

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

**Методические указания для выполнения
лабораторных работ**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

**Методические указания для выполнения
лабораторных работ**

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО учебно-методической комиссией
физического факультета ТГУ

Протокол 13/22 от «11» июля 2022 г.

Председатель учебно-методического совета

В.П. Демкин

Физический маятник : методические указания для выполнения лабораторных работ / сост. А.А. Печерицын. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 20 с.

В методическом указании рассматриваются основные характеристики колебательного движения физического и математического маятников. Изложено свойство обратимости точки подвеса и центра качания физического маятника. Описано устройство оборотного маятника. Дается методика измерения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника.

Методические указания предназначены для студентов физических специальностей дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛЬ: *ст. преп. А.А. Печерицын*

РЕЦЕНЗЕНТ: *проф. В.П. Демкин*

© Печерицын А.А., 2022

© Томский государственный университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	5
1.1.	Физический маятник	5
1.2.	Математический маятник	6
1.3.	Обратимость точки подвеса и центра качания	7
2.	МЕТОДИКА ВЫПОЛЕНИЯ РАБОТЫ.....	9
2.1.	Оборотный маятник	9
2.2.	Экспериментальное определение ускорения свободного падения.....	12
3.	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	16
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	16

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Цель работы: изучение колебательного движения, определение ускорения свободного падения с помощью обратного маятника.

Приборы и принадлежности: 1. Обратный маятник. 2. Секундомер.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы: Изучить теоретический материал и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Механические колебания — это повторяющиеся во времени процессы движения около положения ее устойчивого равновесия. Механические колебания широко распространены в природе и играют важную роль в технике.

1.1. Физический маятник

Примером механической колебательной системы является **физический маятник**: твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Пусть эта ось проходит через некоторую точку O , не совпадающую с центром масс тела C (см. рисунок 1). Тогда положение маятника, при котором точка C находится ниже точки O на одной с ней вертикальной линии, будет положением равновесия. В этом положении равнодействующая сил, приложенных к маятнику, и их суммарный момент равны нулю, и он находится в покое.

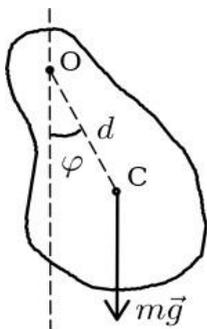


Рис. 1. Физический маятник

Если маятник отклонить так, чтобы угол между прямой OC и вертикалью равнялся φ , то возникает момент силы тяжести относительно оси вращения:

$$M = -mgd \sin \varphi, \quad (1)$$

где m — масса маятника, а d — расстояние от оси вращения до центра масс C . Знак минус в (1) взят потому, что данный момент сил действует в сторону, противоположную отклонению тела, то есть, он возвращает тело в положение равновесия.

При колебаниях тела вокруг закрепленной оси траектории всех его точек будут дугами окружностей с центром в точке O , поэтому для описания таких колебаний следует применять основной закон динамики вращательного движения. Для физического маятника этот закон имеет вид:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgd \sin \varphi, \quad (2)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси вращения.

Если угол отклонения маятника мал, то $\sin \varphi \approx \varphi$, и уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \varphi. \quad (3)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = A \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (4)$$

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I},$$

где A – амплитудное значение угла отклонения, ω – круговая частота колебаний и α_0 – их начальная фаза, которая определяется из начальных условий. Из (4) видно, что угол отклонения зависит от времени по синусоидальному закону. Такие колебания принято называть гармоническими. Период этих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что для физического маятника период колебаний не зависит от амплитуды. Такие колебания называют **изохронными**.

1.2. Математический маятник

Математический маятник – это материальная точка массы m , подвешенная на нерастяжимой и невесомой нити длины l . Это частный случай физического маятника, когда вся масса тела сосредоточена в одной точке C , причем $d = l$, а момент инерции относительно оси

вращения равен $I = ml^2$. Поэтому уравнение колебаний математического маятника можно получить из (3)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi. \quad (6)$$

Это выражение также является уравнением гармонических колебаний и его решение имеет вид (4), однако с циклической частотой

$\omega^2 = \frac{g}{l}$. Отсюда период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7)$$

Очевидно, что эти колебания также изохронны. Кроме того, из сравнения (5) и (7) видно, что период колебаний физического маятника совпадает с периодом математического маятника, длина которого равна

$l_0 = \frac{I}{md}$. Величина l_0 называется **приведенной длиной** физического маятника.

Таким образом, если подвесить на одной оси физический маятник и математический маятник (например, груз малых размеров), длина которого равна приведенной длине физического маятника l_0 , а затем отклонить оба тела на одинаковый угол, то их периоды колебаний будут совпадать. При этом математический маятник будет всегда находиться напротив одной и той же точки физического маятника, которая называется **центром качания**. Более точно, центр качания физического маятника – это точка, находящаяся на расстоянии приведенной длины от оси вращения и лежащая на прямой, проходящей через центр масс.

1.3. Обратимость точки подвеса и центра качания

Так как в выражение (5) для периода колебаний входит g , то ускорение свободного падения можно измерять с помощью маятника. Однако, расчет момента инерции тела произвольной формы не может быть выполнен с достаточной точностью. Кроме того, расстояние d от точки подвеса до центра масс довольно сложно измерить точно. Для устранения этих трудностей используют **свойство обратимости точки**

подвеса и центра качания, которое состоит в следующем. Если перенести точку подвеса маятника в центр качания, то прежняя точка подвеса окажется новым центром качания. Поэтому приведенная длина маятника останется прежней и период его колебаний при таком переносе не изменится.

Для доказательства этого утверждения заметим, что при новом способе подвеса расстояние от оси вращения до центра масс равно

$$d' = l_0 - d,$$

где l_0 и d – прежние приведенная длина и расстояние от точки подвеса до центра масс. Следовательно, для новой приведенной длины l'_0 получим выражение

$$l'_0 = \frac{I'}{md'} = \frac{I'}{m(l_0 - d)}, \quad (8)$$

где I' – момент инерции маятника относительно новой оси вращения. Согласно теореме Штейнера, этот момент связан с моментом инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр масс, следующим образом

$$I' = I_0 + md'^2 = I_0 + m(l_0 - d)^2. \quad (9)$$

Подставив (9) в (8) получим:

$$l'_0 = \frac{I_0}{m(l_0 - d)} + (l_0 - d). \quad (10)$$

С другой стороны, момент инерции I относительно прежней оси вращения, согласно теореме Штейнера, равен

$$I = I_0 + md^2. \quad (11)$$

Используя (11) и выражение для приведенной длины l_0 , выразим момент инерции I_0 через l_0

$$I_0 = md(l_0 - d). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), после несложных преобразований получим, что $l'_0 = l_0$. Таким образом, обратимость точки подвеса и центра качания физического маятника доказана.

2. МЕТОДИКА ВЫПОЛЕНИЯ РАБОТЫ

2.1. Обратный маятник

На свойстве обратимости точки подвеса и центра качания основано использование **оборотного маятника** для измерения ускорения свободного падения. Впервые такой маятник был изготовлен в начале XIX в. английским физиком Г. Кэтером. Маятник Кэтера и его более совершенные модификации (например, маятник Репсолда-Бесселя) были стандартным инструментом измерения силы тяжести до появления гравиметров в середине XX в.

Оборотный маятник, используемый в данной работе, имеет конструкцию, изображенную на рисунке 2. Он представляет собой

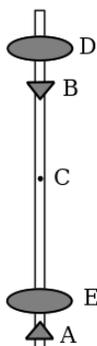


Рис. 2

стальной стержень, длина которого чуть больше метра. На стержне жестко закреплены две стальные призмы *A* и *B*, ребра которых служат точками подвеса маятника. Между призмами закреплена стальная чечевица *E*. Другая стальная чечевица *D* находится на одном из концов стержня (не между призмами). Ее можно передвигать вдоль стержня и закреплять в нужном положении.

Перемещая чечевицу *D*, можно подобрать такое ее положение, при котором периоды колебаний маятника на призмах *A* и *B* совпадают. В этом случае расстояние между призмами является приведенной длиной маятника. Тогда, измерив период колебаний, можно вычислить g по формуле (7). Однако, на практике получить точное совпадение периодов колебаний относительно двух точек подвеса является непростой задачей. Для этого проведем анализ формул, описывающих колебания оборотного маятника.

Пусть маятник подвешен на опорной призме *A*. Обозначим расстояние от точки подвеса (ребро призмы *A*) до центра масс

маятника C (см. рисунок 2) через a . Тогда, согласно (5), период колебаний маятника равен

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mga}}. \quad (13)$$

Пусть теперь маятник подвешен на призме B . Обозначив расстояние от этой призмы до центра масс C через b , получим для периода колебаний маятника выражение

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{mgb}}. \quad (14)$$

В этих выражениях I_A и I_B — моменты инерции маятника относительно осей, проходящих через нижние грани призм A и B , соответственно. Согласно теореме Штейнера, их можно выразить через момент инерции I_C маятника относительно оси, проходящей через центр масс C :

$$I_A = I_C + ma^2, \quad (15)$$

$$I_B = I_C + mb^2. \quad (16)$$

Тогда формула для периодов примут вид:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + ma^2}{mga}}, \quad (17)$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + mb^2}{mgb}}. \quad (18)$$

Отсюда имеем

$$T_A^2 mga = 4\pi^2 I_C + 4\pi^2 ma^2, \quad (19)$$

$$T_B^2 mgb = 4\pi^2 I_C + 4\pi^2 mb^2. \quad (20)$$

Вычитая (20) из (19) получим

$$T_A^2 ga - T_B^2 gb = 4\pi^2 (a^2 - b^2), \quad (21)$$

или

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_A^2 a - T_B^2 b}{a^2 - b^2}. \quad (22)$$

Данное соотношение можно использовать для определения g , поскольку входящие в него величины a и b могут быть измерены. Для этого маятник нужно положить на специальную подставку. На ней имеется острая грань, на которой маятник необходимо уравновесить. При этом точка соприкосновения грани со стержнем совпадает с центром масс маятника. Расстояния от центра масс до нижних граней призм A и B дают величины a и b . Очевидно, что подобная процедура позволяет определить положение центра масс только приближенно. Кроме того, в формулу (22) входит разность квадратов мало отличающихся величин a и b . Все это приводит к значительной ошибке при вычислении.

Получим более удобную для вычисления формулу, воспользовавшись преобразованиями Бесселя для величин T_A^2 и T_B^2 :

$$T_A^2 = \frac{T_A^2 + T_B^2}{2} + \frac{T_A^2 - T_B^2}{2}, \quad (23)$$

$$T_B^2 = \frac{T_A^2 + T_B^2}{2} - \frac{T_A^2 - T_B^2}{2}. \quad (24)$$

Подставив эти выражения в (22), найдем после несложных преобразований

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_A^2 + T_B^2}{2(a+b)} + \frac{T_A^2 - T_B^2}{2(a-b)}. \quad (25)$$

Если периоды колебаний T_A и T_B отличаются незначительно, то вторым слагаемым в выражении (25) можно пренебречь. Заметим также, что сумма величин a и b равна расстоянию L между гранями призм A и B , которое допускает точное измерение. Тогда для ускорения свободного падения получаем формулу:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \quad (26)$$

2.2. Экспериментальное определение ускорения свободного падения

Основная экспериментальная задача состоит в том, чтобы подобрать такое положение чечевицы D , при котором периоды колебаний маятника на призмах A и B оказываются практически одинаковыми. Однако, предварительно нужно убедиться в том, что нужное положение чечевицы D вообще существует при данном положении призм A и B и второй чечевицы E (так как в некоторых конструкциях обратного маятника они также могут перемещаться вдоль стержня). Поэтому предлагается следующий ход работы.

Этап 1. Сначала нужно переместить чечевицу D в самое крайнее положение (вблизи конца стержня) и определить периоды колебаний T_A и T_B на призмах A и B . Для этого маятник подвешивают на соответствующую призму, измеряют время 20 его колебаний и вычисляют период, поделив это время на 20. Затем чечевица D перемещается в другое крайнее положение (вблизи опорной призмы) и аналогичным образом определяются периоды колебаний T'_A и T'_B в прямом и перевернутом положениях маятника.

Следует особо подчеркнуть, что недопустимы колебания маятника с углом отклонения, превышающим 4° .

Очевидно, что если для одного крайнего положения чечевицы $T_A > T_B$, а для другого крайнего положения $T'_A < T'_B$ (или для $T_A < T_B$, а $T'_A > T'_B$), то при каком-то среднем положении чечевицы D эти периоды будут совпадать. Если же такие соотношения для крайних положений чечевицы не выполняются, то необходимо (проконсультироваться с преподавателем) изменить положение чечевицы E и повторить предварительные измерения.

Этап 2. Необходимо найти периоды колебаний маятника при различных положениях чечевицы D на стержне. Для этого чечевицу D фиксируют в одном из крайних положений и измеряют расстояние x от конца стержня до ближайшего края чечевицы в сантиметрах или

делениях шкалы, нанесенной на стержень маятника. Затем маятник подвешивают на призме A , измеряют t_A , за которое он совершает $N = 20$ колебаний и вычисляют период T_A . Определение периода проводят дважды и находят среднее значение $\langle T_A \rangle$. Потом маятник подвешивают перевешивают на призму B и аналогичным образом определяют период колебаний T_B . Затем чечевица перемещается в направлении другого крайнего положения на 5 мм и описанные измерения повторяются. Результаты измерений заносятся в таблицу 1.

Таблица 1

x	№	t_A	N	T_A	$\langle T_A \rangle$	№	t_B	N	T_B	$\langle T_B \rangle$
	1		20			1		20		
	2		20			2		20		
	1		20			1		20		
	2		20			2		20		

Этап 3. Используя полученные значения необходимо на одном графике построить зависимости периодов колебаний T_A и T_B от положения чечевицы. При этом на оси абсцисс откладывается деление шкалы, соответствующее положению чечевицы, а по оси ординат — величину периодов колебаний. Точка пересечения построенных зависимостей определяет положение чечевицы D , при котором значения периодов наиболее близки друг к другу.

Этап 4. Чечевицу D нужно закрепить в найденном положении и определить периоды колебаний T_A и T_B , соответствующие прямому и перевернутому положениям маятника. На данном этапе измерения следует проводить с особой тщательностью. Необходимо измерить время $N = 100$ полных колебаний маятника и вычислить период. Определение каждого периода необходимо выполнить три раза и найти среднее значение. Результаты измерений заносятся в таблицу 2.

Таблица 2

№	t_A	N	T_A	$\langle T_A \rangle$	t_B	N	T_B	$\langle T_B \rangle$
1		100				100		
2		100				100		
3		100				100		

Этап 5. Используя полученные значения периодов нужно вычислить ускорение свободного падения g по формуле (26). полагаем, что $T = (\langle T_A \rangle + \langle T_B \rangle) / 2$. Измерение расстояния между призмами L производится линейкой с точностью до миллиметра.

Этап 6. Необходимо определить погрешность определения ускорения свободного падения. Так как измерение g является косвенным, то для относительной ошибки этого измерения справедлива формула

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}. \quad (27)$$

Измерение расстояния между призмами L производится один раз, поэтому погрешность этого измерения является чисто систематической $\Delta L = \Delta L_{\text{сист}}$. Погрешность определения периода колебаний ΔT складывается из систематической и случайно ошибок согласно выражению

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta T_{\text{сист}})^2 + (\Delta T_{\text{случ}})^2}. \quad (28)$$

Используемая методика основана на предположении, что периоды колебаний T_A и T_B практически одинаковы. Поэтому случайная ошибка вычисляется по формуле Стьюдента:

$$\Delta T_{\text{случ}} = t_{n,\alpha} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_i - T)^2}, \quad (29)$$

в которой $T = (\langle T_A \rangle + \langle T_B \rangle) / 2$ под T_i понимаются измеренные величины периодов T_A и T_B из таблицы 2. Следовательно, количество измерений $n = 6$. Величина $t_{n,\alpha}$ – коэффициент Стьюдента.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое механические колебания?
2. Дайте определение физического и математического маятников.
3. Физический маятник, изображенный на рис. 1, будет находиться в равновесии, если его центр тяжести C окажется выше точки подвеса O на одной с ней вертикали. Будет ли он совершать колебания, если его вывести из этого положения?
4. Исходя из определения момента силы, покажите, что момент силы тяжести определяется выражением (1).
5. Что такое приведенная длина и центр качания физического маятника?
6. Покажите, что приведенная длина физического маятника l_0 всегда больше расстояния d от точки его подвеса до центра масс. *Указание: воспользуйтесь теоремой Штейнера для момента инерции маятника относительно оси вращения (см. (11)) и определением величины l_0 .*
7. На чем основана идея использования обратного маятника для измерения ускорения свободного падения?
8. Опишите устройство обратного маятника, используемого в данной работе.
9. Объясните, почему нельзя вычислить ускорение свободного падения из выражений (13) или (14), измерив период колебаний маятника, подвешенного на соответствующей призме?
10. Опишите процедуру определения ускорения свободного падения с помощью используемого в данной работе обратного маятника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. I. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. 560 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. СПб: Лань, 2022. 436 с.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Момент силы относительно точки O - это векторная величина \vec{M} , равная векторному произведению радиус-вектора \vec{r} , произведенного из точки O к точке приложения силы, на вектор силы \vec{F} (см. рисунок 3):

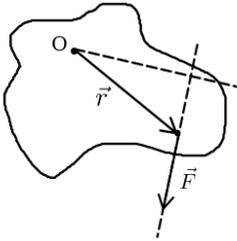


Рис. 3. Момент силы

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (\text{A.1})$$

Если тело способно вращаться вокруг точки O произвольным образом, то под действием момента \vec{M} оно будет вращаться вокруг оси, проходящей через эту точку, параллельной вектору \vec{M} . Таким образом, момент силы является вращательного движения тел, также как сила является причиной поступательного движения.

Если тело может вращаться вокруг неподвижной оси, то для описания его движения удобно использовать другую величину – **момент силы относительно оси вращения**, который определяется как проекция на эту ось вектора момента силы относительно некоторой точки O , лежащей на той же оси. Отметим, что точка O может быть выбрана произвольно, так как сдвиг этой точки вдоль оси не изменяет проекцию момента силы на ось (это можно показать, используя определенные определение момента силы (A.1)). Заметим также, что если силы параллельна оси вращения, то момент этой силы относительно данной оси равен нулю.

Существует еще два полезных понятия. Прямая, на которой лежит вектор силы называется **линией действия силы**. **Плечо силы относительно оси** – это кратчайшее расстояние от данной оси до линии действия силы. Тогда момент силы относительно оси определяется как произведение перпендикулярной к оси

компоненты силы на плечо силы относительно той же оси. Знак момента силы можно найти, используя следующее правило: момент силы положителен, если под его действием тело вращается против часовой стрелки. Такое определение момента силы дается в элементарной физике.

В общем случае описание вращательного движения тела представляет собой довольно сложную задачу. Однако эта задача упрощается, если предположить, что тело является абсолютно твердым (т.е. расстояние между любыми двумя его точками не изменяется при движении) и вращается вокруг неподвижной оси. Тогда его движение тела подчиняется **основному закону динамики вращательного движения**

$$I\beta = M, \quad (\text{A.2})$$

где I - момент инерции тела (см. ниже), β - угловое ускорение тела, M - суммарный момент сил, действующих на тело, относительно оси вращения. Положение тела можно задавать углом поворота φ вокруг оси вращения, отсчитывая его от некоторого направления. Тогда угловое ускорение есть вторая производная от φ и выражение (A.3) принимает вид:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M. \quad (\text{A.3})$$

Момент инерции тела относительно некоторой оси – это физическая величина, определяющая инерционные свойства тела при вращательном движении, подобно тому, как масса определяет эти свойства при поступательном движении. Для материальной точки массы m , находящейся на расстоянии r от оси он равен:

$$I = mr^2. \quad (\text{A.4})$$

Чтобы вычислить момент инерции тела конечных размеров, нужно мысленно разбить его на множество элементов, достаточно малых, чтобы их можно было считать материальными точками. Если плотность вещества данного элемента равна ρ (плотность может быть разной в разных точках тела), его объем dV , а расстояние от оси r , то момент инерции элемента согласно (A.4) есть $dI = r^2\rho dV$. Суммируя по всем элементам, получаем формулу для момента инерции всего тела:

$$I = \int_V r^2 \rho dV, \quad (\text{A.5})$$

где интегрирование ведется по всему объему тела.

Из определения видно, что для одного и того же тела моменты инерции относительно разных осей будут различными. Однако, вычисление моментов инерции значительно облегчает **теорема Штейнера**. Она формулируется следующим образом: момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела I_0 относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, а также произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_0 + ma^2. \quad (\text{A.6})$$

Фактически, теорема Штейнера сводит вычисление момента инерции тела к вычислению его момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Издание подготовлено в авторской редакции

Подписано в печать 25.07.2022 г.

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 529-849.

E-mail: rio.tsu@mail.ru

Заказ № 5103 от «25» июля 2022 г. Тираж 30 экз.

