МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**С.П. Моисеева, С.В. Пауль,
И.А. Туренова, Е.Ю. Данилюк**

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
М74

Моисеева С.П., Пауль С.В., Туренова И.А., Данилюк Е.Ю.

М74 Линейная алгебра : учебное пособие. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 110 с.

ISBN 978-5-907572-23-2

Учебное пособие «Линейная алгебра» содержит необходимый теоретический материал по данному курсу и упражнения, которые позволят закрепить полученные знания. Пособие предназначено для студентов института прикладной математики и компьютерных наук направлений подготовки: 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 09.03.03 Прикладная информатика.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

Рецензенты:

К.И. Лившиц, доктор технических наук, профессор,

С.В. Рожкова, доктор физико-математических наук, доцент

ISBN 978-5-907572-23-2

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

В практической деятельности иногда используются числовые данные, которые представляют собой несколько взаимосвязанных (по содержанию) списков, состоящих из одинакового количества чисел. Например, в экономике это данные о выпуске продукции нескольких видов в каждом месяце квартала или нормы затрат ресурсов нескольких видов на производство продукции нескольких видов и т. п. Такие числовые данные удобно записывать в виде прямоугольных таблиц, которые называются матрицами.

1.1. Понятие матрицы

Определение. **Матрицей** $\mathbf{A}$ *(порядка* $(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})$*, или m,n-матрицей)* называется прямоугольная таблица чисел – элементов матрицы, имеющая m строк и n столбцов.

Элемент матрицы $\mathbf{A}$, находящийся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, обозначается a_{ij}. Сама матрица $\mathbf{A}$ записывается как

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

или коротко $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$, $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$. Введем обозначения:

$\mathbf{a}_i=\left[a_{i1},a_{i2},...,a_{in}\right]$ – i-я строка матрицы $\mathbf{A}$, $(i=1,2,\ldots,m)$;

$$\mathbf{a}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - j\text{-й столбец матрицы } \mathbf{A},\ (j=1,2,\ldots,n).$$

Определение. Матрица размера $(1\times n)$ называется **вектор-строкой.** Например, $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ – это вектор-строка размерности (1×4).

Определение. Матрица размера $(m \times 1)$ называется **вектор-столбцом.**

Например, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ – вектор-столбец размерности (3×1).

Как правило, для обозначений вектор-строк и вектор-столбцов используются строчные жирные буквы (также используется запись $\overline{a}$ или $\vec{a}$).

Замечание. Произвольное число a можно рассматривать как матрицу размерности 1×1:

$$\mathbf{A} = [a] = a.$$

Определение. Две матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, имеющие одинаковое число строк и одинаковое число столбцов, называются матрицами **одинакового порядка**.

Определение. Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковый размер и элементы, стоящие на одинаковых местах в этих матрицах, равны.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

Определение. Матрица размера $(n \times n)$ называется **квадратной** матрицей порядка n и записывается как

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Главной диагональю матрицы размера $n \times n$ называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Побочной диагональю матрицы размера $n \times n$ будем называть совокупность элементов $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$.

Определение. Следом $Sp(\mathbf{A})$ квадратной матрицы $\mathbf{A}$ порядка n называется сумма диагональных элементов матрицы : $Sp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Определение. Квадратная матрица, все элементы которой, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Примером диагональной матрицы является матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Определение. Диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны, называется **скалярной**. Например,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 5 \end{bmatrix}.$$

Определение. **Нулевой** матрицей называется матрица, все элементы которой – нули.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение. Скалярная матрица, в которой все элементы главной диагонали – единицы, называется **единичной** и обозначается как

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Иногда также встречается обозначение единичной матрицы в виде заглавной буквы $\mathbf{I}$. **Единичная вектор-строка** обозначается $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix}$.

Определение. Квадратная матрица $\mathbf{A}$, у которой элементы $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j, называется **симметричной.**

Например, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется **верхней треугольной матрицей (правой треугольной матрицей)**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

а та, у которой все элементы, лежащие выше главной диагонали, равны нулю, **нижней треугольной матрицей (левой треугольной матрицей)**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение. **Кососимметричной** называют матрицу, элементы которой, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку: $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j.

Из определения следует, что все элементы главной диагонали кососимметричной матрицы равны нулю: $a_{ii} = 0$.

Например, следующие матрицы кососимметричны:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & -1 & 2 \\ -a & 0 & -b & 3 \\ 1 & b & 0 & ab \\ -2 & -3 & -ab & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & -x \\ -7 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2. Основные операции над матрицами и их свойства

1.2.1. Сложение матриц

Операции сложения и вычитания матриц определены только для матриц одинаковой размерности.

Определение. Суммой двух матриц $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ и $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]$ размерности $(m\times n)$ называется матрица $\mathbf{C}=\left[c_{ij}\right]$ размерности $(m\times n)$, элементами которой являются

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\forall i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Пример 1.1. Даны матрицы $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 8\end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 5 & 7\end{bmatrix}$. Найти их сумму.

Решение.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2-1 & -3+4 & 1+0 & 1-1\\ 0+2 & 4-2 & -2+5 & 8+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 15\end{bmatrix}.$$

Теорема 1.1. Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1. Для любых матриц $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ размерности $(m\times n)$ выполняются равенства:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}.$$

2. Существует единственная $(m\times n)$ – матрица $\mathbf{0}$ такая, что для любой $(m\times n)$–матрицы $\mathbf{A}$ выполняется равенство $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$.

3. Для любой матрицы $\mathbf{A}$ существует единственная матрица $(-\mathbf{A})$ такая, что $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

Доказательство.

1. Выберем в матрице $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ произвольный элемент $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}$. Так как $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (\mathbf{B}+\mathbf{A})_{ij}$, следовательно, $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{B}+\mathbf{A})$. Аналогично, $\left[\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\right]_{ij} = a_{ij} + \left(b_{ij} + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij} = \left[(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\right]_{ij}$.

2. Согласно определению, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Это число равно a_{ij} тогда и только тогда, когда $b_{ij} = 0$. Следовательно, единственной матрицей, удовлетворяющей условию $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, является матрица $\mathbf{0}$.

3. Равенство $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $b_{ij} = -a_{ij}$. Следовательно, единственной матрицей $\mathbf{A}$, удовлетворяющей условию $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, является матрица $-\mathbf{A} = \left[-a_{ij}\right]$. ■

Определение. Разностью двух матриц $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ и $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]$ одинаковой размерности называется матрица $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ размерности $(m \times n)$, элементами которой являются

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Замечание. Матрица $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ называется разностью матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Пример 1.2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Требуется найти их разность.

Решение.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & -3-4 & 1-0 & 1+1 \\ 0-2 & 4+2 & -2-5 & 8-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Умножение матрицы на число

Определение. Произведением $(m \times n)$-матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ на число λ называется такая $(m \times n)$–матрица $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]$, что $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Теорема 1.2. Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1. Для любой $(m \times n)$–матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ имеет место равенство:

$$1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

2. Для любой матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ и любых чисел λ и μ имеет место равенство: $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu) \times \mathbf{A}$.

3. Для любой матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ и любых чисел λ и μ имеет место равенство:

$$(\lambda + \mu) \times \mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}.$$

4. Для любых матриц $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ и любого числа λ выполняется равенство:

$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}.$$

Доказательство.

$\forall\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ имеем

1. $1 \cdot \mathbf{A} = \left[1 \cdot a_{ij} \right] = \left[a_{ij} \right] = \mathbf{A}$.

2. $\lambda(\mu\mathbf{A}) = \lambda\left[\mu a_{ij} \right] = \left[\lambda\mu a_{ij} \right] = \lambda\mu\left[a_{ij} \right] = (\lambda\mu)\mathbf{A}$.

3. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \left[(\lambda + \mu) a_{ij} \right] = \left[\lambda a_{ij} + \mu a_{ij} \right] = \lambda\left[a_{ij} \right] + \mu\left[a_{ij} \right] = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$.

4. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\left[a_{ij} + b_{ij} \right] = \left[\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} \right] = \left[\lambda a_{ij} \right] + \left[\lambda b_{ij} \right] = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$. ■

Пример 1.3. Для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из примера 1.2 найти матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

Решение.

$$5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) & 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 & 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 & 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 0 - 2 \cdot 2 & 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) & 5 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 & 5 \cdot 8 - 2 \cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -23 & 5 & 7 \\ -4 & 24 & -20 & 26 \end{bmatrix}.$$

1.2.3. Транспонирование матриц

Операция транспонирования матрицы заключается в перемене местами строк и столбцов матрицы с сохранением их номеров.

Определение. Матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ называется **транспонированной** по отношению к матрице $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$, если $\forall i, j:\ b_{ij} = a_{ji}$.

Пример 1.4. Если дана матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, то транспонированная по отношению к ней матрица имеет вид $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

1.2.4. Произведение матриц

Операция умножения матрицы $\mathbf{A}$ размера $(m \times n)$ на матрицу $\mathbf{B}$ размера $(n \times k)$ вводится для прямоугольных матриц в предположении, **что число столбцов матрицы $\mathbf{A}$ равно числу строк матрицы $\mathbf{B}$.**

Определение. Произведением матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ размера $(m \times n)$ на матрицу $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ размера $(n \times k)$ называется матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ размера $(m \times k)$, элемент которой, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен скалярному произведению i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ на j-й столбец матрицы $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj},$$

то есть элемент c_{ij} матрицы $\mathbf{C}$ есть **сумма произведений элементов $\boldsymbol{i}$-й строки матрицы $\mathbf{A}$ и соответствующих элементов $\boldsymbol{j}$-го столбца матрицы $\mathbf{B}$**.

Пример 1.5. Найдем произведение матриц

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\cdot5+1\cdot2+0\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot4 & 2\cdot7+1\cdot1+0\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot3+0\cdot2 \\ 3\cdot5+0\cdot2+5\cdot3 & 3\cdot1+0\cdot0+5\cdot4 & 3\cdot7+0\cdot1+5\cdot2 & 3\cdot0+0\cdot3+5\cdot2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -23 & 5 & 7 \\ -4 & 24 & -20 & 26 \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.3. Произведение матриц обладает следующими свойствами:

1. Умножение на число: $\lambda(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$.

2. Дистрибутивность: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

3. Ассоциативность: $\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$.

4. Умножение на единичную матрицу: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

5. Правило транспонирования произведения матриц: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Читателю предлагается провести доказательство свойств произведения матриц самостоятельно.

Замечание 1. Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{B}$ существует лишь при условии, что число столбцов матрицы $\mathbf{A}$ равно числу строк матрицы $\mathbf{B}$. Возможен случай, когда $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ существует, а $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ не существует вследствие несовпадения числа строк матрицы $\mathbf{A}$ с числом столбцов матрицы $\mathbf{B}$.

Если обе матрицы – квадратные и одного размера, то $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ – матрицы того же размера, но и тогда они, вообще говоря, различны, например:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&7\\2&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}7&9\\19&26\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}24&41\\5&9\end{bmatrix}.$$

Таким образом, произведение матриц в общем случае не коммутативно, а именно: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\neq(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$.

Исключение составляет случай, когда $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – квадратные матрицы одинакового порядка n, и при этом матрица $\mathbf{B}$ является скалярной. Например,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\cdot2+2\cdot0&1\cdot0+2\cdot2\\3\cdot2+2\cdot0&3\cdot0+5\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\6&10\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+0\cdot3&2\cdot2+0\cdot5\\0\cdot1+2\cdot3&0\cdot2+2\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\6&10\end{bmatrix}.$$

Замечание 2. Для чисел a и b из равенства $a\cdot b=0$ следует, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Для матриц это утверждение **неверно**, т.е. произведение ненулевых матриц может быть равно нуль–матрице, например:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&6\\-1&-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3-3&6-6\\6-6&12-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0.$$

Замечание 3. Следы матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ равны между собой.

$$Sp(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})_{kk}=Sp(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}).$$

1.2.5. Практические примеры

Пример 1.6. Пусть $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m,n}$ и $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{m,n}$ – матрицы объемов производства n видов продукции на m заводах в первом и во втором квартале соответственно, тогда $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ – матрица объема производства n видов продукции на m заводах в первом полугодии, а $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ – матрица приростов объемов производства n видов продукции на m заводах во втором квартале по сравнению с первым кварталом.

Если объемы производства даны в рублях, и λ – курс рубля по отношению к доллару (т.е. один рубль равен λ долларам), то $\lambda\mathbf{A}$ есть матрица объемов производства в первом квартале в долларах.

Пример 1.7. Пусть предприятие производит n видов продукции, используя m видов ресурсов: $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m,n}$ – матрица, элементы которой – норма затрат ресурса i- го вида на производство единицы продукции j-го вида, $\mathbf{X}=\left[x_j\right]_{n,1}$ – вектор-столбец, где x_j – количество продукции j-го вида, произведенное предприятием за месяц.

Тогда матрица $\mathbf{C}=\mathbf{AX}$ является вектором затрат ресурса i – го вида на производство всей месячной продукции:

$$\mathbf{C}=\mathbf{AX}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Пример 1.8. Завод производит и продает автомобили. В процессе эксплуатации каждый автомобиль может находиться в одном из двух состояний: 1) работает хорошо; 2) требует ремонта. Статистические исследования показали, что из тех автомобилей, которые сегодня работают хорошо, через месяц 70% также будут работать хорошо и 30% потребуют ремонта, а из тех автомобилей, которые сегодня потребовали ремонта, через месяц 60% будут работать хорошо и 40% потребуют ремонта. В момент продажи все автомобили работают хорошо. Каковы доли машин, которые будут работать хорошо или потребуют ремонта через 2 месяца и через 3 месяца после их выхода из ворот завода?

Решение. Введем вектор состояний в момент времени t: $\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_{1t} & x_{2t} \end{bmatrix}$, где x_{it} – доля автомобилей, находящихся в момент времени t в состоянии i.

Согласно условиям задачи $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Введем также матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

где a_{ij} – доля автомобилей, которые в настоящий момент находятся в состоянии i, а через месяц будут находиться в состоянии j. Тогда вектор состояний через месяц имеет вид:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно найти вектор состояний через два месяца:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1\mathbf{A} = \mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{x}_0\mathbf{A}^2.$$

Вектор состояний через 3 месяца запишем в виде

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2\mathbf{A} = \mathbf{x}_0\mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{x}_0\mathbf{A}^3.$$

Вычислим матрицы $\mathbf{A}^2$ и $\mathbf{A}^3$:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,67 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_0\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,67 & 0,33 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,67 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

Ответ: Через 2 месяца и через 3 месяца 2/3 автомобилей будут работать хорошо, а 1/3 автомобилей потребуют ремонта.

Пример 1.9. В сервисный центр поступают смартфоны, 70% которых требуют обновления ПО, 20% – требуют ремонта, 10% – подлежат замене. Статистически установлено, что 10% смартфонов, получивших обновление, через год требуются ремонт, 60% – требуют повторного обновления и 30% – подлежат замене. Из смартфонов, прошедших ремонт, 20% требуют через год обновление ПО, 50% – повторного ремонта и 30% – подлежат замене. Из смартфонов, подлежащих замене, через год 60% требуют обновление ПО, 40% – требуют ремонта. Найти доли из обслуженных в начале года смартфонов, которые будут требовать ремонта, обновления ПО или замены через год, 2 года и 3 года?

Ответ: через год 17% смартфонов будет требовать обновления ПО, 56% – ремонта и 27% – замены; через 2 года эти доли равны соответственно 29,1%, 49%, 21,9%; через 3 года – 25,85%, 50,72%, 23,43%.

Пример 1.10. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах №1 и №2 в магазины M_1, M_2 и M_3, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. ед., в магазин M_2 – 70 ден. ед., а в M_3 – 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Решение. Обозначим через **A** матрицу, данную нам в условии и содержащую информацию о количестве единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах в магазины, а через **B** – матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 50 & 70 & 130 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$\mathbf{AB}^T = \begin{bmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\cdot 50 + 35\cdot 70 + 10\cdot 130 \\ 15\cdot 50 + 27\cdot 70 + 8\cdot 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4750 \\ 3680 \end{bmatrix}.$$

Ответ: Первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй – 3680 ден. ед.

Пример 1.11. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется матрицей (вектором) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 23 \end{bmatrix}$. Используются ткани четырех типов T_1, T_2, T_3, T_4. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Матрица (вектор) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 40 & 35 & 24 & 16 \end{bmatrix}$ задает стоимость метра ткани каждого типа, а матрица (вектор) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ – стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Изделие	Расход ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимнее пальто	5	1	0	3
Демисезонное пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1. Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?
2. Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.
3. Определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.
4. Подсчитать стоимость всей ткани с учетом ее транспортировки.

Решение. Обозначим через **А** матрицу, данную нам в условии и содержащую информацию о нормах расхода ткани (в метрах) каждого типа на каждое изделие,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, нужно вектор $\mathbf{X}$ умножить на матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{XA} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 5 + 15 \cdot 3 & 10 \cdot 1 + 15 \cdot 2 & 23 \cdot 4 & 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 23 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 95 & 40 & 92 & 129 \end{bmatrix}.$$

2. Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{AC}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \\ 3 \cdot 40 + 2 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 16 \\ 0 \cdot 40 + 0 \cdot 35 + 4 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{bmatrix}.$$

3. Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, определится по формуле:

$$\mathbf{XAC}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{bmatrix} = 10 \cdot 283 + 15 \cdot 222 + 23 \cdot 144 = 9472.$$

4. Наконец, с учетом транспортных расходов вся сумма будет равна стоимости ткани, т. е. 9472 ден. ед., плюс величина

$$\mathbf{XAP}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 95 & 40 & 92 & 129 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 95 \cdot 5 + 40 \cdot 3 + 92 \cdot 2 + 129 \cdot 2 = 1037.$$

Окончательно, $\mathbf{X\,A\,C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{X\,A\,P}^{\mathrm{T}} = 9472 + 1037 = 10509$ (ден.ед.).

Ответ: ответы на вопросы задачи приведены в соответствующих разделах решения.

1.2.6. Блочные матрицы

Пусть дана прямоугольная матрица $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right], \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$. При помощи горизонтальных и вертикальных линий рассечем ее на прямоугольные блоки размерности $\left(m_\alpha \times n_\beta \right), \quad \alpha = \overline{1,s}, \quad \beta = \overline{1,t}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{A}_{11}}^{n_1} & \overbrace{\mathbf{A}_{12}}^{n_2} & \ldots & \overbrace{\mathbf{A}_{1t}}^{n_t}\Big\} m_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2t}\big\} m_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \ldots & \mathbf{A}_{st}\big\} m_s \end{bmatrix},$$

где $\sum\limits_{\alpha=1}^{s} m_\alpha = m$, $\sum\limits_{\beta=1}^{t} n_\beta = n$.

Будем говорить, что данная матрица разбита на $s \cdot t$ блоков $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ размером $\left(m_\alpha \times n_\beta \right)$, $\alpha = \overline{1,s}, \quad \beta = \overline{1,t}$, или что она представлена в виде **блочной матрицы**. Будем сокращенно писать $\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{\alpha\beta} \right], \alpha = \overline{1,s}, \quad \beta = \overline{1,t}$.

Действия над блочными матрицами производятся по тем же формальным правилам, как и в случае, когда вместо блоков имеем числовые элементы.

Сложение: если даны две блочные матрицы одинаковой размерности и одинакового способа разбиения на блоки:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_{\alpha\beta} \right], \quad \alpha = \overline{1,s}, \;\; \beta = \overline{1,t},$$
$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}_{\alpha\beta} \right], \quad \alpha = \overline{1,s}, \;\; \beta = \overline{1,t},$$

то
$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[\mathbf{A}_{\alpha\beta} \pm \mathbf{B}_{\alpha\beta} \right], \;\; \alpha = \overline{1,s}, \;\; \beta = \overline{1,t}.$$

Умножение: известно, что при умножении прямоугольных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ длина строк в первом сомножителе $\mathbf{A}$ должна совпадать с высотой столбцов второго сомножителя $\mathbf{B}$. Для возможности «блочного» умножения этих матриц необходимо, чтобы все горизонтальные размеры в первом сомножителе совпадали с вертикальными размерами во втором сомножителе:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{A}_{11}}^{n_1} & \overbrace{\mathbf{A}_{12}}^{n_2} & \ldots & \overbrace{\mathbf{A}_{1t}}^{n_t} \Big\} m_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2t} \} m_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \ldots & \mathbf{A}_{st} \} m_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{B}_{11}}^{p_1} & \overbrace{\mathbf{B}_{12}}^{p_2} & \ldots & \overbrace{\mathbf{B}_{1u}}^{p_u} \Big\} n_1 \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \ldots & \mathbf{B}_{2u} \} n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{B}_{t1} & \mathbf{B}_{t2} & \ldots & \mathbf{B}_{tu} \} n_t \end{bmatrix}.$$

Тогда легко проверить, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \left[\mathbf{C}_{\alpha\beta} \right],$$

где $\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \sum_{\delta=1}^{t} \mathbf{A}_{\alpha\delta} \mathbf{B}_{\delta\beta}, \ \left(\alpha = \overline{1, s}, \ \beta = \overline{1, u} \right).$

Применение блочных матриц позволяет уменьшить трудоемкость вычислений в случае, когда матрица содержит нулевые блоки.

Пример 1.12. Найти произведение матриц

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Квадратные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ 4-го порядка разобъем на 4 блока – квадратные матрицы 2-го порядка – и выполним заданные действия:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{E},\quad \mathbf{B}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0},\quad \mathbf{B}_{21}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_{22}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Согласно правилу умножения блочных матриц имеем

$$[\mathbf{AB}]_{ij}=\sum_{\delta=1}^{2}\mathbf{A}_{\mathrm{i}\delta}\mathbf{B}_{\delta\mathrm{j}},\ \left(i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,2}\right).$$

Далее вычислим соответствующие блоки

$$[\mathbf{AB}]_{11}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{E}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{0}=\mathbf{A}_{11},$$

$$[\mathbf{AB}]_{12}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}=\mathbf{A}_{11}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{0}\cdot\mathbf{B}_{22}=\mathbf{0},$$

$$[\mathbf{AB}]_{21}=\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}=\mathbf{E}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4+6 & -6+1\\ 24 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 24 & 5\end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{AB}]_{22}=\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}=\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}=$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & -2+5\\ 0 & 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 0 & 20\end{bmatrix},$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}[\mathbf{AB}]_{11} & [\mathbf{AB}]_{12}\\ [\mathbf{AB}]_{21} & [\mathbf{AB}]_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 3 & -5 & -4 & 3\\ 24 & 5 & 0 & 20\end{bmatrix}.$$

1.3. Определители

В линейной алгебре и в других разделах математики широко применяется понятие определителя (или детерминанта) квадратной матрицы.

Теория определителей возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений, которые играют важную роль во многих прикладных направлениях, таких как линейное программирование, эконометрика.

К понятию определителя близко подошли авторы древнекитайского учебника «Математика в девяти книгах», в котором по большей части воспроизведено не дошедшее до нас математическое сочинение «Цзю шу», написанное в XII веке до н. э [13].

В Европе определители матриц (2×2) встречаются у Джероламо Кардано в XVI веке, а для старших размерностей были определены Готфридом Вильгельмом Лейбницем в 1693 году. Первая публикация на тему нахождения определителя принадлежит Габриэлю Крамеру. В его самой известной работе – трактате «Введение в анализ алгебраических кривых», изданном в 1750г., – незадолго до его кончины, он привел точный алгоритм вычисления определителя несмотря на то, что самого термина «определитель» (детерминант) тогда еще не существовало. Его ввел Иоганн Карл Фридрих Гаусс только в 1801 году. Теория определителей была заложена Александром Теофилом Вандермондом в 1772г., и далее получила свое развитие в работах Пьера-Симона Лапласа, Огюстена Луи Коши и Карла Густава Якоби. Японский математик Сэки Такакадзу ввёл понятие определителя независимо от западных ученых в 1683 году [1].

1.3.1. Основные понятия

Введем понятие **определителя** сначала для квадратных матриц первого, второго и третьего порядка, а затем распространим на квадратные матрицы произвольного порядка.

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ обозначается как $|\mathbf{A}|$ или $\det \mathbf{A}$.

Определение. Если $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ – квадратная матрица первого порядка, то ее определителем (определителем первого порядка) называется число $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, вычитается произведение элементов, находящихся на побочной диагонали.

Пример 1.13. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на $(-a_{12})$ и сложим их. В результате получим: $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, затем первое уравнение умножим на a_{21}, второе – на $(-a_{11})$, сложим их и получим: $(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}$. Полученные равенства позволяют найти значения неизвестных, а именно:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \; x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Заметим, что числители и знаменатель в выражениях для x_1 и x_2 представляют собой значения определителей второго порядка следующего вида:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Тогда
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Замечание: представленный способ нахождения корней квадратной системы уравнений через отношение определителей есть формулы Крамера, которые будут рассмотрены в следующих главах.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Пример 1.14. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель, используя его определение:

$$\Delta = 2\cdot0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot2 + 5\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot5 - 1\cdot(-4)\cdot2 - (-1)\cdot1\cdot(-3) =$$

$$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$$

Для простоты вычислений определителей третьего порядка можно воспользоваться «правилом треугольника». Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.3.2. Определитель произвольного порядка

Перестановкой n чисел $1, 2, 3, ..., n$ (или n любых различных между собой символов $a_1, a_2, ..., a_n$) называется любое расположение этих чисел (или символов) в определенном порядке. Число всех перестановок из n чисел равно $n!$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$). Говорят, что два числа в перестановке образуют **инверсию**, если большее число стоит впереди меньшего, или образуют **порядок**, если меньшее стоит впереди большего.

Способ подсчета числа инверсий: для каждого из чисел в порядке их записи считаем, сколько чисел, меньших данного, стоит правее него, и все полученные значения складываем.

Пример 1.15. В последовательности чисел {2,6,8,1,4,5} найти количество инверсий.

Решение. Количество чисел, меньших 2 и стоящих правее ее, – **1** (число 1); количество чисел, меньших 6 и стоящих правее ее, – **3** (числа 1, 4, 5); количество чисел, меньших 8 и стоящих правее ее, – **3** (числа 1, 4, 5); количество чисел, меньших 1 и стоящих правее ее, – **0**; количество чисел, меньших 4 и стоящих правее ее, – **0**; количество чисел, меньших **5** и стоящих правее ее, – **0**.

Таким образом, количество инверсий равно 7= 1 + 3 + 3.

Пример 1.16. В последовательности чисел {2,4,5,7,9,1,8,3,6} содержится 14 инверсий.

Пусть дана квадратная матрица $\mathbf{A}$ порядка n.

Составим все возможные произведения из n различных элементов матрицы $\mathbf{A}$, беря по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца матрицы. Каждое такое произведение, упорядоченное по номерам строк, можно записать в виде $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$, которое называется **членом определителя**.

Рассмотрим последовательность чисел $j_1, j_2, ..., j_n$, по построению члена определителя это различные числа, которые представляют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$.

Определение. Инверсией в последовательности $j_1, j_2, ..., j_n$ называется такое расположение индексов, когда старший индекс стоит перед младшим.

Так как всего из n чисел можно сделать $n!$ различных перестановок, то число различных членов определителя равно $n!$.

Определение. Определителем порядка n квадратной матрицы $\mathbf{A}$ порядка n (при $n > 1$) называется число

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,...,j_n)} \left(-1\right)^{s(j_1,...,j_n)} a_{1,j_1} \cdot a_{1,j_2} \cdot ... \cdot a_{1,j_n}, \quad (1)$$

где $s(j_1,..., j_n)$ – число инверсий.

Определение. Определитель матрицы k-го порядка, образованной из произвольных k столбцов, $\left(k = \overline{1,n}\right)$, и произвольных k строк, $\left(k = \overline{1,n}\right)$, матрицы $\mathbf{A}$, называется **минором** k-го порядка квадратной матрицы $\mathbf{A}$.

Определение. Определитель Δ_{ij}, получаемый из $\det\mathbf{A}$ вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, называется **дополнительным минором** к элементу a_{ij}, ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$).

С учетом определения дополнительного минора к элементу a_{ij}, ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$), формула для вычисления определителя может быть записана как

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s=1}^{n} \left(-1\right)^{s+1} a_{is}\Delta_{is}.$$

Замечание. Следует обратить внимание, что в записи формулы выше использованы элементы строки с номером i, а также дополнительные миноры к элементам строки с номером i. Представленная формула вычисления определителя называется **формулой разложения определителя по строке с номером *i***. Значение определителя не зависит от того, разложением по какой строке он будет вычислен.

1.3.3. Основные свойства определителя

2. Если две строки (столбца) поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала ситуацию, когда меняются местами две соседние строки: i и i+1. Разложим исходный определитель по строке i, а определитель с переставленными строками по строке и i+1. Разложения будут отличаться друг от друга только знаком.

Действительно, соответствующие элементы строк совпадают, их миноры тоже совпадают. Но знак меняется на противоположный, поскольку в разложении исходного определителя его знак будет определяться степенью, в которую возводится минус единица. В первом определителе это $i+j$, а во втором – на единицу больше. Таким образом, свойство справедливо для перестановки соседних строк или столбцов.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда меняются местами строки с номерами i и $i+k$. Мы можем представить эту перестановку как два последовательных шага: сначала строка i и опускается вниз на k строк, а затем строка $i+k$ поднимается вверх на k –1 одну строку. На первом шаге знак определителя меняется k раз. На втором шаге знак меняется еще k–1 раз. Значит, всего знак сменится нечетное число раз и в результате перестановки знак определителя поменяется независимо от расположения строк в матрице.

3. Если все элементы какой-нибудь строки умножить на одно и то же число, то весь определитель умножится на это число.

Например, $$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Если разложить определитель по первой строке, то в формуле (1) перед каждым слагаемым появится общий множитель. После вынесения его за скобки в скобках останется исходный определитель, что и требовалось доказать.

Следствие. Определитель, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Для доказательства следующего свойства введем следующие обозначения

$$\mathbf{a}_i = \left[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \right] - i\text{-ю строку матрицы } \mathbf{A}, \left(i = 1, 2, \dots, n \right),$$

тогда определитель матрицы

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \Delta \left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \right].$$

4. Если к элементам строки определителя прибавить соответствующие элементы строки $\mathbf{b} = \left[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n \right]$, то его можно будет

представить в виде суммы двух: исходного определителя и определителя, в котором указанная строка заменена на прибавленную

$$\Delta\left[\mathbf{a}_1+\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]=\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]+\Delta\left[\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right],$$

$$\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2+\mathbf{b} \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]=\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]+\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b} \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n+\mathbf{b}\right]=\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]+\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{b}\right].$$

Доказательство. В самом деле,

$$\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_i+\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_n\right]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_1 & a_{i2}+b_2 & a_{i3}+b_3 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(a_{ij}+b_j\right)\Delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_j\Delta_{ij}=$$

$$=\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_i \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right]+\Delta\left[\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b} \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\right],$$

что и требовалось доказать.

Например,

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если в определителе две строки одинаковые, то он равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

Доказательство. Действительно, если указанные строки поменять местами, то определитель, с одной стороны, не изменится, а с другой – у него изменится знак. Это возможно лишь в том случае, когда он равен нулю. Альтернативный способ доказать данное свойство – вычесть из второй строки определителя первую строку определителя. В результате на месте второй строки получим нулевую строку, что, согласно следствию из второго свойства, делает значение определителя равным нулю.

6. Определитель единичной матрицы равен 1. То есть

$$\det \mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Доказательство проводится с помощью метода математической индукции.

Следствие 1. Если в определителе две строки пропорциональны (т.е. $\mathbf{a}_i = \lambda \mathbf{a}_j$ и $i \neq j$), то он равен нулю.

Если, пользуясь свойством 1, вынести общий множитель, то получится, что две строки в определителе совпадают и, следовательно, он равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 2. Если одна из строк равна линейной комбинации остальных, то определитель равен нулю.

Согласно свойству 2, такой определитель можно представить в виде суммы определителей, в каждом из которых две строки пропорциональны.

Следствие 3. Если к какой-нибудь строке определителя прибавить линейную комбинацию остальных строк, то определитель не изменится.

Согласно свойству 2 он может быть представлен в виде суммы двух определителей: исходного определителя и определителя, в котором одна из строк равна линейной комбинации остальных.

1.3.4. Алгебраическое дополнение

Рассмотрим формулу (1), выражающую определитель матрицы $\mathbf{A}$ через ее элементы. Сгруппируем в ней все те слагаемые, которые содержат в качестве сомножителя элемент a_{ij}, и вынесем общий множитель a_{ij} за скобки. Та сумма, которая останется после этого в скобках, называется **алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij}.

Теорема 1.4. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} равно минору, дополнительному к a_{ij}, взятому со знаком « + », если число $(i+j)$ четно, и со знаком « – », если число $(i+j)$ нечетно:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Доказательство. Из определения следует, что алгебраическое дополнение A_{ij} представляет собой определитель, полученный из $\det\mathbf{A}$ заменой элемента a_{ij} на единицу, а всех остальных элементов i- й строки – на нули. С другой стороны, если такой определитель разложить по i-й строке, то окажется, что он равен $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.■

Замечание. Доказанная теорема позволяет по-новому записывать формулу разложения определителя по i-й строке, а именно:

$$\det A = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}. \qquad (2)$$

Теорема 1.5. Справедлива следующая формула, называемая формулой разложения определителя по столбцу с номером *j*,

$$\det\mathbf{A} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}.$$

Теорема 1.6. Для любой $(n \times n)$-матрицы $\mathbf{A}$ имеет место равенство

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно – в этом случае транспонированная матрица совпадает с исходной. Допустим, что теорема доказана для $n = k$. Тогда разложение определителя порядка $(k+1)$ матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ по первой строке совпадает с разложением определителя матрицы $\mathbf{A}$ по первому столбцу. ■

Следствие. Все утверждения о строках определителя справедливы и для его столбцов. Иными словами, строки и столбцы в определителе равноправны.

Теорема 1.7. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – квадратные матрицы одной и той же размерности, тогда $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Доказательство этой теоремы для наглядности приведем на квадратных матрицах размерности 2. Доказательство для общего случая можно посмотреть в [7].

Пусть $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$ – квадратные матрицы второго порядка, тогда их произведение

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$ – квадратная матрица того же порядка.

Докажем, что

$$\det \mathbf{C} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Для доказательства рассмотрим два вспомогательных определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{и} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ -1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} .$$

Определитель Δ_2 вычислим, раскладывая по последним строкам

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a_{11} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{21} & c_{22} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \det \mathbf{C} .$$

Получили, что $\Delta_1 = \Delta_2$. Теперь нужно показать, что определитель Δ_2 может быть получен из Δ_1 путем сложения столбцов и строк.

Прибавим теперь к третьему столбцу определителя Δ_1 первый столбец, умноженный на b_{11}, и второй столбец, умноженный на b_{21}. Затем прибавим к четвертому столбцу первый столбец, умноженный на b_{12}, и второй столбец, умноженный на b_{22}. В результате получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Delta_2 .$$

Следовательно, $\det \mathbf{C} = \Delta_2 = \Delta_1 = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

1.3.5. Примеры вычисления определителей

Пример 1.17. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Выберем третий столбец.

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки (напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки вторую строку, умноженную на 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Пример 1.18. Вычислить определитель n-го порядка, в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель $\mathbf{A}$ по первой строке

$$\mathbf{A} = a_{11} A_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & .. & 0 \\ a_{32} & a_{33} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n2} & a_{n3} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий справа, можно снова разложить по первой строке, тогда получим

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & .. & 0 \\ a_{43} & a_{44} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n3} & a_{n4} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

И так далее. После n шагов придем к равенству $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.

Пример 1.19. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .. & n \\ -1 & 0 & 3 & .. & n \\ -1 & -2 & 0 & .. & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -2 & -3 & .. & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, будут равны нулю.

А именно, получим определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .. & n \\ 0 & 2 & 6 & .. & 2n \\ 0 & 0 & 3 & .. & 2n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & n \end{vmatrix}$, равный исходному.

Рассуждая как в предыдущем примере найдем, что он равен произведению элементов главной диагонали, то есть $\mathbf{n!}$.

Способ, с помощью которого вычислен данный определитель, называется **способом приведения определителя к треугольному виду**.

1.4. Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ порядка n называется обратной по отношению к матрице $\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \tag{3}$$

Обратная матрица обозначается символом $\mathbf{A}^{-1}$. Таким образом,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Из определения вытекает, что порядок матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ равен n.

Определение. Матрица $\mathbf{A}$ называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю.

Теорема 1.8. Квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырожденная $\left(\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}\right)$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Доказательство:

1. **Необходимость.** Предположим, что для матрицы $\mathbf{A}$ существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Тогда выполняется (3): $\det\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right)=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{-1}=\det\mathbf{E}=\mathbf{1}$. Следовательно, $\det\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$.

2. **Достаточность.** Пусть $\det\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$. Введем матрицу $\mathbf{C}=\left[c_{ij}\right]$, элементы которой $c_{ij}=A_{ji}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Матрица $\mathbf{C}$ называется **присоединенной (союзной)** по отношению к матрице $\mathbf{A}$. Рассмотрим произведение матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$. Элемент произведения

$$\left(AC\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\det\mathbf{A}, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Отсюда, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\det\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$. Аналогично, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\det\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$. Имеем, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}=\det\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^{-1}$, поэтому $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{C}}{\det\mathbf{A}}$ удовлетворяет определению обратной матрицы.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.\ \blacksquare$$

Теорема 1.9. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу, то она единственная.

Доказательство (от противного). Предположим, что для некоторой матрицы $\mathbf{A}$ существуют две обратные матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Тогда

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Умножим первое соотношение на матрицу $\mathbf{A}_2$ слева, получим

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}_2\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_1\right)=\left(\mathbf{A}_2\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_1.\ \blacksquare$$

1.4.1. Свойства обратной матрицы

2. $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\left(\det\mathbf{A}\right)^{-1}$.

3. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$.

4. $\mathbf{E}^{-1}=\mathbf{E}$.

5. $\left(\lambda\mathbf{A}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$.

6. $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

7. $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

Пример 1.20. Найти обратную матрицу для матрицы $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы $\mathbf{A}$ разложением по первому столбцу:

$$\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы $\mathbf{A}$ существует.

2. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы $\mathbf{A}$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij},$$

где Δ_{ij} – дополнительный минор к элементу a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Значит,

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

1.4.2. Метод Гаусса–Жордана

Рассмотрим еще один способ вычисления обратной матрицы, используя равенство $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Возьмём две матрицы: невырожденную матрицу $\mathbf{A}$ и единичную матрицу $\mathbf{E}$. Приведём матрицу $\mathbf{A}$ к единичной матрице методом Гаусса–Жордана, применяя преобразования только по строкам (можно также применять преобразования и только по столбцам). После применения каждой операции к первой матрице применим ту же операцию ко второй. Когда приведение первой матрицы к единичному виду будет завершено, вторая матрица окажется равной $\mathbf{A}^{-1}$. Удобно совершать элементарные преобразования над $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту.

Пример 1.21. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}$.

Решение. Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

С помощью элементарных преобразований столбцов приведем левую «половину» к единичной, совершая одновременно точно такие же преобразования над правой матрицей.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{(3)-(2)\\(2)-2(1)}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{(3)-(1)\\(1)-2(2)}}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -13 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{(1)\leftrightarrow(2)\\-1\cdot(3)}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{(2)+13(3)\\(1)-6(3)}}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.5. Арифметическое пространство

Определение. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$, для которых определены операции сложения и умножения на число по правилам:

1. $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{bmatrix}$;

2. $\lambda\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \dots & \lambda a_n \end{bmatrix}$,

называется **арифметическим пространством**.

Если числа, о которых идет речь в определении, вещественные, то пространство обозначается символом R^n, а если комплексные – то символом C^n. Сами элементы арифметического пространства условимся обозначать $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ и называть их для краткости строками, хотя, конечно, записывать их можно и в виде столбцов.

1.5.1. Понятие о линейной зависимости вектор-столбцов (вектор-строк)

Пусть даны m вектор-столбцов размера $(n \times 1)$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

и m скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Умножим первый столбец на λ_1, второй столбец на λ_2 и, наконец, m-й столбец на λ_m. Рассмотрим сумму

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \lambda_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_m a_{1m} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{2m} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ldots + \lambda_m a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Определение. Вектор-столбец $\mathbf{a}$ называется **линейной комбинацией вектор-столбцов** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называются **коэффициентами линейной комбинации**.

Если все коэффициенты равны 0, то линейная комбинация называется тривиальной, в противном случае (т.е. если хотя бы один коэффициент отличен от нуля) – нетривиальной.

Среди всевозможных строк особую роль играют строки

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

(т.е. строки $\mathbf{e}_i$ у которых на i-м месте стоит 1, а в остальных местах – 0), поскольку любая строка может быть представлена, и при том единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{bmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_m.$$

Строки (4) условимся в дальнейшем называть координатными строками.

Определение. Вектор-столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называются **линейно зависимыми**, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно, что имеет место равенство

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \tag{5}$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор-столбец размера $(n \times 1)$.

Если соотношение (5) выполняется лишь тогда, когда все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ равны нулю одновременно, то вектор-столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называются **линейно независимыми**.

Тем самым, можно сказать, что строки называются линейно независимыми, если обращение в нулевую строку их линейной комбинации возможно лишь в том случае, когда эта линейная комбинация тривиальна.

Примером линейно независимых строк могут служить, очевидно, координатные строки (4).

1.5.2. Теоремы о линейной зависимости

Теорема 1.7. Если система вектор-столбцов содержит нулевой столбец, то они линейно зависимы.

Доказательство. Пусть, например, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Тогда, в качестве первого коэффициента можно взять любое ненулевое число, например $\lambda_1 = 1$, а остальные коэффициенты положить равными нулю $\lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Тогда для линейной комбинации имеет место равенство

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

то есть существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация обращается в нулевой вектор. Следовательно, столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы. ■

Теорема 1.8. Если какие-нибудь k из m вектор-столбцов линейно зависимы, то все m вектор-столбцов линейно зависимы.

Доказательство. Пусть, например, столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные нулю одновременно, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, для системы из m столбцов имеем

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

что и означает, что столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы. ■

Теорема 1.9. Если столбцы линейно зависимы, то один из них равен линейной комбинации остальных.

Доказательство. Если столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно, обращающие линейную комбинацию этих вектор-столбцов в нулевой вектор, то есть имеет место равенство

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Так как хотя бы одно число из $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ отлично от нуля, например, $\lambda_1 \neq 0$, то разделив на это число, можно выразить вектор-столбец $\mathbf{a}_1$ через линейную комбинацию остальных:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\mathbf{a}_m,$$

что и требовалось доказать.

Понятия линейной зависимости и линейной независимости определяются для строк и столбцов одинаково. Поэтому свойства, связанные с этими понятиями, сформулированные для столбцов, разумеется, справедливы и для строк.

Сформулируем свойства линейно зависимых и линейно независимых столбцов (строк) матриц.

1. Если в систему столбцов (строк) входит нулевой столбец (строка), то имеем систему линейно зависимых столбцов (строк).

2. Если в системе столбцов (строк) имеется два равных столбца (строки), то имеем систему линейно зависимых столбцов (строк).

3. Если в системе столбцов (строк) имеется два пропорциональных столбца (строки), то имеем систему линейно зависимых столбцов (строк).

4. Система из $k>1$ столбцов (строк) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из столбцов (строк) является линейной комбинацией остальных.

5. Любые столбцы (строки), входящие в линейно независимую систему, образуют подсистему линейно независимых столбцов (строк).

6. Система столбцов (строк), содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Пример 1.22. Установить линейную зависимость или линейную независимость вектор-столбцов $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$.

Решение. Нетрудно заметить, что $\mathbf{a}_2=3\cdot\mathbf{a}_1$, поэтому при $3\cdot\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$, то есть при $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1$ линейная комбинация обращается в нуль, то есть столбцы линейно зависимы.

Пример 1.23. Используя определение, установить линейную зависимость или линейную независимость систем столбцов

$$1)\ \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\quad 2)\ \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}.$$

Решение.

1) столбцы $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, линейно зависимы, так как можно составить нетривиальную линейную комбинацию, например, с коэффициентами $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$, которая равна нулевому столбцу: $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2) столбцы $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ линейно независимы, так как равенство $\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, равносильное системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 = 0 \\ \lambda_2 \cdot 2 = 0 \end{cases},$$

оказывается верным только при $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$.

Пример 1.24. Исследовате на линейную зависимость вектор-строки $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение. Так как вектор-строка $\mathbf{a}_3$ нулевая, то исходная система векторов линейно зависима в силу первой теоремы.

В общем случае проверка условия линейной зависимости сводится к нахождению решения системы уравнений.

Пример 1.25. Пусть даны вектор-столбцы

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Построим линейную комбинацию этих вектор-столбцов и приравняем к нулевому вектор-столбцу

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно правилам сложения и умножения матриц получаем равенство

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем систему уравнений для коэффициентов $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

решение которой $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$.

Получили, что линейная комбинация вектор-столбцов обращается в ноль только тогда, когда все коэффициенты равны нулю одновременно. Следовательно, данные вектор-столбцы линейно независимые.

1.6. Ранг матрицы

Понятие ранга матрицы часто возникает и играет важную роль в линейной алгебре и ее приложениях. В частности, оно оказывается очень полезным при решении систем линейных уравнений. Одним из проявлений этого является критерий совместности системы линейных уравнений, который формулируется на языке рангов основной и расширенной матриц системы.

1.6.1. Определение ранга матрицы

Прежде чем озвучить определение ранга матрицы, следует хорошо разобраться с понятием минора, а нахождение миноров матрицы подразумевает умение вычислять определитель. Рассмотрим прямоугольную матрицу $\mathbf{A}$ размера $(m \times n)$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка.

Определитель этой матрицы M_k будем называть минором k -го порядка матрицы **A**.

Рассмотрим на примере матрицы размера 3x3. Рассмотрим матрицу

$$A_{3x3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Запишем несколько миноров первого порядка этой матрицы. К примеру, если мы выберем третью строку и второй столбец матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

то нашему выбору соответствует минор первого порядка $M_1 = \det|a_{32}| = a_{32}$.

Если же выбрать первую строку и третий столбец матрицы **A**, получим минор $M_1 = \det|a_{13}| = a_{13}$.

Таким образом, минорами первого порядка матрицы являются сами элементы матрицы.

Покажем пример минора второго порядка. Выбираем две строки и два столбца. К примеру, возьмем первую и вторую строки и второй и третий столбец.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

При таком выборе имеем минор второго порядка

$$M_2 = \det\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}.$$

Минор третьего порядка матрицы **A** совпадает с ее определителем.

Для данной матрицы **A** миноров порядка выше третьего не существует.

Число миноров порядка k может быть вычислено как $C_m^k \cdot C_n^k$, где $C_m^k = \dfrac{m!}{k!\cdot(m-k)!}$ $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ – число сочетаний из m по k и из n по k соответственно.

Очевидно, что матрица **A** обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n.

Пример 1.26. Найдите все миноры второго порядка матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как порядок исходной квадратной матрицы равен 3, то миноров второго порядка будет $C_3^2 \cdot C_3^2 = \dfrac{3!}{2!\cdot(3-2)!} \cdot \dfrac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 9$.

Возьмем первую и вторую строки матрицы **A**. Добавив к этим строкам первый и второй столбцы, первый и третий столбцы, второй и третий столбцы, получим соответственно миноры

$$M_{столбцы 1,2}^{строки 1,2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3,\ M_{1,3}^{1,2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -6,\ M_{2,3}^{1,2}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -3.$$

Для первой и третьей строк

$$M_{1,2}^{1,3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6, M_{1,3}^{1,3}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -12,\ M_{2,3}^{1,3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -6.$$

Для второй и третьей строк

$$M_{1,2}^{2,3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-3,\ M_{1,3}^{2,3}\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & 9\end{vmatrix}=-6,\ M_{2,3}^{2,3}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{vmatrix}=-3.$$

Если не все элементы матрицы равны нулю, то всегда можно указать целое число r, такое, что у матрицы $\mathbf{A}$ имеется минор M_r порядка r, отличный от нуля.

Теперь дадим определение ранга матрицы.

Определение. Натуральное число r называется рангом матрицы $\mathbf{A}$, если:

1) существует минор M_r матрицы $\mathbf{A}$ порядка r, отличный от нуля;

2) все имеющиеся миноры порядка $r+1$ и выше, если они существуют, равны нулю.

Ранг матрицы обозначается одним из следующих символов:

$$r = rang(\mathbf{A}) = Rang(\mathbf{A}) = Rank(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}).$$

Очевидно, что $Rang(\mathbf{0}) = 0$. Если $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, то $0 < Rang(\mathbf{A}) < \min(m,n)$.

Согласно определению ранг матрицы можно находить перебором миноров. Опишем алгоритм решения этой задачи.

1.6.2. Свойства ранга матрицы

1. Ранг матрицы не изменится при умножении всех элементов столбца или строки на отличное от нуля число.

2. Ранг матрицы не изменится при перестановке её строк или столбцов.

3. Ранг матрицы не изменится при ее транспонировании.

4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из её столбцов (строке) прибавить другой столбец (строку), умноженный на некоторое число.

5. Ранг матрицы не изменится, если удалить из неё столбец (строку), который является линейной комбинацией других столбцов (строк).

Алгоритм нахождения ранга матрицы методом перебора миноров

1) если есть хотя бы один элемент матрицы, отличный от нуля, то ранг матрицы как минимум равен единице (так как есть минор первого порядка, не равный нулю);

2) далее перебираем миноры второго порядка. Если все миноры второго порядка равны нулю, то ранг матрицы равен единице. Если существует хотя бы один ненулевой минор второго порядка, то переходим к перебору миноров третьего порядка, а ранг матрицы как минимум равен двум;

3) аналогично, если все миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы равен двум. Если существует хотя бы один минор третьего порядка, отличный от нуля, то ранг матрицы как минимум равен трем, а мы преступаем к перебору миноров четвертого порядка.

4) повторяем шаг 3).

Пример 1.27. Вычислить ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Решение. Построим минор второго порядка, например, образованный первыми двумя столбцами и первыми двумя строками:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Очевидно, что для данной матрицы мы можем построить единственный минор третьего порядка

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 9 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Получили, что наибольший прядок ненулевого минора равен двум, то есть ранг матрицы равен двум: $Rang(\mathbf{A}) = 2$.

Пример 1.27. Вычислить ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Решение. Построим минор второго порядка, например, образованный первыми двумя столбцами и первыми двумя строками:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, ранг матрицы **A** не меньше двух.

Переходим к перебору миноров третьего порядка.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 0 - 2 + 2 - 0 = 7 \neq 0.$$

Минор третьего порядка не равен нулю. Поэтому, ранг матрицы равен трем.

1.6.3. Метод окаймляющих миноров

Количество вычисляемых миноров при нахождении ранга матрицы можно существенно уменьшить, если использовать так называемый **метод окаймляющих миноров**.

Говорят, что минор M_{k+1} матрицы **A** окаймляет минор M_k, если матрица, соответствующая минору M_{k+1}, «содержит» матрицу, соответствующую минору M_k .Другими словами, окаймляющий минор для минора M_k порядка k получается путем добавления к нему одной строки и одного столбца и имеет порядок $(k+1)$.

Метод окаймляющих миноров обосновывается следующей теоремой (приведем ее формулировку без доказательства).

Теорема 1.10. Если все миноры, окаймляющие минор k-го порядка матрицы **A** размерности $(m\text{x}n)$, равны нулю, то все миноры порядка $(k+1)$ матрицы **A** равны нулю.

Таким образом, для нахождения ранга матрицы не обязательно перебирать все миноры, достаточно окаймляющих.

Количество миноров, окаймляющих минор k-го порядка матрицы **A** порядка , находится по формуле $(m\text{-}k)(n\text{-}k)$.

Отметим, что миноров, окаймляющих минор k-го порядка матрицы **A**, не больше, чем миноров $(k+1)$-го порядка матрицы **A**. Поэтому, в большинстве случаев использование метода окаймляющих миноров выгоднее простого перебора всех миноров.

Опишем **алгоритм** нахождения ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

1. Если матрица **A** ненулевая, то в качестве минора первого порядка берем любой элемент матрицы **A**, отличный от нуля.

2. Рассматриваем его окаймляющие миноры. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен единице.

3. Если же есть хотя бы один ненулевой окаймляющий минор (его порядок равен двум), то переходим к рассмотрению его окаймляющих миноров. Если все они равны нулю, то $Rank(\mathbf{A}) = 2$. Если хотя бы один окаймляющий минор отличен от нуля (его порядок равен трем), то рассматриваем его окаймляющие миноры. И так далее.

В общем случае алгоритм имеет вид:

1. Пусть некий минор M_k порядка k не равен нулю.

2. Проверка окаймляющих миноров

- Если окаймляющие миноры порядка $(k+1)$, составить невозможно (то есть матрица содержит k строк или k столбцов), то ранг равен k.
- Если окаймляющие миноры существуют и все равны нулю, то ранг равен k.
- Если среди окаймляющих миноров есть хотя бы один, отличный от нуля, то повторяем для него пункт 1, приняв $k+1$ вместо k.

Пример 1.28. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы $\mathbf{A}$. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен двум.

Пример 1.29. Докажите, что система векторов $\mathbf{e}_1 = [1 \;\; 2 \;\; -1 \;\; -2 \;\; 0]$, $\mathbf{e}_2 = [2 \;\; 3 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 1]$, $\mathbf{e}_3 = [1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2]$, $\mathbf{e}_3 = [1 \;\; 3 \;\; -1 \;\; 0 \;\; -1]$ линейно независима.

Решение. Составим матрицу, строками которой будут векторы данной системы:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Покажем, что ранг этой матрицы равен количеству векторов исходной системы, то есть, четырем.

Ранг найдем методом окаймляющих миноров.

В качестве минора первого порядка, отличного от нуля, возьмем элемент $a_{11} = 1$ матрицы **A**.

Окаймляющий его минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$ также отличен от нуля.

Переходим к поиску окаймляющего минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = -2 \neq 0$$

Осталось найти минор четвертого порядка, отличный от нуля. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к первому столбцу третий, далее разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+(-1) & 2 & -1 & -2 \\ 2+0 & 3 & 0 & -2 \\ 1+1 & 2 & 1 & 4 \\ 1+(-1) & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 4 \neq 0.$$

Таким образом, ранг матрицы **A** равен четырем, что доказывает линейную независимость исходной системы векторов.

1.6.4. Нахождение ранга с помощью элементарных преобразований матрицы (методом Гаусса)

Для матриц большой размерности вычисление всех миноров затруднительно, в этом случае матрицу преобразуют к так называемому **ступенчатому** виду, воспользовавшись операциями, не изменяющими ранг матрицы (эквивалентными преобразованиями).

Определение. **Элементарными преобразованиями** называются следующие преобразования матриц:

1. Перестановка двух любых столбцов (строк) матрицы.
2. Умножение столбца (строки) на отличное от нуля число.
3. Прибавление к одному столбцу (строке) линейной комбинации других столбцов (строк).

Из свойств ранга матрицы вытекает, что элементарные преобразования матрицы не меняют её ранг.

Определение. Две матрицы **A** и **B** называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Эквивалентность матриц обозначается с помощью символов $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований матрицы основано на утверждении: если матрица **B** получена из матрицы **A** с помощью конечного числа элементарных преобразований, то их ранги равны

$$Rang(\mathbf{A}) = Rang(\mathbf{B}).$$

Справедливость этого утверждения следует из свойств определителя матрицы:

- При перестановке строк (или столбцов) матрицы ее определитель меняет знак. Если он равен нулю, то при перестановке строк (столбцов) он остается равным нулю.

- При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольное число k отличное от нуля, определитель полученной матрицы равен определителю исходной матрицы, умноженному на k. Если определитель исходной матрицы равен нулю, то после умножения всех элементов какой-либо строки или столбца на число k определитель полученной матрицы также будет равен нулю.
- Прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) матрицы, умноженных на некоторое число k, не изменяет ее определителя.

Из определения вытекает, что эквивалентные матрицы не являются равными, но имеют одинаковый ранг.

Определение. Матрица вида $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ называется **канонической**.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц, стоящих на её диагонали.

Определение. Всякий минор матрицы $\mathbf{A}$ порядка r, отличный от нуля, называется базисным минором. Столбцы и строки матрицы, пересечением которых образован базисный минор, называются базисными столбцами и базисными строками.

Суть метода элементарных преобразований заключается в приведении матрицы, ранг которой нам требуется найти, к ступенчатому виду (в частном случае – к верхней треугольной) с помощью элементарных преобразований.

Для чего это делается? Ранг матриц такого вида очень легко найти. Он равен количеству строк, содержащих хотя бы один ненулевой элемент. А так как ранг матрицы при проведении элементарных преобразований не изменяется, то полученное значение будет рангом исходной матрицы.

Опишем **алгоритм метода**.

Пусть нам требуется найти ранг ненулевой матрицы $\mathbf{A}_{mn}$.

$$\mathbf{A}_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что элемент a_{11} отличен от нуля. В противном случае мы можем перестановкой строк и (или) столбцов преобразовать матрицу так, чтобы «новый» элемент a_{11} стал ненулевым.

Умножим все элементы первой строки матрицы $\mathbf{A}$ на $1/a_{11}$. При этом получим эквивалентную матрицу, обозначим ее $\mathbf{A}^{(1)}$:

$$\mathbf{A}_{mn} \sim \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

К элементам второй строки полученной матрицы $\mathbf{A}^{(1)}$ прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на $-a_{21}^{(1)}$. К элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на $-a_{31}^{(1)}$. И так далее до m-й строки. Получим эквивалентную матрицу, обозначим ее $\mathbf{A}^{(2)}$:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}^{(1)} \sim \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} + \left(-a_{21}^{(1)}\right) & a_{22}^{(1)} + \left(-a_{21}^{(1)}\right) & \cdots & a_{2n}^{(1)} + \left(-a_{21}^{(1)}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(1)} + \left(-a_{m1}^{(1)}\right) & a_{m2}^{(1)} + \left(-a_{m1}^{(1)}\right) & \cdots & a_{mn}^{(1)} + \left(-a_{m1}^{(1)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Если все элементы полученной матрицы, находящиеся в строках со второй по m-ю, равны нулю, то ранг этой матрицы равен единице, а, следовательно, и ранг исходной матрицы равен единице.

Если же в строках со второй по m-ю есть хотя бы один ненулевой элемент, то продолжаем проводить преобразования, действуя абсолютно аналогично.

Мы разобрали понятие ранга матрицы и рассмотрели три способа его нахождения:

- по определению методом перебора всех миноров;
- методом окаймляющих миноров;
- методом элементарных преобразований.

Целесообразно всегда использовать метод элементарных преобразований при нахождении ранга матрицы, так как он приводит к результату при меньшем объеме вычислений, по сравнению с методом окаймляющих миноров, и тем более в сравнении с методом перебора всех миноров матрицы.

Пример 1.30. Определить ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение. Поменяем местами первую и вторую строки

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Домножим вторую строку на $1/2$ и прибавим к третьей строке две первых

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}^{(1)} \sim \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

На этом заканчиваем преобразования. Получаем $Rank\,\mathbf{A}^{(2)} = 3$, следовательно, $Rank\,\mathbf{A} = 3$.

Пример 1.31. Определить ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Решение. У матрицы **A** существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(\mathbf{A}) \leq 4$.

1) поменяем местами первую и вторую строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

2) прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы первого столбца, кроме a_{11}, окажутся равными нулю

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

3) вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и вычеркнем нулевые строки

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен рангу полученной матрицы размера (2×6), т.е. $r(\mathbf{A}) \le 2$. Минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \ne 0$, следовательно, $r(\mathbf{A}) = 2$.

1.6.5. Псевдообратная матрица

Если $\mathbf{A}$ – квадратная, невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Если матрица $\mathbf{A}$ – прямоугольная размерности $(m \times n)$ и $m \ne n$ или она квадратная, но вырожденная $(m = n,\ \det \mathbf{A} = 0)$, то она не имеет обратной, и символ $\mathbf{A}^{-1}$ не имеет смысла. Для произвольной прямоугольной матрицы $\mathbf{A}$ существует «псевдообратная» матрица $\mathbf{A}^{+}$, которая обладает некоторыми свойствами обратной и имеет важные применения при решении систем линейных уравнений. В случае, когда $\mathbf{A}$ – квадратная, невырожденная матрица, псевдообратная матрица $\mathbf{A}^{+}$ совпадает с обратной $\mathbf{A}^{-1}$.

Определение. Матрица $\mathbf{A}^+$ размерности $(n \times m)$ называется псевдообратной для $(m \times n)$-матрицы $\mathbf{A}$, если выполняются равенства:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{U}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{V},$$

где $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ – некоторые матрицы, а $\mathbf{A}^*$ – матрица, **сопряженная** с $\mathbf{A}$, то есть полученная из $\mathbf{A}$ транспонированием и заменой всех элементов на комплексно-сопряженные.

Воспользуемся представлением произвольной прямоугольной матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right], i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$ ранга r в виде произведения двух матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, имеющих соответственно размерности $(m \times r)$ и $(r \times n)$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}.$$

Здесь ранги сомножителей обязательно равны рангу произведения:

$$r_{\mathbf{B}} = r_{\mathbf{C}} = r.$$

Такое разложение называется **скелетным разложением** матрицы $\mathbf{A}$, и чтобы его получить, достаточно взять в качестве столбцов матрицы $\mathbf{B}$ r линейно независимых столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Тогда произвольный столбец матрицы $\mathbf{A}$ с номером j будет линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{B}$ с коэффициентами $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{rj}$. Эти коэффициенты и образуют столбец матрицы $\mathbf{C}$ с номером j.

Прибегая к скелетному разложению матрицы $\mathbf{A}$, псевдообратную матрицу $\mathbf{A}^+$ можно получить по формуле

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^* \left(\mathbf{C}\mathbf{C}^* \right)^{-1} \left(\mathbf{B}^*\mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^*,$$

где $\mathbf{B}^*$ и $\mathbf{C}^*$ – сопряженные матрицы для матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно.

Пример 1.32. Пусть $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Требуется найти псевдообратную матрицу $\mathbf{A}^{+}$.

Решение. $Rang\mathbf{A} = 2$. Примем в качестве столбцов матрицы $\mathbf{B}$ первые 2 столбца матрицы $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^{*}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \ \left(\mathbf{B}^{*}\mathbf{B}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{*} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \left(\mathbf{C}\mathbf{C}^{*}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{E}.$$

Тогда по формуле

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{*}\left(\mathbf{C}\mathbf{C}^{*}\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^{*}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{*} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/9 & 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 1/9 \\ 4/9 & 1/9 & 5/9 \end{bmatrix}.$$

Свойства псевдообратной матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{+} = \left(\mathbf{A}^{+}\right)^{*}$;

2. $\left(\mathbf{A}^{+}\right)^{+} = \mathbf{A}$;

3. $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{*} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$, $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{2} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$;

4. $\left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{*} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$, $\left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{2} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$.

1.7. Вопросы для контроля

1.7.1. Теоретические вопросы для повторения

1. Понятие матрицы. Равенство матриц. Виды матриц (вектор-столбец, вектор-строка, нулевая, диагональная, скалярная, симметричная).

2. Алгебраические операции над матрицами: сложение и разность матриц. Свойства с доказательством.

3. Алгебраические операции над матрицами: умножение матрицы на число. Свойства с доказательством. Транспонирование матриц.

4. Алгебраические операции над матрицами: произведение матриц. Свойства (без доказательств).

5. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц. Свойства.

6. Определители. Определение, свойства, следствия.

7. Определение линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Доказать теорему: *если система вектор-столбцов содержит нулевой столбец, то они линейно зависимы*.

8. Определение линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Доказать теорему: *если какие-нибудь k из m вектор-столбцов линейно зависимы, то все вектор-столбцы линейно зависимы.*

9. Определение линейной зависимости строк (столбцов) матрицы. Доказать теорему: *если столбцы линейно зависимы, то один из них равен линейной комбинации остальных*.

10. Обратная матрица (определение). Доказать теорему: *если матрица* ***A*** *имеет обратную матрицу, то она единственная*.

11. Обратная матрица (определение). Свойства.

12. Обратная матрица (определение). Способы вычисления обратной матрицы.

13. Ранг матрицы. Определение. Свойства. Методы вычисления.

1.7.2. Примерные вопросы для подготовки к тестированию

Определитель

1. При вынесении общего множителя строки за знак определителя определитель…

2. При транспонировании определителя определитель…

3. При перестановке двух строк определитель…

4. Если определитель содержит одинаковые строки, то….

5. Если определитель содержит нулевую строку или столбец, то ….

6. Минор отличается от алгебраического дополнения (чем)

7. Как изменится определитель n-го порядка, если транспонировать его матрицу?

8. Как изменится определитель n-го порядка, если поменять местами его две строки?

9. Чему равен определитель n-го порядка с двумя пропорциональными столбцами?

10. Как изменится определитель n-го порядка, если к первой его строке прибавить сумму всех остальных строк?

11. Верно ли, что определитель суммы матриц равен сумме определителей?

12. Верно ли, что определитель произведения матриц равен произведению определителей?

Ранг

1. Сформулируйте метод окаймляющих миноров вычисления ранга матрицы.

2. Сформулируйте метод элементарных преобразований вычисления ранга матрицы.

3. Чему равен ранг невырожденной матрицы порядка n?

4. Если матрица порядка n имеет ранг n, то означает ли это, что матрица невырожденная?

5. Дайте определение базисного минора.

6. Если в систему столбцов входит нулевой столбец, то она линейно зависима или линейно независима?

7. Если в системе столбцов имеется два равных столбца, то она линейно зависима или линейно независима?

8. Если матрица размерности $(n \times n)$ имеет ранг $r = n$, означает ли это, что матрица невырожденная?

9. Выберите верное утверждение:

- При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на любое отличное от нуля число ранг матрицы не изменится.
- При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на любое отличное от нуля число ранг матрицы умножается на это число.
- При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ранг матрицы меняет знак.
- При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ранг матрицы не меняется.

10. Если в матрице размера (3x5) элементы 1-го, 3-го и 5-го столбцов являются линейной комбинацией элементов остальных двух столбцов, то ранг этой матрицы равен …

Обратная Матрица

1.Верно ли, что обратная матрица к невырожденной матрице также является невырожденной матрицей?

2.Сформулируйте метод вычисления обратной матрицы через вычисление присоединенной матрицы.

3. Присоединенная матрица строится из (алгебраических дополнений, миноров; определителей).

4.Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель …

5.Сформулируйте метод вычисления обратной матрицы через присоединение единичной матрицы.

6. Для какой матрицы может существовать обратная к ней (прямоугольной, квадратной, произвольной). Необходимое условие существования обратной матрицы.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия

Определение. Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – заданные числа, называемые коэффициентами уравнения, а b – заданное число, называемое свободным членом уравнения.

Рассмотрим систему m линейных уравнений (СЛУ) с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{6}$$

Определение. Система уравнений называется **однородной**, если все свободные члены $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots m$.

Определение. Система уравнений (6) называется квадратной, если число уравнений m равно числу неизвестных n.

Введем обозначения:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ – основная матрица СЛУ,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \ \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$ – вектор–столбцы матицы **A**,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = [\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}]$$ – расширенная матрица СЛУ,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$ – вектор неизвестных переменных, $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$ – вектор свободных членов.

Тогда система уравнений (6) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{7}$$

Определение. Решением системы (6) называется любой набор чисел $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, обращающий все уравнения (6) в тождества.

Определение. Система линейных уравнений (6) называется **совместной**, или **разрешимой**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, или **неразрешимой**, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Каждое решение системы называется ее **частным решением**, а всё множество частных решений называется **общим решением** системы.

2.2. Разрешимость системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Теорема 2.1. (Кронекера–Капелли). Решение системы (6) существует тогда и только тогда, когда $Rang\mathbf{A}=Rang\tilde{\mathbf{A}}$ (ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы).

Доказательство.

Необходимость. Пусть система (6) совместна. Тогда существует ее решение $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_n = c_n$, где $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Подставим решение в СЛУ (6), получим тождества

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n = b_m, \end{cases}$$

или

$$\mathbf{a}_1 c_1 + \mathbf{a}_2 c_2 + \dots + \mathbf{a}_n c_n = \mathbf{b}.$$

Следовательно, столбец $\mathbf{b}$ равен линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

По свойству ранга матрицы ранг не изменится, если из матрицы удалить столбец, являющийся линейной комбинацией остальных столбцов. Но удалив из расширенной матрицы столбец свободных членов, получим основную матрицу системы. Следовательно, их ранги совпадают $Rang\mathbf{A} = Rang\tilde{\mathbf{A}}$.

Достаточность. Предположим теперь, что $Rang\mathbf{A} = Rang\tilde{\mathbf{A}}$. Выделим r базисных столбцов матрицы $\mathbf{A}$, которые, очевидно, будут базисными и для матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$. Тогда столбец $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией этих базисных столбцов, то есть существуют такие числа $c_1, c_2, \dots, c_r$, что

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 c_1 + \mathbf{a}_2 c_2 + \dots + \mathbf{a}_r c_r.$$

Если положить $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_r = c_r,\ x_{r+1} = 0,\ \dots,\ x_n = 0,$ то уравнения системы превратятся в верные равенства. То есть система совместна. ■

2.3. Квадратные системы уравнений

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, $Rang\mathbf{A} \le Rang\tilde{\mathbf{A}} \le n$. Поэтому система (8) имеет одно и только одно решение тогда и только тогда, когда $Rang\mathbf{A} = n$ т.е. $\det \mathbf{A} \ne 0$.

Запишем систему (8) в матричном виде $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Так как $\det \mathbf{A} \ne 0$, то $\exists$ обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, тогда, умножив матричное уравнение слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получим $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Учитывая, что $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, а $\mathbf{Ex} = \mathbf{x}$, окончательно имеем $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

2.3.1. Формулы Крамера

Так как обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ определяется формулой

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

то полученное в матричной форме решение системы уравнений может быть записано как

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}b_k\right) \\ \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2}b_k\right) \\ ... \\ \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}b_k\right) \end{bmatrix}.$$

Вектор решений позволяет записать формулу для каждой неизвестной переменной

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}, \ i = \overline{1,n},$$

что равносильно равенству

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

где $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\Delta = \det \mathbf{A}$.

Формулы (9) называются **формулами Крамера.** Очевидно, что формулы Крамера применимы только для квадратных систем линейных уравнений, для которых основные матрицы системы – невырожденные.

Пример 2.1. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 4x - y + z = 2, \\ x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y - 4z = 6. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение и может быть решена с помощью формул Крамера.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

2.4. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Предположим, что система совместна. Следовательно, ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы: $Rang\mathbf{A} = Rang\tilde{\mathbf{A}} = r$. Их общее значение r будем называть рангом данной системы уравнений.

Уравнения, соответствующие базисным строкам, назовем базисными уравнениями системы. Будем считать, что базисный минор порядка r общий для матриц $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$, расположен в левом верхнем углу матрицы $\mathbf{A}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Поскольку строки матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ с номерами, большими r, представляют собой линейные комбинации ее первых r строк, то последние $(m-r)$ уравнений являются следствиями первых r и, следовательно, могут быть отброшены. Оставшиеся r уравнений перепишем как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots. \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{r,r}x_r = b_r - a_{r,(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Неизвестные, стоящие при базисных столбцах, назовем **главными** неизвестными, все остальные неизвестные называются **свободными**. Таким образом, если ранг матрицы равен r, то базисная система состоит из r

уравнений, число главных неизвестных равно r, число свободных неизвестных равно $(n-r)$.

Эту систему можно рассматривать как систему r уравнений с r неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ее определитель, будучи базисным минором, отличен от нуля, поэтому, согласно результатам предыдущего пункта, при любой правой части, в частности при любых $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, система имеет единственное решение.

Это означает, что числа $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ можно выбрать произвольно, полагая $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$, а $x_1, x_2, \ldots, x_r$ найти, например, по формулам Крамера.

Таким образом, общее решение нашей системы зависит от $(n-r)$ произвольных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$.

Если r велико, то для решения удобнее использовать другой метод – метод последовательного исключения неизвестных, или **метод Гаусса**.

Идея метода Гаусса состоит в том, что путем последовательного исключения неизвестных система уравнений превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) эквивалентную систему уравнений.

Ступенчатой системой называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases}$$

где $r \le n, a_{ii} \ne 0, i = \overline{1,r}$. Коэффициенты a_{ii} называются главными коэффициентами системы.

Если $r = n$, то система уравнений называется треугольной. Очевидно, что треугольная система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то система уравнений является неопределенной. При этом r неизвестных всегда можно принять за главные, а остальные $(n-r)$– за свободные неизвестные.

Для приведения системы уравнений к ступенчатому виду используются так называемые элементарные преобразования, переводящие систему в эквивалентную:

1) перестановка любых двух уравнений;

2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же число;

3) прибавление к обеим частям уравнения соответствующих частей другого уравнения.

Пример 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 42. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 22 \\ 4 & 5 & 3 & 42 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$Rang\mathbf{A} = Rang\tilde{\mathbf{A}} = 2.$$

Так как ранг системы равен 2, а размерность системы равна 3, то имеем 2 главные переменные и (3–2 =1) свободную переменную.

Вместо исходной системы рассмотрим равносильную ей систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 - x_3 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 - x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases} \text{тогда}$$

$$X_{общ} = \begin{cases} x_1 = 10 - x_3 - 2 - x_3 = 8 - 2x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \\ x_3. \end{cases}$$

Пример 2.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

Из четвертой вычтем первую строку, из второй строки вычтем первую строку, умноженную на два, из третьей – первую строку, умноженную на три. Далее аналогично. (под знаком эквивалентности прописаны действия со строками).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array}\right] \underset{\substack{(2)-2(1)\\(3)-3(1)\\(4)-(1)}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right] \underset{\substack{(3)-2(2)\\(4)-3(2)}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

после чего запишем эквивалентную исходной систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_3 - 5x_4 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 - x_3 + 3x_4 - 1, \\ x_3 = 3 + 5x_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 2x_4 - 4, \\ x_3 = 3 + 5x_4. \end{cases}$$

Поскольку ранг матриц равен двум, а размерность системы равна четырем, то общее решение $X_{общ} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 2x_4 - 4 \\ 3 + 5x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$, где x_1 и x_4 – свободные переменные, а главные переменные x_2, x_3 выражаются через свободные.

Найдем частное решение.

Положим свободные переменные $x_1 = 0$ и $x_4 = 0$, тогда

$$X_{частное} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.5. Правило решения системы линейных уравнений

1. Вычисляя ранги основной и расширенной матриц системы, выясняем вопрос о её совместности. Если система совместна, находим базисный минор.

2. Выделяем базисные уравнения, главные и свободные неизвестные.

3. По правилу Крамера или методом Гаусса решаем базисную систему уравнений, находим, как выражаются главные неизвестные через свободные, то есть находим общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным численные значения, находим частные решения системы уравнений.

2.5.1. Общее решение однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений

Однородной системой линейных уравнений (правильнее – системой однородных линейных уравнений, а иногда говорят «однородная линейная система») называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что такая система всегда совместна, поскольку имеет решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$ которое называется **нулевым**, или **тривиальным**.

Теорема 2.2. Однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг этой системы меньше числа неизвестных: $R(\mathbf{A}) < n$.

Следствие 1. Если число уравнений однородной системы меньше числа неизвестных $(m < n)$, то эта система имеет нетривиальное решение.

Следствие 2. Если число уравнений однородной системы равно числу уравнений $(m = n)$, то эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю $(\det \mathbf{A} = 0)$.

Допустим, что однородная система имеет некоторое нетривиальное решение $\mathbf{x}^{(1)} = \left[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)} \right]$. Тогда для любого числа $k \neq 0$ набор $k \cdot \mathbf{x}^{(1)} = \left[kx_1^{(1)}, kx_2^{(1)}, ..., kx_n^{(1)} \right]$ тоже будет являться нетривиальным решением.

Более того, для двух любых нетривиальных решений $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ их сумма $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}$, как и любая **линейная комбинация** $c_1 \cdot \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \cdot \mathbf{x}^{(2)}$ тоже являются нетривиальными решениями.

Любое решение, которое может быть выражено через линейную комбинацию других, называется **линейно зависимым**.

Если же найти **все нетривиальные линейно независимые решения** $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}$ однородной системы, то все другие нетривиальные решения будут являться их линейными комбинациями, т.е. **общее решение** системы тогда можно записать в виде $\mathbf{x} = c_1 \cdot \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \cdot \mathbf{x}^{(2)} + ... + c_k \cdot \mathbf{x}^{(k)}$, где $c_1, c_2, ..., c_k$ – произвольные числа.

Определение. Совокупность всех нетривиальных линейно независимых решений $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}$ однородной системы называется ее **фундаментальной системой решений (ФСР)**.

Для одной и той же однородной системы можно получить разные фундаментальные системы решений: действительно, умножим $\mathbf{x}^{(1)}$, например, на 2, тогда совокупность $2\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}$ тоже является линейно независимой, следовательно, может называться ФСР.

Теорема 2.3. Пусть ранг матрицы системы r меньше числа неизвестных $(r < n)$. Тогда любая ее ФСР состоит из $(n - r)$ решений.

Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений

1. Найти ранг r матрицы системы. Выделить **базисный минор**. Определить r **главных** и $(n-r)$ **свободных** переменных.

2. Выразить базисные переменные через свободные переменные.

3. Задать $(n-r)$ линейно независимых строк вида

$$x_{r+1}=1,\ \ x_{r+2}=0,\ \ x_{r+3}=0,\ \ \ldots,\ x_n=0,$$

$$x_{r+1}=0,\ \ x_{r+2}=1,\ \ x_{r+3}=0,\ \ \ldots,\ x_n=0 \text{ и т.д.}$$

4. Получить фундаментальную систему решений $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{n-r}$.

Пример 2.4. Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1-6x_2+4x_3+5x_4=0. \end{cases}.$$

Решение.

1. Найдем $Rang(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{(2)-(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \underset{(3)+(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $Rang(\mathbf{A})=2$.

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=5\neq 0$.

Пусть $x_4,\ x_5$ – базисные неизвестные, $x_1,\ x_2,\ x_3$ – свободные неизвестные.

2. Перепишем систему уравнений для базисных и свободных переменных

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3, \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3, \end{cases}$$

окончательно выражая базисные переменные через свободные

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{-x_1 + 6x_2 - 4x_3}{5}, \\ x_5 = \dfrac{6x_1 + 19x_2 - x_3}{5}. \end{cases}$$

3. Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 0$ или $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, тогда $x_4 = -0,2,\ x_5 = 1,2$.

2) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$, или $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, при этом $x_4 = 1,2,\ x_5 = 3,8$.

3) $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1$, или $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, отсюда $x_4 = -0,8,\ x_5 = -0,2$.

4. ФСР: $$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{bmatrix}.$$

Общее решение данной системы имеет вид: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

2.5.2. Связь между решениями неоднородной и однородной систем уравнений. Общее решение линейной неоднородной системы

Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Соответствующая ей однородная система уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ называется **приведенной системой уравнений** по отношению к исходной неоднородной системе.

Пусть $\mathbf{y}$ – решение однородной системы, $\mathbf{x}$ – решение неоднородной системы. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения её приведенной системы вновь является решением неоднородной системы.

Действительно, пусть $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1=\mathbf{b}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1+\mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2=\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_1+\mathbf{y}\right)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$.

2. Разность двух решений неоднородной системы есть решение приведенной однородной системы.

Пусть $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1=\mathbf{b}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2=\mathbf{b}$, $\mathbf{y}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$.

Тогда $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1-\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

Из этих утверждений вытекает, что **общее решение неоднородной** системы $\mathbf{x}_{неод}$ есть сумма любого её частного решения $\mathbf{x}_ч$ и общего решения приведенной однородной системы $\mathbf{x}_{одн}$:

$$\mathbf{x}_{неод}=\mathbf{x}_ч+\mathbf{x}_{одн}. \tag{10}$$

Действительно, из доказанного следует, что (10) есть решение неоднородной системы как сумма решений неоднородной и однородной систем.

Далее, пусть дано какое-то решение $\mathbf{x}$ неоднородной системы. Тогда разность $\mathbf{x}-\mathbf{x}_ч$ есть решение однородной системы.

Пример 2.5. Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2,\\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+5x_5=3,\\ 3x_1+4x_3-3x_4+6x_5=5, \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение. Убедимся в том, что система совместна

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right].$$

Итак, $Rang(\mathbf{A}) = 2$ – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5, \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3}, \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3}. \end{cases}$$

ФСР: $$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдем **любое** частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5. \end{cases}$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = \dfrac{5}{3}, \ x_2 = \dfrac{1}{3}$.

$$\mathbf{x}_ч = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы: $\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

3.1. Основные понятия

Определение. Число λ называется **собственным числом** квадратной матрицы $\mathbf{A}$, а ненулевой вектор $\mathbf{x}$ – ее **собственным вектором**, соответствующим собственному числу λ, если выполняется равенство

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}. \tag{11}$$

В равенстве (11) матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок n, вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Определение. Множество собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ называется **спектром матрицы** $\mathbf{A}$.

3.2. Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы

Матричное уравнение (11) можно переписать в виде

$$\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

где $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_n$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$, $\mathbf{0}$ – n-мерный нуль-вектор.

Матричное уравнение (12) представляет собой запись системы однородных линейных уравнений с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Матрица $\mathbf{A}$ имеет собственный вектор $\mathbf{x}$, если существует нетривиальное решение этой системы, иначе говоря, в том и только в том случае, если матрица системы (12) вырожденная, т.е. ее определитель равен нулю:

$$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = 0. \tag{13}$$

Равенство (13) является уравнением степени n относительно переменной λ. Действительно, оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

но в определителе порядка n есть член $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ с λ в степени n. Во всех остальных членах определителя степень множителя λ меньше.

Определение. Уравнение (13) называется **характеристическим уравнением матрицы $\mathbf{A}$**, определитель $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ – **характеристическим многочленом матрицы $\mathbf{A}$**.

Пример 3.1. Найдем собственные числа матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$

$$\left|\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0; \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)-20=0; \;\; \lambda^2-5\lambda-14=0; \;\; \lambda_1=7; \;\; \lambda_2=-2.$$

Итак, матрица $\mathbf{A}$ имеет действительные собственные числа 7 и (–2).

Для того чтобы найти **собственный вектор**, соответствующий собственному числу λ, надо решить матричное уравнение (12), т.е. систему однородных линейных уравнений, матрица которой – вырожденная. Такая система имеет бесконечное множество решений.

Пример 3.2. Найдем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ из примера 2.6.

Решение. Собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 7$, находим, решая систему $(\mathbf{A}-7\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}; \quad \begin{cases} -4x_1+4x_2=0, \\ 5x_1-5x_2=0. \end{cases}$$

Эта система равносильна одному уравнению: $x_1 - x_2 = 0$, или $x_1 = x_2$.

Собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 7$, являются векторы $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$, где a – любое, не равное нулю, число.

Собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие собственному числу $\lambda_2 = -2$, находим, решая систему $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 3+2 & 4 \\ 5 & 2+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}; \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна одному уравнению: $5x_1 + 4x_2 = 0$.

Собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = -2$, являются векторы $\begin{bmatrix} -4/5 \\ a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, или $\begin{bmatrix} 4a \\ -5a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$.

Теорема 3.1. (**Гамильтона – Кэли**). Если $\varphi(\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$, то $\varphi(\mathbf{A}) = 0$.

Проверим это утверждение на примере.

Пример 3.3. Вычислим $\varphi(\mathbf{A})$ для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 3.1.

Решение. В уравнении $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14$ подставим вместо λ матрицу $\mathbf{A}$, умножив свободный член (–14) на единичную матрицу

$$\varphi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - 14\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 20 \\ 25 & 24 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 29 & 20 \\ 25 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

3.3. Свойства собственных чисел и собственных векторов матрицы

Укажем свойства собственных чисел квадратной матрицы.

1. Сумма собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ равна следу этой матрицы (т.е. сумме ее диагональных элементов).

Проверим это свойство на матрице из примера 3.1.: $\lambda_1 + \lambda_2 = 7 + (-2) = 5;$ след матрицы $\mathbf{A}$ равен $3 + 2 = 5$.

2. Произведение собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ равно определителю этой матрицы.

В нашем примере $\lambda_1 \lambda_2 = 7 \cdot (-2) = 14;$ $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14.$

3. Число отличных от нуля собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ равно ее рангу, в частности, все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ отличны от нуля в том и только в том случае, если матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная.

Пример 3.4. Найдем собственные числа матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

Решение. Характеристическое уравнение данной матрицы

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 7 \\ 1 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda^2 - 7\lambda + 2\right) = 0.$$

Матрица $\mathbf{A}$ имеет три собственных числа: $\lambda_1 = 0,\quad \lambda_{2,3} = \dfrac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$, два из которых не равны нулю. Ранг матрицы также равен 2.

$$Rang \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = Rang \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = Rang \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2.$$

4. Если λ_0 – собственное число невырожденной матрицы $\mathbf{A}$, то $\dfrac{1}{\lambda_0}$ – собственное число матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующей собственному числу λ_0. Тогда справедливо равенство $\mathbf{Ax} = \lambda_0\mathbf{x}$. Так как матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует, умножим на нее обе части равенства, получим $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \lambda_0\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \mathbf{Ex} = \lambda_0\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

Это означает, что $\frac{1}{\lambda_0}$ есть собственное число матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, а вектор $\mathbf{x}$ соответствующий ему собственный вектор. ■

5. Если λ_0 – собственное число матрицы $\mathbf{A}$, то λ_0^k – собственное число матрицы $\mathbf{A}^k$ при любом целом $k \geq 1$.

Доказательство. Докажем это свойство методом индукции. Сначала проверим его справедливость при $k = 2$. Пусть $\mathbf{x}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному числу λ, тогда

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \mathbf{AAx} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda\lambda\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x},$$

т.е. λ^2 – собственное число матрицы $\mathbf{A}^2$.

Допустим, что это свойство справедливо при показателе степени, равном $k-1$, т.е. $\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x} = \lambda^{k-1}\mathbf{x}$, и докажем, что это свойство справедливо при показателе степени, равном k. Умножив обе части последнего равенства на $\mathbf{A}$, получим $\mathbf{AA}^{k-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}\lambda^{k-1}\mathbf{x}$, или $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}^{k-1}\mathbf{Ax}$.

Так как $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, то $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^{k-1}\lambda\mathbf{x}$ и окончательно: $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, т.е. число λ^k является собственным числом матрицы $\mathbf{A}^k$. ■

Определение. Квадратные матрицы одного порядка, имеющие одинаковые спектры, называются **подобными**.

6. Квадратные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ подобны.

Для доказательства убедимся, что справедливо равенство

$$\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\mathbf{E}.$$

В силу свойств и действий с матрицами

$$\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\left(\lambda\mathbf{E}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\mathbf{E}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\mathbf{E}.$$

Так как определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной, то $\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|^{\mathrm{T}}=\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\mathbf{E}\right|$, и матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ имеют одно и то же характеристическое уравнение и, соответственно, одно и то же множество собственных чисел.

Заметим, что **собственные векторы** матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, соответствующие одинаковым собственным числам этих матриц, вообще говоря, различны. Покажем это на примере.

Пример 3.5. Матрица $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1=7$ и $\lambda_2=-2$ и соответствующие этим собственным числам собственные векторы $\left[a,a\right]^T$ и $\left[4a,-5a\right]^T$, $a\neq 0$. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$. Найдем ее собственные числа, решив уравнение: $\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\mathbf{E}\right|=0$:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \iff \left(3-\lambda\right)\left(2-\lambda\right)-20=0 \iff \lambda^2-5\lambda-14=0/$$

Находим, что $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$, т.е. матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ имеет тот же спектр, что и матрица $\mathbf{A}$. Найдем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Собственный вектор $\mathbf{x}_1$, соответствующий собственному числу $\lambda_1=7$, находим, решая систему уравнений

$$\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 4 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{0} \iff \begin{cases}-4x_1+5x_2=0,\\ 4x_1-5x_2=0.\end{cases} \iff 4x_1=5x_2;\ \ \mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}5a\\ 4a\end{bmatrix},\ \ a\neq 0.$$

Собственный вектор $\mathbf{x}_2$, соответствующий собственному числу $\lambda_2=-2$, находим, решая систему уравнений

$$\begin{bmatrix}5 & 5\\ 4 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{0} \iff \begin{cases}5x_1+5x_2=0,\\ 4x_1+4x_2=0.\end{cases} \iff x_1=-x_2;\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}a\\ -a\end{bmatrix},\ \ a\neq 0.$$

Итак, матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ подобны, а собственные векторы, соответствующие равным собственным числам этих матриц, различны.

Теорема 3.2. Собственными числами диагональной матрицы являются числа, стоящие на ее главной диагонали.

Доказательство. Диагональная матрица порядка n имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(a_{11}-\lambda\right)\left(a_{22}-\lambda\right)\cdots\left(a_{nn}-\lambda\right)=0.$$

Корнями этого уравнения и, следовательно, собственными числами матрицы $\mathbf{A}$ являются числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. ■

Для **любой** квадратной матрицы существует подобная ей диагональная матрица.

Теорема 3.3. Если $\mathbf{A}$ – квадратная матрица порядка n, а $\mathbf{T}$ – невырожденная квадратная матрица того же порядка, то матрица $\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ подобна матрице $\mathbf{A}$.

Доказательство. Достаточно показать, что характеристические уравнения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равносильны. Докажем сначала следующее тождество: $\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}=\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}.$

Действительно, $\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}-\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{ET}=$

$$=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}-\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}-\lambda\mathbf{E}=\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}.$$

С учетом доказанного тождества и свойства определителей получим

$$\left|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}\right|=\left|\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{T}\right|=\left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right|=$$

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}^{-1}\right|\cdot\left|\mathbf{T}\right|=\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\right|=\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|\cdot\left|\mathbf{E}\right|=\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|.$$

Следовательно, $\left|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}\right|=0 \iff \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=0.$ ■

Пример 3.6. Линейная модель международной бездефицитной торговли.

Рассмотрим n стран, бюджеты $x_1, x_2, ..., x_n$ которых тратятся на закупку товара друг у друга (и у самих себя в том числе).

Пусть a_{ij} – доля бюджета x_j, который тратится страной j на закупку товара у страны i. Тогда

$$a_{1j}+a_{2j}+...+a_{n,j}=1.$$

Для страны i выручка от торговли равняется

$$p_i=a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n.$$

Бездефицитная торговля означает, что для каждой страны ее выручка не меньше бюджета, или

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n \ge x_i,\ i=1,...,n.$$

Покажем, что, на самом деле, в соотношениях стоят равенства. Предположим, что хотя бы в одном из этих соотношений стоит строгое неравенство. Просуммируем все эти неравенства. Получим

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+...+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n > x_1+x_2+...+x_n.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=x_2, \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=x_m. \end{cases}$$

Или, $\mathbf{Ax}=\mathbf{x}$.

Вывод. Чтобы при заданной структурной матрице была возможна бездефицитная торговля, необходимо, чтобы единица была собственным значением этой матрицы, а бюджеты стран образовывали собственный вектор, отвечающий собственному значению, равному единице.

Пример 3.7. Есть N страниц, каждая из которых может содержать ссылки на другие страницы. Требуется определить, какие страницы являются наиболее важными. «Важность» будем представлять количественно в виде неотрицательного числа (веса). Начнем с естественного предположения: чем больше ссылок на данную страницу, тем больше ее вес. Будем считать, что ссылка со страницы, имеющей больший вес, должна иметь большее значение. Эти рассуждения приводят нас к модели

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \,,$$

где a_{ij} – количество ссылок на i-ю страницу с j-й, разделенное на общее количество ссылок с j-й страницы. Эту формулу можно читать так: вес i-й страницы равен сумме произведений веса j-й страницы на долю ссылок с j-й страницы на i-ую. Таким образом, мы свели нашу задачу к системе линейных уравнений. Более того, вектор весов $\mathbf{p}$ оказывается собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, отвечающим собственному значению 1, т.е. $\mathbf{p} = \mathbf{Ap}$.

Пример 3.8. Программное обеспечение в компьютерных классах обновляется не позднее, чем через три года, причем ежегодно (будем считать, что в начале учебного года) обновляется 20% ПО, установленных 2 года назад, и все ПО, не обновлявшееся 3 года. ПО, установленное не позднее 1 года, не обновляется. Найдем устойчивое (стационарное) распределение числа установленного ПО по срокам обновлений, т.е. распределение, которое не изменяется из года в год.

Решение. Введем обозначения: пусть N_{it} – число программ, которые к началу года с номером t проработали i лет. Выразим N_{it} через $N_{i,t-1}\left(i=1;2;3\right)$. К началу учебного года 1 год проработают программы (их число обозначим $N_{1,t}$), которые были обновлены в начале предыдущего года, т.е. 20%, проработавших 2 года к началу предыдущего года, и 100% программ, не обновлявшихся 3 года

$$N_{1,t} = 0 \cdot u_{1,t-1} + 0,2u_{2,t-1} + 1 \cdot u_{3,t-1}.$$

К началу текущего года проработают 2 года те ПО (их число обозначим $N_{2,t}$), которые к началу предыдущего года проработали 1 год (они не подлежат замене)

$$N_{2,t} = 1 \cdot N_{1,t-1} + 0 \cdot N_{2,t-1} + 0 \cdot N_{3,t-1}.$$

К началу текущего года проработают 3 года те программы (их число обозначим $N_{3,t}$), которые к началу предыдущего года проработали 2 года и не были обновлены, т.е. 80% от их числа

$$N_{3,t} = 0 \cdot N_{1,t-1} + 0,8N_{2,t-1} + 0 \cdot N_{3,t-1}.$$

Введем следующие матрицы

$$\mathbf{N}_t = \begin{bmatrix} N_{1,t} \\ N_{2,t} \\ N_{3,t} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Систему, состоящую из трех вышеприведенных уравнений, можно записать так

$$\mathbf{AN}_{t-1} = \mathbf{N}_t.$$

Распределение программ, общее число которых не изменяется из года в год, по времени обновлений будет неизменным, если не будет изменяться вектор $\mathbf{N}_t$, т.е. $\mathbf{N}_t = \mathbf{N}_{t-1}$. Такой вектор является решением уравнения

$$\mathbf{AN} = \mathbf{N}.$$

Если же общее число программ из года в год изменяется пропорционально начальному количеству, то при неизменном процентном составе по годам службы вектор $\mathbf{N}_t$ должен удовлетворять уравнению $\mathbf{AN} = \lambda\mathbf{N}$.

Сначала найдем собственные числа матрицы $\mathbf{A}$.

Характеристическое уравнение:

$$|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0,2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,8 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+0,2\lambda+0,8=0.$$

Проверкой установим, что корнем последнего уравнения является число $\lambda=1$. Два других корня этого уравнения – мнимые числа.

Из рассмотренного примера ясно, что нас интересуют собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие собственному числу $\lambda=1$.

Находим их:

$$(\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{E})=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0,2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,8 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+0,2x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2=0, \\ 0,8x_2-x_3=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,8x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2=0, \\ 0,8x_2-x_3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=0, \\ 0,8x_2-x_3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2, \\ x_2\in R, \\ x_3=0,8x_2. \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x}=\begin{bmatrix} a \\ a \\ 0,8a \end{bmatrix},\ a\neq 0.$$

Это означает, что состав установленного ПО по срокам обновлений будет устойчивым, если программ, проработавших 1 год, будет столько же, сколько программ, проработавших 2 года, и число программ, не обновлявшихся 3 года, будет равно 80% от числа ПО, обновлявшихся 1 год назад.

Рассмотрим свойства собственных векторов матрицы.

1. Собственные векторы матрицы, соответствующие ее различным собственным числам, линейно независимы.

2. Если все собственные числа квадратной матрицы порядка n различны, то соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства R^n.

3. Любая не равная нулевому вектору линейная комбинация собственных векторов данной матрицы, соответствующих одному и тому же собственному числу этой матрицы, также является собственным вектором данной матрицы.

3.4. Собственные числа симметричных матриц

Определение. Симметричной называется квадратная матрица $\left[a_{ij}\right]_n$, элемент a_{ij} которой равен элементу a_{ji} при всех i и j.

Свойства симметричной матрицы.

1. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

2. Все собственные числа действительной симметричной матрицы действительны.

Пусть $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Найдем дискриминант полученного квадратного уравнения:

$$D = (a+c)^2 - 4\left(ac - b^2\right) = (a-c)^2 + 4b^2.$$

Так как дискриминант неотрицателен при всех значениях a, b и c, то уравнение имеет два действительных корня, являющихся собственными числами матрицы $\mathbf{A}$. Если $a \neq c$, или $b \neq 0$, то матрица имеет два различных собственных числа; если $a = c$ и $b = 0$, то матрица $\mathbf{A}$ имеет два равных собственных числа $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

3. Собственные векторы действительной симметричной матрицы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Пусть λ и μ – различные собственные числа данной симметричной матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – соответствующие им собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ и $\mathbf{Ay} = \mu\mathbf{y}$. Преобразуем произведение $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ay}$ двумя способами:

1) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ay} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ay}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mu\mathbf{y} = \mu\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right)$;

2) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ay} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = (\mathbf{Ax})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = (\lambda\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \lambda\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right)$.

Приравнивая полученные выражения для $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$, получаем

$$\mu\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right)=\lambda\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right), \text{ или } (\mu-\lambda)\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right)=0.$$

Так как по условию $\mu\neq\lambda$, то из последнего равенства следует $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=0$, т.е. векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны ■.

Пример 3.9. Найдем собственные числа и собственные векторы симметрической матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

и покажем, что собственные векторы этой матрицы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; (2-\lambda)\left(\lambda^2+5\lambda-14\right)=0.$$

Собственными числами матрицы $\mathbf{A}$ являются корни полученного характеристического уравнения: $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7.$

Собственные векторы, соответствующие собственному числу λ_1 и собственному числу λ_2, найдем, решив систему однородных линейных уравнений

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; -x_1-2x_2+2x_3=0.$$

Переменным x_2 и x_3 можно дать произвольные значения, не равные нулю: $x_2=a,\ x_3=b,\ a\neq0,\ b\neq0,$ тогда переменная x_1 примет значение $x_1=2b-2a$, т.е. собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2b-2a \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

Собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному числу этой матрицы $\lambda_3 = -7,$ найдем, решив систему уравнений

$$(\mathbf{A}+7\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x_2 + 18x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 9x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Переменной x_3 можно придать произвольное значение $x_3 = c,\ c \neq 0$

тогда $x_2 = -c$ и $x_1 = \dfrac{-5c+4c}{2} = -\dfrac{c}{2}$, т.е. $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -\dfrac{c}{2} \\ -c \\ c \end{bmatrix}$ или $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ -2c \end{bmatrix}$.

Покажем, что векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_3$ ортогональны:

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2b-2a \\ a \\ b \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ -2c \end{bmatrix} = (2b-2a)c + a \cdot 2c + b \cdot (-2c) = 0.$$

Заметим, что из множества собственных векторов, соответствующих равным собственным числам $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$ можно выбрать пару ортогональных векторов. Например, при $a = b = 1$ имеем $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, а при $a = -1,\ b = 1,$ соответственно, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Найдем произведение этих векторов: $\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^T = 0 - 1 + 1 = 0,$ т.е. эти векторы ортогональны.

3.5. Квадратичные формы

Определение. Квадратичной формой с переменными $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ называется функция

$$z\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j, \tag{14}$$

где a_{ij} – числа.

Пример 3.10. Рассмотрим квадратичную форму трех переменных

$$z\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_i x_j=\sum_{i=1}^{3}\left(a_{i1}x_i x_1+a_{i2}x_i x_2+a_{i3}x_i x_3\right)=$$

$$=a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3x_3=$$
$$.=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\left(a_{12}+a_{21}\right)x_1x_2+\left(a_{13}+a_{31}\right)x_1x_3+\left(a_{23}+a_{32}\right)x_2x_3.$$

Введем обозначения

$$a_{12}^0=a_{21}^0=\frac{a_{12}+a_{21}}{2};\quad a_{13}^0=a_{31}^0=\frac{a_{13}+a_{31}}{2};\quad a_{23}^0=a_{32}^0=\frac{a_{23}+a_{32}}{2}.$$

Тогда квадратичная форма примет вид

$$z\left(x_1,x_2,x_3\right)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}^0x_1x_2+2a_{13}^0x_1x_3+2a_{23}^0x_2x_3.$$

Введем квадратную симметричную матрицу $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}^0 & a_{13}^0\\ a_{21}{}^0 & a_{22} & a_{23}^0\\ a_{31}{}^0 & a_{32}^0 & a_{33}\end{bmatrix};\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

Тогда квадратичную форму z можно записать в матрично-векторном виде

$$z\left(x_1,x_2,x_3\right)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x},$$

а сама квадратичная форма является функцией двух одинаковых векторных аргументов вектор $\mathbf{x}$.

Проверим это

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22} & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}^0 x_2 + a_{31}^0 x_3 & a_{12}^0 x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}^0 x_3 & a_{13}^0 x_1 + a_{23}^0 x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}^0 x_1 x_2 + 2a_{13}^0 x_1 x_3 + 2a_{23}^0 x_2 x_3.$$

Очевидно, что любую квадратичную форму (14) можно записать в матрично-векторном виде

$$z\left(x_1, x_2, x_3\right) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{15}$$

где $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – симметричная матрица, в которой элементы a_{ii} являются коэффициентами при x_i^2 (при всех $i = 1, 2, \dots, n$) и $a_{ij} = a_{ji}$ равны полусуммам коэффициентов при членах, содержащих произведения $x_i x_j$ и $x_j x_i$ (при всех $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$).

Такая матрица $\mathbf{A}$ называется матрицей квадратичной формы.

Определение. Квадратичные формы, все коэффициенты a_{ii} которых – действительные числа, называются **действительными**, или **вещественными**.

Матрица действительной квадратичной формы является действительной симметричной матрицей.

Далее будем рассматривать только действительные квадратичные формы.

Для любой симметричной матрицы порядка n существует единственная квадратичная форма n переменных (эти квадратичные формы могут отличаться только обозначениями переменных).

Определение. Квадратичная форма (и ее матрица) называется положительно (отрицательно) определенной, если она принимает положительные (отрицательные) значения на всех ненулевых векторах.

Квадратичная форма (и ее матрица) называется неотрицательно (неположительно) определенной, если она принимает неотрицательные (неположительные) значения на всех ненулевых векторах.

Квадратичная форма (и ее матрица) называется неопределенной, если она принимает положительные значения на одних векторах и отрицательные – на других.

Пример 3.11. Выясним, являются ли положительно (или отрицательно) определенными следующие квадратичные формы:

$$a)\ z(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2;$$
$$b)\ z(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2;$$
$$c)\ z(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Решение. Преобразуем данные квадратичные формы:

$a)\ z(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$, форма положительно определена;

$b)\ z(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)^2$, форма неотрицательно определенная, она принимает нулевое значение, например, на векторе $\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}^T$;

$c)\ z(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$, форма неопределенная, она принимает положительное значение, например, на векторе $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ и отрицательное на векторе $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$.

Если квадратичная форма содержит только квадраты переменных, то говорят, что она имеет **канонический вид**.

Если вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ ввести новые переменные $y_1, y_2, ..., y_n$ путем линейного преобразования $x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k$, то получим иной вид квадратичной формы z. Приведем без доказательства основную теорему о квадратичных формах.

Теорема 3.4. Любая квадратичная форма может быть приведена некоторым линейным преобразованием к каноническому виду.

Канонический вид данной квадратичной формы определен неоднозначно, т.е. если канонический вид данной квадратичной формы таков

$$z\left(y_1, y_2, \cdots y_n\right) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$$

(число не равных нулю коэффициентов в этом выражении равно рангу матрицы данной квадратичной формы), то коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяются не единственным образом. В частности, если все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы квадратичной формы различны, т.е. ранг этой матрицы равен числу переменных, то канонический вид данной квадратичной формы может быть записан так:

$$z\left(y_1, y_2, \cdots y_n\right) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.5. Действительная квадратичная форма является положительно (отрицательно) определенной в том и только в том случае, если все собственные числа матрицы этой квадратичной формы положительны (отрицательны). Квадратичная форма является неопределенной, если среди собственных чисел ее матрицы есть как положительные, так и отрицательные.

С помощью этой теоремы невозможно определить, является ли данная квадратичная форма положительно определенной, по ее коэффициентам, так как для этого необходимо найти собственные числа ее матрицы. Следующая теорема позволяет ответить на поставленный вопрос, если известен любой канонический вид данной матрицы.

Теорема 3.6. (**Закон инерции квадратичных форм**). Если для некоторой квадратичной формы получены два различных канонических вида

$$z_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

и

$$z_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \ldots + \beta_n x_n^2,$$

то число положительных (отрицательных) чисел среди коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и среди коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ одно и то же.

Однако и теорема 3.6. не дает возможности определить, является ли данная квадратичная форма положительно или отрицательно определенной, непосредственно по коэффициентам квадратичной формы. Сделать это позволяет теорема 3.7., которую мы также приведем без доказательства после того, как введем следующие понятия.

Определение. Главными подматрицами квадратной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называются матрицы

$$\mathbf{A}_1 = [a_{11}], \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \ldots \ , \ \mathbf{A}_n = \mathbf{A}.$$

Определители главных подматриц называются главными минорами квадратной матрицы. Обозначим их так:

$$M_1 = |\mathbf{A}_1|, \ M_2 = |\mathbf{A}_2|, \ \ldots \ , \ M_n = |\mathbf{A}_n|.$$

Теорема 3.7. Действительная квадратичная форма является положительно (отрицательно) определенной в том и только в том случае, если все главные миноры матрицы этой квадратичной формы положительны (имеют чередующиеся знаки, начиная с минуса у главного минора первого порядка, т.е. у элемента a_{11}).

Пример 3.12. Выясним, является ли положительно (или отрицательно) определенной квадратичная форма

$$z\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=8x_1^2+4x_2^2+x_3^2+6x_1x_2-4x_1x_3.$$

Решение. Напишем матрицу $\mathbf{A}$ данной квадратичной формы и вычислим ее главные миноры:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8&3&-2\\3&4&0\\-2&0&1\end{bmatrix};\ M_1=8;\quad M_2=\begin{vmatrix}8&3\\3&4\end{vmatrix}=23;\quad M_3=\begin{vmatrix}8&3&-2\\3&4&0\\-2&0&1\end{vmatrix}=7.$$

Все главные миноры матрицы данной квадратичной формы положительны, следовательно, данная квадратичная форма является положительно определенной.

Пример 3.13. В примерах 3.1. и 3.3. были найдены собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}:\ \lambda_1=7,\ \mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix},\ \lambda_2=-2,\ \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}4a\\-5a\end{bmatrix},\ a\neq 0.$$

Покажем справедливость равенства $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}=\mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{V}$ – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица, элементы которой – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, расположенные на диагонали в том же порядке, в каком расположены соотвествующие им собственные векторы в матрице $\mathbf{V}$.

Решение. В нашем примере

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}a&4a\\a&-5a\end{bmatrix},\quad \mathbf{V}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{9a}&\dfrac{4}{9a}\\\dfrac{1}{9a}&\dfrac{1}{9a}\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}7&0\\0&-2\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{9a}&\dfrac{4}{9a}\\\dfrac{1}{9a}&-\dfrac{1}{9a}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&4a\\a&-5a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{35}{9a}&\dfrac{28}{9a}\\-\dfrac{2}{9a}&\dfrac{2}{9a}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&4a\\a&-5a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0\\0&-2\end{bmatrix}=\mathbf{\Lambda}.$$

Пример 3.14. Запишите в матрично-векторном виде квадратичную форму

$$z\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3+10x_2x_3.$$

Решение. Заметим, что в данной квадратичной форме подобные члены (содержащие произведения $x_i x_j$ и $x_j x_i$) приведены, поэтому $a_{12}+a_{21}=-4$, $a_{13}+a_{31}=6$, $a_{23}+a_{32}=10$, откуда $a_{12}{}^0=a_{21}{}^0=-2$, $a_{13}{}^0=a_{31}{}^0=3$, $a_{23}{}^0=a_{32}{}^0=5$.

Таким образом, матрица квадратичной формы может быть записана как

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

а матрично-векторная запись данной квадратичной формы имеет вид

$$z\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Теоретические вопросы для повторения

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Определения (однородной и неоднородной СЛАУ, совместной, определенной).

2. Теорема Кронекера-Капелли (с доказательством).

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.

4. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

5. Общее решение однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

6. Связь между решениями неоднородной и однородной систем уравнений. Общее решение линейной неоднородной системы.

Примерные вопросы для подготовки к тестированию

Системы линейных уравнений

1. Система линейных уравнений называется определенной, если она имеет … (*бесчисленное множество решений; не имеет решений; единственное решение*).

2. Система линейных неоднородных уравнений совместна и имеет единственное решение, если: …

3. Система линейных однородных уравнений совместна и имеет единственное решение, если: …

4. Совместная система из n уравнений и n неизвестных имеет единственное решение, если ее ранг $r(\mathbf{A})$: *(*$r(\mathbf{A})<n$; $r(\mathbf{A})=n$; $r(\mathbf{A})>n$*)*.

5. Можно ли решать по правилу Крамера данную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 5x_1+4x_2-x_3=5? \end{cases}$$

6. Можно ли решать систему $m<n$ уравнений с n неизвестными по правилу Крамера?

7. По методу Жордана-Гаусса элементарные преобразования выполняются над *(матрицей из коэффициентов при* $\mathbf{e}$*; расширенной матрицей; произвольно составленной матрицей)*.

8. Сколько решений имеет СЛАУ с n переменными, если в процессе элементарных преобразований получилась матрица вида

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & a_n \end{array}\right]?$$

9. Как следует поступить, если на некотором этапе преобразований расширенной матрицы системы образовалась строка, целиком состоящая из нулей?

10. Сколько решений имеет система m уравнений с n неизвестными, если $Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) = Rang\left(\mathbf{A}\right) = r$ и $r < n$?

11. Для однородной системы линейных уравнений справедливо соотношение:

а) $Rang\left(\mathbf{A}\right) > Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$;

б) $Rang\left(\mathbf{A}\right) = Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$;

в) $Rang\left(\mathbf{A}\right) < Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$.

12. При каком условии однородная система линейных уравнений имеет единственное решение?

а) $Rang\left(\mathbf{A}\right) > Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$;

б) $Rang\left(\mathbf{A}\right) = Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$;

в) $Rang\left(\mathbf{A}\right) < Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$.

13. Однородная система m уравнений с n неизвестными $\left(m < n\right)$ имеет: … (*единственную систему фундаментальных решений; не имеет системы фундаментальных решений; имеет несколько систем фундаментальных решений*).

14. Определитель изменяет знак при: … (*вынесении общего множителя строки за знак определителя; транспонировании; перестановке двух строк*).

15. Определитель равен нулю если: … *(все строки различны; имеются одинаковые строки*).

16. В чем состоит отличие минора от алгебраического дополнения? (*нет различий; конкретным значением; наличием знака*).

17. Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (*положительное; отрицательное; нулевое*).

18. Значение определителя $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ (*положительное; отрицательное; нулевое*).

19. В чем состоит отличие матрицы от определителя? (*нет различий; по форме представления; матрица – таблица, определитель – число*).

20. Для какой матрицы существует обратная к ней? (*прямоугольной; квадратной; произвольной*).

21. Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель:… (*равен нулю; отличен от нуля; величина определителя не имеет значения*).

22. Базисный минор – это минор: … (произвольно составленный; окаймляющий какой-то элемент; состоящий из базисных строк и столбцов).

23. Присоединенная матрица строится из: … (*алгебраических дополнений; миноров; определителей*).

24. Система линейных уравнений называется определенной, если она имеет: ... (*бесчисленное множество решений; не имеет решений; единственное решение*).

25. Система совместна и имеет единственное решение, если: … (*ее определитель отличен от нуля; ее определитель равен нулю; величина определителя не имеет значений*).

26. Совместная система из n уравнений и n неизвестных имеет единственное решение, если ее ранг:… (*равен* n *; больше* n *; меньше* n).

27. Если $Rang\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) = Rang\left(\mathbf{A}\right)$ и $r < n$, то система m уравнений с n неизвестными: … (*не имеет решений; имеет единственное решение; имеет бесчисленное множество решений*).

28. Для получения базисного решения каким переменным и какие значения задаются? (*нулевые значения свободным переменным; нулевые значения базисным переменным; произвольные значения свободным переменным*).

29. Какая из алгебраических сумм является квадратичной формой?

$$x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 + x_1x_2x_3;$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5x_2x_3;$$

$$x_1^2 + x_1x_2x_3^2 + 4x_2^2 + x_2x_3.$$

30. Матрица квадратичной формы имеет вид: … (*треугольный; диагональный; симметрический*).

31. Матрица квадратичной формы канонического вида: … (*треугольная; прямоугольная; диагональная*).

32. Если главные миноры квадратичной формы имеют значения: $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 < 0$, то она (*положительно определенная; отрицательно определенная; неопределенная*).

33. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо, чтобы знаки ее главных миноров: … (*были положительными; знаки миноров чередовались; знаки не имеют значения*).

34. Каждому собственному вектору соответствует: … (*конечное число собственных чисел; единственное собственное число; бесконечное множество собственных чисел*).

35. Характеристическое уравнение степени *n* может иметь: … (*n различных значений; n не обязательно различных корней; n одинаковых корней*).

36. Базисом векторного пространства является: … (*линейно зависимая система векторов; линейно независимая система векторов*).

37. Действия над элементами векторного пространства: ... (*все четыре арифметические операции; только деление; сложение и умножение на число*).

38. Выражение $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n$ говорит… (*векторы линейно независимы; векторы линейно зависимы; зависимость неопределенна*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Eves H.W. An Introduction to the History of Mathematics. Saunders College Publishing, 1990. 480 p.

2. Вильчевская Е.Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 45 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М., 2004. 560 с.

4. Ильин В.И., Позняк Э.Г. Линейная алгебра [учебник для студентов физических специальностей и специальности «Прикладная математика и информатика»]. М. : Физматлит, 2010. 278 с.

5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / под ред. Н.В. Ефимова. СПб. : Лань, 2010. 222 с.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры : учебник. 19-е изд., стереотип. СПб. : Лань, 2013. 432 с.

7. Лившиц К.И. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для вузов. 2-е изд., стереотип. СПб. : Лань, 2021. 508 с.

8. Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия Ч. 1 : [учебник для вузов по направлению ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика»]. Томск : НТЛ, 2011. 247 с.

9. Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия Ч. 2 : [учебник для вузов по направлению ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика»]. Томск : НТЛ, 2011. 274 с.

10. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 109 с.

11. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие. 13-е изд., стер. СПб. : Лань, 2010. 480 с.

12. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре : учеб. пособие. 13-е изд., стереотип. СПб. : Лань, 2022. 288 с.

13. Березкина Э.И. Математика древнего Китая. М. : Наука, 1980. 312 с.

Учебное издание

Светлана Петровна МОИСЕЕВА, Светлана Владимировна ПАУЛЬ,
Ирина Алексеевна ТУРЕНОВА, Елена Юрьевна ДАНИЛЮК

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор В.Г. Лихачёва
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано в печать 15.09.2022 г. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печ. л. 6,8. Усл. печ. л. 6,3. Гарнитура Times.
Тираж 100 экз. Заказ № 5147.

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Телефоны: 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-907572-23-2

9 785907 572232 >