МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Назаров, С.В. Пауль

Полумарковские процессы

Учебное пособие

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

УДК 519.217(075.8)
ББК 22.171я73
Н19

Назаров А.А., Пауль С.В.

Н19 Полумарковские процессы : учебное пособие. – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2022. – 22 с.

ISBN 978-5-907572-22-5

Учебное пособие содержит основные понятия и методы исследования полумарковских процессов, что является расширенным материалом курса теории случайных процессов. Данный материал необходим для магистрантов, аспирантов и сотрудников вузов, которые ведут исследования в области прикладного вероятностного анализа, теории массового обслуживания и телекоммуникаций.

УДК 519.217(075.8)
ББК 22.171я73

Рецензенты:

С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор,

Д.В. Семенова, кандидат физико-математических наук, доцент

ISBN 978-5-907572-22-5

Содержание

1. Определение основных понятий теории полумарковских процессов

Рассмотрим однородный двумерный марковский случайный процесс $\{\xi(n),\ \tau(n)\}$ с дискретным временем $n = 0, 1, 2,\ldots$, первая компонента $\xi(n)$ которого принимает значения из некоторого дискретного множества. Для определённости будем полагать, что $\xi(n) = 1, 2,\ldots\ K$. Вторая компонента $\tau(n)$ принимает неотрицательные значения (вообще говоря, из непрерывного множества).

По определению, марковской переходной функцией $F(k_2, x; k_1, y)$ однородного двумерного марковского случайного процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$ называется

$$F(k_2,x;k_1,y) = P\{\xi(n+1) = k_2, \tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k_1, \tau(n) = y\}. \qquad (1)$$

Будем рассматривать только такие двумерные случайные процессы $\{\xi(n), \tau(n)\}$, для марковских переходных функций которых выполняются равенства

$$F(k_2,x;k_1,y) = F(k_2,x;k_1) = P\{\xi(n+1) = k_2, \tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k_1\}, \qquad (2)$$

то есть условное распределение (1) не зависит от второго условия $\tau(n) = y$ (не зависит от значения второй компоненты $\tau(n)$ рассматриваемого двумерного марковского процесса). Такие двумерные марковские процессы с дискретным временем будем называть **процессами марковского восстановления**. Это название оправдано тем, что в классической теории восстановления рассматриваются самовосстанавливающиеся устройства в виде элемента с конечным сроком службы. Как только этот элемент отказывает, выходит из строя, он заменяется новым элементом того же вида, который рано или поздно заменяется третьим элементом, и так далее.

В этом случае марковскую переходную функцию $F(k_2, x; k_1)$ будем обозначать

$$F(k_2,x;k_1) = A_{k_1k_2}(x) = P\{\xi(n+1) = k_2, \tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k_1\}. \qquad (3)$$

Матрицу $\mathbf{A}(x)$, элементами которой являются функции $A_{k\nu}(x)$, определяемые равенством (3), будем называть **полумарковской.**

В силу свойства (2), первая компонента $\xi(n)$ рассматриваемого марковского процесса также является марковским процессом, точнее цепью Маркова с дискретным временем и матрицей $\mathbf{P}$ вероятностей $P_{k\nu}$ переходов за один шаг, определяемой равенством

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\infty).$$

Эта цепь $\xi(n)$ для рассматриваемого процесса марковского восстановления, а также для определенных ниже полумарковских процессов, называется **вложенной цепью Маркова.**

Вторая компонента $\tau(n)$ процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$ является немарковским процессом (последовательностью зависимых случайных величин), но для её элементов $\tau(n)$ можно в силу равенства (3) определить условную функцию распределения

$$A_k(x) = P\{\tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k\} = \sum_{\nu} A_{k\nu}(x). \qquad (4)$$

В стационарном режиме функционирования полумарковского процесса по формуле полной вероятности можно записать и безусловную функцию распределения $F(x)$ для величин $\tau(n)$:

$$F(x) = P\{\tau(n+1) < x\} = \sum_k P\{\tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k\} P\{\xi(n) = k\} = \sum_k A_k(x) r(k),$$

где $r(k)$ – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова $\xi(n)$.

Как известно, стационарное распределение вероятностей $r(k)$ является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$r(k) = \sum_{\nu} r(\nu) P_{\nu k}, \qquad \sum_k r(k) = 1.$$

Если компоненты $\xi(n)$ и $\tau(n)$ двумерного случайного процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$ **условно независимы**, то есть для элементов $A_{k\nu}(x)$ полумарковской матрицы $A(x)$ выполняются равенства

$$A_{k\nu}(x) = P\{\xi(n+1) = \nu, \tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k\} =$$

$$= P\{\tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k\} P\{\xi(n+1) = \nu \mid \xi(n) = k\} = A_k(x) P_{k\nu}, \tag{5}$$

то процесс марковского восстановления, а также его полумарковскую матрицу будем называть процессом или матрицей **с условно независимыми компонентами**.

В силу равенства (5) для процессов марковского восстановления полумарковскую матрицу $\mathbf{A}(x)$ можно записать в виде произведения

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{D}(x)\mathbf{P}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D}(x)$ – диагональная матрица с элементами $A_k(x)$ по главной диагонали.

В силу определения (3), элементы $A_{k\nu}(x)$ полумарковской матрицы определяют условные двумерные распределения вероятностей, задание которых вызывает некоторые затруднения, поэтому достаточно полезной является следующая мультипликативная форма этих элементов

$$A_{k\nu}(x) = P\{\xi(n+1) = \nu, \tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k\} =$$

$$= \frac{P\{\xi(n+1) = \nu, \tau(n+1) < x, \xi(n) = k\}}{P\{\xi(n) = k\}} =$$

$$= \frac{P\{\tau(n+1) < x \mid \xi(n+1) = \nu, \xi(n) = k\} P\{\xi(n+1) = \nu, \xi(n) = k\}}{P\{\xi(n) = k\}} =$$

$$= P\{\tau(n+1) < x \mid \xi(n+1) = \nu, \xi(n) = k\} P\{\xi(n+1) = \nu \mid \xi(n) = k\} = G_{k\nu}(x) P_{k\nu},$$

то есть $A_{k\nu}(x)$ можно записать в виде произведения

$$A_{k\nu}(x) = G_{k\nu}(x) P_{k\nu}, \tag{7}$$

где $G_{k\nu}(x)$ – условная функция распределения.

Из (7) следует, что полумарковскую матрицу $\mathbf{A}(x)$ можно записать в виде произведения Адамара

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{G}(x) * \mathbf{P}$$

матриц $\mathbf{G}(x)$ и $\mathbf{P}$ с элементами

$$G_{k\nu}(x) = P\{\tau(n+1) < x \mid \xi(n+1) = \nu, \xi(n) = k\},$$

$$P_{k\nu} = P\{\xi(n+1) = \nu \mid \xi(n) = k\}. \tag{8}$$

Задание полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$ матрицами $\mathbf{G}(x)$ и $\mathbf{P}$ гораздо проще, чем непосредственное задание полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$.

2. Полумарковские процессы

Определим последовательность моментов времени

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots$$

некоторым начальным условием на t_0 и равенством

$$t_{n+1} = t_n + \tau(n+1),$$

которые будем называть **моментами восстановления**.

Теперь можно дать следующее определение.

Случайный процесс $k(t)$ с дискретным множеством состояний и непрерывным временем t будем называть **полумарковским, заданным полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$,** если для всех n выполняются равенства

$$k(t) = \xi(n), \quad t_n \le t < t_{n+1} = t_n + \tau(n+1).$$

То есть, на каждом интервале времени $[t_n, t_{n+1})$, длительность которого совпадает со значением второй компоненты $\tau(n+1)$, процесс $k(t)$ принимает и сохраняет то значение, которое в начале этого интервала приняла первая компонента $\xi(n)$, рассматриваемого двумерного марковского процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$.

Отметим, что значение компоненты $\xi(n) = k$ определяет индекс функции распределения

$$A_k(x) = \sum_{v=0}^{K} A_{kv}(x)$$

длины текущего интервала $[t_n, t_{n+1})$, в котором полумарковский процесс $k(t)$ принимает и сохраняет значение $k(t) = k$, то есть функции распределения времени пребывания полумарковского процесса $k(t)$ в состоянии k.

Поэтому естественным является другое – **конструктивное определение** полумарковского процесса $k(t)$.

Пусть задан набор функций распределения $F_k(x)$, определяющих время пребывания полумарковского процесса $k(t)$ в состоянии k. Набор условных вероятностей $q_{k\nu}(x)$ непосредственного перехода процесса $k(t)$ из состояния k в состояние ν, при условии, что в состоянии k процесс $k(t)$ находится в течении времени x.

Покажем эквивалентность конструктивного определения полумарковского процесса $k(t)$ и его определение полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$. Функции $F_k(x)$ и $q_{k\nu}(x)$ выразим через элементы $A_{k\nu}(x)$ полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$ и наоборот – элементы $A_{k\nu}(x)$ полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$ выразим через функции $F_k(x)$ и $q_{k\nu}(x)$ конструктивного определения полумарковского процесса.

Очевидно, выполняется равенство

$$F_k(x) = A_k(x) = \sum_{\nu=0}^{K} A_{k\nu}(x). \tag{9}$$

Для функций $q_{k\nu}(x)$ можно записать

$$q_{k\nu}(x) = P\{k(t_{n+1}) = \nu | k(t_{n+1} - 0) = k, \tau(n+1) = x\} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} P\{\xi(n+1) = \nu | \xi(n) = k, x \le \tau(n+1) < x + \Delta x\} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{\xi(n+1) = \nu, x \le \tau(n+1) < x + \Delta x | \xi(n) = k\}}{P\{x \le \tau(n+1) < x + \Delta x | \xi(n) = k\}} = \frac{A'_{k\nu}(x)}{A'_k(x)}.$$

То есть имеет место равенство

$$q_{k\nu}(x) = \frac{A'_{k\nu}(x)}{A'_k(x)}, \tag{10}$$

которое, совместно с (9), решают задачу выражения функций $F_k(x)$ и $q_{k\nu}(x)$ через элементы $A_{k\nu}(x)$ полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$.

Далее решим обратную задачу, применяя полученные равенства (9) и (10), элементы $A_{k\nu}(x)$ полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$ выразим через функции $F_k(x)$ и $q_{k\nu}(x)$ конструктивного определения полумарковского процесса.

Равенство (10), в силу (9) перепишем в виде

$$A'_{k\nu}(x) = F'_k(x) q_{k\nu}(x),$$

откуда полагая, что $A_{k\nu}(0) = 0$, запишем

$$A_{k\nu}(x) = \int_0^x q_{k\nu}(z) F_k'(z) dz = \int_0^x q_{k\nu}(z) dF_k(z). \qquad (11)$$

Определим другой класс полумарковских процессов.

Случайный процесс $s(t)$ с дискретным множеством состояний $k = 1, 2, \ldots, K$ и непрерывным временем t будем называть **полумарковским**, заданным полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, если для всех n выполняется равенство:

$$s(t) = \xi(n+1),\ t_n < t \le t_{n+1} = t_n + \tau(n+1), \qquad (12)$$

то есть процесс $s(t)$ на интервале $t_n < t \le t_{n+1}$ принимает и сохраняет то значение вложенной цепи Маркова, которое она принимает в конце рассматриваемого интервала времени. Напомним, что процесс $k(t)$ на этом интервале принимает и сохраняет то значение, которое вложенная цепь принимает в начале рассматриваемого интервала времени.

3. Методы исследования полумарковских процессов $k(t)$ и $s(t)$

Полумарковские процессы $k(t)$ и $s(t)$ с непрерывным временем являются немарковскими. Для исследования этих процессов воспользуемся **методом дополнительной переменной**, определив двумерные марковские процессы, содержащие компоненты $k(t)$ и $s(t)$. Введем следующие дополнительные компоненты:

$z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента следующего восстановления, то есть если $t_n < t < t_{n+1}$, то $z(t) = t_{n+1} - t$. Процесс $z(t)$ будем называть остаточным временем пребывания полумарковского процесса в текущем состоянии.

$y(t)$ – длина интервала от предшествующего момента восстановления до момента времени t, то есть если $t_n < t < t_{n+1}$, то $y(t) = t - t_{n+1}$. Процесс $y(t)$

будем называть истекшим временем пребывания полумарковского процесса в текущем состоянии.

Если мы рассматриваем процесс $k(t)$ с условно независимыми компонентами, то двумерный процесс $\{k(t), z(t)\}$ является марковским. Если процесс $k(t)$ – полумарковский процесс, тогда двумерный процесс $\{k(t), y(t)\}$ – марковский. Для процесса $s(t)$ марковским процессом будет процесс $\{s(t), z(t)\}$.

Исследование построенных двумерных марковских процессов выполняется определением их распределений вероятностей, выводом уравнений Колмогорова и решением этих уравнений, что позволяет найти совместное двумерное распределение вероятностей значений исследуемого процесса (марковского восстановления или полумарковского) и той дополнительной переменной, которая вводится. Далее, применяя условие согласованности многомерных распределений, можно найти одномерное маргинальное распределение вероятностей значений исследуемого процесса.

4. Исследование процесса марковского восстановления методом дополнительной переменной $z(t)$

Рассмотрим процесс $k(t)$ с условно независимыми компонентами, заданный стохастической матрицей **P** и набором функций распределения $A_k(x)$.

Для нахождения стационарного распределения вероятностей

$$P(k) = P\{k(t) = k\} \tag{13}$$

определим случайный процесс $z(t)$ как длину интервала от момента t до момента очередного восстановления (отказа или замены элемента).

Очевидно двумерный случайный процесс $\{k(t), z(t)\}$ марковский, поэтому для его распределения вероятностей

$$P(k,z,t) = P\{k(t) = k, z(t) < z\}$$

можно записать следующее равенство

$$P(k, z-\Delta t, t+\Delta t)=$$

$$=P(k,z,t)-P(k,\Delta t,t)+A_k(z)\sum_{v=1}^{K}P(v,\Delta t,t)P_{vk}+o(\Delta t). \qquad (14)$$

Здесь в правой части этого равенства записана разность $P(k, z, t) - P(k, \Delta t, t)$, которая определяет вероятность того, что в момент времени t процесс $k(t)$ принимает значение k, а значение остаточного времени $z(t)$ принадлежит интервалу $\Delta t < z(t) \le z$, поэтому на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ момент восстановления не наступит, а остаточное время $z(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$ будет меньше, чем $z - \Delta t$, как то указано в левой части равенства (14).

Второе слагаемое

$$\sum_{v=1}^{K}P(v,\Delta t,t)P_{vk}A_k(z) \qquad (15)$$

получено следующим образом. Сомножитель $P(v, \Delta t, t)$ – вероятность того, что в момент времени t процесс $k(t)$ принимает значения $v = 1, 2, \dots K$, поэтому здесь выполнено суммирование по всем значениям v. Оставшееся время $z(t)$ меньше, чем Δt, поэтому на интервале $(t, t + \Delta t)$ наступит момент восстановления t_n, и в этот момент времени процесс $k(t)$ перейдет из состояния v в состояние k с вероятностью P_{vk}, что определяет второй сомножитель в выражении (15). В том состоянии k, в которое перешел процесс $k(t)$ он будет находиться в течение времени $\tau(n + 1)$, функция распределения вероятностей значений которого – $A_k(x)$, а так как в этом случае остаточное время совпадает с полным временем пребывания в текущем состоянии, то вероятность выполнения неравенства $z(t + \Delta t) < z - \Delta t$ можно записать в виде $A_k(x) + O(\Delta t)$, что определяет третий сомножитель в выражении (15).

Разложим в ряд Тейлора левую часть равенства (14) в окрестности точки (z, t):

$$P(k,z-\Delta t,t+\Delta t)=P(k,z,t)-\frac{\partial P(k,z,t)}{\partial z}\Delta t+\frac{\partial P(k,z,t)}{\partial t}\Delta t+o(\Delta t).$$

Тогда равенство (14) перепишем в виде:

$$P(k,z,t)-\frac{\partial P(k,z,t)}{\partial z}\Delta t+\frac{\partial P(k,z,t)}{\partial t}\Delta t+o\left(\Delta t\right)=$$

$$=P\left(k,z,t\right)-P\left(k,\Delta t,t\right)+A_k(z)\sum_{\nu=1}^{K}P\left(\nu,\Delta t,t\right)P_{\nu k}+o\left(\Delta t\right).$$

Уничтожим в левой и правой части уравнения $P\left(k,z,t\right)$, разделим на Δt, устремим $\Delta t\to 0$, введя обозначение

$$\frac{P\left(k,\Delta t,t\right)}{\Delta t}\underset{\Delta t\to 0}{\to}\left.\frac{\partial P\left(k,z,t\right)}{\partial z}\right|_{z=0}\triangleq\frac{\partial P\left(k,0,t\right)}{\partial z},$$

получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(k,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(k,0,t)}{\partial z}+A_k(z)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,0,t)}{\partial z}P_{\nu k},$$

и для стационарного распределения $P(k, z, t)\equiv P(k, z)$ эту систему перепишем в виде

$$\frac{\partial P(k,z)}{\partial z}=\frac{\partial P(k,0)}{\partial z}-A_k(z)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z}P_{\nu k}.$$

Интегрируя левую и правую части этого равенства, получим

$$P(k,z)=\int_0^z\left\{\frac{\partial P(k,0)}{\partial z}-A_k(x)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z}P_{\nu k}\right\}dx.$$

В силу условия согласованности вероятностных распределений, одномерное маргинальное распределение $P(k)$ запишем следующим образом

$$P(k)=\lim_{z\to\infty}P(k,z)=\int_0^\infty\left\{\frac{\partial P(k,0)}{\partial z}-A_k(x)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z}P_{\nu k}\right\}dx. \qquad (16)$$

В силу необходимого условия сходимости несобственного интеграла с монотонно убывающей подынтегральной функцией, можно записать следующее равенство

$$\frac{\partial P(k,0)}{\partial z}=\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z}P_{\nu k},$$

которое совпадает с системой уравнений Колмогорова

$$r(k)=\sum_{\nu=1}^{K} r(\nu)P_{\nu k}$$

для стационарного распределения вероятностей $r(k)$ состояний вложенной цепи Маркова $\xi(n)$, поэтому

$$\frac{\partial P(k,0)}{\partial z}=C\cdot r(k). \tag{17}$$

Мультипликативную постоянную C найдём из условия нормировки следующим образом.

Применяя равенство (17), перепишем (16)

$$P(k)=\int_0^{\infty}\left\{C\cdot r(k)-A_k(x)\sum_{\nu=1}^{K}C\cdot r(\nu)P_{\nu k}\right\}dx=C\cdot r(k)\int_0^{\infty}\left(1-A_k(x)\right)dx=C\cdot r(k)\cdot a_k,$$

где a_k – среднее время пребывания процесса марковского восстановления в состоянии k (среднее значение срока службы элемента вида k).

Таким образом

$$P(k)=C\cdot r(k)\cdot a_k,$$

а в силу условия нормировки запишем

$$1=\sum_{k=1}^{K}P(k)=C\cdot\sum_{k=1}^{K}r(k)a_k,$$

откуда получим

$$C=1\Big/\left(\sum_{k=1}^{K}r(k)a_k\right),$$

следовательно, стационарное распределение вероятностей $P(k)$ значений процесса марковского восстановления $k(t)$ имеет вид

$$P(k)=r(k)a_k\Big/\sum_{k=1}^{K}r(k)a_k. \tag{18}$$

5. Исследования полумарковского процесса методом дополнительной переменной $y(t)$

Для исследования полумарковского процесса $k(t)$, определяемого полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, рассмотрим случайный процесс $y(t)$, равный длине интервала от момента последнего восстановления до текущего момента времени t. В этом случае двумерный процесс $\{k(t), y(t)\}$ является марковским процессом.

Обозначим

$$P(k,y,t)=\frac{\partial P\{k(t)=k,\,y(t)<y\}}{\partial y}, \tag{19}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае распределение (19) по переменной y имеет смысл плотности распределения вероятностей в отличии от предыдущего случая, когда распределение имело смысл функции распределения.

Для распределения вероятностей (19) можно при $t_n < t < t_{n+1} = t_n+\tau(n+1)$ записать следующее равенство

$$P(k,y+\Delta t,t+\Delta t)=P(k,y,t)P\{\tau(n+1)>y+\Delta t\,|\,\tau(n+1)>y,\xi(n)=k\}=$$

$$=P(k,y,t)\frac{P\{\tau(n+1)>y+\Delta t,\tau(n+1)>y,\xi(n)=k\}}{P\{\tau(n+1)>y,\xi(n)=k\}}=$$

$$=P(k,y,t)\frac{P\{\tau(n+1)>y+\Delta t,\xi(n)=k\}}{P\{\tau(n+1)>y,\xi(n)=k\}}=P(k,y,t)\frac{P\{\tau(n+1)>y+\Delta t\,|\,\xi(n)=k\}}{P\{\tau(n+1)>y\,|\,\xi(n)=k\}}=$$

$$=P(k,y,t)\frac{1-A_k(y+\Delta t)}{1-A_k(y)}=P(k,y,t)\left\{1+\frac{\left(1-A_k(y)\right)'}{1-A_k(y)}\Delta t+o(\Delta t)\right\},$$

Разложим в ряд Тейлора левую часть равенства

$$P(k,y+\Delta t,t+\Delta t)=P(k,y,t)+\frac{\partial P(k,y,t)}{\partial y}\Delta t+\frac{\partial P(k,y,t)}{\partial t}\Delta t+o\left(\Delta t\right).$$

Окончательно получим уравнение

$$\frac{\partial P(k,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial P(k,y,t)}{\partial y}=P(k,y,t)\frac{\left(1-A_k(y)\right)'}{1-A_k(y)}.$$

Для стационарного распределения

$$P(k,y,t)\equiv P(k,y)$$

это уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial P(k,y)}{\partial y}=P(k,y)\frac{\left(1-A_k(y)\right)'}{1-A_k(y)}. \tag{20}$$

Для нахождения частного решения этого уравнения необходимо записать краевое по y условие для решения $P(k, y)$ уравнения (20). Такое краевое условие получим следующим образом. При $t_n < t < t_{n+1} = t_n + \tau(n+1)$ в силу (19) можно записать

$$P(k(t+\Delta t)=k, y(t+\Delta t)<\Delta t)=\int_0^{\Delta t}P(k,x,t+\Delta t)dx=$$

$$=\sum_{v=1}^{K}\int_0^{\infty}P(v,x,t)P\{\tau(n)<x+\Delta t,\xi(n)=k\mid\tau(n)>x,\xi(n-1)=v\}dx=$$

$$=\sum_{v=1}^{K}\int_0^{\infty}P(v,x,t)\frac{P\{x\le\tau(n)<x+\Delta t,\xi(n)=k,\xi(n-1)=v\}}{P\{\tau(n)>x,\xi(n-1)=v\}}dx=$$

$$=\sum_{v=1}^{K}\int_0^{\infty}P(v,x,t)\frac{P\{x\le\tau(n)<x+\Delta t,\xi(n)=k\mid\xi(n-1)=v\}}{P\{\tau(n)>x\mid\xi(n-1)=v\}}dx=$$

$$=\sum_{v=1}^{K}\int_0^{\infty}P(v,x,t)\frac{A'_{vk}(x)\Delta t+o(\Delta t)}{1-A_v(x)}dx.$$

Поделив левую и правую части этого равенства на Δt и полагая, что Δt сходится к нулю, получим равенство

$$P(k,0,t)=\sum_{v=1}^{K}\int_0^{\infty}P(v,x,t)\frac{A'_{vk}(x)}{1-A_v(x)}dx,$$

которое в стационарном режиме имеет вид

$$P(k,0)=\sum_{v=1}^{K}\int_0^{\infty}P(v,x)\frac{A'_{vk}(x)}{1-A_v(x)}dx \tag{21}$$

и определяет краевое условие при $y = 0$ для решения $P(k, y)$ уравнения (20).

Общее решение уравнения (20) можно записать в виде

$$P(k,y)=C(k)\left(1-A_k(y)\right). \tag{22}$$

Для определения постоянных $C(k)$, воспользуемся краевым условием (21), подставив в которое (22), получим равенство

$$C(k)=\sum_{v=1}^{K}C(v)\int_{0}^{\infty}\left(1-A_v(x)\right)\frac{A'_{vk}(x)}{1-A_v(x)}dx=\sum_{v=1}^{K}C(v)\int_{0}^{\infty}A'_{vk}(x)dx=\sum_{v=1}^{K}C(v)P_{vk}\ ,$$

которое совпадает с системой уравнений Колмогорова для стационарного распределения вероятностей $r(k)$ значений вложенной цепи Маркова, поэтому

$$C(k)=C\cdot r(k)\,,$$

и в силу (22) запишем

$$P(k,y)=C\cdot r(k)\cdot\left(1-A_k(y)\right).$$

В силу определения (19) функций $P(k, y)$ и условия согласованности распределений одномерное маргинальное распределение $P(k)$ имеет вид

$$P(k)=\int_{0}^{\infty}P(k,y)dy=C\cdot r(k)\int_{0}^{\infty}\left(1-A_k(y)\right)dy=C\cdot r(k)\cdot a_k\ .$$

В силу условия нормировки запишем

$$1=\sum_{k=1}^{K}P(k)=C\cdot\sum_{k=1}^{K}r(k)a_k\ ,$$

откуда получим

$$C=1\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{K}r(k)a_k\right),$$

следовательно, стационарное распределение вероятностей $P(k)$ значений процесса марковского восстановления $k(t)$ имеет вид

$$P(k)=r(k)a_k\Bigg/\sum_{k=1}^{K}r(k)a_k\ . \qquad (23)$$

Отметим, что распределение (23) для полумарковского процесса совпадает с распределением вероятностей (18) для процесса марковского восстановления.

6. Исследование полумарковского процесса $s(t)$ методом дополнительной переменной $z(t)$

Для исследования полумарковского процесса $s(t)$, определяемого полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$ с элементами $A_{vk}(x)$ рассмотрим двумерный марковский процесс $\{s(t), z(t)\}$. Его распределение вероятностей обозначим

$$P(s,z,t) = P\left\{s(t) = s, z(t) < z\right\},\ s = 1,\ldots, K.$$

Можно записать равенства

$$P(s, z - \Delta t, t + \Delta t) = P(s,z,t) - P(s,\Delta t,t) + \sum_{v=1}^{K} P(\nu,\Delta t,t) A_{vs}(z) + o(\Delta t). \quad (24)$$

Это равенство получено аналогично (14). Различие заключается в составлении лишь второго слагаемого

$$\sum_{v=1}^{K} P(\nu,\Delta t,t) A_{vs}(z) \quad (25)$$

в правой части равенств (14) и (24). Аналогично (15), в равенстве (25) сомножитель $P(v, \Delta t, t)$ – вероятность того, что в момент времени t процесс $s(t)$ принимает значения $v = 1, 2, \ldots K$, поэтому здесь выполнено суммирование по всем значениям v. Оставшееся время $z(t)$ меньше, чем Δt, поэтому на интервале $(t, t + \Delta t)$ наступит момент восстановления t_n, и в этот момент времени процесс $s(t)$ перейдет из состояния v в состояние s, и в этом состоянии он будет находиться в течение времени $\tau(n + 1)$. Вероятность такого перехода и того, что остаточное время $z(t)$, совпадающее с $\tau(n + 1)$, окажется меньше, чем z составляет $A_{vs}(x)$, что определяет второй сомножитель в выражении (25).

Нетрудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(s,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(s,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s,0,t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^{K} \frac{\partial P(\nu,0,t)}{\partial z} A_{vs}(z),$$

которую для стационарного распределения вероятностей перепишем в виде

$$\frac{\partial P(s,z)}{\partial z} = \frac{\partial P(s,0)}{\partial z} - \sum_{v=1}^{K} \frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z} A_{vs}(z).$$

Интегрируя по z левую и правую части этого равенства, получим

$$P(s,z) = \int_0^z \left\{ \frac{\partial P(s,0)}{\partial z} - \sum_{v=1}^{K} \frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z} A_{vs}(z) \right\} dx.$$

Одномерное маргинальное распределение $P(s)$ запишем следующим образом

$$P(s) = \lim_{z\to\infty} P(s,z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial P(s,0)}{\partial z} - \sum_{v=1}^{K} \frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z} A_{vs}(x) \right\} dx. \tag{26}$$

А в силу необходимого условия сходимости несобственного интеграла с монотонно убывающей подынтегральной функцией, можно записать следующее равенство, учитывая, что $P_{vs} = A_{vs}(\infty)$

$$\frac{\partial P(s,0)}{\partial z} = \sum_{v=1}^{K} \frac{\partial P(\nu,0)}{\partial z} P_{vs}, \tag{27}$$

которое совпадает с системой уравнений Колмогорова

$$r(s) = \sum_{v=1}^{K} r(\nu) P_{vs}$$

для стационарного распределения вероятностей $r(s)$ состояний вложенной цепи Маркова $\xi(n)$, поэтому

$$\frac{\partial P(s,0)}{\partial z} = C \cdot r(s). \tag{28}$$

Мультипликативную постоянную C найдём из условия нормировки следующим образом. Применяя равенство (28), перепишем (26)

$$P(s) = \int_0^\infty \left\{ C \cdot r(s) - \sum_{v=1}^{K} C \cdot r(\nu) A_{vs}(x) \right\} dx = C \int_0^\infty \left\{ \sum_{v=1}^{K} r(\nu) P_{vs} - \sum_{v=1}^{K} r(\nu) A_{vs}(x) \right\} dx =$$

$$= C \sum_{v=1}^{K} r(\nu) \int_0^\infty \{ P_{vs} - A_{vs}(x) \} dx = C \sum_{v=1}^{K} r(\nu) a_{vs},$$

где

$$a_{vs} = \int_0^\infty \{ P_{vs} - A_{vs}(x) \} dx. \tag{29}$$

Следовательно, стационарное распределение вероятностей $P(s)$ значений полумарковского процесса $s(t)$ определяется равенством

$$P(s) = C\sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) a_{\nu s} ,$$

а в силу условия нормировки запишем

$$1 = \sum_{s} P(s) = C \cdot \sum_{s=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) a_{\nu s} = C \cdot \sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) \sum_{s=1}^{K} a_{\nu s} = C \cdot \sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) a_{\nu} ,$$

откуда получим

$$C = 1 \Big/ \sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) a_{\nu} ,$$

следовательно, стационарное распределение вероятностей $P(s)$ значений процесса марковского восстановления $s(t)$ имеет вид

$$P(s) = \sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) a_{\nu s} \Big/ \sum_{\nu=1}^{K} r(\nu) a_{\nu} . \tag{30}$$

7. Исследование двумерного полумарковского процесса $\{k(t), s(t)\}$ методом дополнительной переменной $z(t)$

Стационарное распределение вероятностей для значений полумарковского процесса, определяемого полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, можно найти и другим способом, применяя процессы $z(t)$ и $s(t)$.

Построенный трёхмерный случайный процесс $\{k(t), z(t), s(t)\}$ является марковским, поэтому для его распределения вероятностей

$$P(k,s,z,t) = P\{k(t) = k, s(t) = s, z(t) < z\}$$

можно записать равенства

$$P(k,s,z-\Delta t,t+\Delta t) = P(k,s,z,t) - P(k,s,\Delta t,t) + \sum_{\nu=1}^{K} P(\nu,k,\Delta t,t) A_{ks}(z) + o(\Delta t) ,$$

из которых нетрудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,s,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(k,s,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(k,s,0,t)}{\partial z}+\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0,t)}{\partial z}A_{ks}(z).$$

Для стационарного распределения вероятностей эту систему перепишем в виде

$$\frac{\partial P(k,s,z)}{\partial z}=\frac{\partial P(k,s,0)}{\partial z}-A_{ks}(z)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}.$$

Интегрируя по z левую и правую части этого равенства, получим

$$P(k,s,z)=\int_{0}^{z}\left\{\frac{\partial P(k,s,0)}{\partial z}-A_{ks}(x)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}\right\}dx.$$

В силу условия согласованности вероятностных распределений, двумерное маргинальное распределение $P(k, s)$ запишем следующим образом

$$P(k,s)=\lim_{z\to\infty}P(k,s,z)=\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{\partial P(k,s,0)}{\partial z}-A_{ks}(x)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}\right\}dx. \qquad (31)$$

А в силу необходимого условия сходимости несобственного интеграла с монотонно убывающей подынтегральной функцией, запишем следующее равенство

$$\frac{\partial P(k,s,0)}{\partial z}=P_{ks}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}, \qquad (32)$$

подставив которое в (31), получим

$$P(k,s)=\int_{0}^{\infty}\left\{P_{ks}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}-A_{ks}(x)\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}\right\}dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\left(P_{ks}-A_{ks}(x)\right)dx\left(\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}\right)=a_{ks}\left(\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}\right)=a_{ks}H(k), \qquad (33)$$

здесь

$$a_{ks}=\int_{0}^{\infty}\left(P_{ks}-A_{ks}(x)\right)dx, \qquad H(k)=\sum_{\nu=1}^{K}\frac{\partial P(\nu,k,0)}{\partial z}.$$

Для нахождения величин $H(k)$ просуммируем по k равенства (32), получим систему уравнений относительно $H(s)$

$$H(s)=\sum_{k=1}^{K}P_{ks}H(k),$$

совпадающую с системой уравнений Колмогорова для стационарного распределения вероятностей $r(k)$ состояний вложенной цепи Маркова $\xi(n)$, поэтому

$$H(s) = C \cdot r(k).$$

Подставляя найденное выражение в (33), запишем

$$P(k,s) = a_{ks} \cdot C \cdot r(k) .$$

Так как

$$a_k = \sum_{s=1}^{K} a_{ks},$$

то

$$P(k) = \sum_{s=1}^{K} P(k,s) = C \cdot r(k) \cdot \sum_{s=1}^{K} a_{ks} = C \cdot r(k) \cdot a_k,$$

В силу условия нормировки запишем

$$1 = \sum_{k=1}^{K} P(k) = C \cdot \sum_{k=1}^{K} r(k) a_k ,$$

откуда получим

$$C = 1 \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{K} r(k) a_k \right),$$

следовательно, для стационарного распределения вероятностей $P_1(k)$ значений полумарковского процесса $k(t)$ можно записать равенство

$$P_1(k) = \frac{r(k) a_k}{\sum_{k=1}^{K} r(k) a_k},$$

совпадающее с полученным ранее, методом дополнительной переменной $y(t)$, равенством (18).

Для стационарного распределения вероятностей $P_2(s)$ значений полумарковского процесса $s(t)$ можно записать равенство

$$P_2(s) = \sum_{k=1}^{K} P(k,s) = C \sum_{k=1}^{K} r(k) a_{ks},$$

В силу условия нормировки запишем

$$1=\sum_{s}P_2(s)=C\cdot\sum_{s=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}r(\nu)a_{\nu s}=C\cdot\sum_{\nu=1}^{K}r(\nu)\sum_{s=1}^{K}a_{\nu s}==C\cdot\sum_{\nu=1}^{K}r(\nu)a_{\nu}$$

откуда получим

$$C=1\Big/\left(\sum_{v=1}^{K}r(v)a_v\right),$$

следовательно, для стационарного распределения вероятностей $P_2(s)$ значений полумарковского процесса $s(t)$ можно записать равенство

$$P_2(s)=\frac{\sum_{k=1}^{K}r(k)a_{ks}}{\sum_{v=1}^{K}r(v)a_v},$$

совпадающее с полученным ранее, методом дополнительной переменной $z(t)$, равенством (30).

Литература

1. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
2. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов : учебное пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
3. Рыков В.В., Козырев Д.В. Основы теории массового обслуживания: М. : ИНФРА-М, 2016. 223 с.
4. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М. : ЛИБРОКОМ, 2014. 205 с.

Учебное издание

Анатолий Андреевич НАЗАРОВ, Светлана Владимировна ПАУЛЬ

ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Учебное пособие

Редактор В.Г. Лихачёва
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано в печать 15.09.2022 г. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печ. л. 1,5. Усл. печ. л. 1,4. Гарнитура Times.
Тираж 100 экз. Заказ № 5148.

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Телефоны: 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-907572-22-5

9 785907 572225 >