МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Назаров, С.В. Пауль, И.Л. Лапатин

Полумарковские потоки

Учебное пособие

Томск

Издательство Томского государственного университета

2022

УДК 519.872(075.8)
ББК 22.18я73
Н19

Назаров А.А., Пауль С.В., Лапатин И.Л.

Н19 Полумарковские потоки : учебное пособие. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 26 с.

ISBN 978-5-907572-21-8

Учебное пособие содержит основные понятия и методы исследования моделей полумарковских потоков. Данный материал необходим для магистрантов, аспирантов и сотрудников вузов, которые ведут исследования в области теории массового обслуживания и телекоммуникаций.

УДК 519.872(075.8)
ББК 22.18я73

Рецензенты:

С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор.

Д.В. Семенова, кандидат физико-математических наук, доцент

ISBN 978-5-907572-21-8

Содержание

1. Определение и математическая модель полумарковского потока

Многочисленные исследования реальных потоков заявок, сообщений, требований, выполненные зарубежными и отечественными специалистами в различных областях, позволили сделать вывод о том, что многие реальные телекоммуникационные потоки нельзя описывать пуассоновскими моделями. Поэтому актуальной является задача существенного расширения множества математических моделей случайных потоков однородных событий, а также развития методов их исследования.

Наиболее общей моделью случайного потока однородных событий является полумарковский поток. Его частными случаями являются потоки Марковского восстановления и рекуррентные потоки.

Для определения полумарковского потока (SM-потока, Semi-Markovian process) рассмотрим двумерный однородный марковский случайный процесс $\{\xi(n),\tau(n)\}$ с дискретным временем $n=0,1,2,\ldots$, первая компонента $\xi(n)$ которого принимает значения из некоторого дискретного множества. Для определенности будем полагать, что $\xi(n)=k=1,2,\ldots,K$. Вторая компонента $\tau(n)$ рассматриваемого процесса принимает неотрицательные значения.

Определение. Случайный поток однородных событий $t_1<t_2<\ldots<t_n<t_{n+1}<\ldots$, будем называть **полумарковским** или **SM-потоком**, заданным полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$ с элементами $A_{k\nu}(x)$, если для моментов t_n наступления его событий выполняются равенства $t_{n+1}=t_n+\tau(n+1)$, где процесс $\tau(n)$ является компонентой двумерного марковского процесса $\{\xi(n),\tau(n)\}$, заданного марковской переходной функцией $A_{k\nu}(x)=P\{\xi(n+1)=\nu,\tau(n+1)<x|\xi(n)=k\}$.

Здесь процесс $\xi(n)$ является цепью Маркова с дискретным временем и матрицей P вероятностей $p_{k_1k_2}$ переходов за один шаг, определяемой равенством

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\infty). \qquad (1)$$

Эту цепь для рассматриваемого SM-потока будем называть вложенной цепью Маркова по моментам наступления событий в полумарковском потоке.

Вторая компонента $\tau(n)$, вообще говоря, является немарковским процессом (последовательностью зависимых случайных величин), но для ее элементов можно определить условные функции распределений

$$A_k(x) = P\{\tau(n+1) < x | \xi(n) = k\} = \sum_{\nu} A_{k\nu}(x).$$

Для элементов полумарковской матрицы в общем случае является полезной мультипликативная форма, которую можно записать равенством

$$A_{k\nu}(x) = G_{k\nu}(x) p_{k\nu}$$

для элементов матрицы $\mathbf{A}(x)$ в виде произведения Адамара двух матриц

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{G}(x) * \mathbf{P}.$$

Здесь $G_{k\nu}(x)$ – условная функция распределения длины интервала полумарковского потока при условии, что в начале этого интервала вложенная цепь Маркова приняла значение k, а в конце его примет значение ν.

Для полумарковских потоков рассматриваются их частные случаи. Именно – рекуррентный поток, определяемый скалярной функцией распределения $A(x)$ стохастически независимых и одинаково распределенных длин интервалов между моментами наступления событий этого потока, а также полумарковский поток с условно независимыми компонентами, полумарковская матрица $\mathbf{A}(x)$ которого имеет вид произведения

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{D}(x)\mathbf{P},$$

где матрица $\mathbf{D}(x)$ – диагональная матрица с элементами $A_k(x)$ на главной диагонали, где $A_k(x)$ – функция распределения длины интервала между моментами наступления событий в рассматриваемом потоке, когда поток находится в k-ом состоянии.

Обозначим $n(t)$ – число событий полумарковского потока, наступивших за время t на интервале $[0, t)$.

Задачей исследования является определение распределения вероятностей $P(n,t)=P\{n(t)=n\}$, при стационарном функционировании цепи Маркова $\xi(n)$.

2. Уравнения Колмогорова в теории потоков

Естественно, что процесс $n(t)$ является немарковским, поэтому, вначале методом дополнительной переменной для различных классов полумарковских потоков составим дифференциальные уравнения, определяющие соответствующие маргинальные распределения.

Рекуррентный поток

Для исследования рекуррентного потока определим процесс $z(t)$ – длину интервала от текущего момента времени t до момента наступления следующего события. Тогда процесс $\{n(t), z(t)\}$ является марковским, что позволит нам для его исследования применить теорию двумерных марковских процессов, первая компонента в которых дискретная, а вторая непрерывная.

Таким образом, необходимо найти распределение вероятностей двумерного случайного процесса $\{n(t), z(t)\}$, то есть

$$P(n,z,t)=P\{n(t)=n, z(t)<z\}.$$

Так как процесс $\{n(t), z(t)\}$ является двумерным процессом Маркова, то для распределения вероятностей $P(n,z,t)$ нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Имеем

$$P(n,z-\Delta t,t+\Delta t)=P(n,z,t)-P(n,\Delta t,t)+A(z)P(n-1,\Delta t,t)+o(\Delta t),$$

Тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z}+A(z)\frac{\partial P(n-1,0,t)}{\partial z}, \qquad (2)$$

при заданном начальном условии

$$\begin{cases} P(0,z,0)=R(z), \\ P(n,z,0)=0, \ n \ge 1 \end{cases}, \tag{3}$$

где $R(z)$ – стационарная функция распределения значений процесса $z(t)$.

3. Полумарковский поток с условно независимыми компонентами

Для полумарковского потока с условно независимыми компонентами двумерный процесс $\{n(t), z(t)\}$ является немарковским, поэтому добавим еще одну компоненту – полумарковский процесс $k(t)$. Трехмерный процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$ является марковским, для распределения вероятностей

$$P(k,n,z,t) = P\{k(t)=k, n(t)=n, z(t)<z\} \tag{4}$$

которого можно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова, записав следующее равенство

$$P(k,n,z-\Delta t,t+\Delta t) = P(k,n,z,t) - P(k,n,\Delta t,t) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} P(\nu,n-1,\Delta t,t) p_{\nu k} A_k(z) + o(\Delta t),$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(k,n,0,t)}{\partial z} + A_k(z)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial P(\nu,n-1,0,t)}{\partial z} p_{\nu k}. \tag{5}$$

при заданном начальном условии

$$\begin{cases} P(k,0,z,0)=R(k,z), \\ P(k,n,z,0)=0, \ n \ge 1 \end{cases}, \tag{6}$$

где $R(k,z)$ – стационарное распределение значений двумерного процесса $\{k(t), z(t)\}$.

Полумарковский поток

Для полумарковского потока, заданного полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, предложенный выше трехмерный процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$ не будет марковским, поэтому рассмотрим случайный процесс $s(t)$ с кусочнопостоянными реализациями непрерывными слева (для $k(t)$ реализации непрерывны справа), определенный равенством

$$s(t)=\xi(n+1),\text{ если } t_n < t \le t_{n+1}.$$

То есть на интервале $(t_n, t_{n+1}]$ процесс $s(t)$ принимает и сохраняет то значение, которое вложенная цепь Маркова $\xi(n)$ принимает в конце рассматриваемого или, можно считать, в начале следующего интервала.

Определенный таким образом трехмерный случайный процесс $\{s(t), n(t), z(t)\}$ является марковским с непрерывным временем, поэтому для его распределения вероятностей

$$P(s,n,z,t)=P\{s(t)=s, n(t)=n, z(t)<z\}, \tag{7}$$

нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Для исследуемого потока запишем следующее равенство

$$P(s,n,z-\Delta t,t+\Delta t)=P(s,n,z,t)-P(s,n,\Delta t,t)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}P(\nu,n-1,\Delta t,t)A_{\nu k}(z)+o(\Delta t),$$

откуда имеем

$$P(s,n,z,t)-\Delta t\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial z}+\Delta t\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial t}=P(s,n,z,t)-P(s,n,\Delta t,t)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}P(\nu,n-1,\Delta t,t)A_{\nu k}(z)+o(\Delta t),$$

$$\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial z}-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(s,n,\Delta t,t)}{\Delta t}+$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{P(\nu,n-1,\Delta t,t)}{\Delta t}A_{\nu k}(z).$$

Учитывая, что

$$\frac{P(s,n,\Delta t,t)}{\Delta t}\underset{\Delta t\to 0}{\to}\left.\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\partial P(s,n,0,t)}{\partial z},$$

имеем

$$\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s,n,0,t)}{\partial z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial P(\nu,n-1,0,t)}{\partial z} A_{\nu k}(z).$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s,n,0,t)}{\partial z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial P(\nu,n-1,0,t)}{\partial z} A_{\nu k}(z). \quad (8)$$

при заданном начальном условии

$$\begin{cases} P(s,0,z,0) = R(s,z), \\ P(s,n,z,0) = 0, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (9)$$

где функция $R(s,z)$ – стационарное распределение двумерного марковского процесса $\{s(t), z(t)\}$.

Уравнения для частичных характеристических функций

Для **рекуррентного потока** обозначим функции

$$H(u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,z,t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, которые будем называть частичными характеристическими функциями.

Для этих функций из системы (1) и начальных условий (2) можно записать следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left(e^{ju} A(z) - 1\right), \\ H(u,z,0) = R(z). \end{cases}$$

Для **потока марковского восстановления** обозначим частичные характеристические функции

$$H(k,u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,z,t),$$

Для этих функций из системы (5) и начальных условий (6) можно записать следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(k,u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(k,u,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial H(k,u,0,t)}{\partial z} + e^{ju} A_k(z) \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{\partial H(\nu,u,0,t)}{\partial z}, \\ H(k,u,z,0) = R(k,z). \end{cases}$$

Для **полумарковского потока** обозначим частичные характеристические функции

$$H(s,u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(s,n,z,t). \tag{10}$$

Для этих функций из системы (8) и начальных условий (9) можно записать следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(s,u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(s,u,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial H(s,u,0,t)}{\partial z} + e^{ju} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{\partial H(\nu,u,0,t)}{\partial z} A_{\nu k}(z), \\ H(s,u,z,0) = R(s,z). \end{cases} \tag{11}$$

Обозначим вектор-функцию

$$\mathbf{H}(u,z,t) = \{H(1,u,z,t), H(2,u,z,t), \ldots, H(K,u,z,t)\},$$

так же матрицу **A**(z) с элементами $A_{\nu k}(z)$, тогда из (11) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,0,t)}{\partial z} \{e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}\}, \\ \mathbf{H}(u,z,0) = \mathbf{R}(z), \end{cases} \tag{12}$$

где **I** – единичная матрица. Решение матричного уравнения (12) удовлетворяет также краевому условию

$$\mathbf{H}(u,0,t) = 0. \tag{13}$$

Найдем вектор **R**(z), определяющий начальное условие задачи (12–13), компоненты $R(s,z)$ которого имеют смысл стационарного распределения вероятностей

$$R(s,z) = P\{s(t) = s, z(t) < z\} \tag{14}$$

двумерного случайного процесса $\{s(t), z(t)\}$.

Лемма. Стационарное распределение **R**(z) двумерного марковского процесса $\{s(t), z(t)\}$ имеет вид

$$\mathbf{R}(z) = \kappa_1 \mathbf{r} \int_0^z \left(\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)\right) dx, \tag{15}$$

Где $\mathbf{A}(x)$ – полумарковская матрица, $\mathbf{P}$ – стохастическая матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова, $\mathbf{r}$ – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, для которого выполняются равенства $\mathbf{r} = \mathbf{rP}$, $\mathbf{re} = 1$, а величина κ_1 определяется равенством

$$\kappa_1 = \frac{1}{\mathbf{rAe}}, \tag{16}$$

где матрица $\mathbf{A}$ определяется равенством

$$\mathbf{A} = \int_0^\infty \left(\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)\right) dx, \tag{17}$$

e – единичный вектор столбец.

Доказательство. В силу определения частичных характеристически функций $H(s,u,z,t)$, компонента $R(s, z)$ вектора $\mathbf{R}(z)$ определяется равенством

$$R(z,s) = H(s,0,z,t),$$

в котором $H(s,0,z,t)$ не зависит от t в силу стационарности двумерного процесса $\{s(t), z(t)\}$, получим матричное дифференциальное уравнение для вектора $\mathbf{R}(z)$:

$$\mathbf{R}'(z) = \mathbf{R}'(0)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\right),$$

граничное условие для которого при $z \to \infty$ в силу равенства (1) имеет вид:

$$\mathbf{R}'(0) = \mathbf{R}'(0)\mathbf{P},$$

который совпадает с уравнением системы, определяющей стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, тогда

$$\mathbf{R}'(0) = C\mathbf{r},$$

где C – некоторая константа, а вектор-строка $\mathbf{r}$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний вложенной цепи Маркова $\xi(n)$. Этот вектор $\mathbf{r}$ является решением уравнения Колмогорова $\mathbf{rP} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{P} = \lim_{z\to\infty} \mathbf{A}(z)$ – стохастическая матрица, которая определяет вероятности переходов вложенной цепи Маркова. Таким образом, решение уравнения для вектора $\mathbf{R}(z)$ запишем в виде:

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}'(0)\int_0^z \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)\right)dx .$$

Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty)$ – стационарное распределение значений полумарковского процесса $k(t)$, тогда при $z \to \infty$ из последнего равенства получаем:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty) = C\mathbf{r}\int_0^\infty \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)\right)dx = C\mathbf{r}\int_0^\infty \left(\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)\right)dx = C\mathbf{r}\mathbf{A} .$$

где матрица $\mathbf{A}$ определяется равенством $\mathbf{A} = \int_0^\infty \left(\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)\right)dx$. Умножая левую и правую части равенства для вектора $\mathbf{R}$ на единичный вектор-столбец $\mathbf{e}$, получим

$$C = \frac{1}{\mathbf{rAe}} .$$

Подставляя полученное равенство в (1.73), имеем

$$\mathbf{R}'(0) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{rAe}} .$$

Введем обозначения

$$\kappa_1 = \frac{1}{\mathbf{rAe}} ,$$

тогда получим равенство (15).

4. Исследование допредельной модели полумарковского потока

Теорема 1. *Распределение вероятностей $P(n,t)$ числа событий, наступивших в полумарковском потоке за время t, вычисляется по формулам*

$$
\begin{cases}
P(0,t) = 1 - \dfrac{\kappa_1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2}\left(1 - e^{-jyt}\right) \mathbf{r}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y)\right) \mathbf{e} dy, \\
P(n,t) = \dfrac{\kappa_1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2}\left(1 - e^{-jyt}\right) \mathbf{r}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y)\right)^2 \mathbf{A}^{*n-1}(y) \mathbf{e} dy,
\end{cases}
\tag{18}
$$

где $\mathbf{A}^*(y) = \int_0^{\infty} e^{jyx} d\mathbf{A}(x)$ – преобразование Фурье-Стилтьеса по x от полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,0,t)}{\partial z} \left\{e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}\right\}, \\
\mathbf{H}(u,z,0) = \mathbf{R}(z),
\end{cases}
$$

Доказательство. Для исследования допредельной модели полумарковского потока рассмотрим задачу Коши (12). Преобразование Фурье-Стилтьеса

$$
\boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{H}(u,z,t), \tag{19}
$$

вектор-функции $\mathbf{H}(u,z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$
\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t)}{\partial t} = -j\alpha \boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t) + \frac{\partial \mathbf{H}(u,0,t)}{\partial z}\left(e^{ju} \mathbf{A}^*(\alpha) - \mathbf{I}\right), \tag{20}
$$

и начальному условию

$$
\boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,0) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{H}(u,z,0) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{R}(z) = \mathbf{R}^*(\alpha), \tag{21}
$$

где

$$
\int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \frac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z} = e^{j\alpha z} \frac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{\infty} -
$$

$$
-\int_0^{\infty} \frac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z} d_z e^{j\alpha z} = -\frac{\partial \mathbf{H}(u,0,t)}{\partial z} - j\alpha \boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t),
$$

$$
\mathbf{A}^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d\mathbf{A}(z).
$$

Решение $\boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t)$ дифференциально-матричного уравнения (20) имеет вид

$$\boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t)=e^{-j\alpha t}\left\{\mathbf{R}^*(\alpha)+\int_0^t e^{j\alpha\tau}\frac{\partial\mathbf{H}(u,0,\tau)}{\partial z}\left(e^{ju}\mathbf{A}^*(\alpha)-\mathbf{I}\right)d\tau\right\}. \qquad (22)$$

Устремив t в бесконечность в равенстве (22), запишем с одной стороны

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t)=\int_0^\infty e^{j\alpha z}d_z\mathbf{H}(u,z,\infty)=0,$$

с другой стороны имеем

$$0=\mathbf{R}^*(\alpha)+\int_0^\infty e^{j\alpha\tau}\frac{\partial\mathbf{H}(u,0,\tau)}{\partial z}\left(e^{ju}\mathbf{A}^*(\alpha)-\mathbf{I}\right)d\tau.$$

Получим преобразование Фурье по τ от вектор-функции $\dfrac{\partial\mathbf{H}(u,0,\tau)}{\partial z}$

$$\int_0^\infty e^{j\alpha\tau}\frac{\partial\mathbf{H}(u,0,\tau)}{\partial z}d\tau=\mathbf{R}^*(\alpha)\left(\mathbf{I}-e^{ju}\mathbf{A}^*(\alpha)\right)^{-1}.$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, определим

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,0,\tau)}{\partial z}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-j\alpha\tau}\mathbf{R}^*(\alpha)\left(\mathbf{I}-e^{ju}\mathbf{A}^*(\alpha)\right)^{-1}d\alpha.$$

Теперь можно равенство (22) записать в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(u,\alpha,t)=e^{-j\alpha t}\Bigg(\mathbf{R}^*(\alpha)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t e^{j\alpha\tau}\int_{-\infty}^\infty e^{-jy\tau}\mathbf{R}^*(y)\left(\mathbf{I}-e^{ju}\mathbf{A}^*(y)\right)^{-1}dy\left(e^{ju}\mathbf{A}^*(\alpha)-\mathbf{I}\right)d\tau\Bigg). \qquad (23)$$

Зная, что $\mathbf{H}(u,\infty,t)=\mathbf{H}(u,t)=\boldsymbol{\varphi}(u,0,t)$, $\mathbf{R}^*(0)=\kappa_1\mathbf{rA}$, $\mathbf{A}^*(0)=\mathbf{P}$, положим в формуле (23) α = 0, получим выражение для функции $\mathbf{H}(u,t)$

$$\mathbf{H}(u,t)=\kappa_1\mathbf{rA}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_0^t e^{-jy\tau}d\tau\mathbf{R}^*(y)\left(\mathbf{I}-e^{ju}\mathbf{A}^*(y)\right)^{-1}dy\left(e^{ju}\mathbf{P}-\mathbf{I}\right).$$

Найдем отдельно интеграл

$$\int_0^t e^{-jy\tau}d\tau=-\frac{1}{jy}\int_0^t e^{-jy\tau}d(-jy\tau)=-\frac{1}{jy}e^{-jy\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}=-\frac{1}{jy}\left(e^{-jyt}-1\right)=\frac{1}{jy}\left(1-e^{-jyt}\right),$$

тогда

$$\mathbf{H}(u,t)=\kappa_1\mathbf{rA}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-jyt}}{jy}\mathbf{R}^*(y)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)e^{ju}\right)^{-1}dy\left(e^{ju}\mathbf{P}-\mathbf{I}\right), \qquad (24)$$

где функция

$$\mathbf{R}^*(y)=\int_0^{\infty}e^{jyz}d_z\mathbf{R}(z)=\kappa_1 r\int_0^{\infty}e^{jyz}d\int_0^{z}(\mathbf{I}-\mathbf{A}(x))dx=\kappa_1\mathbf{r}\int_0^{\infty}e^{jyz}(\mathbf{I}-\mathbf{A}(z))dz=$$

$$=\frac{\kappa_1\mathbf{r}}{jy}\int_0^{\infty}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}(z)\right)de^{jyz}=\frac{\kappa_1\mathbf{r}}{jy}\left(\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}(z)\right)e^{j\alpha z}\Big|_{z=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{jyz}d\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}(z)\right)\right)=$$

$$=\frac{\kappa_1\mathbf{r}\left(\mathbf{A}^*(y)-\mathbf{I}\right)}{jy}.$$

Подставляя полученное равенство в (24), имеем

$$\mathbf{H}(u,t)=\kappa_1\mathbf{rA}+\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)e^{ju}\right)^{-1}dy\left(e^{ju}\mathbf{P}-\mathbf{I}\right). \quad (25)$$

Обозначим $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t)\mathbf{e}$, тогда

$$h(u,t)=\kappa_1\mathbf{rAe}+\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)e^{ju}\right)^{-1}dy\left(e^{ju}\mathbf{P}-\mathbf{I}\right)\mathbf{e}=$$

$$=1+\frac{\kappa_1\left(e^{ju}-1\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{jyt}}{y^2}\cdot\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)e^{jy}\right)^{-1}\mathbf{e}dy.$$

Зная, что $h(u,t)=\mathbf{H}(u,t)\mathbf{e}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,t)$, и раскладывая в ряд по функциям e^{jun}, полученное выражение можно записать в виде

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{e}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,t)=$$

$$=1+\frac{\kappa_1\left(e^{ju}-1\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)e^{ju}\right)^{-1}dy\mathbf{e}=$$

$$=1+\frac{\kappa_1\left(e^{ju}-1\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}\mathbf{A}^{*n}(y)dy\mathbf{e}=$$

$$=1+\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\sum_{n=1}^{\infty}e^{jun}\mathbf{A}^{*n-1}(y)dy\mathbf{e}-$$

$$-\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}\mathbf{A}^{*n}(y)dy\mathbf{e}=$$

$$=1-\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\mathbf{e}dy+$$

$$+\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\sum_{n=1}^{\infty}e^{jun}\left(\mathbf{A}^{*n-1}(y)-\mathbf{A}^{*n}(y)\right)\mathbf{e}dy=$$

$$=1-\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)\mathbf{e}dy+$$

$$+\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\mathbf{r}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y)\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}e^{jun}\mathbf{A}^{*n-1}(y)\mathbf{e}dy.$$

Теорема доказана.

5. Метод асимптотического анализа полумарковских потоков

В этом разделе будет предложен и применён метод асимптотического анализа для исследования полумарковских потоков.

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания (в теории потоков) будем называть исследование уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы (потока) при выполнении некоторого асимптотического (предельного) условия, вид которого будет конкретизирован для различных моделей и поставленных задач исследования.

Для анализа потоков имеем два класса уравнений: для распределений $P(v, n, z, t)$ и для характеристических функций $H(v, u, z, t)$.

Будем рассматривать уравнения для характеристических функций в асимптотическом условии растущего времени t.

Формализуя асимптотическое условие, определим параметр T, принимающий достаточно большие значения, то есть будем полагать, что в схеме серий $T \to \infty$, положим $t = \tau T$, где τ – переменная, имеющая смысл нормированного времени.

Рассмотрим SM-поток, заданный полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$. Поток будем исследовать при помощи трёхмерного марковского процесса $\{s(t), n(t), z(t)\}$, где $s(t)$ – полумарковский процесс, $n(t)$ – число событий, наступивших в полумарковском потоке за время t, $z(t)$ – остаточное время до наступления следующего события в полумарковском потоке.

Основная для анализа SM-потока задача Коши, имеет вид (12)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathbf{H}(u,0,t)}{\partial z}\left(e^{ju}\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}\right), \\ \mathbf{H}(u,z,0) = \mathbf{R}(z). \end{cases} \tag{26}$$

где $\mathbf{R}(z)$ – вектор-функция стационарного распределения вероятностей значений двумерного случайного процесса $\{s(t), z(t)\}$. Компоненты $H(\nu,u,z,t)$ вектора $\mathbf{H}(u,z,t)$ определены равенством

$$H(\nu,u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(\nu,n,z,t),$$

а $P(\nu,n,z,t)$ – трёхмерное распределение, определяемое равенством

$$P(\nu,n,z,t) = P\{s(t)=\nu, n(t)=n, z(t)<z\},$$

из которого необходимо найти одномерное маргинальное распределение

$$P(n,t) = P\{n(t)=n\} = \sum_{\nu=1}^{K} P(\nu,n,\infty,t). \tag{27}$$

Задачу (26) будем решать в асимптотическом условии растущего времени, формализуя его следующим образом

$$t = \tau T, \qquad T \to \infty.$$

Асимптотика первого порядка

Обозначив $\varepsilon = 1/T$, в задаче (26) выполним замены

$$t\varepsilon = \tau,\ u = \varepsilon w,\ \mathbf{H}(u,z,t) = \mathbf{F}_1(w,z,\tau,\varepsilon), \tag{28}$$

получим

$$
\begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{F}_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \mathbf{F}_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\right), \\
\mathbf{F}_1(w,z,0)=\mathbf{R}(z).
\end{cases}
\tag{29}
$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. При $\varepsilon \to 0$, предельное значение $\mathbf{F}_1(w,z,\tau)$ решения $\mathbf{F}_1(w,z,\tau,\varepsilon)$ задачи (29) имеет вид

$$
\mathbf{F}_1(w,z,\tau)=\mathbf{R}(z)\exp\{jw\kappa_1\tau\}, \tag{30}
$$

где вектор-функция $\mathbf{R}(z)$, параметр κ_1 и матрица $\mathbf{A}$ определены выше равенствами (15) –(17)

$$
\mathbf{R}(z)=\kappa_1\mathbf{r}\int_0^z\left(\mathbf{P}-\mathbf{A}(x)\right)dx,\ \kappa_1=\frac{1}{\mathbf{rAe}},
$$

$$
\mathbf{A}=\int_0^\infty\left(\mathbf{P}-\mathbf{A}(x)\right)dx,
$$

где $\mathbf{P}$ – стохастическая матрица вероятностей переходов цепи Маркова, вложенной по моментам смены состояний полумарковского процесса $s(t)$, $\mathbf{r}$ – стационарное распределение вероятностей значений этой вложенной цепи Маркова.

Доказательство.

Этап 1. В задаче (29) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Получим, что $\mathbf{F}_1(w,z,\tau)$ является решением уравнения

$$
\frac{\partial \mathbf{F}_1(w,z,\tau)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,\tau)}{\partial z}\left(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\right)=0,
$$

Это решение совпадает с решением (16) для $\mathbf{R}(z)$. Поэтому $\mathbf{F}_1(w,z,\tau)$ имеет вид

$$
\mathbf{F}_1(w,z,\tau)=\mathbf{R}(z)\Phi_1(w,\tau), \tag{31}
$$

Скалярную функцию $\Phi_1(w,\tau)$ определим на следующем этапе доказательства.

Этап 2. Для нахождения маргинального распределения (27) выполним предельный переход при $z \to \infty$ и суммирование компонент вектор-функции $\mathbf{F}_1(w,z,\tau,\varepsilon)$ в задаче (29). Получим равенство

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,\infty,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}\mathbf{A}(\infty)-\mathbf{I}\right)\mathbf{e} = \left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\mathbf{e}.$$

Разложив экспоненту в ряд Тейлора, поделив левую и правую части этого равенства на ε и полагая $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(w,\infty,\tau)}{\partial \tau}\mathbf{e} = jw\frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,\tau)}{\partial z}\mathbf{e}.$$

Подставляя сюда произведение (31), для функции $\Phi_1(w,\tau)$ получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(w,\tau)}{\partial \tau} = jw\kappa_1\Phi_1(w,\tau),$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(w,\tau) = \exp\{jw\kappa_1\tau\}.$$

Данное решение удовлетворяет начальному условию $\Phi_1(w,0)=1$, которое следует из начального условия задачи (29) и (31).

Подставляя это решение в (31), получим

$$\mathbf{F}_1(w,z,\tau) = \mathbf{R}(z)\exp\{jw\kappa_1\tau\},$$

что совпадает с выражением (30). **Теорема доказана.**

В силу замены (28) и равенства (30) можно записать следующее равенство

$$h_1(u,t) = \exp\{ju\kappa_1 t\}.$$

Полученную функцию $h_1(u,t)$ будем называть асимптотикой первого порядка для SM-потока. Она является характеристической функцией детерминированной случайной величины. Следовательно, математическое ожидание числа событий, наступивших в потоке за время t, сходится к детерминированной величине $\kappa_1 t$ в асимптотическом условии растущего времени наблюдения за потоком.

Асимптотика второго порядка

В задаче (26) выполним замену

$$\mathbf{H}(u,z,t)=\mathbf{H}_2(u,z,t)\exp\{ju\kappa_1 t\},$$

тогда для $\mathbf{H}_2(u,z,t)$ получим задачу Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathbf{H}_2(u,z,t)}{\partial t}+ju\kappa_1\mathbf{H}_2(u,z,t)=\dfrac{\partial \mathbf{H}_2(u,z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathbf{H}_2(u,0,t)}{\partial z}\left(e^{ju}\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\right),\\ \mathbf{H}_2(u,z,0)=\mathbf{R}(z).\end{cases} \tag{32}$$

Замечание. Вид замены частичных характеристических функций $\mathbf{H}(u,z,t)$ обусловлен центрированием рассматриваемого случайного процесса $n(t)$, то есть

$$\mathbf{H}_2(u,z,t)=\mathbf{H}(u,z,t)e^{-ju\kappa_1 t}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}\mathbf{P}(n,z,t)e^{-ju\kappa_1 t}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju(n-\kappa_1 t)}\mathbf{P}(n,z,t),$$

Где $\kappa_1 t$ – среднее число событий, наступивших в полумарковском потоке за время t, найденное в асимптотике первого порядка, компоненты вектора $\mathbf{P}(n,z,t)$ – распределения вероятностей трёхмерного марковского случайного процесса $\{s(t),n(t),z(t)\}$.

Обозначив $\varepsilon^2=1/T$, в задаче (32) выполним замены

$$t\varepsilon^2=\tau,\ u=\varepsilon w,\ \mathbf{H}_2(u,z,t)=\mathbf{F}_2(w,z,\tau,\varepsilon), \tag{33}$$

получим

$$\begin{cases}\varepsilon^2\dfrac{\partial \mathbf{F}_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial t}+j\varepsilon w\kappa_1\mathbf{F}_2(w,z,\tau,\varepsilon)=\dfrac{\partial \mathbf{F}_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\\ \qquad +\dfrac{\partial \mathbf{F}_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\right),\\ \mathbf{F}_2(w,z,0)=\mathbf{R}(z).\end{cases} \tag{34}$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. При $\varepsilon\to 0$, предельное значение $\mathbf{F}_2(w,z,\tau)$ решения $\mathbf{F}_2(w,z,\tau,\varepsilon)$ задачи (34) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w,z,\tau)=\mathbf{R}(z)\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\tau\right\}, \tag{35}$$

где

$$\kappa_2 = -\kappa_1 + \kappa_1^3 \mathbf{r}\mathbf{A}_2\mathbf{e} - 2\kappa_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{A}\mathbf{e}. \tag{36}$$

Здесь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_2$ – матрицы первых и вторых начальных моментов соответственно, определяемых полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, то есть

$$\mathbf{A} = \int_0^\infty (\mathbf{P} - \mathbf{A}(x))dx = \int_0^\infty x d\mathbf{A}(x),$$

$$\mathbf{A}_2 = \int_0^\infty x^2 d\mathbf{A}(x);$$

$\mathbf{g}_0$ – частное решение неоднородной системы уравнений:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \kappa_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\infty)), \tag{37}$$

удовлетворяющее условию $\mathbf{g}_0\mathbf{e} = 0$.

Доказательство.

Этап 1. В задаче (34) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Получим, что $\mathbf{F}_2(w, z, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, \tau)}{\partial z}(\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}) = 0,$$

которое имеет вид произведения

$$\mathbf{F}_2(w, z, \tau) = \mathbf{R}(z)\Phi_2(w, \tau). \tag{38}$$

Этап 2. Решение $\mathbf{F}_2(w, z, \tau, \varepsilon)$ задачи (34) найдём в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, z, \tau, \varepsilon) = \Phi_2(w, \tau)(\mathbf{R}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}_2(z)) + O(\varepsilon^2). \tag{39}$$

Подставляя разложение (39) в уравнение задачи (34), получим равенство

$$O(\varepsilon^2) + j\varepsilon w \kappa_1 \Phi_2(w, \tau)\mathbf{R}(z) = \Phi_2(w, \tau)\left(\frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z} + j\varepsilon w \frac{\partial \mathbf{f}_2(z)}{\partial z}\right) +$$

$$+ \Phi_2(w, \tau)\left(\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} + j\varepsilon w \frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\right)[(1 + j\varepsilon w)\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] = \Phi_2(w, \tau)\left(\frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + j\varepsilon w \frac{\partial \mathbf{f}_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}(\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}) + j\varepsilon w \frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}(\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}) + j\varepsilon w \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{A}(z)\right).$$

С учётом того, что

$$\frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\big(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\big)=0,$$

выполним несложные преобразования, тогда при $\varepsilon \to 0$ последнее равенство представится в виде уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\big(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\big)+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{A}(z)-\kappa_1\mathbf{R}(z)=0 \qquad (40)$$

относительно неизвестного вектора $\mathbf{f}_2(z)$. Вектор-функцию $\mathbf{f}_2(z)$ запишем в виде

$$\mathbf{f}_2(z)=c_1\mathbf{R}(z)+\mathbf{g}(z), \qquad (41)$$

то есть суммы общего решения $c_1\mathbf{R}(z)$ соответствующей однородной системы уравнений и некоторого частного решения $\mathbf{g}(z)$ исходной неоднородной системы (41), которое удовлетворяет дополнительному условию $\mathbf{g}(\infty)\mathbf{e}=0$.

Этап 3. Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(w,\tau)$, определяющей в (39) вектор-функцию $\mathbf{F}_2(w,z,\tau)$, выполним предельный переход при $z\to\infty$ и суммирование компонент вектор-функций в уравнении задачи (34), получим равенство

$$\varepsilon^2\frac{\partial \mathbf{F}_2(w,\infty,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\mathbf{e}+j\varepsilon w\kappa_1\mathbf{F}_2(w,\infty,\tau,\varepsilon)\mathbf{e}=$$

$$=\frac{\partial \mathbf{F}_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}\mathbf{A}(\infty)-\mathbf{I}\right)\mathbf{e}=\frac{\partial \mathbf{F}_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\left[\left(1+j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\mathbf{Pe}-\mathbf{e}\right]=$$

$$=\left(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\frac{\partial \mathbf{F}_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\mathbf{e}+O(\varepsilon^3).$$

В это равенство подставим разложение (39), запишем

$$\varepsilon^2\frac{\partial \Phi_2(w,\tau)}{\partial \tau}\mathbf{R}(\infty)\mathbf{e}+j\varepsilon w\kappa_1\Phi_2(w,\tau)\big(\mathbf{R}(\infty)\mathbf{e}+j\varepsilon w\mathbf{f}_2(\infty)\mathbf{e}\big)=$$

$$=\Phi_2(w,\tau)\left(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}+j\varepsilon w\frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\right)\mathbf{e}+O(\varepsilon^3)=$$

$$= \Phi_2(w,\tau)\left(j\varepsilon w \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{e} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{e} + (j\varepsilon w)^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\mathbf{e} \right) + O(\varepsilon^3) =$$

$$= \Phi_2(w,\tau)\left(j\varepsilon w \kappa_1 + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\kappa_1 + (j\varepsilon w)^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\mathbf{e} \right) + O(\varepsilon^3).$$

С учётом того, что $\mathbf{R}(\infty)\mathbf{e} = 1$, выполнив несложные преобразования, при $\varepsilon \to 0$ получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi_2(w,\tau)}{\partial \tau} = \Phi_2(w,\tau)\frac{(jw)^2}{2}\left(\kappa_1 + 2\frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\mathbf{e} - 2\kappa_1 \mathbf{f}_2(\infty)\mathbf{e} \right).$$

Решение полученного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_2(w,0) = 1$, которое следует из начального условия задачи (34), имеет вид

$$\Phi_2(w,\tau) = \exp\left\{ \frac{(jw)^2}{2}\kappa_2 \tau \right\}. \qquad (42)$$

в котором значение параметра κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \kappa_1 + 2\left(\frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{f}_2(\infty)\mathbf{e} \right).$$

Тогда

$$\mathbf{F}_2(w,z,\tau) = \mathbf{R}(z)\exp\left\{ \frac{(jw)^2}{2}\kappa_2 \tau \right\},$$

что совпадает с выражением (35).

Этап 4. Определим более точно параметр κ_2.

Воспользуемся уравнением (40) и разложением функции $\mathbf{f}_2(z)$ (41).

$$\kappa_2 = \kappa_1 + 2\left(c_1 \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{g}(0)}{\partial z}\mathbf{e} - \kappa_1 c_1 \mathbf{R}(\infty)\mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{g}(\infty)\mathbf{e} \right) =$$

$$= \kappa_1 + 2\left(c_1\kappa_1 + \frac{\partial \mathbf{g}(0)}{\partial z}\mathbf{e} - \kappa_1 c_1 - \kappa_1 \mathbf{g}(\infty)\mathbf{e} \right) = \kappa_1 + 2\left(\frac{\partial \mathbf{g}(0)}{\partial z}\mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{g}(\infty)\mathbf{e} \right).$$

Поскольку $\mathbf{g}(z)$ является частным решением неоднородного уравнения (40), уравнение относительно $\mathbf{g}(z)$ имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{g}(z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{g}(0)}{\partial z}\big(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\big)+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{A}(z)-\kappa_1\mathbf{R}(z)=0. \qquad (43)$$

Устремим в уравнении (43) $z\to\infty$, получим

$$\frac{\partial\mathbf{g}(0)}{\partial z}\big(\mathbf{P}-\mathbf{I}\big)+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{P}-\kappa_1\mathbf{R}(\infty)=0,$$

учитывая, что $\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}=\kappa_1\mathbf{r}$ и $\mathbf{rP}=\mathbf{r}$, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{g}(0)}{\partial z}\big(\mathbf{P}-\mathbf{I}\big)=\kappa_1\big(\mathbf{R}(\infty)-\mathbf{r}\big).$$

Следовательно, решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{g}(0)}{\partial z}=c_2\mathbf{r}+\mathbf{g}_0,$$

то есть представляется в виде суммы общего решения $c_2\mathbf{r}$ соответствующей однородной системы и некоторого частного решения $\mathbf{g}_0$ неоднородной системы, которое удовлетворяет условию $\mathbf{g}_0\mathbf{e}=0$. Полученное выражение

$$\mathbf{g}_0\big(\mathbf{I}-\mathbf{P}\big)=\kappa_1\big(\mathbf{r}-\mathbf{R}(\infty)\big)$$

совпадает с (37).

Значит,

$$\kappa_2=\kappa_1+2\big(c_2\mathbf{re}+\mathbf{g}_0\mathbf{e}-\kappa_1\mathbf{g}(\infty)\mathbf{e}\big)=\kappa_1+2\big(c_2-\kappa_1\mathbf{g}(\infty)\mathbf{e}\big). \qquad (44)$$

Для уточнения вида $\mathbf{g}(\infty)$ выполним интегрирование (43) по dz и суммирование компонент вектор-функций. Очевидно, что $\mathbf{g}(0)\mathbf{e}=0$ и $\mathbf{Ie}=\mathbf{e}=\mathbf{Pe}$. Тогда

$$\mathbf{g}(\infty)\mathbf{e}=\kappa_1\int_0^\infty\mathbf{R}(z)dz\,\mathbf{e}-\frac{\partial\mathbf{g}(0)}{\partial z}\int_0^\infty\big(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\big)dz\,\mathbf{e}-\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\int_0^\infty\mathbf{A}(z)dz\,\mathbf{e}=$$

$$=\kappa_1\int_0^\infty\mathbf{R}(z)dz\,\mathbf{e}-\kappa_1\mathbf{r}\int_0^\infty\mathbf{A}(z)dz\,\mathbf{e}-\big(c_2\mathbf{r}+\mathbf{g}_0\big)\int_0^\infty\big(\mathbf{A}(z)-\mathbf{P}\big)dz\,\mathbf{e}=$$

$$=\kappa_1\int_0^\infty\big(\mathbf{R}(z)-\mathbf{rA}(z)\big)dz\,\mathbf{e}+\big(c_2\mathbf{r}+\mathbf{g}_0\big)\mathbf{A}\,\mathbf{e}. \qquad (45)$$

Вычислим отдельно значение интеграла $\int_0^\infty (\mathbf{rA}(z)\mathbf{e}-\mathbf{R}(z)\mathbf{e})dz$.

$$\int_0^\infty (\mathbf{rA}(z)\mathbf{e}-\mathbf{R}(z)\mathbf{e})dz=\int_0^\infty (\mathbf{rA}(z)\mathbf{e}-1+1-\mathbf{R}(z)\mathbf{e})dz=-\int_0^\infty (1-\mathbf{rA}(z)\mathbf{e})dz+$$

$$+\int_0^\infty (1-\mathbf{R}(z)\mathbf{e})dz=\int_0^\infty (\mathbf{rPe}-\mathbf{rA}(z)\mathbf{e})dz+(1-\mathbf{R}(z)\mathbf{e})z\Big|_0^\infty-\int_0^\infty zd(1-\mathbf{R}(z)\mathbf{e})=$$

$$=-\mathbf{r}\int_0^\infty (\mathbf{P}-\mathbf{A}(z))dz\,\mathbf{e}+\int_0^\infty z\mathbf{R}'(z)\,dz\,\mathbf{e}=-\mathbf{rAe}+\int_0^\infty \mathbf{R}'(z)\,d\frac{z^2}{2}\mathbf{e}=-\frac{1}{\kappa_1}+\mathbf{R}'(z)\mathbf{e}\frac{z^2}{2}\Big|_0^\infty-$$

$$-\int_0^\infty \frac{z^2}{2}d\mathbf{R}'(z)\mathbf{e}=-\frac{1}{\kappa_1}-\int_0^\infty \frac{z^2}{2}d\left[\mathbf{R}'(0)(\mathbf{I}-\mathbf{A}(z))\mathbf{e}\right]=-\frac{1}{\kappa_1}+\kappa_1\mathbf{r}\int_0^\infty \frac{z^2}{2}d\mathbf{A}(z)\mathbf{e}=-\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{2}\kappa_1\mathbf{rA}_2\mathbf{e}.$$

Подставив последнее выражение в (45), имеем итоговый вид $\mathbf{g}(\infty)\mathbf{e}$

$$\mathbf{g}(\infty)\,\mathbf{e}=\kappa_1\left(\frac{1}{\kappa_1}-\frac{1}{2}\kappa_1\mathbf{rA}_2\mathbf{e}\right)+(c_2\mathbf{r}+\mathbf{g}_0)\mathbf{Ae}=1-\frac{1}{2}\kappa_1^2\mathbf{rA}_2\mathbf{e}+(c_2\mathbf{r}+\mathbf{g}_0)\mathbf{Ae},$$

подставляя который в (44), получаем

$$\kappa_2=\kappa_1+2\left[c_2-\kappa_1\left(1-\frac{1}{2}\kappa_1^2\mathbf{rA}_2\mathbf{e}+c_2\mathbf{rAe}+\mathbf{g}_0\mathbf{Ae}\right)\right]=$$

$$=\kappa_1+2\left(c_2-\kappa_1+\frac{1}{2}\kappa_1^3\mathbf{rA}_2\mathbf{e}-c_2-\kappa_1\mathbf{g}_0\mathbf{Ae}\right)=-\kappa_1+2\left(\frac{1}{2}\kappa_1^3\mathbf{rA}_2\mathbf{e}-\kappa_1\mathbf{g}_0\mathbf{Ae}\right),$$

что совпадает с выражением (36). **Теорема доказана.**

Таким образом, в силу равенства

$$\mathbf{H}(u,z,t)=\mathbf{H}_2(u,z,t)\exp\{ju\kappa_1 t\},$$

замены (33) и равенства (35) можно записать приближенное (асимптотическое) равенство

$$h_2(u,t)=Me^{jun(t)}=\exp\left\{ju\kappa_1 t+\frac{(ju)^2}{2}\kappa_2 t\right\}, \tag{46}$$

где κ_2 и $\mathbf{g}_0$ определены в теореме 2.

Полученное равенство будем называть асимптотикой второго порядка для SM-потока. Она является характеристической функцией гауссовской случайной величины. Следовательно, в асимптотическом условии растущего времени наблюдения за потоком число событий, наступивших в потоке за время t, распределено нормально с параметрами $\kappa_1 t$ и $\sqrt{\kappa_2 t}$, где κ_1 и κ_2 определяются равенствами (16) и (36).

Литература

1. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
2. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
3. Рыков В.В., Козырев Д.В. Основы теории массового обслуживания: М. : ИНФРА-М, 2016. 223 с.
4. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М : ЛИБРОКОМ, 2014. 205 с.

Учебное издание

Анатолий Андреевич НАЗАРОВ, Светлана Владимировна ПАУЛЬ,
Иван Леонидович ЛАПАТИН

ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПОТОКИ

Учебное пособие

Редактор В.Г. Лихачёва
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано в печать 15.09.2022 г. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печ. л. 1,7. Усл. печ. л. 1,6. Гарнитура Times.
Тираж 100 экз. Заказ № 5147.

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Телефоны: 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-907572-21-8

9 785907 572218 >