 5x - 1) \leq 0$.

Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (\cos x + \cos^2 5x)^2 = 0, \\ \cos^2 5x(\cos^2 5x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\cos^2 5x, \\ \cos 5x = 0, \\ \cos 5x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos 5x = \pm 1, \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pi + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 2.11. Решите уравнение

$$3 \sin x + 4 \cos 3x \cos x + 2 \sin 5x = 7.$$

Решение. Используя формулу вспомогательного угла, можем записать

$$3 \sin x + 4 \cos 3x \cos x = \sqrt{9 + 16 \cos^2 3x} \sin(x + \varphi),$$

где

$$\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{9 + 16 \cos^2 3x}} = \arcsin \frac{4 \cos x}{\sqrt{9 + 16 \cos^2 3x}}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{9 + 16 \cos^2 3x} \sin(x + \varphi) + 2 \sin 5x = 7.$$

Оценим слагаемые в левой части уравнения:

$$\begin{aligned} \cos^2 3x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{9 + 16 \cos^2 3x} \leq \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{9 + 16 \cos^2 3x} \sin(x + \varphi) \leq 5 \end{aligned}$$

(учли, что $\sin(x + \varphi) \leq 1$) и

$$2 \sin 5x \leq 2.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{9 + 16 \cos^2 3x} \sin(x + \varphi) = 5, \\ 2 \sin 5x = 2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$$2 \sin 5x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } \cos 3x \neq \pm 1,$$

т.к. из предположения, что

$$3x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi n}{5} = \frac{(3+12n)\pi}{10} = \pi k, n, k \in \mathbb{Z},$$

следует, что нечетное число $3 + 12n$ делится без остатка на 10.

Поэтому

$$\sqrt{9+16\cos^2 3x} < 5 \text{ при } x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z},$$

откуда следует, что полученная серия решений не удовлетворяет первому уравнению. А значит, данная система уравнений не имеет решений.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 2.12. Решите уравнение $x^5 - x - \sin \pi x = 0$ [4].

Решение. Запишем уравнение в виде $x(x^4 - 1) = \sin \pi x$.

Очевидно, что $x=0$, $x=1$, $x=-1$ являются корнями данного уравнения. Заметим, что в левой части уравнения нечетная функция, т.е. если x_0 — корень исходного уравнения, то и $-x_0$ также является корнем этого уравнения. Поэтому можно ограничиться поиском решений на промежутке $(0; +\infty)$, исключая $x=1$.

Разобьем это множество на три промежутка: $x \in (0; 1)$, $x \in (1; 2)$ и $x \in [2; +\infty)$.

а) Рассмотрим первый промежуток. Так как $0 < x < 1$, то $x(x^4 - 1) < 0$ и $\sin \pi x > 0$ (угол πx лежит в первой и второй четвертях), а значит, исходное уравнение на этом промежутке не выполняется.

б) Рассмотрим второй промежуток. Так как $1 < x < 2$, то $x(x^4 - 1) > 0$ и $\sin \pi x < 0$ (угол πx лежит в третьей и четвертой

четвертях), а значит, исходное уравнение на этом промежутке не выполняется.

в) Рассмотрим третий промежуток. Так как $x \geq 2$, то $x(x^4 - 1) \geq 2 \cdot (16 - 1) = 30$, но правая часть $\sin \pi x$ всегда не превосходит единицы, а значит, исходное уравнение на этом промежутке не выполняется.

Таким образом, на всех трех рассмотренных промежутках уравнение не имеет решений.

Ответ: $x = 0, x = 1, x = -1$.

Пример 2.13. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^2 2x} \right) (\sin^8 x + \cos^2 2x) = 4 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}.$$

Решение. Оценим левую часть уравнения, раскрыв скобки и применив следствие из неравенства Коши:

$$\left(\frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^2 2x} \right) (\sin^8 x + \cos^2 2x) = 2 + \frac{\cos^2 2x}{\sin^8 x} + \frac{\sin^8 x}{\cos^2 2x} \geq 4.$$

Оценим правую часть уравнения:

$$4 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \leq 4.$$

Следовательно, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^2 2x} \right) (\sin^8 x + \cos^2 2x) = 4, \\ 4 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = 4. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = 4 &\Leftrightarrow \cos \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Так как при любом допустимом x справедливо неравенство

$$0 \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \leq \frac{\pi}{2},$$

то равенство

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

выполняется только при $n=0$ и $x = \pm \pi/2$. Подставляя полученные значения x в первое уравнение системы, убеждаемся, что они являются его корнями.

Ответ: $x = \pm \pi/2$.

Пример 2.14. Решите уравнение

$$x^2 + 2 + \frac{4}{x^2 - 2x + 2} = 2x + \sqrt{12 - x^2} + 4x.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2 - 2x + 2 + \frac{4}{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{12 - x^2} + 4x.$$

Оценим левую часть уравнения, применив следствие из неравенства Коши (эта оценка корректна, т.к. выражение $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ всегда положительно):

$$x^2 - 2x + 2 + \frac{4}{x^2 - 2x + 2} \geq 4.$$

Оценим правую часть уравнения:

$$\sqrt{12 - x^2} + 4x = \sqrt{16 - (x-2)^2} \leq 4.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 + \frac{4}{x^2 - 2x + 2} = 4, \\ \sqrt{12 - x^2} + 4x = 4. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственный корень $x=2$, который удовлетворяет и первому уравнению.

Ответ: $x=2$.

Пример 2.15. Решите неравенство $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Решение. Неравенство не имеет смысла при $x = -1$.

Разобьем ОДЗ на три промежутка: $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (-1; 0]$ и $x \in (0; +\infty)$ и оценим левую и правую части неравенства на каждом из этих промежутков.

а) Рассмотрим первый промежуток. Так как $x < -1$, то

$$\frac{1-x}{1+x} < 0,$$

но правая часть 2^x всегда положительна, а значит, исходное неравенство выполняется для всех значений x из этого промежутка.

б) Рассмотрим второй промежуток. Так как $-1 < x \leq 0$, то

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 1, \text{ а } 2^x \leq 1,$$

а значит, исходное неравенство не выполняется на этом промежутке.

в) Рассмотрим третий промежуток. Так как $x > 0$, то

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1, \text{ а } 2^x > 1,$$

а значит, исходное неравенство выполняется для всех значений x из этого промежутка.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Пример 2.16. Решите неравенство

$$5^{12x^2-36x+29} \leq |\sin \pi x| + \cos^5 4\pi x + 23.$$

Решение. Оценим левую часть неравенства:

$$5^{12x^2-36x+29} = 5^{12\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2} \geq 5^2 = 25.$$

Оценим правую часть неравенства:

$$|\sin \pi x| + \cos^5 4\pi x + 23 \leq 25.$$

Исходное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 5^{12x^2-36x+29} = 25, \\ |\sin \pi x| + \cos^5 4\pi x + 23 = 25. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x = \frac{3}{2}$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

Пример 2.17. Решите уравнение

$$\arccos(x^2 - 1) - \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} = 1 - \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2} - \frac{2}{1 + \cos 2\sqrt{x}}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\arccos(x^2 - 1) + \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} - \frac{2}{1 + \cos 2\sqrt{x}}.$$

Упростим с помощью тригонометрических формул правую часть:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} - \frac{2}{1 + \cos 2\sqrt{x}} = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} - \frac{2}{2 \cos^2 \sqrt{x}} = 0.$$

Итак, исходное уравнение преобразовано к виду

$$\arccos(x^2 - 1) + \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2} = 0,$$

но это уравнение не равносильно исходному уравнению, т.к. при упрощении правой части изменилась область допустимых значений (точнее, эти уравнения равносильны на ОДЗ исходного уравнения).

В уравнении $\arccos(x^2 - 1) + \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2} = 0$ левая часть является суммой неотрицательных слагаемых. Поэтому это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \arccos(x^2 - 1) = 0, \\ \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2, \\ x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет два корня $x = \pm\sqrt{2}$, которые удовлетворяют и второму уравнению.

Осталось проверить, какие из найденных корней $x = \pm\sqrt{2}$ удовлетворяют ОДЗ исходного уравнения (достаточно проверить принадлежность этих корней области определения функции

$$y = 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} - \frac{2}{1 + \cos 2\sqrt{x}},$$

стоявшей в правой упрощенной части уравнения).

Найдем эту область определения:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Видно, что $x = \sqrt{2}$ удовлетворяет условиям ОДЗ, а $x = -\sqrt{2}$ — не удовлетворяет.

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

Пример 2.18. Решите неравенство

$$\cos \pi x + \sin \pi x - \sqrt{y} \geq \sqrt{16y - (4x - 1)^2 - 32}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\cos \pi x + \sin \pi x \geq \sqrt{y} + \sqrt{16y - (4x - 1)^2 - 32}.$$

Оценим правую часть неравенства с учетом ОДЗ. Так как $16y \geq (4x - 1)^2 + 32$, то $16y \geq 32$, а значит, $y \geq 2$ и $\sqrt{y} \geq \sqrt{2}$.

Следовательно, $\sqrt{y} + \sqrt{16y - (4x - 1)^2 - 32} \geq \sqrt{2}$.

Для оценки левой части воспользуемся формулой вспомогательного угла:

$$\cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2} \sin \left(\pi x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

Исходное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}, \\ \sqrt{y} + \sqrt{16y - (4x-1)^2 - 32} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение полученной системы. Поскольку $\sqrt{y} \geq \sqrt{2}$ и $\sqrt{16y - (4x-1)^2 - 32} \geq 0$, то это уравнение в свою очередь равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \sqrt{2}, \\ \sqrt{16y - (4x-1)^2 - 32} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $y=2$ и $x=1/4$. Осталось убедиться, что $x=1/4$ удовлетворяет первому уравнению предыдущей системы уравнений, т.е. что справедливо равенство

$$\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; 2\right).$

Пример 2.19. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для каждой из которых

$$\begin{cases} \sqrt{0,5(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geq 4x^4 + 4yx^2 + 0,5. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим уравнение системы

$$\sqrt{0,5(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2.$$

Оценим его левую часть, заменив $(x-y)^2$ на t . Имеем

$$\sqrt{0,5t - t^2} = \sqrt{-\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}} \leq \frac{1}{4}.$$

Тогда и правая часть уравнения $y^2 - 2x^2 \leq 1/4$, т.е. должно выполняться неравенство

$$y^2 - 2x^2 - 0,25 \leq 0. \quad (1)$$

Запишем неравенство системы в виде

$$4x^4 + 4yx^2 + 0,5 - y \leq 0. \quad (2)$$

Сложим левые и правые части неравенств (1) и (2):

$$4x^4 + y^2 + 0,25 + 4yx^2 - 2x^2 - y \leq 0.$$

Левую часть получившегося неравенства упростим по формуле квадрата трехчлена:

$$(2x^2 + y - 0,5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + y - 0,5 = 0.$$

Следовательно, в неравенствах (1) и (2) должны выполняться равенства. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y - 0,5 = 0, \\ y^2 - 2x^2 - 0,25 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Выразив из первого уравнения $2x^2 = 0,5 - y$, подставим во второе уравнение: $y^2 + y - 0,75 = 0$. Это уравнение имеет два корня $y_1 = 0,5$ и $y_2 = -1,5$. Если $y = 0,5$, то $x = 0$, если $y = -1,5$, то $x = \pm 1$.

Так как переход от исходной системы к системе (3) не является равносильным (из-за переноса оценки с левой части уравнения исходной системы на правую часть), то необходимо проверить, какие из полученных решений удовлетворяют исходной системе. Подстановкой убеждаемся, что пары $(0; 0,5)$ и $(-1; -1,5)$ являются решениями, а пара $(1; -1,5)$ не является.

Ответ: $(x; y) = (0; 0,5)$, $(x; y) = (-1; -1,5)$.

2.3. Применение ограниченности при решении заданий с параметром

Метод оценки (метод мажорант), в основе которого лежит анализ ограниченности функций, входящих в уравнения или неравенства, часто применяется при решении заданий с параметром, в которых требуется найти те значения параметра, при которых данное уравнение (или неравенство, или система уравнений или неравенств) имеет определенное количество решений.

При применении данного метода также можно опираться на утверждения и ключевые неравенства, сформулированные в разделе 2.1.

Пример 2.20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x - |4x - |x - a|| = 8|x - 2|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$8|x - 2| + |4x - |x - a|| - 2x = 0.$$

Пусть $f(x) = 8|x - 2| + |4x - |x - a|| - 2x$. Исследуем функцию $f(x)$ на монотонность на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[2; +\infty)$.

Пусть $x \in (-\infty; 2]$. Тогда $x - 2 \leq 0$ и $8|x - 2| = -8x + 16$. Имеем $f(x) = -10x + |4x - |x - a|| + 16$. При любом раскрытии оставшихся модулей $f(x)$ принимает вид линейной функции с отрицательным угловым коэффициентом $(-10 \pm 4 \pm 1 < 0)$. Значит, на промежутке $(-\infty; 2]$ функция $f(x)$ убывает.

Пусть $x \in [2; +\infty)$. Тогда $x - 2 \geq 0$ и $8|x - 2| = 8x - 16$. Имеем $f(x) = 6x + |4x - |x - a|| - 16$. При любом раскрытии оставшихся модулей $f(x)$ принимает вид линейной функции с положительным угловым коэффициентом $(6 \pm 4 \pm 1 > 0)$. Значит, на промежутке $[2; +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает.

Следовательно, наименьшее значение функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 = 2$, и оно равно $f(2) = |8 - |2 - a|| - 4$. Функция $f(x)$ непрерывна и не ограничена сверху. Поэтому по утверждению 7 необходимым и достаточным условием существования решений исходного уравнения является выполнение неравенства $f(2) \leq 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} |8 - |2 - a|| \leq 4 &\Leftrightarrow -4 \leq 8 - |a - 2| \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq |a - 2| \leq 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 \geq 4, \\ a - 2 \leq -4, \\ -12 \leq a - 2 \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6, \\ a \leq -2, \\ -10 \leq a \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq a \leq -2, \\ 6 \leq a \leq 14. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $a \in [-10; -2] \cup [6; 14]$.

Пример 2.21. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 + 8|x| + 4\log_2(5x^2 + 2) = 5x + 2|x - 2a|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$4\log_2(5x^2 + 2) + a^2 = -8|x| + 5x + 2|x - 2a|$$

и введем обозначения:

$$f(x) = 4\log_2(5x^2 + 2) + a^2,$$

$$g(x) = -8|x| + 5x + 2|x - 2a|.$$

Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Следовательно, ее наименьшее значение достигается при $x_0 = 0$ и равно $f(0) = 4 + a^2$.

Функция $g(x)$ на промежутке $(-\infty; 0]$ принимает вид

$$g(x) = 13x + 2|x - 2a|,$$

а значит, при любом раскрытии оставшегося модуля будет возрастать (т.к. в любом случае получится линейная функция с положительным угловым коэффициентом).

На промежутке $[0; +\infty)$ функция $g(x)$ принимает вид

$$g(x) = -3x + 2|x - 2a|$$

и будет являться убывающей независимо от раскрытия оставшегося модуля.

Следовательно, наибольшее значение функция $g(x)$ принимает в точке $x_0 = 0$, и оно равно $g(0) = 4|a|$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и не ограничены сверху и снизу соответственно. Поэтому по утверждению 8 необходимым и достаточным условием существования решений исходного уравнения является выполнение неравенства $f(0) \leq g(0)$. Имеем

$$\begin{aligned} 4 + a^2 \leq 4|a| &\Leftrightarrow |a|^2 - 4|a| + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (|a| - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \pm 2. \end{aligned}$$

Ответ: $a = \pm 2$.

Пример 2.22. При каких значениях параметра a уравнение

$$25a^2 + 20a + 1 + 4^{9x^2 - 30x + 25} = \cos 6\pi x$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Обозначим $25a^2 + 20a + 1 = c$, $f(x) = 4^{9x^2 - 30x + 25} + c$ и $g(x) = \cos 6\pi x$.

Функция $f(x) = 4^{(3x-5)^2} + c$ убывает на промежутке $(-\infty; 5/3]$ и возрастает на промежутке $[5/3; +\infty)$. Ее наименьшее значение достигается при $x_0 = 5/3$ и равно $f(5/3) = c + 1$.

Наибольшее значение функции $g(x)$ равно 1, причем подстановкой можно убедиться, что оно достигается, в частности, в точке $x_0 = 5/3$. Действительно, $g(5/3) = \cos 10\pi = 1$.

Таким образом, по утверждению 8 исходное уравнение имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $f(5/3) \leq g(5/3)$, т.е. $c \leq 0$.

Вернувшись от замены к параметру и решив квадратное неравенство $25a^2 + 20a + 1 \leq 0$, получим искомые значения

$$\frac{-2 - \sqrt{3}}{5} \leq a \leq \frac{-2 + \sqrt{3}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } a \in \left[\frac{-2 - \sqrt{3}}{5}; \frac{-2 + \sqrt{3}}{5} \right].$$

Пример 2.23. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3|x+a| + 2|x-a| + 2 = x + 8|x-2| + 2|3a+2|$ имеет два различных корня.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$8|x-2| - 3|x+a| - 2|x-a| + x + 2|3a+2| - 2 = 0.$$

Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. Рассмотрим поведение функции $f(x)$ отдельно при $x \leq 2$ и $x \geq 2$.

а) Пусть $x \in (-\infty; 2]$. Тогда $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = -7x - 3|x+a| - 2|x-a| + 2|3a+2| + 14.$$

При любом раскрытии оставшихся модулей $f(x)$ имеет вид линейной функции с отрицательным угловым коэффициентом, т.к. $-7 \pm 3 \pm 2 < 0$. А значит, на промежутке $(-\infty; 2]$ функция $f(x)$ убывает и не ограничена сверху.

б) Пусть $x \in [2; +\infty)$. Тогда $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = 9x - 3|x + a| - 2|x - a| + 2|3a + 2| - 18.$$

При любом раскрытии оставшихся модулей $f(x)$ имеет вид линейной функции с положительным угловым коэффициентом, т.к. $9 \pm 3 \pm 2 > 0$. А значит, на промежутке $[2; +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает и не ограничена сверху.

Таким образом, функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения в единственной точке $x_0 = 2$. Следовательно, по утверждению 9 исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только, когда выполняется неравенство $f(2) < 0$ (дополнительно учли, что на промежутках монотонности функции $h(x)$ уравнения вида $h(x) = c$ имеют не более одного корня).

Получаем

$$\begin{aligned} -3|2 + a| - 2|2 - a| + 2 + 2|3a + 2| - 2 &< 0, \\ 3|a + 2| + 2|a - 2| &> 2|3a + 2|. \end{aligned}$$

а) Пусть $a \in (-\infty; -2)$. Тогда $-3a - 6 - 2a + 4 > -6a - 4 \Leftrightarrow a > -2$. С учетом условия $a < -2$ имеем $a \in \emptyset$.

б) Пусть $a \in [-2; -2/3]$. Тогда $3a + 6 - 2a + 4 > -6a - 4 \Leftrightarrow a > -2$. С учетом условия $-2 \leq a \leq -2/3$ имеем $a \in (-2; -2/3]$.

в) Пусть $a \in (-2/3; 2)$. Тогда $3a + 6 - 2a + 4 > 6a + 4 \Leftrightarrow a < 6/5$. С учетом условия $-2/3 < a < 2$ имеем $a \in (-2/3; 6/5)$.

г) Пусть $a \in [2; +\infty)$. Тогда $3a + 6 + 2a - 4 > 6a + 4 \Leftrightarrow a < -2$. С учетом условия $a \geq 2$ имеем $a \in \emptyset$.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-2; \frac{6}{5}\right).$$

Пример 2.24. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x .

Решение. Неравенство преобразуется к виду $f(x)>3$, где $f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x$.

Точки -1 и $-a$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при раскрытии модуля).

На левом промежутке ($x\leq-1$, $x\leq-a$) функция принимает вид $f(x)=-x-2a-1$ и является убывающей.

На правом промежутке ($x\geq-1$, $x\geq-a$) функция имеет вид $f(x)=5x+2a+1$ и является возрастающей.

Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей звеньев. Точки -1 и $-a$ являются точками излома, поэтому в одной из этих точек функция принимает наименьшее значение.

Значит, все значения функции $f(x)$ больше трех тогда и только тогда, когда справедлива система неравенств

$$\begin{cases} f(-1) > 3, \\ f(-a) > 3. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2|a-1|-2 > 3, \\ |1-a|-2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-1| > 2,5, \\ |a-1| > 2a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-1 > 2,5 \\ a-1 < -2,5, \end{cases} \\ \begin{cases} a-1 > 2a+3, \\ a-1 < -2a-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a > 1,5 \\ a < -1,5, \end{cases} \\ \begin{cases} a < -4, \\ a < -2/3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a < -1,5. \end{aligned}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1,5)$.

Пример 2.25. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$(x^2 - 6|x| - a + 6)^2 = \cos \frac{18\pi}{a} - 1.$$

Так как левая часть уравнения неотрицательна, а правая не положительна, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 6|x| - a + 6 = 0, \\ \cos \frac{18\pi}{a} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x| - 3)^2 = a + 3, \\ \frac{18\pi}{a} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем условие на возможные значения параметра вида

$$a = \frac{9}{n}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+.$$

Первое уравнение системы имеет решения только тогда, когда $a + 3 \geq 0$, т.е. $a \in [-3; +\infty)$. Разобьем этот промежуток на два случая.

а) Пусть $a = -3$. Тогда $x = \pm 3$, а условие $-3 = 9/n$ выполняется при $n = -3$.

б) Пусть $a > -3$. Тогда $|x| = 3 \pm \sqrt{a + 3}$. Уравнение $|x| = 3 + \sqrt{a + 3}$ всегда имеет два различных решения. Значит, уравнение $|x| = 3 - \sqrt{a + 3}$ не должно иметь решений, откуда $3 - \sqrt{a + 3} < 0$. Этому неравенству удовлетворяют $a > 6$. Проверим, для каких a из промежутка $(6; +\infty)$ выполняется условие $a = 9/n$ при некотором целом n . Имеем $9/n > 6$, что справедливо при единственном целом $n = 1$. Следовательно, $a = 9$.

Ответ: $a = -3$; $a = 9$.

Пример 2.26. Найдите все значения параметра a , при которых для любой пары $(x; y)$ действительных чисел x и y выполнено неравенство

$$13 \sin x - 9|\sin x - y + 2a - 1| + 2|\sin x + 3y + 4a - 1| \leq 15.$$

Решение. Заменим $\sin x = t$ и запишем неравенство в виде

$$13t - 9|t - y + 2a - 1| + 2|t + 3y + 4a - 1| - 15 \leq 0.$$

Рассматривая левую часть неравенства при каждом фиксированном y и a , обозначим ее как функцию, зависящую от переменной t :

$$f(t) = 13t - 9|t - y + 2a - 1| + 2|t + 3y + 4a - 1| - 15.$$

Переформулируем задание для вновь введенных переменных. Нужно найти такие значения параметра a , при которых функция $f(t)$ не положительна для всех значений $-1 \leq t \leq 1$ и всех действительных y .

При любом раскрытии модулей функция $f(t)$ будет иметь вид $f(t) = kt + b$, где $k > 0$, т.е. является возрастающей функцией, а значит, $f(t) \leq f(1)$ для всех $t \in [-1; 1]$. Следовательно, неравенство $f(t) \leq 0$ выполняется на промежутке $[-1; 1]$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} f(1) &= -9|y - 2a| + 2|3y + 4a| - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9|y - 2a| - 2|3y + 4a| + 2 \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $g(y) = 9|y - 2a| - 2|3y + 4a| + 2$. Тогда если $y \leq 2a$, то $g(y)$ убывает, а если $y \geq 2a$, то $g(y)$ возрастает. Следовательно, наименьшее значения функция $g(y)$ достигает в точке $y_0 = 2a$, и неравенство $g(y) \geq 0$ выполняется на всей числовой прямой тогда и только тогда, когда $g(2a) \geq 0$.

$$\text{Получим } g(2a) = -2|10a| + 2 \geq 0 \Leftrightarrow |10a| \leq 1 \Leftrightarrow -0,1 \leq a \leq 0,1.$$

Ответ: $a \in [-0,1; 0,1]$.

Пример 2.27. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + 5ax = 24\pi^2, \\ \sin^2 a + \sin^2 x + 2^{|\lg y|} + \log_2(1 + \sqrt{y}) = \cos x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Так как $\sin^2 a \geq 0$, $\sin^2 x \geq 0$, $2^{|\lg y|} \geq 1$ и $\log_2(1 + \sqrt{y}) \geq 0$, то его левая часть не меньше единицы 1. При этом его правая часть не больше 1. Поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 a = 0, \\ \sin^2 x = 0, \\ 2^{|\lg y|} = 1, \\ \log_2(1 + \sqrt{y}) = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $a = \pi n$, $x = 2\pi k$, $y = 0$, где $n, k \in \mathbb{Z}$. Подставим эти значения в первое уравнение: $4\pi^2 k^2 + 10\pi^2 kn = 24\pi^2$. Упростим равенство: $2k^2 + 5kn = 12$, или $k(2k + 5n) = 12$. Значит, k — целый делитель числа 12, поэтому k принимает одно из значений $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$.

- а) Если $k = 1$, то $2 + 5n = 12$ и $n = 2$, $a = 2\pi$.
- б) Если $k = 2$, то $4 + 5n = 6$ и n — не целое.
- в) Если $k = 3$, то $6 + 5n = 4$ и n — не целое.
- г) Если $k = 4$, то $8 + 5n = 3$ и $n = -1$, $a = -\pi$.
- д) Если $k = 6$, то $12 + 5n = 2$ и $n = -2$, $a = -2\pi$.
- е) Если $k = 12$, то $24 + 5n = 1$ и n — не целое.
- ж) Если $k = -1$, то $-2 + 5n = -12$ и $n = -2$, $a = -2\pi$.
- з) Если $k = -2$, то $-4 + 5n = -6$ и n — не целое.
- и) Если $k = -3$, то $-6 + 5n = -4$ и n — не целое.
- к) Если $k = -4$, то $-8 + 5n = -3$ и $n = 1$, $a = \pi$.
- л) Если $k = -6$, то $-12 + 5n = -2$ и $n = 2$, $a = 2\pi$.
- м) Если $k = -12$, то $-24 + 5n = -1$ и n — не целое.

Ответ: $a = \pm\pi$, $a = \pm 2\pi$.

Пример 2.28. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + a = 6 \sin x, \\ y^4 + z^2 = 6a, \\ (a-3)^2 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x + 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a [5].

Решение. Во втором уравнении системы левая часть неотрицательна, следовательно, $a \geq 0$.

Из первого уравнения системы получаем $|y| = 6 \sin x - a \geq 0$. Следовательно, $a \leq 6 \sin x$, а так как $\sin x \leq 1$, то $a \leq 6$.

Приведем третье уравнение к виду

$$(a-3)^2 - 9 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x \Leftrightarrow a(a-6) = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x.$$

Так как $|z^2 + 6z| + \sin^2 2x \geq 0$, то $a(a-6) \geq 0$.

Соберем вместе полученные условия на параметр a :

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a \leq 6, \\ a(a-6) \geq 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только два решения $a=0$ и $a=6$. Решим систему для каждого из этих двух значений и проверим, какие из этих двух значений удовлетворяют условию задачи.

а) При $a=0$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} |y| = 6 \sin x, \\ y^4 + z^2 = 0, \\ |z^2 + 6z| + \sin^2 2x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $y=z=0$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При $a=6$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} |y| = 6 \sin x - 6, \\ y^4 + z^2 = 36, \\ |z^2 + 6z| + \sin^2 2x = 0. \end{cases}$$

Так как $|y| \geq 0$ и $6 \sin x - 6 \leq 0$, то из первого уравнения следует, что $y=0$ и $\sin x = 1$, т.е. $x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sin 2x = 0$, и из третьего уравнения следует, что $|z^2 + 6z| = 0$, т.е. $z = -6$ или $z = 0$. А подставляя $y=0$ во второе уравнение, получаем, что $z = \pm 6$. Следовательно, $z = -6$.

Ответ: при $a=0$ решение $(x; y; z) = (\pi k; 0; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$; при $a=6$ решение $(x; y; z) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0; -6\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Задания для самостоятельного решения по теме
«Ограниченность функции»**

1. Докажите, что уравнения и неравенства не имеют решений:

а) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+7} = \sqrt{x-4}$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 2$;

в) $|2x^2 - 3x - 5| + 3^{(x-1)^2+1} = 3$;

г) $\log_3 9^{(x+1)^2} \cdot (2^{(x-2)^2} + 3) = -2$;

д) $\arccos x + \sqrt{3x^2 - x - 4} = 0$;

е) $3 \sin 2x + 4 \cos 2x = 7$;

ж) $(8x^2 + 10x + 7) \lg^2(x+1) < 0$;

з) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 21} \leq 0$.

Решите уравнение:

2. $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - x - 1} = 0$;

3. $\sin^2 \pi x + \log_2^2(2x^2 + x) = 0$;

4. $\frac{2}{\pi} \arccos(-0.5x) = 2 + (x^2 - x - 2)^8$;

5. $2 \arcsin(3x - 8) = \pi + 2 \cdot (2x^2 - 7x + 3)^4$;

6. $3 + \log_{1/2}^4(x^2 - x + 1) = 3 |\cos((x-1) \cdot \cos 2x)|$;

7. $\log_3 \left(\frac{4}{3} \cos \pi x + \frac{5}{3} \right) + \sqrt{8x - 2x^2 - 7} = 2$;

8. $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$;

9. $\cos x \cdot \cos 5x = 1$;

10. $2 \sin 6x + 3 \cos 8x = 5$;

11. $\sin^7 x + \cos^8 x = 1$;

12. $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x ;$

13. $2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3} .$

Решите неравенство:

14. $\log_5 x + \log_x 5 > 2 ;$

15. $2^{-|x-2|} \cdot \log_2 (4x - x^2 - 2) \geq 1 ;$

16. $3^{1-x^2} \cdot \log_{1/3} \left(x^2 + \frac{1}{27} \right) \geq 9 .$

17. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для каждой из которых выполняется неравенство

$$4 \cos x - \sqrt{y - x^2 - 2} \geq y^2 .$$

18. При каких значениях параметра a неравенство $13 \cos^2 (7x - 3) \geq 16a^2 + 56a + 62$ имеет хотя бы одно решение?

19. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{3a^2 - 12a + 1}{a^2 - 4a - 5} \geq \sqrt{x^2 + 14x + 58}$ имеет единственное решение?

20. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y , для каждой из которых выполняется неравенство

$$14y - \frac{9}{x^2} \geq 16x^2 + y^2 + 25 .$$

21. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $11|x+a| + 2x + 3|x-5| = 5|x+a-4|$ имеет хотя бы один корень.

22. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 + 4|x| + 16 \log_4(x^2 + 4) = x + 2|x - 4a|$ имеет хотя бы один корень.
23. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором неравенство $\sqrt{a^5}(14x - 49 - x^2) + \frac{\sqrt{a}}{14x - 49 - x^2} \geq -\frac{1}{2}a|\cos \pi x|$ имеет хотя бы одно решение.

Ответы

2. $x = 1$. 3. $x = -1$. 4. $x = 2$. 5. $x = 3$. 6. $x = 1$. 7. $x = 2$. 8. $x = 2$.
9. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 10. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
11. $x = \pi n; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 12. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 13. $x = 0$.
14. $x \in (1; 5) \cup (5; +\infty)$. 15. $x = 2$. 16. $x = 0$.
17. $(0; 2)$. 18. $a = -1,75$. 19. $a \in (-1; 5)$. 20. $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; 7\right)$.
21. $a \in [-7; 5]$. 22. $a \in \{-4; 4\}$. 23. $a = \frac{1}{16}$.

§ 3. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ

3.1. Теоретические сведения

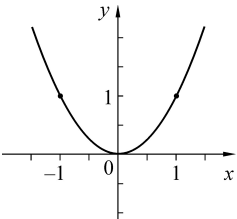
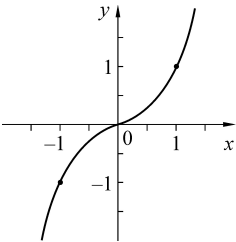
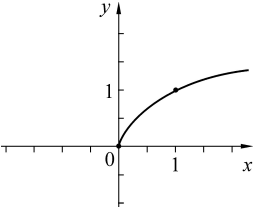
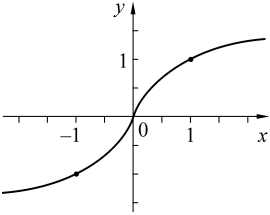
Напомним основные определения и факты, связанные с монотонностью.

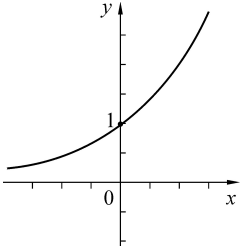
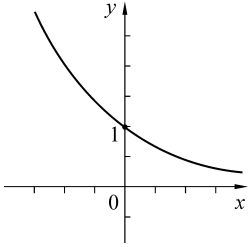
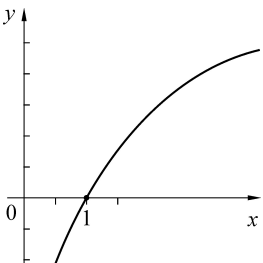
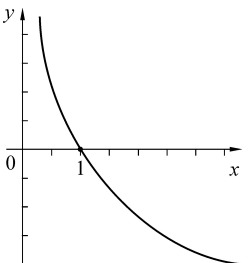
Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X , если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X , если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Отразим монотонность некоторых элементарных функций в табл. 2.

Таблица 2

№	Вид функции	Характер монотонности	
1	Степенная $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$	$n = 2k, k \in \mathbb{N}$  Убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$	$n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$  Возрастает на $\mathbb{R}$
2	Корень n -й степени $y = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$	$n = 2k, k \in \mathbb{N}$  Возрастает на $[0; +\infty)$	$n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$  Возрастает на $\mathbb{R}$

№	Вид функции	Характер монотонности	
3	Показательная $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$	$a > 1$  Возрастает на $\mathbb{R}$	$0 < a < 1$  Убывает на $\mathbb{R}$
4	Логарифмическая $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$	$a > 1$  Возрастает на $\mathbb{R}_+$	$0 < a < 1$  Убывает на $\mathbb{R}_+$

Определение. Функция $f(x)$ называется *монотонной* на промежутке X , если она либо возрастает, либо убывает на X .

Свойства монотонных функций:

1) сумма возрастающих (убывающих) на X функций является возрастающей (убывающей) функцией на X ;

2) произведение двух возрастающих (убывающих) на X неотрицательных функций является возрастающей (убывающей) функцией на X ;

3) если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на X ;

4) если знакпостоянная (т.е. положительная или отрицательная) функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то функция $\frac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на X ;

5) если функция $t=g(x)$ возрастает на X и функция $y=f(t)$ возрастает на $g(X)$, то функция $y=f(g(x))$ возрастает на X ;

6) если функция $t=g(x)$ убывает на X и функция $y=f(t)$ убывает на $g(X)$, то функция $y=f(g(x))$ возрастает на X ;

7) если функция $t=g(x)$ убывает на X , а функция $y=f(t)$ возрастает на $g(X)$, то функция $y=f(g(x))$ убывает на X ;

8) если функция $t=g(x)$ возрастает на X , а функция $y=f(t)$ убывает на $g(X)$, то функция $y=f(g(x))$ убывает на X .

При использовании монотонности функций для решения уравнений, неравенств и их систем часто полезными оказываются следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке X , тогда уравнение $f(x)=A$ имеет не более одного корня на промежутке X . А именно, уравнение $f(x)=A$ имеет единственный корень на X , если A принадлежит множеству значений $f(x)$, и уравнение $f(x)=A$ не имеет корней на X , если A не принадлежит множеству значений $f(x)$.

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X , а функция $g(x)$ убывает на X , то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня на X .

Утверждение 3. Пусть функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X , уравнение $f(x)=A$ имеет единственный на X корень x_0 . Тогда на множестве X неравенство $f(x)<A$ выполняется только для $x<x_0$ ($x>x_0$), а неравенство $f(x)>A$ только для $x>x_0$ ($x<x_0$).

Утверждение 4. Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке X , функция $g(x)$ убывает на X , уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственный на X корень x_0 . Тогда на множестве X неравенство $f(x)<g(x)$ выполняется только для $x<x_0$, а неравенство $f(x)>g(x)$ только для $x>x_0$.

Утверждение 5. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X , то уравнение $f(g(x))=f(h(x))$, где $g(x) \in X$ и $h(x) \in X$, равносильно уравнению $g(x)=h(x)$.

Утверждение 6. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X , то неравенство $f(g(x))<f(h(x))$, где $g(x) \in X$ и $h(x) \in X$, равносильно неравенству $g(x)<h(x)$ ($g(x)>h(x)$), а неравенство $f(g(x))>f(h(x))$, равносильно неравенству $g(x)>h(x)$ ($g(x)<h(x)$).

Утверждение 7. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X , то уравнение $f(f(x))=x$ на множестве X равносильно уравнению $f(x)=x$ [3].

Утверждение 7 остается справедливым для произвольного числа вложенных функций, т.е. для возрастающей функции $f(x)$ уравнение $f(x)=x$ также равносильно уравнениям $f(f(f(x)))=x$, $f(f(f(f(x))))=x$ и так далее.

Докажем, например, утверждение 5. Пусть x_0 — решение уравнения $f(g(x))=f(h(x))$. Если предположить, что x_0 не удовлетворяет уравнению $g(x)=h(x)$, то либо $g(x_0)>h(x_0)$, либо $g(x_0)<h(x_0)$. Возможны 4 случая: а) если $g(x_0)>h(x_0)$ и $f(x)$ возрастает на X , то $f(g(x_0))>f(h(x_0))$; б) если $g(x_0)>h(x_0)$ и $f(x)$ убывает на X , то $f(g(x_0))<f(h(x_0))$; в) если $g(x_0)<h(x_0)$ и $f(x)$ возрастает на X , то $f(g(x_0))<f(h(x_0))$; г) если $g(x_0)<h(x_0)$ и $f(x)$ убывает на X , то $f(g(x_0))>f(h(x_0))$. Во всех случаях $f(g(x_0)) \neq f(h(x_0))$, противоречие. Пусть теперь x_0 — решение уравнения $g(x)=h(x)$. Тогда $g(x_0)=h(x_0)$ и $f(g(x_0))=f(h(x_0))$, т.е. x_0 — решение уравнения $f(g(x))=f(h(x))$.

3.2. Применение монотонности при решении уравнений, неравенств и их систем

Утверждения 1 и 2, сформулированные в предыдущем разделе, позволяют обосновывать единственность решения уравнения в тех случаях, когда алгебраическими методами решить уравне-

ние не удастся, но несложно подбирается корень данного уравнения (обычно, корнем является однозначное целое число).

Пример 3.1. Решите уравнение $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2$.

Решение. В левой части уравнения записана возрастающая на промежутке $[-3/2; 4]$ функция, т.к. она представлена в виде суммы двух возрастающих функций. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подстановкой убеждаемся, что $x=3$ — корень уравнения, т.к. равенство $\sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$ верно.

Ответ: $x = 3$.

Пример 3.2. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 3-x$.

Решение. В левой части уравнения записана возрастающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция, а в правой части — убывающая на всей прямой функция. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подстановкой убеждаемся, что $x=1$ — корень уравнения, т.к. равенство $\sqrt{0} + \sqrt{4} = 2$ верно.

Ответ: $x = 1$.

Пример 3.3. Решите уравнение

$$4\log_3(|x-1|+2) + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 5.$$

Решение. Каждая из двух функций

$$f(x) = 4\log_3(|x-1|+2) \text{ и } g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

убывает при $x \leq 1$ и возрастает при $x \geq 1$, следовательно, уравнение $f(x) + g(x) = 5$ имеет не более двух корней: не более одного корня на промежутке $(-\infty; 1]$ и не более одного корня на промежутке $[1; +\infty)$. Подстановкой убеждаемся, что $x=0$ и $x=2$ — корни уравнения, т.к. равенство $4\log_3 3 + \sqrt[3]{1} = 5$ верно.

Ответ: $x = 0, x = 2$.

Пример 3.4. Решите уравнение $x \cdot 2^{\log_3(x^2+2x+12)} = 24$.

Решение. Заметим, что уравнение не имеет корней на промежутке $(-\infty; 0]$, т.к. при $x \leq 0$ левая часть уравнения неположительна.

На промежутке $(0; +\infty)$ функция $y = x \cdot 2^{\log_3(x^2+2x+12)}$ возрастает, т.к. представлена в виде произведения двух положительных возрастающих функций. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подстановкой убеждаемся, что $x=3$ — корень уравнения, т.к. равенство $3 \cdot 2^{\log_3 27} = 24$ верно.

Ответ: $x=3$.

Пример 3.5. Решите уравнение $\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-3} = 2$.

Решение. В левой части уравнения разность монотонно возрастающих функций, поэтому сразу же утверждения о монотонных функциях применить не получится.

Умножим обе части уравнения на сопряженное выражение, т.е. на сумму квадратных корней. Заметим, что оба корня в ноль одновременно не обращаются. Получим

$$\begin{aligned} 2x+5 - (2x-3) &= 2(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-3}), \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-3} &= 4. \end{aligned}$$

Теперь в левой части уравнения записана возрастающая на промежутке $[1,5; +\infty)$ функция. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подстановкой убеждаемся, что $x=2$ — корень уравнения, т.к. равенство $\sqrt{9} + \sqrt{1} = 4$ верно.

Ответ: $x=2$.

Пример 3.6. Решите уравнение $5^x + 12^x = 13^x$.

Решение. Подстановкой убеждаемся, что $x=2$ — корень уравнения, т.к. равенство $5^2 + 12^2 = 13^2$ верно. Докажем, что этот корень единственный. Так как в обеих частях уравнения

находятся возрастающие на $\mathbb{R}$ функции, то невозможно сослаться на утверждения о монотонных функциях.

Разделим обе части уравнения на 13^x (заметим, что $13^x \neq 0$) :

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

Теперь в левой части уравнения записана убывающая функция, значит, уравнение имеет не более одного корня.

Ответ: $x=2$.

Утверждения 3 и 4, сформулированные в предыдущем разделе, помогают при решении неравенств, когда удастся подобрать корень соответствующего уравнения.

Пример 3.7. Решите неравенство $\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+12} > 4$.

Решение. В левой части неравенства записана возрастающая на промежутке $[-5/4; +\infty)$ функция. Подстановкой убеждаемся, что $x=-1$ является корнем соответствующего уравнения $\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+12} = 4$, т.к. равенство $\sqrt{1} + \sqrt{9} = 4$ верно. Значит, исходное неравенство справедливо только при $x > -1$.

Ответ: $x \in (-1; +\infty)$.

Пример 3.8. Решите неравенство

$$4x^3 + \sqrt[4]{x-1} + \log_3(x^3+1) - \sqrt{4-2x} < 35 \quad [2].$$

Решение. В левой части неравенства записана возрастающая на промежутке $[1; 2]$ функция, т.к. она представлена в виде суммы четырех возрастающих функций. Подстановкой убеждаемся, что $x=2$ является корнем соответствующего уравнения

$$4x^3 + \sqrt[4]{x-1} + \log_3(x^3+1) - \sqrt{4-2x} = 35,$$

т.к. равенство $32 + \sqrt[4]{1} + \log_3 9 - \sqrt{0} = 35$ верно. Значит, исходное неравенство справедливо только при $x < 2$. Учитывая ОДЗ неравенства, получаем, что $1 \leq x < 2$.

Ответ: $x \in [1; 2)$.

Пример 3.9. Решите неравенство

$$\lg(x+4) + 3\lg(3x-8) < 6 - \sqrt[3]{x+2}.$$

Решение. В левой части неравенства записана возрастающая на промежутке $(8/3; +\infty)$ функция, а в правой части — убывающая на всей прямой функция. Подстановкой убеждаемся, что $x=6$ является корнем соответствующего уравнения

$$\lg(x+4) + 3\lg(3x-8) = 6 - \sqrt[3]{x+2},$$

т.к. равенство $\lg 10 + 3\lg 10 = 6 - \sqrt[3]{8}$ верно. Значит, исходное неравенство справедливо только при $x < 6$. Учитывая ОДЗ неравенства, получаем, что $8/3 < x < 6$.

Ответ: $x \in \left(\frac{8}{3}; 6\right).$

Пример 3.10. Решите неравенство $\sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} > 0$.

Решение. ОДЗ неравенства имеет вид $x \in [-1; +\infty)$.

Преобразуем неравенство:

$$8\sqrt{x+1} - 8 - 4x + x^2 > 0,$$

$$x^2 - 4(x+1-2\sqrt{x+1}+1) > 0,$$

$$x^2 - 4(\sqrt{x+1}-1)^2 > 0,$$

$$(x+2\sqrt{x+1}-2)(x+1-2\sqrt{x+1}+1) > 0,$$

$$(x+2\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-1)^2 > 0.$$

Поскольку $(\sqrt{x+1}-1)^2 \geq 0$ при всех допустимых значениях x , то получившееся неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x+2\sqrt{x+1}-2 > 0, \\ (\sqrt{x+1}-1)^2 \neq 0. \end{cases}$$

В левой части первого неравенства системы записана возрастающая на промежутке $[-1; +\infty)$ функция. Подстановкой убеж-

даемся, что $x=0$ является корнем соответствующего уравнения $x + 2\sqrt{x+1} - 2 = 0$. Значит, данное неравенство справедливо только при $x > 0$. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

которой удовлетворяют все положительные x .

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

Утверждения 5 и 6 полезны при решении тех уравнений и неравенств, левую и правую часть которых удастся представить в виде значений одной и той же функции $f(t)$ для различных значений переменной t .

Пример 3.11. Решите уравнение $x^6 = x^3 + 5x^2 + 13x + 10$.

Решение. Преобразуем уравнение, выделив в правой части полный куб:

$$x^6 = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - x^2 + x + 2.$$

Получаем

$$x^6 + x^2 = (x + 2)^3 + (x + 2).$$

Теперь уравнение приняло вид $f(g(x)) = f(h(x))$, где функция $f(t) = t^3 + t$ возрастает на $\mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 2$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $g(x) = h(x)$, т.е. $x^2 = x + 2$, откуда $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $x = -1$ и $x = 2$.

Пример 3.12. Решите неравенство

$$9^{5x-2} - 3^{2x+8} + 2\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+20} \leq \log_5 \frac{x+7}{5x+1}.$$

Решение. ОДЗ неравенства имеет вид: $x \in [1/5; +\infty)$.

Преобразуем неравенство:

$$9^{5x-2} + 2\sqrt{5x-1} + \log_5(5x+1) \leq 9^{x+4} + 2\sqrt{x+5} + \log_5(x+7).$$

Теперь неравенство приняло вид $f(g(x)) \leq f(h(x))$, где функция $f(t) = 9^t + 2\sqrt{t+1} + \log_5(t+3)$ возрастает на своей области определения, $g(x) = 5x - 2$, $h(x) = x + 4$.

Тогда на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству $g(x) \leq h(x)$, т.е. $5x - 2 \leq x + 4$, откуда $x \leq 3/2$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right]$.

Пример 3.13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7 \sin x - 6y^3 + 5x = 7 \sin y - 6x^3 + 5y, \\ 9x^2 + 16y^2 = 9. \end{cases}$$

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде:

$$7 \sin x + 6x^3 + 5x = 7 \sin y + 6y^3 + 5y.$$

Теперь оно имеет вид $f(x) = f(y)$, где $f(t) = 7 \sin t + 6t^3 + 5t$.

Пользуясь вторым уравнением, можно ограничить множество значений для переменной t . Действительно, поскольку $9x^2 \leq 9$ и $16y^2 \leq 9$, то $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 3/4$. Значит, достаточно рассматривать $t \in [-1; 1]$.

На этом промежутке функция $f(t)$ является возрастающей как сумма трех возрастающих функций, поскольку $\sin t$ возрастает при $t \in [-\pi/2; \pi/2]$. Значит, первое уравнение системы равносильно уравнению $x = y$.

Система принимает вид

$$\begin{cases} x = y, \\ 9x^2 + 16y^2 = 9. \end{cases}$$

Решая ее, получаем два решения $x_1 = y_1 = 3/5$, $x_2 = y_2 = -3/5$.

Ответ: $(x; y) = \left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$ и $(x; y) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

Приведем теперь два примера на применение утверждения 7.

Пример 3.14. Решите уравнение

$$2(2x^3 + 3x + 4)^3 + 3(2x^3 + 3x + 4) + 4 = x.$$

Решение. Заметим, что исходное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, где $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$.

Так как $f'(x) = 6x^2 + 3 > 0$ при всех x , то функция $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Тогда уравнения $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ равносильны. Поэтому множество решений исходного уравнения совпадает с множеством решений уравнения $2x^3 + 3x + 4 = x$, или после упрощения $x^3 + x + 2 = 0$.

В левой части полученного уравнения записана возрастающая функция. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подстановкой убеждаемся, что $x = -1$ — корень уравнения.

Ответ: $x = -1$.

Пример 3.15. Решите уравнение $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{x+7}+8}+8} = \frac{x-1}{2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{x+7}+1)+7}+1)+7}+1 = x.$$

Заметим, что уравнение имеет вид $f(f(f(x))) = x$, и функция $f(x) = 2\sqrt{x+7}+1$ возрастает на промежутке $[-7; +\infty)$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению

$$2\sqrt{x+7}+1 = x.$$

Уединим квадратный корень: $2\sqrt{x+7} = x-1$. Учитывая условие неотрицательности правой части $x-1 \geq 0$, возведем обе части в квадрат: $4(x+7) = x^2 - 2x + 1$. Полученное квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = -3$ и $x_2 = 9$, из которых условию удовлетворяет только второй.

Ответ: $x = 9$.

3.3. Применение монотонности при решении заданий с параметром

При решении заданий с параметром также могут оказаться полезными утверждения о монотонных функциях.

Пример 3.16. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^{14} + (3a - 2|x|)^7 + x^6 - (2|x| - 3a)^3 = 0$ имеет более трех различных решений.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$(x^2)^7 + (x^2)^3 = (2|x| - 3a)^7 + (2|x| - 3a)^3.$$

Теперь оно приняло вид $f(g(x)) = f(h(x))$, где функция $f(t) = t^7 + t^3$ возрастает на $\mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2|x| - 3a$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $g(x) = h(x)$, т.е. $x^2 = 2|x| - 3a$, или $x^2 - 2|x| + 3a = 0$.

Выполнив замену переменной по правилу $|x| = y$, где $y \geq 0$, получим квадратное уравнение $y^2 - 2y + 3a = 0$. Уравнение $x^2 - 2|x| + 3a = 0$ имеет более трех корней (точнее, ровно четыре корня), тогда и только тогда, когда уравнение $y^2 - 2y + 3a = 0$ имеет два различных положительных корня.

Условие существования двух различных корней y_1 и y_2 равносильно условию положительности сокращенного дискриминанта $D_1 = 1 - 3a$. Тогда по теореме Виета $y_1 + y_2 = 2$ и $y_1 y_2 = 3a$. Видно, что оба корня будут положительными в том и только том случае, когда $3a > 0$.

Имеем

$$\begin{cases} 3a > 0, \\ 1 - 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{3}.$$

Ответ: $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Пример 3.17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin(x+4a) + \sin \frac{x^2 - 6x - 7a}{2} = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных корней.

Решение. Проведем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 6x - 7a}{2} &= \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}a, \\ 4x - x^2 - a &= -2 \left(\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}a \right) + 2(-x - 4a). \end{aligned}$$

Запишем исходное уравнение следующим образом:

$$\sin \left(\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}a \right) + 2 \left(\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}a \right) = \sin(-x - 4a) + 2(-x - 4a).$$

Теперь уравнение приобретает вид $f(g(x)) = f(h(x))$, где

$$f(t) = \sin t + 2t, \quad g(x) = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}a, \quad h(x) = -x - 4a.$$

Так как производная $f'(t) = \cos t + 2$ положительна при всех действительных t , то функция $f(t)$ возрастает на всей прямой, а значит, исходное уравнение равносильно уравнению $g(x) = h(x)$, т.е.

$$\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{2}a = -x - 4a \quad \text{или} \quad x^2 - 4x + a = 0.$$

Последнее уравнение не имеет корней в том и только в том случае, когда сокращенный дискриминант $D_1 = 4 - a$ отрицателен. Имеем $4 - a < 0 \Leftrightarrow a > 4$.

Ответ: $a \in (4; +\infty)$.

Пример 3.18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|4\cos x + a + 6| + |5\cos x + a^2 + 1| \leq 10\cos x + |a^2 + a - 2| + 10$$

выполняется для любого действительного значения x [6].

Решение. Исходное неравенство запишем в виде $f(t) \geq 0$, где $t = \cos x$ и $f(t) = 10t - |4t + a + 6| - |5t + a^2 + 1| + |a^2 + a - 2| + 10$.

При любом раскрытии модулей функция будет принимать вид $f(t) = kt + b$, где $k > 0$. Таким образом, $f(t)$ — монотонно возрастающая на $\mathbb{R}$ функция.

Исходное неравенство выполняется для всех x в том и только в том случае, когда неравенство $f(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \in [-1; 1]$, что равносильно выполнению условия $f(-1) \geq 0$, т.е.

$$-10 - |2 + a| - |a^2 - 4| + |a^2 + a - 2| + 10 \geq 0,$$

$$|2 + a| + |a^2 - 4| \leq |a^2 + a - 2|.$$

Полученное неравенство имеет вид $|m| + |n| \leq |m + n|$ при $m = 2 + a$ и $n = a^2 - 4$. Но по свойству модулей для любых m и n верно неравенство $|m| + |n| \geq |m + n|$, причем равенство достигается только том случае, если m и n одного знака (оба положительны или оба отрицательны) или хотя одно из чисел m или n равно нулю. Последнее условие равносильно неравенству $mn \geq 0$.

Таким образом, неравенство $|2 + a| + |a^2 - 4| \leq |a^2 + a - 2|$ равносильно неравенству $(2 + a)(a^2 - 4) \geq 0$, решая которое, получим $a = -2$ или $a \geq 2$.

Ответ: $a \in \{-2\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 3.19. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$17|x + 3a| + 9\log_7(3x^2 + 18ax + 27a^2 + 7) + a^2 + 3a = -3x + 12|x + 2a|$$

имеет хотя бы один корень (ЕГЭ-2013).

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$17|x+3a|+3x-12|x+2a|+9\log_7(3x^2+18ax+27a^2+7)+a^2+3a=0.$$

Обозначим функции

$$f(x)=17|x+3a|+3x-12|x+2a|,$$

$$g(x)=9\log_7(3x^2+18ax+27a^2+7)+a^2+3a.$$

Если $x \geq -3a$, то $f(x) = 20x + 51a - 12|x + 2a|$ возрастает, а если $x \leq -3a$, то $f(x) = -14x - 51a - 12|x + 2a|$ убывает независимо от раскрытия второго модуля.

Монотонность функции $g(x)$ определяется монотонностью логарифмируемого выражения $y = 3x^2 + 18ax + 27a^2 + 7$. Это квадратичная функция, график которой — парабола с ветвями, направленными вверх, и с вершиной в точке с абсциссой $x_0 = -18a/6 = -3a$. Поэтому $g(x)$ убывает при $x \leq -3a$ и возрастает при $x \geq -3a$.

Таким образом, левая часть уравнения $f(x) + g(x) = 0$ убывает при $x \leq -3a$ и возрастает при $x \geq -3a$ как сумма двух монотонных функций. Значит, для существования корней первоначального уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f(-3a) + g(-3a) \leq 0$.

Так как $f(-3a) = -9a - 12|a|$ и $g(-3a) = 9 + a^2 + 3a$, то получаем неравенство $a^2 - 6a - 12|a| + 9 \leq 0$. При $a < 0$ имеем неравенство $a^2 + 6a + 9 \leq 0$, которое выполняется только для $a = -3$. А при $a \geq 0$ имеем неравенство $a^2 - 18a + 9 \leq 0$, решением которого является отрезок $[9 - 6\sqrt{2}; 9 + 6\sqrt{2}]$.

Ответ: $a \in \{-3\} \cup [9 - 6\sqrt{2}; 9 + 6\sqrt{2}]$.

Пример 3.20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все числа из отрезка $[1; 2]$ являются решениями неравенства

$$\sqrt[3]{x^2 - 6ax + 2} - \sqrt[3]{x + 2 + |a^2 - 2a|} \leq (x + |a^2 - 2a|)^3 - (x^2 - 6ax)^3.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt[3]{x^2 - 6ax + 2} + (x^2 - 6ax)^3 \leq \sqrt[3]{x + |a^2 - 2a| + 2} + (x + |a^2 - 2a|)^3.$$

Теперь неравенство приняло вид $f(g(x)) \leq f(h(x))$, где функция $f(t) = \sqrt[3]{t + 2} + t^3$ возрастает на всей прямой,

$$g(x) = x^2 - 6ax, \quad h(x) = x + |a^2 - 2a|.$$

Значит, исходное неравенство равносильно неравенству $g(x) \leq h(x)$, т.е.

$$x^2 - 6ax \leq x + |a^2 - 2a|.$$

Таким образом, требуется найти такие значения параметра a , при которых неравенство $x^2 - (6a + 1)x - |a^2 - 2a| \leq 0$ выполняется для всех $x \in [1; 2]$.

Пусть $p(x) = x^2 - (6a + 1)x - |a^2 - 2a|$. Графиком функции $p(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Этот график обладает свойством выпуклости вниз, т.е. любая дуга параболы располагается ниже хорды, соединяющей концы этой дуги. Следовательно, множество решений неравенства будет включать в себя отрезок $[1; 2]$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $p(1) \leq 0$ и $p(2) \leq 0$.

Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} |a^2 - 2a| \geq -6a, \\ |a^2 - 2a| \geq 2 - 12a. \end{cases}$$

Первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\begin{cases} a^2 - 2a \geq -6a, \\ a^2 - 2a \leq 6a. \end{cases}$$

Первое неравенство совокупности выполняется при $a \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$, а второе — при $a \in [0; 8]$. Решение первого неравенства системы имеет вид $a \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$.

Аналогично для второго неравенства системы получаем совокупность

$$\begin{cases} a^2 - 2a \geq 2 - 12a, \\ a^2 - 2a \leq 12a - 2. \end{cases}$$

Первое неравенство совокупности выполняется при

$$a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [-5 + 3\sqrt{3}; +\infty),$$

а второе — при $a \in [7 - \sqrt{47}; 7 + \sqrt{47}]$.

Решение второго неравенства системы имеет вид

$$a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [7 - \sqrt{47}; +\infty).$$

Пересекая множества решений неравенств системы, получаем окончательный ответ $a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [7 - \sqrt{47}; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -5 - 3\sqrt{3}] \cup [7 - \sqrt{47}; +\infty)$.

**Задания для самостоятельного решения по теме
«Монотонность функции»**

Решите уравнение:

1. $x^2 + 2\sqrt{-x} = 20$;

2. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13} = 9$;

3. $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}$;

4. $3\arccos x - \pi x - \frac{\pi}{2} = 0$;

5. $\arcsin(2x+3) = \log_{\pi}(-4x-5)$;

6. $\cos \frac{\pi x}{x+2} = \frac{1}{\log_{0,5} x}$;

7. $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + x}}} = x$;

8. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{x+2}-2}-2} = \frac{x+4}{3}$;

9. $6^x + 8^x = 10^x$;

10. $\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} + \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+8}-2} = 9 - \frac{x+6}{\sqrt{x+18}+3}$;

11. $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+25}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+16}} = \frac{3}{2}$.

Решите неравенство:

12. $\sqrt{x+7} \geq 7-2x$;

13. $\log_{0,5}(2^x - 1) > x - 1$;

14. $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} \leq 3$.

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y + x^2 + 2} = y, \\ \sqrt{y^2 - 7} + \sqrt{x + y^2 - 7} = x. \end{cases}$$

16. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y , удовлетворяющих неравенству $11|x-1| + 5|x+a| \leq \sqrt{9-y^2} + 7$.

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos^6 x + (5\cos x - a)^3 + 1 + 5\cos x = \sin^2 x + a$ имеет хотя бы одно решение.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $27^{2x-a} - 3^{x^2-4x+4a} = x^2 - 10x + 7a$ не имеет действительных решений.

19. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все решения неравенства

$$2\left(\sqrt{x^2 - 7ax + 1} + \sqrt{x^2 - 7ax}\right)^3 + \left(\sqrt{x^2 - 7ax + 1} - \sqrt{x^2 - 7ax}\right)^3 \leq 3$$

принадлежат какому-нибудь отрезку длины 1.

Ответы

1. $x = -4$. 2. $x = 3$. 3. $x = 2$. 4. $x = 0,5$. 5. $x = -1,5$. 6. $x = 4$. 7. $x = 3$.

8. $x = -1$, $x = 2$. 9. $x = 2$. 10. $x = 1$. 11. $x = 0$. 12. $x \in [2; +\infty)$.

13. $x \in (0; 1)$. 14. $x \in [1; 2]$. 15. $(2; 3)$. 16. $a \in [-3; 1]$.

17. $a \in [-4; 6]$. 18. $a \in \left(3\frac{4}{7}; +\infty\right)$. 19. $a \in \left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right]$.

§ 4. ЧЕТНОСТЬ (НЕЧЕТНОСТЬ) ФУНКЦИИ

4.1. Теоретические сведения

Определение. Функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого x из области определения функции $f(x)$ значение $-x$ также принадлежит области определения $f(x)$ и выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x из области определения функции $f(x)$ значение $-x$ также принадлежит области определения $f(x)$ и выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Из данных определений следует, что область определения как четной, так и нечетной функций должна быть симметричной относительно нуля.

Основной отличительной особенностью четных и нечетных функций является наличие у графиков таких функций симметрий. А именно, график четной функции симметричен относительно оси ординат (осевая симметрия), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (центральная симметрия).

Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, называют функциями общего вида. В общем случае, их графики не обладают симметрией. Но иногда они могут быть симметричными относительно некоторых вертикальных прямых или точек на плоскости. Тогда с помощью линейной замены переменных данные функции сводятся к четным или нечетным.

Среди основных элементарных функций четными являются степенные функции с четным целым показателем, т.е. $y = x^n$, где $n = 2k$ и $k \in \mathbb{Z}$, и тригонометрическая функция $y = \cos x$. Также четной является функция модуля $y = |x|$. Нечетными являются степенные функции с нечетным целым показателем, т.е. $y = x^n$, где $n = 2k + 1$ и $k \in \mathbb{Z}$, функции извлечения корня не-

четной степени $y = \sqrt[n]{x}$, где $n = 2k + 1$ и $k \in \mathbb{N}$, тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Сформулируем свойства четных (нечетных) функций.

Утверждение 1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ — тоже четные.

Утверждение 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то функции $f(x) \pm g(x)$ — нечетные, а $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ — четные.

Утверждение 3. Если $f(x)$ — четная функция, а $g(x)$ — нечетная функция, то функции $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ — нечетные.

Рассмотрим уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — четная или нечетная функция. Для нахождения его ненулевых корней достаточно найти только положительные (или только отрицательные) корни, а потом добавить корни, противоположные к найденным. Для нечетной функции $f(x)$ корнем также будет являться $x = 0$ (если точка 0 входит в ОДЗ), а для четной функции $x = 0$ отдельно проверяется подстановкой в уравнение.

При решении неравенства вида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ — четная функция, тоже можно ограничиться неотрицательными числами, а затем в ответ добавить симметричные промежутки для отрицательных чисел.

При решении неравенства вида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ — нечетная функция, можно сначала определить промежутки знакопостоянства на множестве неотрицательных чисел, а затем симметрично отразить эти промежутки на множество отрицательных чисел, меняя в каждом отраженном промежутке знак на противоположный. Далее выбираются промежутки нужного знака и записывается ответ.

Часто определение четности (нечетности) входящих в уравнение функций позволяет сделать вывод о количестве его кор-

ней. Так, например, из определения четной функции следует, что если $x = c$ является корнем уравнения $f(x) = a$, где $f(x)$ — четная функция, то и $x = -c$ тоже является корнем. Поэтому уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное число корней тогда и только тогда, когда $x = 0$ является одним из корней уравнения. Аналогично, если количество корней четно, то $x = 0$ не принадлежит множеству корней.

При решении уравнений, неравенств и их систем, содержащих несколько неизвестных, понятия четности и нечетности можно рассматривать как относительно всех переменных, так и относительно части из них. Например, функция $f(x; y)$ называется четной относительно переменной x , если для любой точки $(x; y)$ из области определения функции $f(x; y)$ точка $(-x; y)$ также принадлежит области определения $f(x; y)$ и выполняется равенство $f(-x; y) = f(x; y)$. Функция $f(x; y)$ называется четной относительно обеих переменных x и y , если для любой точки $(x; y)$ из области определения функции $f(x; y)$ точка $(-x; -y)$ также принадлежит области определения $f(x; y)$ и выполняется равенство $f(-x; -y) = f(x; y)$.

4.2. Применение четности при решении уравнений, неравенств и их систем

Пример 4.1. Найдите сумму корней уравнения:

а) $7x^{2020} - x^{20} + 2x^{10} = 8$; б) $\log_4(10 - x^2) + 53 = 2 \cdot 3^{|x|} + \cos \pi x$;

в) $\sin 2x - x^5 - \sqrt[3]{x} = 0$.

Решение. а) Функция, стоящая в левой части уравнения, четная. Следовательно, если уравнение имеет ненулевой корень x_0 , то число $(-x_0)$ тоже будет корнем. Таким образом, если множество корней не является пустым, то сумма этих корней равна 0. Подстановкой можно убедиться, что $x = \pm 1$ — корни данного уравнения.

б) Запишем уравнение в виде, где левая часть является четной функцией: $2 \cdot 3^{|x|} + \cos \pi x - \log_4(10 - x^2) = 53$. Убедимся под-

становкой, что $x = \pm 3$ — корни данного уравнения. Значит, сумма корней уравнения равна 0.

в) Функция, стоящая в левой части уравнения, нечетная. $x = 0$ — очевидный корень. Если уравнение имеет еще другие ненулевые корни, то они взаимно противоположны. Значит, сумма корней уравнения равна 0.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 0.

Пример 4.2. Решите уравнение $4^{|x-3|+|x+3|} = 32^{|x|}$.

Решение. Так как в обеих частях уравнения стоят четные функции, то можно сначала найти решения на промежутке $[0; +\infty)$. Пусть $x \in [0; 3]$, тогда уравнение примет вид

$$2^{2(3-x+x+3)} = 2^{5x},$$

откуда $x = 2, 4$.

Пусть теперь $x \in (3; +\infty)$, тогда

$$2^{2(x-3+x+3)} = 2^{5x},$$

откуда $x = 0$, но $0 \notin (3; +\infty)$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный неотрицательный корень 2,4. Значит, противоположное значение -2,4 будет единственным отрицательным корнем.

Ответ: $x = \pm 2, 4$.

Пример 4.3. Решите уравнение $x^2 + 5^{|x|} = 29$.

Решение. Так как в левой части уравнения стоит четная функция и $x = 0$ корнем уравнения не является, то можно сначала найти решения на промежутке $(0; +\infty)$.

Если $x > 0$, то $x^2 = 29 - 5^x$. В левой части уравнения возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, а в правой — убывающая. Значит, уравнение имеет не более одного положительного корня. Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ — корень уравнения.

Тогда $x = \pm 2$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $x = \pm 2$.

Пример 4.4. Докажите, что сумма корней уравнения

$$x^3 + 3x + 5 \sin 2\pi x = 3x^2 + \frac{x}{x-1}$$

является четным натуральным числом.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + \left(1 - \frac{x}{x-1}\right) + 5 \sin(2\pi x - 2\pi) = 0,$$

$$(x-1)^3 - \frac{1}{x-1} + 5 \sin 2\pi(x-1) = 0.$$

Сделав замену $t = x - 1$, получим:

$$t^3 - \frac{1}{t} + 5 \sin 2\pi t = 0.$$

В левой части этого уравнения стоит нечетная функция, а из ОДЗ следует, что $t \neq 0$. Кроме того, это уравнение имеет корни, например, $t = \pm 1$. Следовательно, все корни этого уравнения можно разбить на пары взаимно противоположных чисел.

Рассмотрим одну из таких пар противоположных корней: t_0 и $(-t_0)$. Данной паре соответствует пара корней исходного уравнения $x_1 = 1 + t_0$ и $x_2 = 1 - t_0$, сумма которых равна $x_1 + x_2 = 2$.

Значит, сумма всех корней исходного уравнения является четным натуральным числом.

Пример 4.5. Решите неравенство $4x^3 - x - 3 \sin 2\pi x > 0$.

Решение. В левой части неравенства стоит нечетная функция. Поэтому сначала можно найти решения неравенства на промежутке $[0; +\infty)$.

Запишем неравенство в виде $x(2x-1)(2x+1) - 3 \sin 2\pi x > 0$. Обозначим $f(x) = x(2x-1)(2x+1)$, $g(x) = 3 \sin 2\pi x$. Решениями неравенства являются те значения переменной x , при которых $f(x) - g(x) > 0$.

Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть $x=0$ или $x=\frac{1}{2}$. Тогда $f(x)=g(x)$ и $f(x)-g(x)=0$.

б) Пусть $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Тогда $f(x)<0$, $g(x)>0$ и $f(x)-g(x)<0$.

в) Пусть $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Тогда $f(x)>0$, $g(x)\leq 0$ и $f(x)-g(x)>0$.

г) Пусть $x \in (1; +\infty)$. Тогда $f(x)>3$, $g(x)\leq 3$ и $f(x)-g(x)>0$.

С учетом рассмотренных случаев и нечетности функции $f(x)-g(x)$, определим промежутки знакопостоянства этой функции (рис. 6) и запишем ответ:

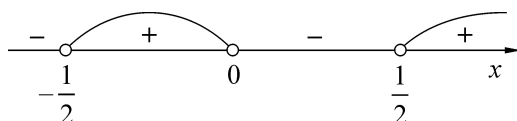


Рис. 6

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

4.3. Применение четности при решении заданий с параметром

Пример 4.6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2 + a}{x^2 + 1} + a^2 = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть x_0 — корень данного уравнения. В левой части уравнения стоит четная функция, поэтому, если предположить, что $x_0 \neq 0$, то x_0 и $(-x_0)$ — два различных корня уравнения, что противоречит единственности. Следовательно, единственным корнем уравнения может быть только $x=0$.

Значит, при подстановке $x=0$ в исходное уравнение, должно получиться верное равенство. Имеем $-a + a^2 = 0$, откуда $a=0$

или $a = 1$. При найденных значениях параметра a исходное уравнение точно имеет корень $x = 0$. Осталось проверить, не будет ли уравнение иметь еще и другие ненулевые корни.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{x^2 + 1} = 0,$$

или после упрощения $x^2(x^4 + x^2 - 2) = 0$. Это уравнение имеет три корня $x = 0$ и $x = \pm 1$, а значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 1$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{x^4}{2} = 0$$

и оно имеет единственный корень $x = 0$, а значит, $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 1$.

Пример 4.7. При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2 - a \operatorname{tg}(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение? [7]

Решение. Пусть x_0 — корень данного уравнения. В левой части уравнения стоит четная функция, поэтому, если предположить, что $x_0 \neq 0$, то x_0 и $(-x_0)$ — два различных корня уравнения, что противоречит единственности. Следовательно, единственным корнем уравнения может быть только $x = 0$.

Значит, при подстановке $x = 0$ в исходное уравнение должно получиться верное равенство. Имеем $a^2 - a \operatorname{tg} 1 = 0$, откуда $a = 0$ или $a = \operatorname{tg} 1$. При найденных значениях параметра a исходное уравнение точно имеет корень $x = 0$. Осталось проверить, не будет ли уравнение иметь еще и другие ненулевые корни.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $2x^2 = 0$ и оно имеет единственный корень $x = 0$, а значит, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = \operatorname{tg} 1$. Тогда уравнение примет вид

$$2x^2 + \operatorname{tg}^2 1 = \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x).$$

Левая часть этого уравнения не меньше, чем $\operatorname{tg}^2 1$, а правая часть — не больше, чем $\operatorname{tg}^2 1$, т.к. при любом x справедливо неравенство $-1 \leq \cos x \leq 1$ и функция $y = \operatorname{tg} t$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$. Следовательно, уравнение

$$2x^2 + \operatorname{tg}^2 1 = \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 1 + 2x^2 = \operatorname{tg}^2 1, \\ \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) = \operatorname{tg}^2 1, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $x=0$, а значит, $a = \operatorname{tg} 1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=0$, $a = \operatorname{tg} 1$.

Пример 4.8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4a^2x^4 + (2a-8)x^2 + a + |a| = 0$$

имеет ровно три решения на промежутке $(-1; 1]$? [8]

Решение. В левой части уравнения стоит четная функция относительно переменной x . Поэтому если x_0 — корень уравнения, то и $(-x_0)$ — тоже корень уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно три решения на промежутке $(-1; 1]$ в двух случаях:

$$1) x_1 = 0, x_{2,3} \in (-1; 0) \cup (0; 1);$$

$$2) x_1 = 1, x_{2,3} \in (-1; 0) \cup (0; 1).$$

Рассмотрим первый случай. При подстановке $x=0$ получаем $a + |a| = 0$, т.е. $a \leq 0$. Тогда исходное уравнение принимает вид $2x^2(2a^2x^2 + a - 4) = 0$, откуда $x=0$ или $2a^2x^2 = 4 - a$. Если $a=0$, то $x=0$ — единственный корень, а значит, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Если $a < 0$, то условие задачи выполняется в том и только в том случае, когда уравнение

$$x^2 = \frac{4-a}{2a^2}$$

имеет два корня, модули которых принадлежат промежутку $(0; 1)$, т.е. справедливо неравенство

$$0 < \frac{4-a}{2a^2} < 1.$$

Решая это неравенство с учетом условия $a < 0$, получим

$$a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \right).$$

Рассмотрим второй случай. Заметим, что при любом отрицательном значении a исходному уравнению удовлетворяет корень $x=0$, что не соответствует рассматриваемому случаю. Поэтому далее можно считать, что $a \geq 0$. При подстановке $x=1$ получаем $4a^2 + 3a + |a| - 8 = 0$, откуда, учитывая условие $a \geq 0$, имеем $a=1$. При $a=1$ исходное уравнение точно имеет корень $x=1$. Осталось проверить, будет ли уравнение иметь еще два корня, модули которых принадлежат промежутку $(0; 1)$. Подставив $a=1$, получим биквадратное уравнение $4x^4 - 6x^2 + 2 = 0$, имеющее четыре корня $x = \pm 1$ и $x = \pm 1/\sqrt{2}$, ровно три из которых принадлежат промежутку $(-1; 1]$, а значит, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \right) \cup \{1\}.$$

Пример 4.9. Найдите значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2\pi^2(x-1)^2 + 4a \cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственное решение.

Решение. Заменяя $t=x-1$ ($x=t+1$) и применив тождество $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$, получим $2\pi^2 t^2 + 4a \cos 2\pi t - 9a^3 = 0$. Заметим, что количество корней этого уравнения относительно переменной t совпадает с количеством корней исходного уравнения относительно переменной x .

В левой части уравнения $2\pi^2 t^2 + 4a \cos 2\pi t - 9a^3 = 0$ стоит четная функция относительно t . Поэтому если t_0 — корень уравнения, то и $(-t_0)$ — тоже корень уравнения. Следовательно, единственным корнем уравнения может быть только $t=0$.

Значит, при подстановке $t=0$ в уравнение должно получиться верное равенство. Имеем $4a - 9a^3 = 0$, откуда $a=0$ или $a = \pm 2/3$. При найденных значениях параметра a исходное уравнение точно имеет корень $t=0$. Осталось проверить, не будет ли уравнение иметь еще и другие ненулевые корни.

Пусть $a=0$. Тогда уравнение примет вид $2\pi^2 t^2 = 0$ и оно имеет единственный корень $t=0$, а значит, $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = -2/3$. Тогда уравнение примет вид

$$2\pi^2 t^2 - \frac{8}{3} \cos 2\pi t + \frac{8}{3} = 0.$$

Заменив $2\pi t = z$ и домножив обе части на шесть, получим $3z^2 - 16 \cos z + 16 = 0$ или $3z^2 = 16(\cos z - 1)$. В левой части уравнения неотрицательное число, а в правой части — неположительное. Следовательно, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3z^2 = 0, \\ \cos z - 1 = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $z=0$, а значит, $a = -2/3$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 2/3$. Тогда уравнение примет вид

$$2\pi^2 t^2 + \frac{8}{3} \cos 2\pi t - \frac{8}{3} = 0.$$

Заменив $2\pi t = z$ и домножив обе части на шесть, получим

$$3z^2 + 16 \cos z - 16 = 0.$$

Обозначим $f(z) = 3z^2 + 16 \cos z - 16$. Тогда $f(z)$ — непрерывная функция, $f(\pi) = 3\pi^2 - 32 < 0$ и $f(2\pi) = 12\pi^2 > 0$. Следовательно,

существует такое $z_0 \in (\pi; 2\pi)$, что $f(z_0) = 0$, т.е. уравнение $3z^2 + 16\cos z - 16 = 0$ имеет корень на промежутке $(\pi; 2\pi)$, а значит, $a = 2/3$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 0$, $a = -\frac{2}{3}$.

Пример 4.10. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$ имеет единственное решение [9].

Решение. Пусть x_0 — решение данного неравенства. В обеих частях неравенства стоят четные функции, поэтому, если предположить, что $x_0 \neq 0$, то x_0 и $(-x_0)$ — два различных решения неравенства, что противоречит единственности. Следовательно, единственным решением неравенства может быть только $x = 0$.

Подставим $x = 0$. Имеем

$$\frac{9}{a+1} + a - 5 \leq 0,$$

или после упрощения,

$$\frac{(a-2)^2}{a+1} \leq 0.$$

Значит, $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$.

При $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$ исходное неравенство содержит среди решений $x = 0$. Найдем a , при которых $x = 0$ — единственное решение неравенства.

Пусть $a = 2$. Тогда неравенство примет вид

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{2 + \cos x} - 2.$$

Умножив обе части этого неравенства на $2 + \cos x > 0$, перенеся все слагаемые в левую часть и применив формулу сокращенного умножения, получим $(\sqrt{x^2 + 9} - \cos x - 2)^2 \leq 0$, что равносильно

$\sqrt{x^2+9} = \cos x + 2$. Так как при любом значении x справедливы оценки $\sqrt{x^2+9} \geq 3$ и $\cos x + 2 \leq 3$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} = 3, \\ \cos x + 2 = 3, \end{cases}$$

единственным решением которой является $x=0$, а значит, $a=2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \in (-\infty; -1)$. Тогда при любом значении x справедливы оценки

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leq -5 \text{ и } -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a > 0.$$

Следовательно, неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leq -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$, а значит, $a \in (-\infty; -1)$ не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a=2$.

Пример 4.11. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение [10].

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данной системы. В обеих частях обоих уравнений системы стоят четные относительно переменной x функции, поэтому, если предположить, что $x_0 \neq 0$, то $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; y_0)$ — два различных решения системы, что противоречит единственности. Следовательно, единственным решением неравенства может быть только $(0; y_0)$.

Подставим $x=0$. Тогда

$$\begin{cases} 3 = 5y - 5a, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что $y = \pm 1$. Подставляя в первое уравнение, получим $a = 2/5$ при $y = 1$ и $a = -8/5$ при $y = -1$.

При найденных значениях параметра a исходная система уравнений точно имеет решение $(0; 1)$ или $(0; -1)$ соответственно. Осталось проверить, не будет ли система уравнение иметь еще и другие решения.

Пусть $a = 2/5$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| = 5y + 3x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. Преобразуем первое уравнение: $5(2^{|x|} - y) = 3|x|(|x| - 1)$. С учетом ограничений, полученных из второго уравнения, справедливы оценки $5(2^{|x|} - y) \geq 0$ и $3|x|(|x| - 1) \leq 0$. Поэтому первое уравнение $5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| = 5y + 3x^2$ равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{|x|} - y = 0, \\ 3|x|(|x| - 1) = 0, \end{cases}$$

имеющей три решения $(0; 1)$, $(1; 2)$ и $(-1; 2)$. Из этих решений только одно $(0; 1)$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, а значит, $a = 2/5$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = -8/5$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| = 5y + 3x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подстановкой можно убедиться, что кроме известного решения $(0; -1)$, данная система также имеет, как минимум, еще одно ре-

шение $(1; 0)$, а значит, $a = -8/5$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = \frac{2}{5}$.

Пример 4.12. Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра a и решите систему при найденном значении параметра [8].

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данной системы. В обеих частях обоих уравнений системы стоят четные относительно переменной x функции, поэтому, если предположить, что $x_0 \neq 0$, то $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; y_0)$ — два различных решения системы, что противоречит единственности. Следовательно, единственным решением неравенства может быть только $(0; y_0)$.

Из первого уравнения системы получаем $y = e^{2|x|}$.

Подставим $x = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 1, \\ \log_2(2a^2) = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $y = 1$, а из второго — что $a = \pm 1$.

При найденных значениях параметра a исходная система уравнений точно имеет решение $(0; 1)$. Осталось проверить, не будет ли система уравнение иметь еще и другие решения.

Пусть $a = 1$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2) = \log_2(1 - x^2 y^2) + 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x^4 y^2 + 2 = 2 - 2x^2 y^2$, или $y^2(x^4 + 2x^2) = 0$. С учетом ограничения $y > 0$, отсюда следует, что $x = 0$. Тогда из первого уравнения находим $y = 1$, а значит, система имеет единственное решение и $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = -1$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2) = \log_2(1 + x^2 y^2) + 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x^4 y^2 + 2 = 2 + 2x^2 y^2$, или $y^2(x^4 - 2x^2) = 0$. С учетом ограничения $y > 0$, отсюда следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$. Из первого уравнения видно, что каждому из найденных значений x соответствует единственное значение $y = e^{2|x|}$, а значит, система имеет три решения и $a = -1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: система имеет единственное решение $(0; 1)$ при $a = 1$.

**Задания для самостоятельного решения по теме
«Четность (нечетность) функции»**

1. Найдите сумму корней уравнения:

а) $5x^{2022} - 4x^{36} + x^2 - 2 = 0$;

б) $\operatorname{tg} x + x + 5x^{21} = 0$.

Решите уравнение:

2. $8^{|x|} = 2^{|x+2| - |x-2|}$;

3. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $3^{x+2} + 3^{2-x} = a^2 - 6a + 27$ имеет единственный корень.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 + a\sqrt{2} + 4 + \sin^2 ax = 4\cos x$ имеет единственный корень.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$ имеет единственный корень.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|(x-1)^2 - 2^{1-a}| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$ имеет единственный корень.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3}\pi \sin(\pi^{2x-x^2}) + \pi \cos(\pi^{2x-x^2}) = a$ имеет ровно одно решение.

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y - |x| + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}.$$

Ответы

1. а) 0; б) 0. 2. $x = \pm \frac{4}{3}$. 3. $x = \pm 2$. 4. $a = 3$. 5. $a = -\sqrt{2}$.
6. $a = 4, a = 8$. 7. $a = -1$. 8. $a = -\pi$. 9. $a = 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киреенко С.Г., Гриншпон Я.С.* Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: Сборник статей / Под ред. А.В. Старченко. Томск: Издательский дом ТГУ, 2019. С. 249–257.
2. *Киреенко С.Г.* Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем: Магистерская диссертация. Томск: ТГУ, 70 с.
3. *Азаров А.И., Гладун О.М., Кремень Ю.А., Федосенко В.С.* Алгебраические уравнения и неравенства: Учебное пособие. Минск: ООО «Тривнум», 1997. 128 с.
4. *Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10–11 классы: Учебно-методическое пособие. М.: Дрофа, 2002. 192 с.
5. *Шестаков С.А.* ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. М.: МЦНМО, 2020. 288 с.
6. *Прокофьев А.А., Корянов А.Г.* Математика. ЕГЭ 2012. Функция и параметр. URL: <http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.html>
7. *Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. Минск: ООО «Асар», 2002. 464 с.
8. *Решу* ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: <http://ege.sdangia.ru>
9. *Диагностические работы и тексты пробных ЕГЭ по математике 2013–2020 гг.* [Электронный ресурс]. URL: <http://alexlarin.net/>
10. *Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И.* Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: Учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Под ред. А.Б. Жижченко. М.: Просвещение, 2009. 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Обозначения	5
§ 1. Область определения функции (ОДЗ)	6
§ 2. Ограниченность функции	24
§ 3. Монотонность функции	58
§ 4. Четность (нечетность) функции	77
Литература	94

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета

Заказ № 5265 от «30» ноября 2022 г. Тираж 30 экз.