МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Уравнения в конечных разностях

**Учебно-методическое пособие**

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО учебно-методической комиссией Института прикладной математики и компьютерных наук.

ПРОТОКОЛ № 3 от 07.04.2022 г.

Председатель комиссии,

профессор С.П. Сущенко

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и магистрантов ИПМКН, изучающих курс теории массового обслуживания и ведущих научную деятельность в этой тематике.

**Составители:** доцент кафедры ПИ Лапатин И.Л.,

доцент кафедры ТВиМС Пауль С.В.,

доцент кафедры ПМ Данилюк Е.Ю.

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1. Уравнения в конечных разностях – общие замечания

Теория массового обслуживания использует специфический математический аппарат, обычно не излагаемый в курсах математического анализа. К числу специфических уравнений, которые очень часто встречаются в теории массового обслуживания, относятся уравнения в конечных разностях.

Пусть функция $y(i)$ определена лишь для **целочисленных** значений аргумента $i$, скажем, для $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Уравнение вида

$$\Phi(i,\ y(i),\ y(i+1),\ y(i+2),\ \ldots,\ y(i+n)) = 0 \qquad (1)$$

называется уравнением в конечных разностях. Решением этого уравнения называется любая функция $y(i)$, которая при подстановке ее в левую часть (1) обращает уравнение в тождество.

*ПОРЯДОК УРАВНЕНИЯ*

Порядок уравнения в конечных разностях определяется как разность между максимальным и минимальным значением аргумента неизвестной функции $y(i)$. Если в левой части (1) присутствует $y(i)$ и $y(i+n)$, то уравнение (1) называется уравнением в конечных разностях $n$-ого порядка. Если мы будем иметь дело с уравнением вида

$$\Phi\big(i,\ y(i+k),\ y(i+k+1),\ \ldots,\ y(i+n)\big) = 0$$

то, вводя функцию $z(i) = y(i+k)$, мы приведем его к виду

$$\Phi(i,\ z(i),\ z(i+1),\ \ldots,\ z(i+n-k)) = 0,$$

откуда видно, что в данном случае мы имеем дело с уравнением $(n-k)$-го порядка. Например, уравнение

$$\Phi(i,\ y(i-1),\ y(i),\ y(i+1)) = 0$$

имеет второй порядок, так как $(i+1)-(i-1) = 2$.

*ВИД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ*

Представим себе, что уравнение (1) можно разрешить относительно $y(i+n)$

$$y(i+n) = f(i,\, y(i),\, y(i+1),\, ...,\, y(i+n-1)), \tag{2}$$

где $f(\cdot)$ – однозначная функция.

Тогда, для $i = 0$, задавая (произвольно) значения $y(0), y(1), ..., y(n-1)$, можно получить $y(n)$; затем, для $i = 1$, так как $y(n)$ известно, получить $y(n+1)$. Продолжая эту процедуру, можно получить единственную функцию $y(i)$ для любых $i > 0$. Таким образом, решение уравнения (2) зависит от $n$ произвольных констант

$$y(i) = \varphi(i,\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_n), \tag{3}$$

которыми в частности, могут быть $y(0), y(1), ..., y(n-1)$.

Заметим, что верно и обратное. Если мы имеем функцию $y(i)$, зависящую от $n$ произвольных констант (3), то, беря $i = i, i+1, ..., i+n-1$, получим

$$\begin{cases} y(i) = \varphi(i,\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_n), \\ y(i+1) = \varphi(i+1,\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y(i+n-1) = \varphi(i+n-1,\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_n). \end{cases}$$

В данной системе $n$ уравнений; из нее можно выразить $C_1, C_2, ..., C_n$ через $y(i), y(i+1), ..., y(i+n-1)$. Подставляя эти выражения в (3) при $i = i+n$ получим, что

$$y(i+n) = f(i,\, y(i),\, y(i+1),\, ...,\, y(i+n-1)),$$

то есть уравнение вида (2).

Такие образом общее решение уравнения в конечных разностях $n$-го порядка зависит от $n$ произвольных констант.

Наоборот, всякая функция дискретного аргумента, зависящая от $n$ произвольных констант, является решением некоторого уравнения в конечных разностях $n$-го порядка.

## 2. Линейные однородные уравнения в конечных разностях

Уравнение вида

$$a_0 y(i+n) + a_1 y(i+n-1) + ... + a_n y(i) = 0, \qquad (4)$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$ называется линейным однородным уравнением в конечных разностях $n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Уравнения такого вида в теории массового обслуживания встречаются очень часто.

Любая функция $y(i)$, которая обращает (4) в тождество, называется частным решением уравнения (1.4).

**Теорема 2.1.** Пусть $y_1(i)$, $y_2(i) \dots y_k(i)$ есть некоторые частные решения уравнения (1.4). Тогда функция

$$y(i) = C_1 y_1(i) + C_2 y_2(i) + ... + C_k y_k(i),$$

где $C_1$, $C_2$,…, $C_k$ – произвольные константы, есть также решение уравнения (4).

Прежде, чем формулировать и доказывать следующую теорему напомним понятие линейной независимости функций.

**Определение.** Функции $y_1(i)$, $y_2(i) \dots y_k(i)$ называются линейно независимыми, если условие

$$C_1 y_1(i) + C_2 y_2(i) + ... + C_k y_k(i) \equiv 0$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = ... = C_k = 0$. Если это условие выполняется, когда хотя бы одно из $C_s \neq 0$, то функции $y_1(i)$, $y_2(i)$,…, $y_k(i)$ называются линейно зависимыми.

**Теорема 2.2.** Пусть $y_1(i)$, $y_2(i) \dots y_n(i)$ есть $n$ линейно независимых решений уравнения $\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} y(i+l) = 0$. Тогда общие решение этого уравнения имеет вид

$$y(i) = C_1 y_1(i) + C_2 y_2(i) + \ldots + C_n y_n(i) .$$

Таким образом, для решения однородного линейного уравнения в конечных разностях n-го порядка надо найти n его линейно независимых решений, линейная комбинация которых и даст его общее решение.

## 3. Решение однородных линейных уравнений в конечных разностях с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0 y(i+n) + a_1 y(i+n-1) + \ldots + a_n y(i) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} y(i+l) = 0 . \qquad (5)$$

Попробуем найти его решение в виде $y(i) = z^i$. Подставляя это решение в уравнение, запишем

$$a_0 z^{i+n} + a_1 z^{i+n-1} + \ldots + a_n z^i = 0 ,$$

откуда, сокращая на $z^i$, получим уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 . \qquad (6)$$

Полином

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

называется *характеристическим полиномом* уравнения (5), а уравнение (6) – *характеристическим уравнением*.

Рассмотрим подробно возникающие здесь ситуации.

**А.** Все корни уравнения (6) вещественны и различны

Как известно, алгебраическое уравнение степени *n* имеет всего *n* корней $z_1$, $z_2,\ldots$, $z_n$. Если все они различны, то мы имеем *n* частных линейно независимых решений вида

$$y_s(i) = z_s^{\,i}.$$

По теореме 3 отсюда следует, что общее решение (5) имеет вид

$$y(i) = C_1 z_1^i + C_2 z_2^i + \ldots + C_n z_n^i.$$

**Пример 3.1.** Рассмотрим линейное однородное уравнение в конечных разностях $6y(i) - 5y(i-1) + y(i-2) = 0$. Очевидно, что порядок этого уравнения равен двум $i-(i-2)=2$, поэтому общее решение этого уравнения будет зависеть от двух произвольных констант. Для нахождения частных решений запишем характеристическое уравнение

$$6z^2 - 5z + 1 = 0,$$

решая которое, найдем $z_1 = 1/2$ и $z_2 = 1/3$. Теперь нетрудно записать общее решение, рассматриваемого уравнения

$$y(i) = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^i + C_2\left(\frac{1}{3}\right)^i.$$

**Б.** Все корни характеристического уравнения (6) различны, но среди них есть комплексные

Как известно, если все коэффициенты $a_n$ вещественны, то комплексные корни всегда встречаются парами, то есть, если есть корень $z = \alpha + j\beta$, то есть и корень $\bar{z} = \alpha - j\beta$, где $j = \sqrt{-1}$. Соответствующая пара слагаемых в общем решении имеет вид

$$y(i) = C_1 r^i \cos i\varphi + C_2 r^i \sin i\varphi, \tag{7}$$

где $r = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а $\varphi = \arg(z) = arctg\dfrac{\beta}{\alpha}$. Заметим, что $\varphi \neq k\pi$.

**Пример 3.2.** Рассмотрим линейное однородное уравнение в конечных разностях $5y(i) - 8y(i-1) + 5y(i-2) = 0$. Порядок этого уравнения равен двум $i-(i-2)=2$, а характеристическое уравнение имеет вид

$$5z^2 - 8z + 5 = 0.$$

Решением этого характеристического уравнения является пара комплексно сопряженных чисел $z_{1,2} = 4/5 \pm i \cdot 3/5$. Чтобы записать общее решение, рассматриваемого уравнения в конечных разностях, находим $r = \sqrt{(4/5)^2 + (3/5)^2} = 1$ и $\varphi = arctg(3/4)$. Тогда получаем

$$y(i) = C_1 \cos i\varphi + C_2 \sin i\varphi.$$

**В.** <u>Все корни характеристического уравнения (6) вещественны, но среди них есть кратные</u>

Пусть $z$ – корень уравнения $P(z)=0$ кратности $s$. В этом случае корню $z$ кратности $s$ в общем решении соответствует следующая группа слагаемых

$$z^i\left(C_0 + C_1 i + C_2 i^2 + \ldots + C_{s-1} i^{s-1}\right).$$

**Пример 3.3.** Рассмотрим линейное однородное уравнение в конечных разностях второго порядка $4y(i) - 4y(i-1) + y(i-2) = 0$. Для нахождения частных решений запишем характеристическое уравнение

$$4z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Единственный корень этого уравнения $z = 1/2$ имеет кратность $s = 2$. Поэтому общее решение записываем в виде

$$y(i)=\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(C_1+iC_2\right).$$

**Задачи**

Найти общее решение однородных уравнений в конечных разностях

1) $y(i)-8y(i-1)+15(i-2)=0$,

2) $9y(i)-6y(i-1)+y(i-2)=0$,

3) $y(i)+4y(i-2)=0$,

4) $y(i)-y(i-1)+y(i-2)-y(i-3)=0$,

5) $y(i+3)+5y(i+2)+4y(i+1)-10y(i)=0$,

6) $y(i+2)+3y(i+1)+3y(i)+y(i-1)=0$.

## 4. Решение линейных неоднородных уравнений в конечных разностях с постоянными коэффициентами

Перейдем теперь к решению уравнений вида

$$a_0y(i+n)+a_1y(i+n-1)+...+a_ny(i)=q(i), \tag{9}$$

в котором $a_0\neq 0$, $a_n\neq 0$ и $q(i)$ некоторая произвольная функция от $i$.

**Теорема 4.1.** Общее решение неоднородного уравнения (9) можно представить в виде суммы частного решения уравнения (9) и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Как решать однородные уравнения в конечных разностях с постоянными коэффициентами, подробно изложено в предыдущем параграфе. Поэтому, все дело сводится к нахождению частного решения неоднородного уравнения (9).

**Теорема 4.2.** (*Принцип суперпозиции частных решений линейных неоднородных уравнений в конечных разностях*). Если $y_k(i)$ есть решение линейного неоднородного уравнения в конечных разностях вида

$$a_0 y_k(i+n) + a_1 y_k(i+n-1) + ... + a_n y_k(i) = q_k(i),$$

то $y(i) = \sum_{k \in K} y_k(i)$ есть решение уравнения вида

$$a_0 y(i+n) + a_1 y(i+n-1) + ... + a_{n-1} y(i+1) + a_n y(i) = \sum_{k \in K} q_k(i).$$

Есть различные способы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения. В этом параграфе мы рассмотрим лишь простейший из них, который заключается в том, что в некоторых случаях вид этого частного решения заранее известен и дело лишь в подборе некоторых коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов

**А.** Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид $q(i) = Az^i$, где $z$ **не является** корнем характеристического полинома $P(z)$. Тогда $y(i)$ следует искать в

виде $y(i) = Bz^i$. После подстановки этого решения в (1.9), получим явное выражение для коэффициента $B$

$$B = \frac{A}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n} = \frac{A}{P(z)}.$$

Так как по условию $P(z) \neq 0$, то $B$ определяется однозначно.

**Пример 4.1.** Рассмотрим линейное неоднородное уравнение в конечных разностях второго порядка $6y(i) - 5y(i-1) + y(i-2) = 6(1/5)^i$. Найдем корни $z_1 = 1/2$,

$z_2 = 1/3$ характеристического уравнения $6z^2 - 5z + 1 = 0$ и запишем общее решение однородного уравнения

$$y_{одн}(i) = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^i + C_2\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

Теперь нужно отыскать частное решение неоднородного уравнения, правая часть которого имеет вид $q(i) = Az^i$. В нашей задаче $z = 1/5$. Очевидно, что $z$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y_{час}(i) = B\left(\frac{1}{5}\right)^i$. Подставляя это частное решение в исходное уравнение и сокращая на $(1/5)^i$, получим что $B = 1$.

Таким образом, можно записать общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения в конечных разностях

$$y(i) = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^i + C_2\left(\frac{1}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{5}\right)^i.$$

Если задать начальные условия $y(0) = 0$, $y(1) = 6/5$ и подставить их в общее решение уравнения, то получим систему линейных алгебраических уравнений, однозначно определяющую произвольные константы $C_1, C_2$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 1 \\ 6/5 = C_1\left(\frac{1}{2}\right) + C_2\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5}\right) \end{cases}.$$

Из этой системы находим, что $C_1 = 8,\ C_2 = -9$, поэтому частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, будет иметь вид

$$y(i) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^i - 9\left(\frac{1}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{5}\right)^i$$

**Б.** Аналогично, если $q(i) = Ar^i \cos i\varphi + Br^i \sin i\varphi$ и комплексное число $z = re^{i\varphi}$ **не является** корнем характеристического полинома, то $y(i)$ следует искать в виде $q(i) = C\,r^i \cos i\varphi + D\,r^i \sin i\varphi$. Подставляя это решение в уравнение (9) сокращая на $r^i$ найдем $C$ и $D$ приравнивая выражения, стоящие перед $\cos i\varphi$ и $\sin i\varphi$ в левой и правой частях уравнения.

**В.** Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид $q(i) = Az^i$, где $z$ **является** корнем полинома $P(z)$, т.е. $P(z) = 0$.

**В1**. Пусть для начала, $z$ есть **простой корень** полинома $P(z)$, то есть **корень кратности 1**. Тогда $P(z) = 0$, но $P'(z) \neq 0$.

В этом случае решение $y(i)$ будем искать в виде $y(i) = B\,i\,z^i$, где $B$ находится следующим образом

$$B = A/z\,P'(z)$$

и тем самым найдено частное решение уравнения (1.9).

**Пример 4.2.** Рассмотрим линейное неоднородное уравнение в конечных разностях второго порядка $y(i+2) + 6y(i+1) - 7y(i) = -1$. Найдем корни $z_1 = 1$, $z_2 = -7$ характеристического уравнения $z^2 + 6z - 7 = 0$ и запишем общее решение однородного уравнения

$$y_{одн}(i) = C_1 + C_2(-7)^i.$$

Правая часть нашего неоднородного уравнения имеет вид $q(i) = Az^i$. Здесь $z = 1$, $A = -1$. Получили, что $z$ совпадает с корнем $z_1 = 1$ характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y_{час}(i) = Bi1^i = Bi$. $B$ будем искать по формуле $B = A/\left(z\,P'(z)\right)$. Дифференцируя $P(z)$, получим $P'(z) = 2z + 6$. Отсюда находим $B = -(1/8)$.

Таким образом, можно записать общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения в конечных разностях как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного

$$y(i) = C_1 + C_2\left(-7\right)^i - \left(\frac{i}{8}\right)$$

**B2**. Пусть теперь $z$ корень характеристического уравнения **кратности** ***s***, то есть $P(z) = P'(z) = ... = P^{(s-1)}(z) = 0$, но $P^{(s)}(z) \neq 0$. Тогда решение следует искать в виде $y(i) = B\,i^s\,z^i$. Действительно, подставляя это решение в уравнение (9), получим

$$B\left[a_0(i+n)^s z^{i+n} + a_1(i+n-1)^s z^{i+n-1} + ... + a_n\,i^s\,z^i\right] = Az^i .$$

Сокращая на $z^i$ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $i$ получим, что коэффициенты при $i$, $i^2$, …, $i^s$ обратятся в нуль, так как они выражаются через $P(z)$, $P'(z)$, …, $P^{(s-1)}(z)$. Останется лишь выражение

$$B\left[a_0\,n^s z^n + a_1(n-1)^s z^{n-1} + ... + a_{n-s}\right] = A,$$

которое и определит однозначно коэффициент $B$.

**Пример 4.3.** Рассмотрим линейное неоднородное уравнение в конечных разностях второго порядка $4y(i) - 4y(i-1) + y(i-2) = 5(1/2)^i$. Запишем характеристическое уравнения $4z^2 - 4z + 1 = 0$, которое имеет единственный корень $z = 1/2$ кратности $s = 2$. Поэтому общее решение однородного уравнения записываем в виде

$$y_{одн}(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(C_1 + iC_2\right).$$

Правая часть нашего неоднородного уравнения имеет вид $q(i) = Az^i$. Здесь $z = 1/2$ совпадает с кратным корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y_{час}(i) = Bi^2(1/2)^i$. Подставим это частное решение в исходное неоднородное уравнение.

$$4Bi^2(1/2)^i - 4B(i-1)^2(1/2)^{i-1} + B(i-2)^2(1/2)^{i-2} = 5(1/2)^i$$

Разделив полученное уравнение на $(1/2)^{i-2}$, можно найти $B = 5/8$.

Таким образом, можно записать общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения в конечных разностях как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного

$$y_{одн}(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(C_1 + iC_2\right) + \frac{5}{8} i^2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

**Г.** Наконец, пусть $q(i) = A_m(i) z^i$, где $A_m(i)$ полином по $i$ степени $m$, а $z$ – корень полинома $P(z)$ кратности $s$. Тогда $y(i)$ следует искать в виде

$$y(i) = B_m(i)\, i^s\, z^i,$$

где $B_m(i)$ полином по $i$ степени $m$. Коэффициенты этого полинома находятся подстановкой этого решение в исходное уравнение с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $i$.

## Задачи

I. Найти общее решение неоднородных уравнений в конечных разностях методом неопределенных коэффициентов

1) $$12y(i+2)-7y(i+1)+y(i)=\left(\frac{1}{3}\right)^i,$$

2) $$7y(i+1)-8y(i)+y(i-1)=3,$$

3) $$16y(i+1)-8y(i)+y(i-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^i,$$

4) $$y(i)-6y(i-1)+24y(i-2)=5\cos i\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{3},$$

II. Решить уравнения в конечных разностях методом неопределенных коэффициентов. Записать частное решение при наличии начальных условий

1) $$3y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i=4,\ y_0=-\frac{3}{4},\ y_1=9,$$

2) $$2y_{i+2}-11y_{i+1}-6y_i=5,\ y_0=0,\ y_1=-\frac{8}{3},$$

3) $$9y_{i+2}-6y_{i+1}+y_i=\left(\frac{1}{2}\right)^i,\ y_0=-3,\ y_1=4$$

## 5. Решение линейных уравнений в конечных разностях методом производящих функций (Z-преобразования)

Пусть $y(i)$ – функция дискретного аргумента $i$, принимающего значения $i=\overline{0,\infty}$. Функция

$$Y(z)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i y(i) \qquad (11)$$

называется **производящей функцией** (другое название – ***Z*-преобразование**) функции $y(i)$.

Отметим, что не только $y(i)$ однозначно определяет $Y(z)$, но

и наоборот, $Y(z)$ однозначно определяет $y(i)$. Действительно, дифференцируя (11) $k$ раз по $z$ и затем, полагая $z=0$, получим

$$y(k)=\frac{1}{k!}Y^{(k)}(0).$$

Отметим некоторые простейшие свойства *Z*-преобразования

1. Если $Y_1(z)\Leftrightarrow y_1(i)$ и $Y_2(z)\Leftrightarrow y_2(i)$, то

$$C_1Y_1(z)+C_2Y_2(z)\Leftrightarrow c_1y_1(i)+c_2y_2(i).$$

2. Рассмотрим функцию $y(i+k)$, $i=\overline{0,\infty}$. Тогда

$$y(i+k)\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} y(i+k)z^i = \frac{Y(z)}{z^k}-\frac{y(0)}{z^k}-\frac{y(1)}{z^{k-1}}-\ldots-\frac{y(k-1)}{z}.$$

Эта формула является основной для решения уравнений в конечных разностях.

3. $y(i-k)\Leftrightarrow z^kY(z)$.

Эта формула находит свое применение при нахождении $y(i)$ по $Y(z)$.

4. $\sum\limits_{s=0}^{i} y(s)\lambda^{i-s} \Leftrightarrow \dfrac{Y(z)}{1-\lambda z}$.

Эта формула также находит применение при нахождении $y(i)$ по $Y(z)$.

Заметим, что комбинация свойств 3 и 4 приводит к соотношению

$$\frac{z^k Y(z)}{1-\lambda z} \Leftrightarrow \sum_{s=0}^{i-k} y(s)\lambda^{i-k-s}, \text{ при } i \geq k.$$

При этом правая часть считается равной 0 при $i < k$.

5. $\lambda^k y(k) \Leftrightarrow Y(\lambda z)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y(k)\, z^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y(k)(\lambda z)^k = Y(\lambda z).$$

6. $\sum\limits_{s=0}^{k} g(s)y(k-s) = \sum\limits_{s=0}^{k} y(s)g(k-s) \Leftrightarrow Y(z)\cdot G(z)$.

7. $z^r Y^{(r)}(z) \Leftrightarrow k(k-1)(k-2)...(k-r+1)y(k)$.

***Примеры Z-преобразования***

| $y(i)$ | $Y(z)$ |
|---|---|
| $y(i)=1$ | $Y(z)=\dfrac{1}{1-z}$ |
| $y(i)=\begin{cases}0, & i \neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$ | $Y(z)=z^j$ |
| $y(i)=\alpha^i$ | $Y(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} z^j \alpha^i = \dfrac{1}{1-\alpha z}$ |
| $y(i)=i$ | $Y(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} i\, z^i = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ |
| $y(i)=i^2$ | $Y(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 z^i = \dfrac{2z^2}{(1-z)^3}+\dfrac{z}{(1-z)^2}$ |

| | |
|---|---|
| $y(i) = i\lambda^i$ | $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} i\lambda^i z^i = \frac{\lambda z}{(1-\lambda z)^2}$ |
| $y(i) = i^2\lambda^i$ | $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2\lambda^i z^i = \frac{2(\lambda z)^2}{(1-\lambda z)^3} + \frac{\lambda z}{(1-\lambda z)^2}$ |

Возвратимся теперь к линейным уравнениям в конечных разностях

$$a_0 y(i+n) + a_1 y(i+n-1) + \ldots + a_n y(i) = q(i).$$

Применяя к обеим частям этого равенства $Z$-преобразование и используя свойства 1 и 2, получим

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{P\left(\frac{1}{z}\right)} + y(0)\frac{P_0\left(\frac{1}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}\right)} + y(1)\frac{P_1\left(\frac{1}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}\right)} + \ldots + y(n-1)\frac{P_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}\right)}. \qquad (12)$$

где $P(u)$ – характеристический полином, а $P_k(u) = a_0 u^{n-k} + a_1 u^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k-1} u$.

Очевидно, что первое слагаемое в (12) соответствует частному решению неоднородного уравнения при начальных условиях вида $y(0) = y(1) = \ldots = y(n-1) = 0$, а последние слагаемые дают решение однородного уравнения.

В принципе, по $Y(z)$ можно найти $y(i)$.

Рассмотрим два частных случая

**А.** Уравнение в конечных разностях первого порядка.

$$a_0 y(i+1) + a_1 y(i) = q(i). \qquad (13)$$

Переходя к $Y(z)$, получим

$$\frac{a_0}{z}\big(Y(z) - y(0)\big) + a_1 Y(z) = Q(z),$$

откуда

$$Y(z)=\frac{zQ(z)}{a_0+a_1z}+y(0)\frac{a_0}{a_0+a_1z}. \tag{14}$$

Пусть $z_1=-a_1/a_0$, есть корень характеристического уравнения $a_0z+a_1=0$, тогда (14) примет вид

$$Y(z)=\frac{1}{a_0}\frac{zQ(z)}{1-z_1z}+y(0)\frac{a_0}{1-z_1z}.$$

Пользуясь свойствами 3 и 4, запишем решение $y(i)$ уравнения (13) в виде

$$y(i)=\frac{1}{a_0}\sum_{s=0}^{i-1}q(s)z_1^{i-1-s}+y(0)z_1^i, \tag{15}$$

причем первое слагаемое считается равным нулю при $i=0$.

**Пример 5.1.** Решим неоднородное уравнение в конечных разностях первого порядка $4y(i)-y(i-1)=(1/4)^i$ с начальным условием $y(0)=2$ методом производящих функций. Умножим левую и правую части этого уравнения на $z^i$ и просуммируем

$$\sum_{i=1}^{\infty}4z^i y(i)-\sum_{i=1}^{\infty}z^i y(i-1)=\sum_{i=1}^{\infty}z^i(1/4)^i.$$

Вынесем из под второго знака суммы $z$, чтобы оставшаяся под знаком суммы степень совпадала с индексом при $y$

$$4\left(\sum_{i=0}^{\infty}z^i y(i)-z^0y(0)\right)-z\sum_{i=1}^{\infty}z^{i-1}y(i-1)=\sum_{i=1}^{\infty}z^i(1/4)^i.$$

Полученное уравнение перепишем, используя функцию $Y(z)$ и начальное условие

$$4\big(Y(z)-2\big)-zY(z)=\frac{\frac{z}{4}}{1-\frac{z}{4}},$$

откуда получим явное выражение для $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{\frac{z}{4}}{4\left(1-\frac{z}{4}\right)^2}+\frac{2}{\left(1-\frac{z}{4}\right)}.$$

Для нахождения неизвестной функции $y(i)$ воспользуемся таблицей для производящих функций

$$y(i)=\frac{1}{4}i\left(\frac{1}{4}\right)^i+2\left(\frac{1}{4}\right)^i=\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(2+\frac{1}{4}i\right).$$

**Б.** Уравнение в конечных разностях второго порядка

$$a_0y(i+2)+a_1y(i+1)+a_2y(i)=q(i). \qquad (16)$$

Переходя к $Z$-преобразованию, получим

$$\left(\frac{a_0}{z^2}+\frac{a_1}{z}+a_2\right)Y(z)=Q(z)+y(0)\left(\frac{a_0}{z^2}+\frac{a_1}{z}\right)+y(1)\frac{a_0}{z}. \qquad (17)$$

Пусть $z_1$ и $z_2$ есть корни характеристического уравнения $a_0z^2+a_1z+a_2=0$. Пусть оба этих корня вещественны и различны. Тогда (17) можно представить в виде

$$Y(z)=\frac{1}{a_0}\frac{z^2Q(z)}{(1-z_1z)(1-z_2z)}+y(0)\frac{a_0+a_1z}{a_0(1-z_1z)(1-z_2z)}+ \\ +y(1)\frac{z}{a_0(1-z_1z)(1-z_2z)}.$$

Воспользовавшись разложением

$$\frac{z}{(1-z_1z)(1-z_2z)}=\frac{1}{(z_1-z_2)}\left[\frac{1}{1-z_1z}-\frac{1}{1-z_2z}\right]= \\ =\frac{1}{(z_1-z_2)}\frac{1-z_2z-1+z_1z}{(1-z_1z)(1-z_2z)},$$

получим

$$Y(z) = \frac{1}{a_0\left(z_1 - z_2\right)}\left[\frac{zQ(z)}{1 - z_1 z} - \frac{zQ(z)}{1 - z_2 z}\right] + \text{решение однородного уравнения}$$

.

Тогда

$$y(i) = \frac{1}{a_0\left(z_1 - z_2\right)}\sum_{s=0}^{i-1} q(i)\left(z_1^{i-1-s} - z_2^{i-1-s}\right) + \text{решение однородного уравнения}$$

.

Выписанное слагаемое дает частное решение неоднородного уравнения. Оно равно 0 при $i = 0$ и $i = 1$.

Если $z_1$ и $z_2$ комплексно сопряженные корни $z_{1,2} = r\left[\cos\omega \pm j\sin\omega\right]$, то

$$\begin{gathered} y(i) = \frac{1}{a_0 \sin\omega}\sum_{s=0}^{i-1} q(i) r^{i-1-s} \sin(i - 1 - s)\omega + \\ + y(0)\frac{z_2 z_1^i - z_1 z_2^i}{z_2 - z_1} + y(1)\frac{z_2^i - z_1^i}{z_2 - z_1} \end{gathered}.$$

**Пример 5.2.** Решим уравнение $y(i+2) + 6y(i+1) - 7y(i) = -1$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 7/8$ методом производящих функций. Умножим левую и правую части этого уравнения на $z^i$ и просуммируем

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i y(i+2) + \sum_{i=0}^{\infty} 6z^i y(i+1) + \sum_{i=0}^{\infty} z^i y(i) = -\sum_{i=0}^{\infty} z^i \ .$$

Теперь вынесем из под каждого знака суммы $z$ в такой степени, чтобы остающиеся под знаком суммы степени совпадала с индексом при $y$

$$\frac{1}{z^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^{i+2} y(i+2) + \frac{6}{z}\sum_{i=0}^{\infty} z^{i+1} y(i+1) - 7\sum_{i=0}^{\infty} z^i y(i) = -\sum_{i=0}^{\infty} z^i \ .$$

В полученном уравнении перейдем к производящей функции $Y(z)$

$$\frac{1}{z^2}\big(Y(z)-y(0)-zy(1)\big)+\frac{6}{z}\big(Y(z)-y(0)\big)-7\,Y(z)=-\frac{1}{1-z}\,.$$

Используя начальные условия, можно записать явное выражение для $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{-15z^2+7z}{8(1-z)^2(1+7z)}\,,$$

которое разложим на простые дроби

$$Y(z)=\frac{1}{8}\left[\frac{3}{(1-z)^2}-\frac{2}{(1-z)}-\frac{1}{(1+7z)}\right].$$

Объединим первые два слагаемых в одно и преобразуем, чтобы было удобнее обращать функцию $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{1}{8}\left[\frac{1-2z}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1+7z)}\right]=\frac{1}{8}\left[\frac{1-z}{(1-z)^2}-\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1+7z)}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-z)}-\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1+7z)}\right].$$

Полученное выражение для $Y(z)$ уже легко обращается, поэтому запишем записать явный вид неизвестной функции $y(i)$

$$y(i)=\frac{1}{8}\left[1-i-(-7)^i\right].$$

### Задачи

Решить уравнения в конечных разностях методом производящих функций. Записать частное решение при наличии начальных условий

1) $2y_{i+2}-11y_{i+1}-6y_i=5$, $y_0=0$, $y_1=-\dfrac{8}{3}$,

2) $4y_{i+2}-4y_{i+1}+y_i=\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $y_0=\frac{1}{2}$, $y_1=1$,

3) $3y_{i+2}-2y_{i+1}-y_i=4$, $y_0=-4$, $y_1=1$,

## 6. Метод вариации произвольных постоянных

Этот метод является самым сильным методом, но и самым сложным в практическом выполнении.

Пусть имеется неоднородное уравнение

$$\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\,y(i+l)=q(i). \tag{18}$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y(i)=\sum_{s=1}^{n} C_s y_s(i)$, где $y_s(i)$ – линейно независимые решения линейного однородного уравнения. Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y(i)=\sum_{s=1}^{n} C_s(i)\,y_s(i). \tag{19}$$

Подставляя это решение в уравнение (18), получим

$$\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\sum_{s=1}^{n} C_s(i+l)\,y_s(i+l)=q(i).$$

Нам нужно всего одно частное решение уравнения (18), а в нашем распоряжении $n$ функций $C_1(i)$, $C_2(i)$,…, $C_n(i)$. Поэтому на них можно произвольно наложить $(n-1)$ ограничение.

Рассмотрим алгоритм нахождения частного решения неоднородного уравнения в конечных разностях на примере уравнения второго порядка

$$a_0 y(i+2) + a_1 y(i+1) + a_2 y(i) = q(i)\,. \tag{20}$$

**Шаг 1.** Записываем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y(i) = C_1 y_1(i) + C_2 y_2(i)\,.$$

**Шаг 2.** Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y(i) = C_1(i) y_1(i) + C_2(i) y_2(i)\,,$$

которое подставим в исходное уравнение (1.20)

$$\begin{gathered} a_0\left[C_1(i+2)y_1(i+2) + C_2(i+2)y_2(i+2)\right] + \\ + a_1\left[C_1(i+1)y_1(i+1) + C_2(i+1)y_2(i+1)\right] + \\ + a_2\left[C_1(i)y_1(i) + C_2(i)y_2(i)\right] = q(i) \end{gathered} \tag{21}$$

**Шаг 3.** Выберем одно ограничение в виде:

$$\begin{gathered} C_1(i+1)y_1(i+1) + C_2(i+1)y_2(i+1) = \\ = C_1(i)y_1(i+1) + C_2(i)y_2(i+1) \end{gathered} \tag{22}$$

С учетом этого ограничения уравнение (1.21) приобретет вид

$$\begin{gathered} a_0\left[C_1(i+2)y_1(i+2) + C_2(i+2)y_2(i+2)\right] + \\ + a_1\left[C_1(i)y_1(i+1) + C_2(i)y_2(i+1)\right] + \\ + a_2\left[C_1(i)y_1(i) + C_2(i)y_2(i)\right] = q(i) \end{gathered} \tag{23}$$

**Шаг 4.** С другой стороны, вспоминая, что $y_1(i)$ и $y_2(i)$ удовлетворяют однородному уравнению, можно записать

$$a_0 y_1(i+2) + a_1 y_1(i+1) + a_2 y_1(i) = 0\,,$$

$$a_0 y_2(i+2) + a_1 y_2(i+1) + a_2 y_2(i) = 0\,.$$

умножая это соотношение на $C_s(i)$ и, складывая по *s*, получим

$$\begin{gathered} a_0\left[C_1(i)y_1(i+2) + C_2(i)y_2(i+2)\right] + \\ + a_1\left[C_1(i)y_1(i+1) + C_2(i)y_2(i+1)\right] + . \\ + a_2\left[C_1(i)y_1(i) + C_2(i)y_2(i)\right] = 0 \end{gathered} \tag{24}$$

Вычитая из (1.23) равенство (1.24), получим

$$\begin{gathered} a_0\left[C_1(i+2)y_1(i+2)+C_2(i+2)y_2(i+2)\right]= \\ =a_0\left[C_1(i)y_1(i+2)+C_2(i)y_2(i+2)\right]+q(i) \end{gathered}. \tag{25}$$

Преобразуем уравнения (22), (25). Возьмем уравнение (22) и заменим в нем *i* на *i*+1. Тогда получим

$$\begin{gathered} C_1(i+2)y_1(i+2)+C_2(i+2)y_2(i+2)= \\ =C_1(i+1)y_1(i+2)+C_2(i+1)y_2(i+2) \end{gathered}.$$

Таким образом, новое уравнение относительно функций $C_1(i)$ и $C_2(i)$ примет вид

$$\begin{gathered} a_0\left[C_1(i+1)y_1(i+2)+C_2(i+1)y_2(i+2)\right]= \\ =a_0\left[C_1(i)y_1(i+2)+C_2(i)y_2(i+2)\right]+q(i) \end{gathered},$$

преобразуя которое, получим

$$y_1(i+2)\left[C_1(i+1)+C_1(i)\right]+y_2(i+2)\left[C_2(i+1)+C_2(i)\right]=\frac{q(i)}{a_0}. \tag{26}$$

**Шаг 5.** Если к найденному уравнению (26) добавим условие (22), то получим систему линейных неоднородных уравнений относительно $\Delta C_1(i)=C_1(i+1)+C_1(i)$ и $\Delta C_2(i)=C_2(i+1)+C_2(i)$

$$\begin{cases} y_1(i+2)\Delta C_1(i)+y_2(i+2)\Delta C_2(i)=\dfrac{q(i)}{a_0} \\ y_1(i+1)\Delta C_1(i)+y_2(i+1)\Delta C_2(i)=0 \end{cases}.$$

По правилу Крамера запишем решение этой системы

$$\Delta C_1(i)=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{q(i)}{a_0} & y_2(i+2) \\ 0 & y_2(i+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(i+2) & y_2(i+2) \\ y_1(i+1) & y_2(i+1) \end{vmatrix}}, \tag{27}$$

$$\Delta C_2(i)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(i+2) & \dfrac{q(i)}{a_0} \\ y_1(i+1) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(i+2) & y_2(i+2) \\ y_1(i+1) & y_2(i+1) \end{vmatrix}}. \tag{28}$$

Если положить $C_1(0)=0$ и $C_2(0)=0$, то все $C_1(i)$ и $C_2(i)$ определяются однозначно, а, следовательно, и частное решение $y(i)=\sum\limits_s C_s(i)y_s(i)$.

**Пример 6.1.** Решим неоднородное уравнение $y(i+2)+6y(i+1)-7y(i)=-1$ методом вариации произвольной постоянной. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y(i)=C_1+C_2(-7)^i,$$

поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_ч(i)=C_1(i)+C_2(i)(-7)^i.$$

Определим $C_1(i)$ и $C_2(i)$ используя формулы (27) и (28)

$$\Delta C_1(i)=\frac{\begin{vmatrix} -1 & (-7)^{i+2} \\ 0 & (-7)^{i+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & (-7)^{i+2} \\ 1 & (-7)^{i+1} \end{vmatrix}}=-\frac{1}{8},$$

$$\Delta C_1(i)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & (-7)^{i+2} \\ 1 & (-7)^{i+1} \end{vmatrix}}=\frac{1}{8}\frac{1}{(-7)^{i+1}}.$$

Если положить $C_1(0)=0$ и $C_2(0)=0$, то $C_1(i)$ и $C_2(i)$ будут равняться

$$C_1(i) = -\frac{1}{8}i,$$

$$C_2(i) = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(-7)} + \frac{1}{(-7)^2} + \cdots + \frac{1}{(-7)^i}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\left(-\frac{1}{7}\right)^i - 1}{\left(-\frac{1}{7}\right) - 1} = \frac{1}{64}\left(1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^i\right).$$

Таким образом, можно записать частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(i) = -\frac{1}{8}i + \frac{1}{64}\left(1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^i\right)(-7)^i.$$

Общее решение неоднородного уравнения является суммой частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного

$$y(i) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2(-7)^i - \frac{1}{8}i + \frac{1}{64}\left((-7)^i - 1\right),$$

обозначая в котором $C_1 = \tilde{C}_1 - \frac{1}{64}$, $C_2 = \tilde{C}_2 + \frac{1}{64}$, запишем

$$y(i) = C_1 + C_2(-7)^i - \frac{1}{8}i.$$

**Задачи**

Найти общее решение неоднородных уравнений в конечных разностях методом вариации произвольных постоянных:

1) $y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 5$, $y_0 = 2$, $y_1 = \frac{7}{2}$,

2) $4y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i = 2^i$, $y_0 = \frac{10}{9}$, $y_1 = \frac{11}{9}$

3) $3y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i = 4 \quad y_0 = -\frac{4}{3}, y_1 = \frac{1}{9},$

4) $12y_{i+2} - 7y_{i+1} + y_i = \left(\frac{1}{3}\right)^i, y_0 = 0, y_1 = \frac{2}{3}.$

## Литература

1. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания : учебное пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2004.

2. Калягин В.А, Козырев О.Р., Куркин А.А., Петрухин Н.С. Дифференциальные и разностные уравнения. Н. Новгород : НГТУ, 2002.

3. Лобанов С.Г. Конспект лекций по курсу дифференциальных и разностных уравнений. М. : Изд-во ГУ ВШЭ, 1998.

4. Вильчевская Е.Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ : учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 45 с.

*Издание подготовлено в авторской редакции*

Подписано в печать 15.09.2022 г.

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 529-849.
E-mail: rio.tsu@mail.ru
Заказ № 5150 от «9» сентября 2022 г. Тираж 24 экз.